

**Министерство науки и высшего образования РФ  
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»  
Институт экономики и бизнеса  
Кафедра цифровой экономики**

**Горбунов Владимир Константинович**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
для самостоятельной работы студентов  
по дисциплине**

**Экономико-математические модели  
для студентов УГСН «38.03.05 Бизнес информатика»**

Ульяновск  
2018

Данные методические рекомендации предназначены для студентов УГСН 38.03.05 «Бизнес информатика». В работе приведены: темы дисциплины и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля, задачи и упражнения для самостоятельной работы, литература по дисциплине.

Студентам заочной, очно-заочной и очной форм обучения следует использовать данные методические рекомендации при подготовке к семинарам, самостоятельной подготовке, а также к экзамену по дисциплине «Экономико-математические модели».

Рекомендованы к введению в образовательный процесс

Ученым советом Института экономики и бизнеса УлГУ

протокол № 213/09 от «24» мая 2018 г.

## Содержание

<b>1. Введение: общие сведения и рекомендации</b> .....	4
1.1. Цели и задачи освоения дисциплины .....	4
1.2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО .....	4
1.3. Требования к результатам освоения дисциплины .....	5
1.4. Общая трудоемкость дисциплины .....	5
1.5. Образовательные технологии .....	6
1.6. Контроль успеваемости .....	6
<b>2. Рекомендации по темам дисциплины</b> .....	7
2.1. Рыночный спрос. Характеристики спроса. ....	7
2.3. Однородные функции. Однородность спроса. ....	8
2.4. Предельная норма замещения. Эластичность замещения. ....	8
2.5. Парадокс агрегирования покупателей* .....	9
2.6. Предпочтения. Максимизация порядковой функции полезности .....	9
2.7. Регулярная задача МФП. Теорема Лагранжа .....	9
2.8. Минимизация расходов. Компенсированный спрос. ....	10
2.9. Регулярная задача МПР. Теорема взаимности .....	12
2.10. Матрица замещения. Лемма Шепарда. Уравнение и матрица Слуцкого .....	12
2.11. Непараметрический метод. Теорема Африата .....	12
2.12. Теорема Африата для однородных предпочтений. ....	13
2.13. Статистические индексы рыночного спроса .....	13
2.14. Аналитические индексы спроса. ....	14
2.15. Производственные функции .....	15
2.16. Рациональное производство. Максимизация прибыли .....	15
2.17. Минимизация издержек .....	15
<b>Список рекомендуемой литературы</b> .....	16

## 1. Введение: общие сведения и рекомендации

### 1.1. Цели и задачи освоения дисциплины

Дисциплина «Экономико-математические модели» в данном варианте представляет два базовых раздела экономики – теорию и приложения рыночного спроса, и теорию производства, основанную на методе производственных функций. Особенностью дисциплины является изложение теории коллективного рыночного спроса, в то время как учебная и научная литература других авторов излагает и развивает только теорию индивидуального потребителя. Это позволяет изложить основы теории аналитических индексов рыночного спроса (называемых обычно экономическими индексами).

**Цели дисциплины:** *получение студентами знаний о методах математического моделирования потребительского спроса на многопродуктовых рынках, построении индексов спроса, а также моделирования производственных отраслей и секторов региональных и национальных экономик.*

#### **Задачи дисциплины:**

- изучение теории потребительского рыночного спроса;
- изучение методов агрегирования экономической информации (построения экономических индексов);
- изучение теории производственных функций и моделей рационального производства.

В результате изучения курса студенты должны знать неоклассическую теорию потребительского спроса, отнесённую к совокупному (рыночному) спросу, методы построения коллективных функций полезности, аналитических (экономических) индексов спроса, а также теорию производства, основанную на моделях производственных функций.

### 1.2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Экономико-математические методы и модели» принадлежит вариативной части ФГОС ВО, индекс Б1.В.ОД.5, по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика», профиль «Цифровая экономика», и является обязательной дисциплиной. Дисциплина читается студентам бакалавриата на третьем курсе обучения. Она основана на дисциплинах «Математические методы в экономике» и «экономическая теория», а также включенных в программу дисциплины дополнительных разделов математического анализа и линейной алгебры.

Изучение курса «Экономико-математические модели» формирует компетенции ПК-17 – "способность использовать основные методы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности для

теоретического и экспериментального исследования" и ПК-18, – "способность использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования". Эти компетенции необходимы для участия в аналитической и исследовательской работе, а также для продолжения образования в магистратуре.

