Кафедра цифровой экономики

Приложение к рабочей программе

Лабораторный практикум по дисциплине

Теория игр

Методические указания
к лабораторным работам для студентов
направления подготовки:
38.03.05 «Бизнес-информатика» (степень – бакалавр)
профиль «Цифровая экономика»

Сведения о разработчиках:

ФИО	Кафедра	Должность, ученая степень, звание
Мартыненко Ю.В.	Цифровой экономики	Доцент, к.ф.-м.н.

Ульяновск
2019

Лабораторная работа – это аудиторное занятие в рамках изучаемой дисциплины, которое проводится с применением современных информационных технологий и предполагает в значительной степени самостоятельное выполнение обучающимся задания, направленного на закрепление и углубление знаний, полученных на лекционных и/или семинарских занятиях.

Каждая лабораторная работа имеет свою цель и результат, который должен быть получен в ходе ее выполнения. Цели и результаты лабораторной работы раскрываются в рабочей программе дисциплины «Теория игр». Перед выполнением лабораторной работы обучающийся должен изучить или повторить краткие теоретические сведения, которые необходимы для выполнения работы. На лабораторном занятии следует внимательно ознакомиться с предложенным заданием, выполнить его, консультируясь по мере надобности с преподавателем, а затем сдать задание преподавателю. Преподаватель может задать уточняющие вопросы или попросить что-либо скорректировать в выполненной работе. Выполнение лабораторной работы завершается созданием отчета и его защитой.

Список использованных источников:

1) Василевич Л.Ф. Теория игр. КИИМ, 2000.

Общие сведения

Лабораторные работы по дисциплине «Теория игр» выполняются в программе MS Excel. Вначале решается тестовая задача, описанная в пояснениях к работе, далее решается задача в соответствии со своим вариантом. Вариант выбирается отдельно для каждой лабораторной работы по указанию преподавателя.

Тема 1. Антагонистические игры

Лабораторная работа 1. Численное решение матричной игры

Цели и содержание лабораторной работы:

Решить итерационным методом матричную игру.

Задание

Решить с помощью программы MS Excel матричную игру приближенно, итерационным методом. Сравнить полученное решение с точным решением, полученным на основе задачи линейного программирования.

Порядок выполнения работы

1. Изучить предлагаемый теоретический материал.

2. Решить тестовую задачу: дана матричная игра 2 на 3 с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти ее решение аналитически и численно, итерационным методом, сравнить полученные результаты.

2.1. Заполняем лист Excel исходными данными. Вносим в выбранные ячейки платежную матрицу:

	A	B	C	D
1				
2		2	0	3
3		1	3	-3

2.2. Формулируем задачи линейного программирования для нахождения решения матричной игры.

Для первого игрока:

$$X_1 + X_2 \rightarrow \min,$$
$$2X_1 + X_2 \geq 1,$$
$$3X_2 \geq 1,$$
$$3X_1 - 3X_2 \geq 1,$$
$$X_1 \geq 0,$$
$$X_2 \geq 0.$$

Для второго игрока:

$$X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow \max,$$
$$2X_1 + 3X_3 \leq 1,$$
$$X_1 + 3X_2 - 3X_3 \leq 1,$$
$$X_1 \geq 0,$$
$$X_2 \geq 0,$$
$$X_3 \geq 0.$$

2.3. Решаем данные задачи с помощью надстройки «Поиск решения», должен получиться следующий результат:

для первого игрока

x1	0,666667
x2	0,333333
f	1

для второго игрока:

x1	0
x2	0,666667
x3	0,333333
f	1

2.4. Находим значение игры и оптимальные стратегии игроков по формулам:

значение игры $v = 1/f$

стратегия первого игрока $P1 = X_1 v$, $P2 = X_2 v$,

стратегия второго игрока $Q1 = X_1 v$, $Q2 = X_2 v$, $Q3 = X_3 v$.

Должен получить результат:

P1	0,666667	Q1	0
P2	0,333333	Q2	0,666667
v	1	Q3	0,333333

2.5. Переходим к итерационному решению. Вносим в выбранные ячейки формулы, соответствующие запуску метода, когда первый игрок выбирает свою стратегию 1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1						A1	A2	A3	B1	B2	C1	C2
2		2	0	3		2	0	3				
3		1	3	-3								
4												

В ячейках B2:D3 содержится исходная платежная матрица, в ячейки F2:H2 вносим элементы платежной матрицы соответствующие выбранной на первом шаге стратегии первого игрока. В следующих строчках этих столбцов будет подсчитываться накопленный выигрыш первого игрока, в следующих двух столбцах будет подсчитываться накопленный проигрыш второго игрока, а в столбцах C1 и C2 будут указываться номера стратегий, которые игроки выбирали на данном шаге.

2.6. Вносим в выбранные ячейки формулы пересчета:
в ячейку I2
=ЕСЛИ(МИН($F2:$H2)=$F2;$B$2;ЕСЛИ(МИН($F2:$H2)=$G2;C2;D2))
в ячейку J2
=ЕСЛИ(МИН($F2:$H2)=$F2;$B$3;ЕСЛИ(МИН($F2:$H2)=$G2;C3;D3))
в ячейку K2
=1
в ячейку L2
=ЕСЛИ(МИН($F2:$H2)=$F2;1;ЕСЛИ(МИН($F2:$H2)=$G2;2;3))
Ячейки должны заполниться числами:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1						A1	A2	A3	B1	B2	C1	C2
2		2	0	3		2	0	3	0	3	1	2
3		1	3	-3								

