

**Министерство науки и высшего образования РФ  
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»  
Институт экономики и бизнеса  
Кафедра цифровой экономики**

**Лутошкин Игорь Викторович**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
для семинарских (практических) занятий и самостоятельной работы  
по дисциплине**

**Оптимальное управление в экономических процессах**

**для студентов направления 38.03.05 «Бизнес-информатика»**

Ульяновск  
2018

Методические рекомендации для семинарских (практических) занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Оптимальное управление в экономических процессах» / составитель: И. В. Лутошкин - Ульяновск: УлГУ, 2018 – 14 с.

Настоящие методические рекомендации предназначены для студентов направления обучения 38.03.05 «Бизнес-информатика». В работе приведены литература по дисциплине, темы дисциплины и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля, задания для самостоятельной работы, задачи для самостоятельной подготовки к семинарам или полностью самостоятельного освоения практических навыков.

Студентам заочной, очно-заочной и очной форм обучения следует использовать данные методические рекомендации при подготовке к семинарам, самостоятельной подготовке, а также промежуточной аттестации по дисциплине «Оптимальное управление в экономических процессах».

Рекомендованы к введению в образовательный процесс

Ученым советом Института экономики и бизнеса УлГУ

протокол № 213/09 от «24» мая 2018 г.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ.....	4
РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ТЕМАМ ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
<i>Тема 1. Вводная часть</i> .....	5
<i>Тема 2. Достаточные условия оптимальности</i> .....	6
<i>Тема 3. Необходимые условия оптимальности (задача ВИ)</i> .....	7
<i>Тема 4. Необходимые условия оптимальности (задача ОУ)</i> .....	9
<i>Тема 5. Численные методы</i> .....	12
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....	13

## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

В результате изучения дисциплины «Оптимальное управление в экономических процессах» студенты должны получить знания о методах математического моделирования динамических управляемых систем и процессов и формирование навыков проектирования и анализа динамических моделей экономики.

Методические рекомендации для семинарских (практических) занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Оптимальное управление в экономических процессах» направлены на повышение эффективности освоения знаний, умений, навыков и компетенций, связанных с:

- изучением различных постановок вариационных оптимизационных проблем;
- освоением основных методов качественного и численного анализа оптимизационных динамических задач;
- обучением использованию современных программных продуктов для построения решений.

Методические рекомендации предлагают указания по всем темам дисциплины «Оптимальное управление в экономических процессах». По каждой теме структура указаний содержит набор вопросов для систематизации теоретического материала, полученного на лекционных занятиях, а также вопросы для самостоятельного изучения теории, задания для подготовки к практическим занятиям (семинарам), задачи для усвоения практических навыков.

При самостоятельном изучении дисциплины порядок освоения тем может быть произвольным и зависит от уровня подготовки обучающегося.

Список литературы, приведенный в конце методических указаний, может служить основой для изучения всех рассматриваемых тем. Дополнительная и учебно-методическая литература могут быть использованы обучающимися для закрепления изучаемого материала.

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ТЕМАМ ДИСЦИПЛИНЫ

### *Тема 1. Вводная часть*

*Подготовить ответы на вопросы:*

1. Основные проблемы теории ОУ.
2. Модель двухсекторной экономики.

*Рекомендации по изучению вопросов:*

Для изучения вопроса 1 можно использовать учебник [1] основной литературы, раздел Введение.

Для изучения вопроса 2 можно использовать учебник [1], основной литературы, раздел Введение.

*Контрольные вопросы:*

1. Перечислите модели экономической динамики, к которым применима теория ОУ.
2. Кто является основателем принципа максимума?
3. Когда были разработаны первые модели экономической динамики, основанные на теории ОУ?
4. Какие прикладные проблемы стимулировали разработку теории ОУ.
5. Какой экономической проблеме соответствует модель двухпродуктовой экономики?
6. Какая экономическая характеристика служит критерием качества в модели двухпродуктовой экономики?

*Задание для самостоятельной работы:*

1. Сформулируйте модель трехпродуктовой экономики.

## *Тема 2. Достаточные условия оптимальности*

*Подготовить ответы на вопросы:*

1. Достаточные условия в непрерывных процессах.
2. Достаточные условия в многошаговых процессах.
3. Достаточные условия в линейных по управлению процессах.
4. Анализ однопродуктовой модели экономики.

*Рекомендации по изучению вопросов:*

Изучение вопросов данной темы рекомендуется проводить в порядке их представления, так как для понимания каждого вопроса требуются знания, получаемые при изучении предыдущего вопроса.

Для изучения вопроса 1 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 1.1, 1.2.

Для изучения вопроса 2 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 1.1, 1.3.

Для изучения вопроса 3 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 1.4, 1.5.

Для изучения вопроса 4 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 1.6.