### 1.3. Требования к результатам освоения дисциплины

Компетенции ПК-17 и ПК-18 в контексте дисциплины позволят студентам:

#### ***Иметь представление:***

- о математическом моделировании;
- о прикладном значении применения задач теории рыночного потребительского спроса и метода производственных функций.

#### ***Знать:***

- основные модели рыночного потребительского спроса, построения аналитических индексов и функциональные модели производства (метод производственных функций).

#### ***Уметь:***

- решать задачи построения функций рыночного спроса и предложения производства как аналитически (в простых случаях), так и численно с использованием компьютерных математических программ;
- применять современные компьютерные технологии при решении задач.

#### ***Приобрести навыки:***

- аналитического и численного решения задач теории рыночного спроса, построения индексов спроса, анализа производственных секторов и отраслей методом производственных функций.

#### ***Владеть, иметь опыт:***

- проводить самостоятельные исследования в соответствии с разработанной программой.

### 1.4. Общая трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единицы, каждая единица требует 36 часов, т. е. всего в учебном плане выделено 288 часов. В том числе на самостоятельную работу обучающихся 150 часов.

## 1.5. Образовательные технологии

В ходе освоения дисциплины при проведении аудиторных занятий используются классические образовательные технологии: лекции и семинарские занятия.

При организации самостоятельной работы занятий используются следующие образовательные технологии:

- выполнение заданий по решению учебных задач;
- работа со специализированной литературой и электронными ресурсами.

## 1.6. Контроль успеваемости

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды текущего контроля:

- решение задач на классной доске;
- контрольные работы.

Текущий контроль успеваемости и промежуточная аттестация в рамках дисциплины проводятся с целью определения степени освоения обучающимися образовательной программы.

По данной дисциплине предусмотрена форма отчетности: зачёт и экзамен.

## 2. Рекомендации по темам дисциплины

В подразделах данного раздела используются ссылки на основные учебные пособия:

В пунктах 2.1 – 2.7 (темы осеннего семестра) даны ссылки на учебное пособие автора «Математическое моделирование рыночного спроса». Изд-во «Лань», СПб, 2018. (ММРС).

В пунктах 2.8 – 2.17 (темы весеннего семестра) даны ссылки на

- 1) Курс лекций автора «Экономико-математические методы и модели». Изд-во УлГУ, 2020 (ЭМММ);
- 2) Учебное пособие автора «Производственные функции: теория и построение. Изд-во УлГУ, 2013 (ПФ).

### 2.1. Рыночный спрос. Характеристики спроса.

#### Основные понятия и факты. ММРС 1.5-1.7.

2.1.1. *Рыночный спрос как априорный объект теории*: спецификация, определение 1.1, торговая статистика, Закон Спроса, эффект Гиффена, экономическое замещение, функции спроса и их основные свойства, адекватность теории спроса фактам; примеры функций спроса Энгеля-Торнквиста, Гиффена.

*Статистический ансамбль потребителей как нечёткое множество потребителей рынка*: определения 1.2 и 1.3.

2.1.2. *Основные характеристики функций спроса*: Ценные и малоценные блага, условия агрегации Энгеля и Курно. Однородный спрос.

2.1.3. *Эластичности спроса*. Определение 1.9. Эластичность степенной функции.

**Задачи.** Исследовать вогнутость и возрастание функции полезности:

а)  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ ;    б)  $(x_1 - c_1)^{\alpha_1} (x_2 - c_2)^{\alpha_2} (x_3 - c_3)^{\alpha_3}$ ;

в)  $a\sqrt{x_1} + \ln(1 + bx_2)$ ;    г)  $\sqrt{x_1 x_2} / (x_1 + 1/2)$ .

д) Модель спроса Гиффена.

е) Факторные эластичности функций:

$$x_1^{1/2} (x_2 + \beta x_1)^{1/3}; \quad A(\nu x_1^{-\rho} + (1-\nu)x_2^{-\rho})^{-\mu/\rho}.$$

## 2.2. Функция полезности. Законы Госсена. Система Госсена-Вальраса.

### Основные понятия и факты. ММРС 2.1.

*Функция полезности. Первый и Второй Законы Госсена.* Свойства неоклассической функции полезности и их алгебраические характеристики. Вогнутые и квазивогнутые функции. Алгебраическая определённость матриц и критерий Сильвестра.

*Система равновесия Госсена-Вальраса.* Эквивалентные функции полезности.