2.7. Переходим ко второму шагу, вносим в выбранные ячейки формулы пересчета:
в ячейку F3
=F2+ЕСЛИ(МАКС($I2:$J2)=$I2;$B$2;$B$3)
в ячейку G3
=G2+ЕСЛИ(МАКС($I2:$J2)=$I2;$C$2;$C$3)
в ячейку H3
=H2+ЕСЛИ(МАКС($I2:$J2)=$I2;$D$2;$D$3)

в ячейку I3
=I2+ЕСЛИ(МИН($F3:$H3)=$F3;$B$2;ЕСЛИ(МИН($F3:$H3)=$G3;C2;D2))
в ячейку J3
=J2+ЕСЛИ(МИН($F3:$H3)=$F3;$B$3;ЕСЛИ(МИН($F3:$H3)=$G3;C3;D3))
в ячейку K3
=ЕСЛИ(МАКС($I2:$J2)=$I2;1;2)
в ячейку L3
=ЕСЛИ(МИН($F3:$H3)=$F3;1;ЕСЛИ(МИН($F3:$H3)=$G3;2;3))
Ячейки должны заполниться числами:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1						A1	A2	A3	B1	B2	C1	C2
2		2	0	3		2	0	3	0	3	1	2
3		1	3	-3		3	3	0	3	0	2	3
4												
5												

2.8. Копируем формулы в столбцах F:L в следующие стороки до 23 строки включительно, чтобы проделать 22 итерации. Проверяем результаты:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1						A1	A2	A3	B1	B2	C1	C2
2		2	0	3		2	0	3	0	3	1	2
3		1	3	-3		3	3	0	3	0	2	3
4						5	3	3	3	3	1	2
5						7	3	6	3	6	1	2
6						8	6	3	6	3	2	3
7						10	6	6	6	6	1	2
8						12	6	9	6	9	1	2
9						13	9	6	9	6	2	3
10						15	9	9	9	9	1	2
11						17	9	12	9	12	1	2
12						18	12	9	12	9	2	3
13						20	12	12	12	12	1	2
14						22	12	15	12	15	1	2
15						23	15	12	15	12	2	3
16						25	15	15	15	15	1	2
17						27	15	18	15	18	1	2
18						28	18	15	18	15	2	3
19						30	18	18	18	18	1	2
20						32	18	21	18	21	1	2
21						33	21	18	21	18	2	3
22						35	21	21	21	21	1	2
23						37	21	24	21	24	1	2
24												

2.9. Переходим к подсчету значения игры и стратегий игроков. Для этого заполняем ячейки M2:M23 номерами итераций 1-22, вносим формулы:

в ячейку N2

=МИН($F2:$H2)

в ячейку O2

=МАКС($I2:$J2)

в ячейку P2

=N2/M2

в ячейку Q2

=O2/M2

в ячейку R2

=(P2+Q2)/2

Таким образом в столбцах P и Q показывается минимальный средний выигрыш первого игрока и максимальный средний проигрыш второго игрока за пройденные итерации, а в столбце R вычисляется среднее арифметическое этих двух значений, служащее приближением значения игры.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1						A1	A2	A3	B1	B2	C1	C2						
2		2	0	3		2	0	3	0	3	1	2	1	0	3	0	3	1,5
3		1	3	-3		3	3	0	3	0	2	3	2	0	3	0	1,5	0,75
4						5	3	3	3	3	1	2	3	3	3	1	1	1
5						7	3	6	3	6	1	2	4	3	6	0,75	1,5	1,125
6						8	6	3	6	3	2	3	5	3	6	0,6	1,2	0,9
7						10	6	6	6	6	1	2	6	6	6	1	1	1
8						12	6	9	6	9	1	2	7	6	9	0,857143	1,285714	1,071429
9						13	9	6	9	6	2	3	8	6	9	0,75	1,125	0,9375
10						15	9	9	9	9	1	2	9	9	9	1	1	1
11						17	9	12	9	12	1	2	10	9	12	0,9	1,2	1,05
12						18	12	9	12	9	2	3	11	9	12	0,818182	1,090909	0,954545
13						20	12	12	12	12	1	2	12	12	12	1	1	1
14						22	12	15	12	15	1	2	13	12	15	0,923077	1,153846	1,038462
15						23	15	12	15	12	2	3	14	12	15	0,857143	1,071429	0,964286
16						25	15	15	15	15	1	2	15	15	15	1	1	1
17						27	15	18	15	18	1	2	16	15	18	0,9375	1,125	1,03125
18						28	18	15	18	15	2	3	17	15	18	0,882353	1,058824	0,970588
19						30	18	18	18	18	1	2	18	18	18	1	1	1
20						32	18	21	18	21	1	2	19	18	21	0,947368	1,105263	1,026316
21						33	21	18	21	18	2	3	20	18	21	0,9	1,05	0,975
22						35	21	21	21	21	1	2	21	21	21	1	1	1
23						37	21	24	21	24	1	2	22	21	24	0,954545	1,090909	1,022727
24																		

Убеждаемся, что к 22 итерации процесс решения сошелся, значение в столбце R мало отличается от найденного аналитического значения $v = 1$.

Таким образом, максимальная прибыль составит 2200 долл. при условии, что будет произведено 24 стула и 14 столов, при этом оба ресурса будут израсходованы полностью.

2.10. Переходим к подсчету стратегий. Вносим в выбранные ячейки формулы:

=СЧЁТЕСЛИ(K2:K23;1)/22

= 1– СЧЁТЕСЛИ(K2:K23;1)/22

Получаем таким образом компоненты стратегии первого игрока P1 и P2, проверяем, что они равны

	0,681818
	0,318182

Для второго игрока формулы:

=СЧЁТЕСЛИ(L2:L23;1)/22

=СЧЁТЕСЛИ(L2:L23;2)/22

=СЧЁТЕСЛИ(L2:L23;3)/22

компоненты стратегии Q1, Q2, Q3

0
0,681818
0,318182

Видим, что приближенное решение мало отличается от аналитического.

3. Оформить отчет об итогах проделанной работы, указав в нем полученные результаты с необходимыми пояснениями.

Теоретические сведения

Рассмотрим приближенный метод решения матричных игр - метод Брауна-Робинсон (метод итераций). Идея его заключается в следующем. Разыгрывается эксперимент, в котором игроки А и В поочередно применяют друг против друга свои чистые стратегии. Каждый из игроков стремится увеличить свой выигрыш, предполагая, что будущее будет походить на прошлое; при этом считается, что ни один из них не знает своей оптимальной стратегии.

Такой принцип приводит к некоторой последовательности партий игры, для каждой из которых можно подсчитать приближенные оптимальные стратегии каждого из игроков, а также верхнюю и нижнюю цены игры.

Вместо того, чтобы вычислять каждый раз средний выигрыш, можно пользоваться суммарным за все предыдущие ходы выигрышем и выбирать ту свою стратегию, при которой этот накопленный выигрыш максимален.

Доказано, что такой метод сходится: при увеличении числа партий средний выигрыш на одну партию будет стремиться к цене игры, а частоты применения стратегий - к их вероятностям в оптимальных смешанных стратегиях игроков.

Объясним этот метод на примере игры 3x3, платежная матрица которой приведена ниже. Игра начинается с произвольно выбранной стратегии игрока А, - например стратегии A_1 (выбранные стратегии обозначаются звездочкой). Платежные элементы этой строки переписываются под платежной матрицей. Игрок В, предполагая, что будущее будет походить на прошлое, выберет стратегию B_1, при которой его проигрыш минимален. Соответствующий этой стратегии проигрыш обозначен звездочкой. Платежные элементы стратегии B_1 переписываются справа от платежной матрицы. Игрок А, также предполагая, что будущее будет походить на прошлое, выбирает стратегию A_2 (наибольшее число обозначено звездочкой). Платежные элементы, соответствующие стратегии A_2, прибавляются поочередно к элементам предыдущей строки, записанной под матрицей. Далее выбирается наименьший элемент суммарной строки. Ему соответствует стратегия B_2. Тогда к столбцу, записанному справа от платежной матрицы, поочередно прибавляются платежные элементы стратегии B_2. Этот процесс продолжается до тех пор, пока разрыв между нижней и верхней оценками игры станет небольшим. Если при выборе стратегий на некотором шаге есть несколько альтернатив, то выбирается любая из равноценных стратегий.

В рассматриваемом примере сделано 20 шагов. За эти двадцать шагов игрок А применил свою первую стратегию (количество звездочек в суммарных выигрышах, соответствующей первой стратегии) 7 раз; вторую - 8 раз; третью - 5 раз. Игрок В применил стратегию B_1 восемь раз; вторую - 8 раз; третью - 4 раза. Следовательно, приближенные оценки оптимальных стратегий, полученные за 20 итераций, равны:

$$S_A \approx \left\| \frac{7}{20}; \frac{8}{20}; \frac{5}{20} \right\|; \quad S_B \approx \left\| \frac{8}{20}; \frac{8}{20}; \frac{4}{20} \right\|.$$

Эти оценки не так уж сильно отличаются от точного решения данной матричной игры, которое равно $S_A = \|0.4;0.4;0.2\|$; $S_B = \|0.4;0.4;0.2\|$.

A_i \ B_i	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	3	1	1
A_3	1	3	1

*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5	8*	9*	10	12	14	17*	20*
3*	4*	5	6	9	12*	13*	14	15	16
1	4	7*	8	9	10	13	16*	17	18

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21*	22	24*	25	27	29	31	32	33	36*
19	22*	23	26*	27*	28	29	32	35*	36
19	20	23	24	27	30*	33*	34*	35	36

1	1*	2	3
2	4	3*	4
3	7	4*	5
4	8	7	6*
5	9*	9	9
6	10*	11	12
7	13	12*	13
8	16	13*	14
9	17	16	15*
10	18	13	18*
11	19*	20	21
12	20*	22	24
13	23	23*	25
14	24*	25	28
15	27	26*	29
16	30	27*	30
17	31	30*	31
18	32*	33	32
19	33*	36	33
20	36	37	34*

Приближенную цену игры определяют как среднеарифметическое между нижней оценкой игры α, равной минимально накопленному выигрышу $\alpha_{\sum \min}$ игрока А, деленному на число шагов k, и верхней оценкой игры β, равной максимальному суммарному проигрышу $\beta_{\sum \max}$ игрока В, деленному на k:

$$\nu = \frac{\alpha + \beta}{2} \approx \frac{\alpha_{\sum \min} + \beta_{\sum \max}}{2 \cdot k}.$$

В рассматриваемом примере

$$v = \frac{36+37}{2\cdot 20} = \frac{73}{40} = 1.82\,.$$

Точная цена игры ***v*** = 1,8.

Разрыв между α и β отражает неточность оценок относительно оптимальных смешанных стратегий. В примере $\beta-\alpha=\frac{37}{20}-\frac{36}{20}=0.05$ составляет 2,8% от цены игры ***v***=1,8.

Увеличивая число итераций k, можно найти еще более точные оценки оптимальных смешанных стратегий.

Преимуществом итерационного метода решения матричных игр является то, что объем вычислений с увеличением размерности игры **mxn** растет существенно медленнее, чем в методах линейного программирования (в частности, в симплекс - методе).

Тема 2. Неантагонистические игры

Лабораторная работа 2. Поиск оптимального кооперавтиного поведения двух игроков

Цели и содержание лабораторной работы:

Решить в MS Excel биматричную игру при условии кооперативного поведения ее участников.