**Задачи.** Построить функции спроса для функций полезности

а)  $(x_1 - c_1)^{\alpha_1} (x_2 - c_2)^{\alpha_2} (x_3 - c_3)^{\alpha_3}$ ;      б)  $\sqrt{x_1 x_2} / (x_1 + 1/2)$ ;

в)  $a\sqrt{x_1} + \ln(1 + bx_2)$ ;      г)  $x_1 + ax_2^2$ .

Указание. Общее решение для функций а) и б) представлено в п. 2.5.

## 2.3. Однородные функции. Однородность спроса.

### Основные понятия и факты. ММРС 2.3.

*Определение однородности и теорема Эйлера.* Однородность функций спроса и эластичности. Класс вогнутых линейно однородных функций.

**Задачи.** Исследовать вогнутость, возрастание и однородность функций полезности

а)  $x_1^{1/2} (x_2 + \beta x_1)^{1/3}$ ;      б)  $A(\nu x_1^{-\rho} + (1-\nu)x_2^{-\rho})^{-\mu/\rho}$ ;

в)  $u(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - c_i)^{\alpha_i}$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ,  $\alpha_i > 0$

## 2.4. Предельная норма замещения. Эластичность замещения.

### Основные понятия и факты. ММРС 2.6.

*Безразличие, функция предпочтения, замещение.* Предельная норма замещения. Закон Хикса. Система Хикса – Вальраса. Эластичность замещения. Функция ПЭЗ.

**Задачи.** Вычислить ПНЗ и эластичность замещения

а)  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ ;      б)  $A(\nu x_1^{-\rho} + (1-\nu)x_2^{-\rho})^{-\mu/\rho}$ ;

в)  $x_1^{1/2} (x_2 + \beta x_1)^{1/3}$ ;      г)  $(x_1 + \beta x_2)^{1/2} x_2^{1/3}$ .



## 2.5. Парадокс агрегирования покупателей\*.

### Основные понятия и факты. ММРС 1.8.

Проблема применения одинаковой модели потребительского спроса к индивидуальному и рыночному (коллективному) спросу. Необходимое и достаточное условие агрегирования спроса (утверждение 1.3).

**Задачи.** Проверить агрегируемость функций спроса:

$$1) x_i^1(p, e) = \frac{\alpha_i^1}{p_i} e_1, i = 1, 2; \text{ и } x_i^2(p, e) = \frac{\alpha_i^2}{p_i} e_2, i = 1, 2.$$

$$2) x_i^1(p, e) = \frac{\alpha_i e_1}{\alpha_i p_i + p_i^\sigma \alpha_k p_k^{1-\sigma}}, \quad i, k = 1, 2; k \neq i.$$

## 2.6. Предпочтения. Максимизация порядковой функции полезности

### Основные понятия и факты. ММРС 3.1.

Бинарное отношение предпочтения. Свойства БОП. Функция предпочтения. Множества предпочтения, строгого предпочтения, эквивалентности. Задача максимизации функции предпочтения. Основные свойства соответствия спроса (однородность и условие граничности). Косвенная функция предпочтения. Основные свойства.

**Задачи.** 1) Функции спроса для функции полезности:

$$а) A(vx_1^{-\rho} + (1-v)x_2^{-\rho})^{-\mu/\rho}; \quad б) x_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i x_i^{\alpha_i}; \quad в) \sqrt{x_1 x_2} / (x_1 + 1/2).$$

2) Построить КФП для функции Кобба-Дугласа.

## 2.7. Регулярная задача МФП. Теорема Лагранжа.

### Основные понятия и факты. ММРС 3.3.

Характеристическая система Лагранжа. Смысл множителя. Условия агрегации Энгеля и Курно. Тождество Роя. Задача МФП с однородной функцией предпочтения.

**Задачи.** Вычислить спрос – точку  $(x_1^*, x_2^*)$ , и в этой точке градиент ФП и множитель Лагранжа:

$$а) u = (x_1 - 1)^{1/2} (x_2 - 0.5)^{1/3}, \quad p = (1, 2), \quad e = 4;$$

$$б) u = (1 + x_1)x_2, \quad p = (2, 3), \quad e = 3;$$

$$в) u = (1 + 4x_1)^{1/2} (1 + 6x_2)^{2/3}, \quad p = (2, 1), \quad e = 3.$$

## 2.8. Минимизация расходов. Компенсированный спрос

**Основные понятия и факты.** ЭМММ 4.1-4.2.

Задача минимизации потребительских расходов:

$$(1) \quad e(p, w) = \min \left\{ \langle p, x \rangle : u(x) \geq w, x \geq 0 \right\}.$$

В регулярном случае решение задачи определяется *системой Госсена-Хикса*:

$$(2) \quad \begin{cases} p_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = p_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, & i = \overline{2, n}; \\ u(x) = w. \end{cases}$$

Решение задачи – *компенсированный спрос Хикса*  $h(p, w)$ . При этом *функция потребительских расходов*.

$$(3) \quad e(p, w) = \langle p, h(p, w) \rangle.$$

Основные свойства компенсированного спроса и функции потребительских расходов.