Задание

Решить в соответствии со своим вариантом биматричную игру, объяснить полученное решение.

Порядок выполнения работы

1. Изучить предлагаемый теоретический материал.

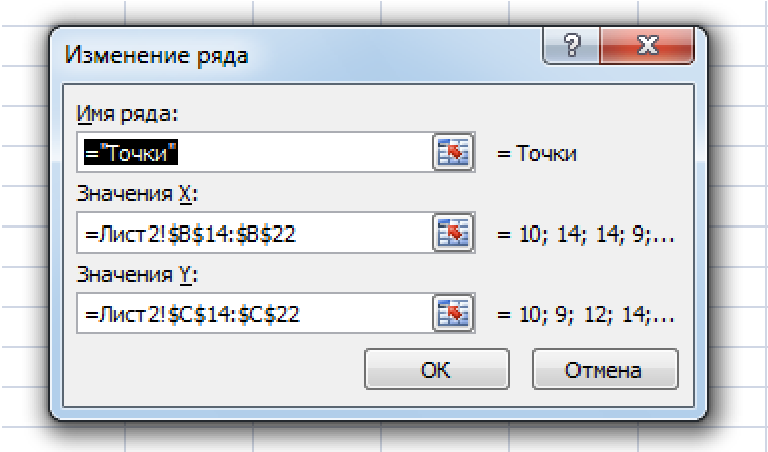
2. Решить задачу: дана биматричная игра

$$A=\begin{pmatrix}10 & 14 & 14\\ 9 & 15 & 21\\ 12 & 12 & 14\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}10 & 9 & 12\\ 14 & 15 & 12\\ 14 & 21 & 14\end{pmatrix}.$$

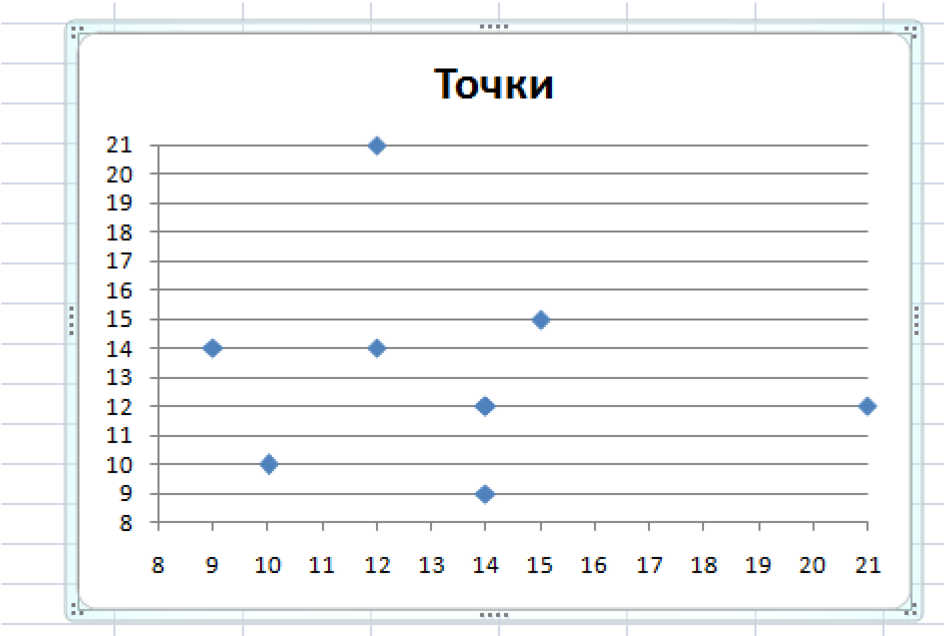
Решить ее при условии, что игрокам разрешено договариваться о совместных действиях.

2.1. Находим значение матричной игры с платежной матрицей А, оно составляет 12, и значение матричной игры с платежной матрицей В, оно составляет 14. Игроки будут согласны сотрудничать только в том случае, если получаемый ими выигрыш будет не меньше, чем тот, который они могут получить, действуя каждый самостоятельно.

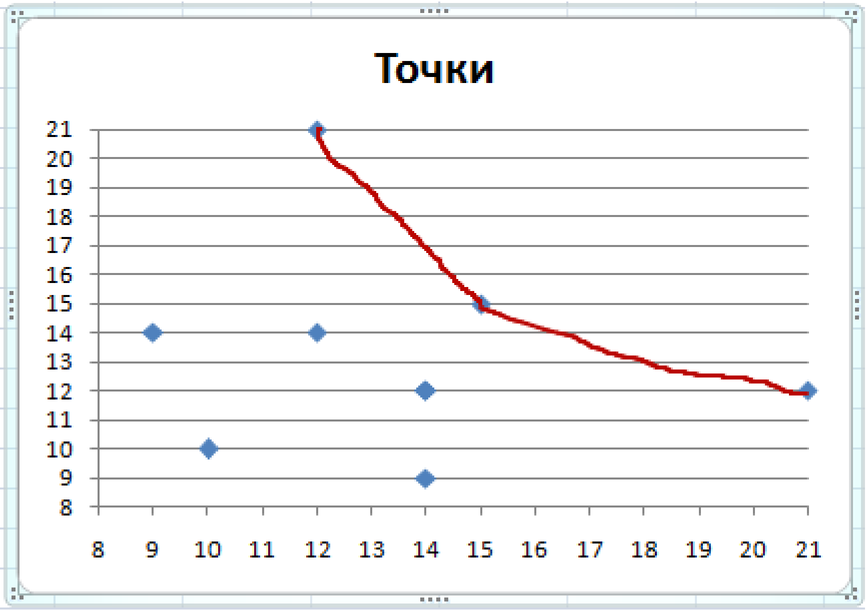
2.2. Строим на графике точки, указывающие возможные выигрыши игроков, для этого вносим в выбранные ячейки исходные матрицы А и В, и добавляем точечную диаграмму