**Примеры построения.** 1) Построим функции компенсированного спроса для функции Кобба-Дугласа

$$(4) \quad u(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0.$$

Данный пример решен в п. 4.3.1 книги ММРС:

$$(5) \quad h_k(p, w) = \frac{\alpha_k}{p_k} \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} w, \quad k = \overline{1, n};$$

$$(6) \quad e(p, w) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} w.$$

**Задача.** Вывести формулы компенсированного спроса и функции расходов для ФП

$$(4) \quad u(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - c_i)^{\alpha_i}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0.$$

**Решим** эту задачу, используя решение (5) для более простой (частный случай) функции (4). Вычислим частные производные функции (5):

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i - c_i} u(x).$$

Подставив это в уравнения Госсена из (2), после очевидного упрощения получим систему уравнений

$$(8) \quad p_1 \alpha_i (x_1 - c_1) = p_i \alpha_1 (x_i - c_i), \quad i = \overline{2, n}.$$

Систему (8) следует решать совместно с уравнением изокванты  $u(x) = w$ . Учитывая структуру функции (7), удобно ввести новую переменную

$$(9) \quad y_i = x_i - c_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Подстановка (9) преобразует функцию Джири (7) в функцию

$$(10) \quad \bar{u}(y) \triangleq u(y + c) = \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha_i},$$

которая является функцией Кобба-Дугласа, и система уравнений (8) принимает вид

$$(11) \quad p_1 \alpha_i y_1 = p_i \alpha_1 y_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

Таким образом, задача построения функции компенсированного спроса в переменных (9) повторяет формально решённую задачу для функции КД (4). Действуя аналогично, выражаем из (11)

$$y_i = \frac{p_1 \alpha_i}{p_i \alpha_1} y_1.$$

Повторяя выкладки п. 4.3.1, получаем спрос Хикса (4.30) для переменной (9) и функции полезности (10)

$$\bar{h}_k(p, w) = \frac{\alpha_k}{p_k} \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} w, \quad k = \overline{1, n}.$$

Этот спрос в силу (9) связан со спросом Хикса для исходной переменной  $x$ , т.е. с  $h_k(p, w)$  равенством  $\bar{h}_k(p, w) = h_k(p, w) - c_k$ . Соответственно, искомый спрос в пространстве переменных  $x$  будет

$$(12) \quad h_k(p, w) = \frac{\alpha_k}{p_k} \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} w + c_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Соответствующая функция расходов

$$(13) \quad e(p, w) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} w + \sum_{k=1}^n p_k c_k.$$

**Упражнение 1.** Проверить (показать, используя соответствующие определения и критерии) выполнение свойств функции расходов (Утверждение 4.2) для функции (13).

*Указание:* повторить раздел «Выпуклые множества и функции» из хорошего учебника (для прикладной математики) «Методы оптимизации». В библиотеке ИЭБ есть Горбунов В.К. Введение в теорию экстремума. УлГУ, 1999.

**Упражнение 2.** Выписать компоненты спроса Хикса (12) для  $n=2$  и 3.

*Указание:* для  $n=2$  спрос (12)

$$h_1(p, w) = \left( \frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^{\alpha_2} w + c_1, \quad h_2(p, w) = \left( \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right)^{\alpha_1} w + c_2.$$

## 2.9. Регулярная задача МПР. Теорема взаимности

**Основные понятия и факты.** ЭМММ 4.3-4.4.

Характеристическая система регулярной задачи МПР. Множитель Лагранжа. Теорема взаимности.

**Задача.** Проверить соотношения взаимности для функции Кобба-Дугласа.

## 2.10. Матрица замещения. Лемма Шепарда. Уравнение и матрица Слуцкого

**Основные понятия и факты.** ЭМММ 4.5-4.6.

Монотонность компенсированного спроса. Матрица замещения и её свойства. Блага дополняющие и замещающие.

**Задачи.**

- 1) Построить матрицы замещения для компенсированного спроса Джири при  $n=2$  и  $n=3$ . Проверить свойство отрицательной полуопределённости матриц и равенство  $H(p, w)p^T = 0$ .
- 2) Доказать, что ценовые вариации однородного рыночного спроса  $x(p, e) = x(p)e$  симметричны.
- 3) Вычислить матрицы Слуцкого для спроса:
  - а) Джири при  $n=3$ . Исследовать свойства замещения-дополнения пар (1, 2), (1, 3) и (2, 3) в зависимости от параметров функций;
  - б) Гиффена

$$x_1(p, e) = \frac{e - 10p_2}{p_1 - 2.5p_2}, \quad x_2(p, e) = \frac{10p_1 - 2.5e}{p_1 - 2.5p_2};$$

в) линейного

$$x_i(p, e) = \sum_{k=1}^3 a_{ik} p_k + b_i e, \quad i = 1, 2, 3.$$

## 2.11. Непараметрический метод. Теорема Африата.

**Основные понятия и факты.** ЭМММ 5.2. Рационализируемость статистических данных. Теорема Африата. Неравенства Африата. Функция

полезности Африата. Дифференцируемый случай. Редуцированная система Африата.

**Задача.** Составить общую систему неравенств Африата для торговой статистики

t	p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
0	1	10	2	5
1	1	20	3	4
2	1.5	20	3	4

## 2.12. Теорема Африата для однородных предпочтений.

**Основные понятия и факты.** ЭМММ 5.3.

Неравенства Африата для однородных предпочтений. Условие однородности для чисел Африата. Лямбда-система. Редуцированная система. Оценки значений чисел Африата.

**Задача.** Составить лямбда- систему неравенств Африата для торговой статистики

t	p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
0	1	10	2	5
1	1	20	3	4
2	1.5	20	3	4

## 2.13. Статистические индексы рыночного спроса.

**Основные понятия и факты.** ЭМММ 6.1-6.3

Проблема агрегирования экономической информации. Покупательная способность денег и потребительская корзина. Субъективность оценок. Индекс потребительских цен (ИПЦ). Понятие индексов цен и количеств потребления. Основные бинарные индексы (Ласпейреса, Пааше, Фишера). Эффект Гершенкрона. Тесты Фишера.

**Задачи.**

1) Для статистики

Продукт	s=1990		t=1995		$\frac{p^t}{p^s}$
	$x^s$	$p^s$	$x^t$	$p^t$	
Мясо	59	3.5	47.2	12000	3428
Картофель	100	0.2	115	2000	10000

вычислить индексы Ласпейреса и Пааше. Дать экономическую интерпретацию (эффекты Гиффена и Гершенкрона).

3) Для статистики

t	$p_1$	$p_2$	$x_1$	$x_2$
0	1.5	1	2	5
1	1	2	3	4
2	1.5	2	3	6

вычислить индексы Ласпейреса, Пааше и Фишера. Проверить тесты стоимости, обратимости и транзитивности.

**Указание.** Для сокращения вычислений построить матрицу перекрёстных стоимостей  $e_{st} = \langle p^s, x^t \rangle$ .

## 2.14. Аналитические индексы спроса.

### Основные понятия и факты. ЭМММ 6.4-6.3

Индекс Конюса. Общие аналитические индексы. Их свойства. Индексы Конюса-Ласпейреса, Конюса-Пааше и Конюса-Фишера. Основные свойства и оценки значений. Инвариантные индексы.

**Задачи.** Для спроса Кобба-Дугласа, функция полезности  $u(x) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ ,

$$x_1(p, e) = \frac{\alpha}{p_1} e, \quad x_2(p, e) = \frac{1-\alpha}{p_2} e, \quad \lambda = \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} : p_1 ;$$

1) заполнить пустые ячейки в таблице для  $\alpha = 1/3$ :

1	$p_1^t$	$p_2^t$	$x_1^t$	$x_2^t$	$e_t$	$e_{0t}$	$e_{t0}$	$u_t$	$\lambda_t$
0	1.5	1.0	1.78	5.33	8.0	8.00		3.70	0.46
1	1.0	2.0	3.67	3.67					0.33
2	1.5	2.0	3.67	5.50	16.5	11.00	13.33	4.80	0.29