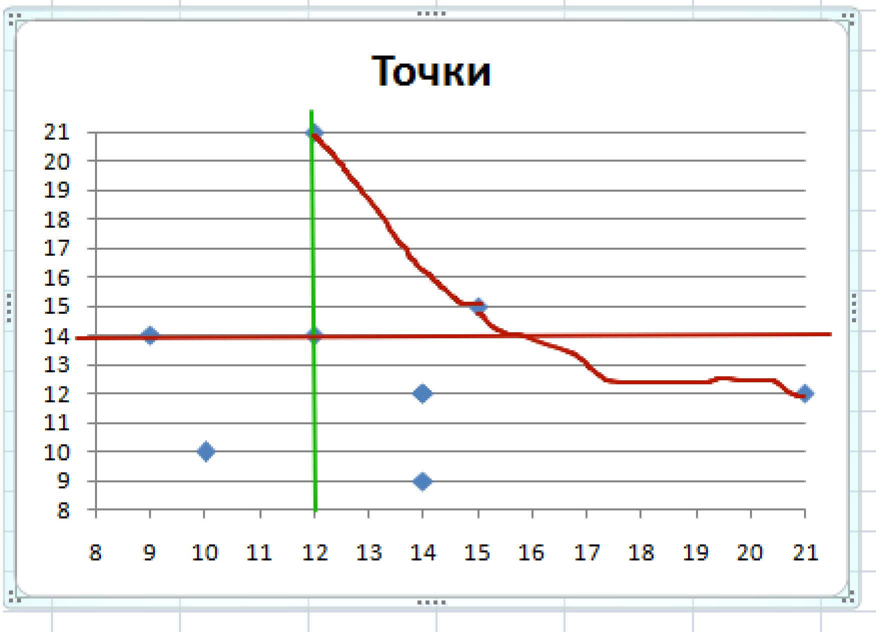
Должен получиться график вида



2.3. Определяем по графику Парето-оптимальное множество решений, так как только на нем игрокам имеет смысл договаривать о совместных действиях. Это множество, находящееся в «северо-западном» углу графика, т.е.



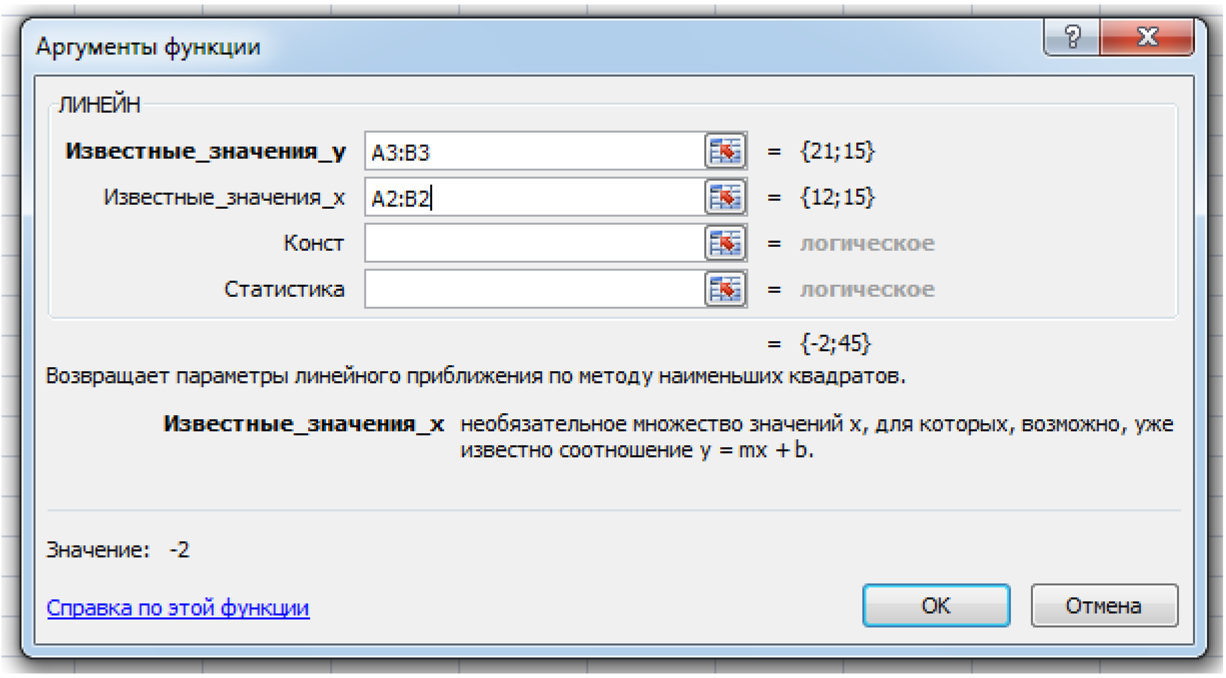
2.4. На Парето-оптимальном множестве надо решить задачу максимизации функции *f = (H1-12)(H2-14)*, при условии *H1* $\geq$ 12, *H2* $\geq$ 14, где *H1* выигрыш первого игрока, *H2* выигрыш второго игрока в условиях кооперации.



Как следует из графика, решение поставленной задачи достигается на отрезке, соединяющем точки (12, 21) и (15, 15). Находим уравнение прямой, проходящей через эти точки. Для этого вносим в соседние ячейки нужные значения:

	A	B
1		
2	12	15
3	21	15

и вызываем функцию ЛИНЕЙН с параметрами:



Видим в диалоговом окне, что коэффициенты прямой равны {-2; 45}т.е. прямая имеет вид *H2 = -2 H1+45.*

2.5. Таким образом, необходимо решить оптимизационную задачу

$$(H1\text{-}12)(H2\text{-}14) \rightarrow \max,$$

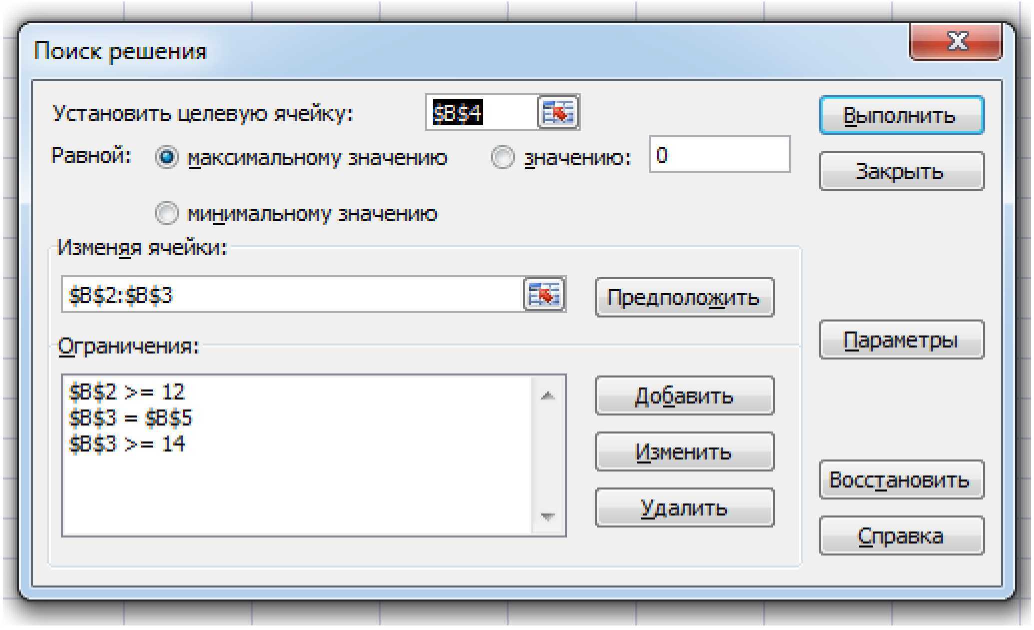
$$H2 = -2H1+4,$$

$$H1 \geq 12,$$

$$H2 \geq 14.$$

Выполняем «Поиск решения»:

	A	B
1		
2	H1	10
3	H2	20
4	f	=(B2-12)*(B3-14)
5		=-2*B2+45
6		



Нажимаем «Выполнить», потом «ОК». Должен получиться следующий результат:

	A	B	C
1			
2	H1	13,75	
3	H2	17,5	
4	f	6,125	
5		17,5	

2.6. В результате кооперативного поведения первый игрок получает выигрыш в размере 13.75, а второй – 17.5. Остается найти стратегии, которые приведут игроков к этому результату. Для этого нужно решить уравнение

$$\begin{pmatrix}13.75\\17.5\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} + (1-p)\begin{pmatrix}15\\15\end{pmatrix},$$

где p вероятность, с которой игрокам следует выбирать соответствующие стратегии. Находим значение $p=0.4167$.

2.7. Таким образом, в условиях разрешенной кооперации игрокам следует с вероятностью 0.4167 реализовывать исход (12, 21), т.е. первый игрок выбирает свою третью стратегию, а второй игрок выбирает свою вторую стратегию; а с вероятностью 0.5833 реализовывать исход (15, 15), т.е. первый игрок выбирает свою вторую стратегию, а второй игрок выбирает свою вторую стратегию. Получаем, что второй игрок всегда должен выбирать свою вторую стратегию, а первый чередовать вторую и третью стратегии в соотношении 0.5833 к 0.4167.

3. Оформить отчет об итогах проделанной работы, указав в нем полученный ответ с необходимым пояснением.

Теоретические сведения

Формальное понятие оптимальности призвано отражать различные варианты содержательных представлений об устойчивости, выгодности и справедливости. Можно считать, что устойчивость ситуации проявляется в ее равновесности.

Другой вариант устойчивости ситуации в большей степени, чем равновесность, отражающей черты ее выгодности, состоит в ее оптимальности по Парето.

Ситуация x_0 в бескоалиционной игре называется оптимальной по Парето, если не существует ситуации $x \in X$, для которой имеет место векторное неравенство

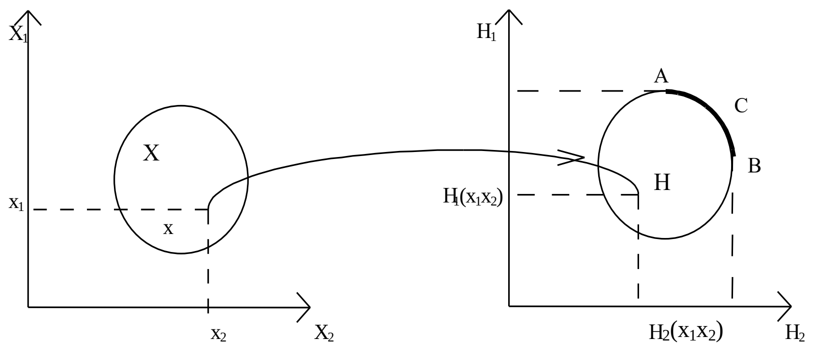
$H_i(x^0) \le H_i(x)$, для всех $i \in I$.

Иными словами, в оптимальной по Парето ситуации игроки не могут совместными усилиями увеличить выигрыш кого-либо из них, не уменьшив при этом выигрыш кого-либо другого.