2) вычислить недостающие индексы Пааше, Ласпейреса, Фишера, инвариантные:

t	Индексы цен				Индексы количеств			
	$P_{0t}^P$	$P_{0t}^L$	$P_{0t}^F$	$P_{0t}$	$Q_{0t}^P$	$Q_{0t}^L$	$Q_{0t}^F$	$Q_{0t}$
0				1				1
1	1.20	1.56	1.366	1.387	0.884	1.146	1.006	0.992
2								

## 2.15. Производственные функции

### Основные понятия и факты.

Понятие производственной функции (ПФ). Двухфакторные ПФ. Отдача от масштаба. Функция Кобба-Дугласа (Викселля). Абсолютная и индексная формы. Основные характеристики: средние и предельные производительности, факторные эластичности, предельная норма замещения факторов, эластичность замещения факторов.

**Задачи.** Вычислить эластичности производственных функций:

а)  $a\sqrt{x_1} + \ln(1 + bx_2)$ ;      б)  $(1 + 4x_1)^{1/2} (1 + 6x_2)^{2/3}$ ;

в)  $A(x_1 + 0.5x_2)^{1/2} x_2$ ;      г)  $x_1^{1/2} (x_2 + \beta x_1)^{1/3}$ .

## 2.16. Рациональное производство. Максимизация прибыли.

### Основные понятия и факты.

Задача максимизации прибыли. Условия экстремума. Функции факторного спроса и предложения выпуска. Функция прибыли. Лемма Хотеллинга.

**Задачи.** Построить функции факторного спроса и предложения для ПФ

1)  $q = A(vK^{-\rho} + (1-v)L^{-\rho})^{-\mu/\rho}$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $0 < v < 1$ ,  $-1 \leq \rho \neq 0$ ;

2)  $q = A(K - K^*)^\alpha (L - L^*)^\beta$ ,  $0 < \alpha + \beta < 1$ ;

3)  $q = a\sqrt{K^2 + bL}$  (функция Солоу).

## 2.17. Минимизация издержек

### Основные понятия и факты.

Задача минимизации издержек. Функция издержек. Условия экстремума. Функции условного факторного спроса и их свойства  $c(v, q)$ . Лемма Шепарда.

**Задачи.** Построить функции условного факторного спроса и функцию издержек для ПФ

1)  $q = A(vK^{-\rho} + (1-v)L^{-\rho})^{-\mu/\rho}$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $0 < v$ ,  $-1 \leq \rho \neq 0$ ;

2)  $q = A(K - K^*)^\alpha (L - L^*)^\beta$ ,  $0 < \alpha + \beta < 1$ ;

3)  $q = a\sqrt{K^2 + bL}$ .

## Список рекомендуемой литературы.

### Основная:

1. ГОРБУНОВ В.К. Математическое моделирование рыночного спроса: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Изд-во «Лань», 2018. – 212 с.
2. ГОРБУНОВ В.К. Производственные функции: теория и построение: Учебное пособие. – Ульяновск: УлГУ, 2013.

### Дополнительная

3. ГОРБУНОВ В.К. Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения – Ульяновск: УлГУ, 2015. (Проект РФФИ № 15-06-07018).
4. ГОРБУНОВ В.К. К теории рыночного спроса: регулярность и экономическое равновесие // Экономическая наука современной России. 2013, №4 (63).
5. ГОРБУНОВ В.К. О размерностной проблеме в экономике: производственная функция как «псевдо-чёрный ящик» // Журнал Экономической Теории. 2014. №1.
6. ГОРБУНОВ В.К., ЛЬВОВ А.Г. (2012): Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы. – № 2.
7. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика. 1986. – 238 с. URL: <https://istina.msu.ru/publications/book/12170900/>.
8. ЧЕРЕМНЫХ Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2008. URL: <http://padaread.com/?book=78124&pg=1> [Доступ для чтения].
9. ПОЛТЕРОВИЧ В.М. Кризис экономической теории // Экономическая наука современной России. 1998. № 1. URL: [http://mathecon.cemi.rssi.ru/vm\\_polterovich/files/Crisis\\_Economic\\_Theory.pdf](http://mathecon.cemi.rssi.ru/vm_polterovich/files/Crisis_Economic_Theory.pdf) URL: [Открытый доступ].
10. KIRMAN A. The Economic Crisis is a Crisis for Economic Theory // CESifo Economic Studies, 2010. V. 56 (4), 498-535. URL: <http://www.umass.edu/preferen/You%20Must%20Read%20This/Kirman%202010%20Economic%20Crisis.pdf> [Открытый доступ].