Подчеркнем различие ситуации равновесия от ситуации, оптимальной по Парето: в первой ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить свой собственный выигрыш; во второй, – все игроки, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого.

Вопросы об оптимальных по Парето ситуациях решаются в принципе проще, чем аналогичные вопросы о ситуациях равновесия (оптимальных по Нэшу).

Проиллюстрируем графический метод определения ситуаций оптимальных по Парето. На рисунке изображено множество возможных стратегий x_1,x_2 двух игроков. Каждой точке $x \in X$ соответствует точка на множестве H значений функций выигрышей $H_1(x)$ и $H_2(x)$.



Дуга АСВ соответствует множеству ситуаций оптимальных по Парето, так как никакими совместными усилиями игроков, нельзя увеличить выигрыш одного из них, не уменьшив при этом выигрыш другого.

Игра G' называется аффинно эквивалентной игре G, если число игроков $N' = N$, стратегии одной игры $X_i' = X_i$, $i \in N$ (отсюда следует, что игры G и G' имеют одно и то же множество ситуаций), а функции выигрыша

$$H_i'(x) = k_i H_i(x) + c_i, \qquad i \in N,$$

где $k_i > 0$, $i \in N$.

Различие между двумя аффинно эквивалентными играми по существу состоит в различии начальных капиталов игроков и в соотношениях единиц измерения выигрышей, определяемых соответственно величинами C_i и k_i.

Для однородно аффинно эквивалентных игр $k_i = k$, $i \in N$.

Очевидно, что для антагонистических игр понятия аффинной эквивалентности и однородной аффинной эквивалентности совпадают.

Теорема 1. Всякая бескоалиционная игра с постоянной суммой аффинно эквивалентна некоторой игре с нулевой суммой.

Теорема 2. Аффинно эквивалентные игры имеют одни и те же оптимальные по Парето ситуации.

Рассмотрим пример для нахождения ситуации оптимальной по Парето.

Пример 2. Игра “Дилемма заключенного”

Каждый из двух игроков располагает двумя стратегиями: A_2 и B_2 – стратегии агрессивного поведения, а A_1 и B_1 – миролюбивое поведение. Предположим, что “мир” (оба игрока миролюбивы) лучше для обоих игроков, чем “война”. Случай, когда один игрок агрессивный, а другой миролюбивый, выгоднее агрессору. Пусть матрицы выигрышей игроков 1 и 2 в данной биматричной игре имеют вид

$$H_1 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \left\|\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right\| \end{array}, \qquad H_2 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \left\|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}\right\| \end{array}.$$

Для обоих игроков агрессивные стратегии A_2 и B_2 доминируют мирные стратегии A_1 и B_1. Таким образом, единственное равновесие в доминирующих стратегиях имеет вид (A_2,B_2), т.е. постулируется, что результатом некооперативного поведения является война. В то же время исход (A_1,B_1) (мир) дает больший выигрыш для обоих игроков. Таким образом, некооперативное эгоистическое поведение вступает в противоречие с коллективными интересами. Коллективные интересы диктуют выбор мирных стратегий. В то же время, если игроки не обмениваются информацией, война является наиболее вероятным исходом.

В данном случае ситуация (A_1, B_1) является оптимальной по Парето. Однако эта ситуация неустойчива, что ведет к возможности нарушения игроками установленного соглашения. Действительно, если первый игрок нарушит соглашение, а второй не нарушит, то выигрыш первого игрока увеличится до трех, а второго упадет до нуля и, наоборот. Причем, каждый игрок, не нарушающий соглашение, теряет больше при нарушении соглашения вторым игроком, нежели в том случае, когда они оба нарушают соглашение.

Как видим, в этом примере кооперация не выгодна для игроков.

Состояние равновесия по Нэшу

Стратегии x^*_i, $i=\overline{1,N}$ в игре N лиц с ненулевой суммой называются оптимальными по Нэшу (решением по Нэшу или точкой равновесия по Нэшу), если для каждого $i=\overline{1,N}$

$$H_i(x^*) = \max_{x \in X} H_i(x),$$

т.е. каждый игрок в ситуации x^* получает свой наибольший выигрыш (в той мере, в какой это от него самого зависит).

В рассмотренной игре “дилемма заключенного” таковой является ситуация (A_2,B_2).

В случае антагонистической игры равновесные стратегии игроков совпадают с их оптимальными стратегиями. Для неантагонистических игр понятие оптимальной стратегии игрока нередко вообще не имеет смысла: в таких играх оптимальными оказываются не стратегии отдельных игроков, а их сочетания (ситуации) и притом для всех игроков сразу. Поэтому в общих бескоалиционных играх оптимальными следует понимать совокупность действия всех игроков (ситуацию в игре), которая и является решением игры.

Как и в играх двух лиц с нулевой суммой, игра N лиц с ненулевой суммой может не иметь решение по Нэшу в чистых стратегиях. Приведенное выше определение решения по Нэшу в чистых стратегиях легко обобщается на случай смешанных стратегий путем подстановки смешанных стратегий $X_i = \left\| x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_N} \right\|, \quad i \in \overline{1,I}$, представляющих собой вероятностное распределение на множестве чистых стратегий.

Таким образом мы приходим к вероятностному распределению X на множестве всех ситуаций. Другими словами, ситуация игры в смешанных стратегиях реализует различные ситуации в чистых стратегиях с некоторыми вероятностями. Значение функции выигрыша каждого из игроков оказывается случайной величиной. В качестве значения функции выигрыша принимается математическое ожидание этой случайной величины.

Дж. Нэшем было доказано существование ситуации равновесия для любой конечной бескоалиционной игры.

Теорема Нэша. В каждой бескоалиционной игре существует хотя бы одна ситуация равновесия в классе смешанных стратегий.

Если, кроме того, функции $H_i(x)$ выпуклые вверх, то решение по Нэшу достигается в классе чистых стратегий.

Заметим, что принципиальная важность теоремы Нэша ограничивается существованием ситуации равновесия. Непосредственно применять ее для нахождения таких ситуаций не удается.

Дж. Нэшем была доказана также следующая теорема.

Теорема 2. Конечная бескоалиционная игра имеет симметричные ситуации равновесия, в которых игроки, равноправно входящие в игру согласно ее условиям, фактически оказываются в одинаковом положении.

Ее применение позволяет избежать отдельных ошибок при решении конечных бескоалиционных игр.

Одним из простых классов бескоалиционных игр ход решения которых поддается элементарному описанию являются биматричные игры, представляющие собой бескоалиционную игру двух игроков с ненулевой суммой.

Варианты заданий

Лабораторная работа 1.

Матричная игра

1.

8	4	2
2	8	4
1	2	8

2.

-1	1	1
2	-2	2
3	3	-3

3.

1	2	-5	3	2
-1	4	7	2	-4
5	-1	1	1	3

4.

0	-13	-1
13	0	-13
1	13	0

5.

1	0	-1
0	2	1
1	-1	3

6.

3	2	4
4	3	2
2	4	3

7.

3	6	0
5	3	2
2	1	6

8.

3	0	7
4	6	0
3	4	3

9.

20	40	10
30	3	10
3	10	30

10.

2	-11	1
15	2	-11
3	15	2

11.

7	5	4
1	3	7
2	7	4

12.

16	0	14
6	6	16
6	12	2

13.

0	1	1

14.

-1	1	0

15.

0	2	1

1	0	1
1	1	0

0	-1	1
1	0	-1

2	0	2
1	2	0

Лабораторная работа 2.

Решить игру «**Экологический конфликт**». Два промышленных предприятия (А и В), расположенные вблизи обширного водоема, берут из него воду для технических нужд и после использования сбрасывают ее обратно в водоем. Если суммарный объем сбрасываемой (загрязненной) воды не превышает некоторого предела δ, то происходит ее естественное очищение, и общий водный ресурс сохраняется. Если же указанный предел нарушен, то загрязненность водоема интенсивно растет. Возникает проблема его восстановления за счет предприятий и уплаты штрафов, общая стоимость чего составляет Θ.

Чтобы избежать неприятных последствий, приходится строить очистные сооружения, состоящие из отдельных стандартных блоков, рассчитанных на определенные объемы пропускаемой через них воды (пусть каждый блок восстанавливает 25% используемой воды). Затраты на приобретение, монтаж и эксплуатацию одного блока равны С.

Суть конфликта, возникающего между предприятиями, сводится к их стремлению обеспечить себе благоприятные условия деятельности путем более свободного расходования природной воды. Это отрицательно влияем на состояние источника и через него – на ход производства, качество продукции обоих предприятий. Все оказывается взаимосвязанным, и появляется заинтересованность в поиске решений, приемлемых для конфликтующих сторон.

Пусть количество воды, потребляемой каждым предприятием в его технологическом цикле равно единице (100 т, 10 цистерн, и т.д.). Количество очищаемой воды составляет $1 - x$ на предприятии А; $1 - y$ на предприятии В, где чистые стратегии игрока А = |0; 0,25; 0,5; 0,75; 1|, в зависимости от числа применяемых очистных блоков. Чистые стратегии игрока В = |0; 0,25; 0,5; 0,75; 1|.

Расходы предприятия А составляют:

$4C(1 - x)$, если $x + y \le \delta$;

$4C(1 - x) + \Theta$, если $x + y > \delta$,

а расходы предприятия В

$4C(1 - y)$, если $x + y \le \delta$;

$4C(1 - y) + \Theta$, если $x + y > \delta$.

Данные формулы позволяют составить платежные матрицы игроков А и В. Для случая $\delta = \frac{1}{3}$ имеем

Матрица А

	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
A_4	4C	4C	4C+Θ	4C+Θ	4C+Θ
A_3	3C	3C+Θ	3C+Θ	3C+Θ	3C+Θ
A_2	2C+Θ	2C+Θ	2C+Θ	2C+Θ	2C+Θ
	C+Θ	C+Θ	C+Θ	C+Θ	C+Θ

A_1					
A_0	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ

Матрица B

A \ B	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
A_4	4C	3C	2C+Θ	C+Θ	Θ
A_3	4C	3C+Θ	2C+Θ	C+Θ	Θ
A_2	4C+Θ	3C+Θ	2C+Θ	C+Θ	Θ
A_1	4C+Θ	3C+Θ	2C+Θ	C+Θ	Θ
A_0	4C+Θ	3C+Θ	2C+Θ	C+Θ	Θ

Индекс при чистых стратегиях игроков указывает на количество используемых очистных блоков (например A_3 – предприятие A использует 3 очистных блока; B_0 – предприятие B не использует ни одного очистного блока).

Найти решение в предположении, что предприятия согласны сотрудничать, при следующих значениях параметров:

1. C >> Θ;
2. 5C = Θ;
3. 4C = Θ; $\delta = \frac{1}{2}$;
4. 2C = Θ; $\delta = \frac{1}{3}$;
5. C = 2Θ; $\delta = \frac{1}{3}$;
6. C = Θ; $\delta = \frac{1}{2}$;
7. C << Θ;
8. 5C = Θ; $\delta = \frac{1}{2}$;
9. 2C = Θ; $\delta = \frac{1}{2}$;
10. C = 3Θ; $\delta = \frac{1}{3}$;
11. C = Θ; $\delta = \frac{1}{3}$;
12. C = 4Θ; $\delta = \frac{1}{3}$.