*Контрольные вопросы:*

1. Сформулировать простейшую задачу дискретного ОУ с аддитивным функционалом.
2. Сформулировать теорему о достаточных условиях оптимальности для непрерывных процессов.
3. Какие функции используются для доказательства теоремы о достаточных условиях оптимальности для непрерывных процессов
4. Сформулировать теорему о достаточных условиях оптимальности для многошаговых процессов.
5. Какие функции используются для доказательства теоремы о достаточных условиях оптимальности для многошаговых процессов

6. Сформулировать понятие минимизирующей последовательности.
7. В чем заключаются достаточные условия оптимальности для линейных процессов?
8. Что такое магистраль в однопродуктовой модели экономики?

*Задание для самостоятельной работы:*

1. Повторить аналитические методы решения дифференциальных уравнений.
2. Повторить аналитические методы решения систем линейных дифференциальных уравнений.

*Практическое задание:*

1. Решить дифференциальное уравнение  $t \frac{dx}{dt} + t^2 + tx - x = 0$ .
2. Решить дифференциальное уравнение  $\frac{dx}{dt} - 2tx = 3t^2 - 2t^4$ .
3. Решить систему уравнений  $\frac{dx_1}{dt} = 2x_2 - x_1 - t$ ,  $\frac{dx_2}{dt} = x_1$ ,  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 1$ .

### *Тема 3. Необходимые условия оптимальности (задача ВИ)*

*Подготовить ответы на вопросы:*

1. Необходимые условия экстремума в простейшей задаче ВИ.
2. Условия трансверсальности, задача Больца.
3. Условие Вейерштрасса сильного минимума.
4. Изопериметрическая задача.

*Рекомендации по изучению вопросов:*

Изучение вопросов данной темы может быть проведено независимо от других тем дисциплины. Для полного освоения вопросов данной темы необходимо предварительно изучить курс математического анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для изучения вопроса 1 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграф 2.1.

Для изучения вопроса 2 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграф 2.1.

Для изучения вопроса 3 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 2.2.

Для изучения вопроса 4 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 2.7.

*Контрольные вопросы:*

1. Какая задача называется простейшей задачей ВИ?
2. Для чего нужны условия трансверсальности?
3. В чем отличие задачи Больца от простейшей задачи ВИ?
4. Сформулируйте уравнение Эйлера.
5. Дайте определение сильного минимума.
6. Дайте определение слабого экстремума.
7. Дайте определение функции Вейерштрасса.
8. В чем заключается условие Лежандра?
9. В чем заключается понятие игольчатой вариации?

*Задание для самостоятельной работы:*

1. Изучить доказательство леммы Дюбуа-Реймон.
2. Следует ли из слабого минимума сильный минимум и наоборот? Приведите пример задач, когда один минимум есть, а другого нет.
3. Привести пример задачи, когда для некоторой функции необходимые условия выполняются, но данная функция не является локальным экстремумом.

*Указания для решения задач ВИ:*

При аналитическом решении задач вариационного исчисления предлагается использовать следующий алгоритм:

- а) определить функцию  $L$  (для изопериметрической задачи функция Лагранжа);
- б) для функции  $L$  составить уравнение Эйлера;



в) определить краевые условия (если необходимо составить условия трансверсальности);

г) решить полученную краевую задачу;

д) определить знак приращения функционала, сделать выводы о виде локального экстремума.

Примеры решения задач приведены в [1], параграф 2.9.

*Практическое задание:*

1. Найти решение простейшей задачи ВИ:

$$\int_0^{1,5} (\dot{x}^2 + 2x)dt \rightarrow extr, \quad x(0) = 0, \quad x(1,5) = 1.$$

2. Найти решение изопериметрической задачи:

$$\int_1^2 (\dot{x}^2 t^2)dt \rightarrow extr, \quad \int_1^2 (tx)dt = 7/3, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 2.$$

3. Найти решение задачи Больца:

$$\int_0^{e-1} (t + 1)\dot{x}^2 dt + 2x(0)(x(e - 1) + 1) \rightarrow extr.$$

#### *Тема 4. Необходимые условия оптимальности (задача ОУ)*

*Подготовить ответы на вопросы:*

1. Принцип максимума для задачи со свободным правым концом.
2. Принцип максимума для задачи ОУ общего вида.
3. Задача с фиксированными концами.
4. Задача быстрогодействия.
5. Связь задач ВИ и ОУ.

*Рекомендации по изучению вопросов:*

Для полного освоения вопросов данной темы необходимо предварительно изучить курс математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, исследования операций.

Для изучения вопроса 1 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграф 2.3.

Для изучения вопроса 2 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграф 2.4.

Для изучения вопроса 3 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 2.5.

Для изучения вопроса 4 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграф 2.6.

Для изучения вопроса 5 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 2.7.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулировать постановку задачи ОУ со свободным правым концом.
2. Дать определение оптимальности процесса в задаче ОУ.
3. Какие выдвигаются требования к функциям, входящим в постановку задачи ОУ со свободным правым концом, в теореме принцип максимума Понтрягина?
4. Что такое сопряженные переменные в задаче ОУ?
5. Чем терминальный функционал отличается от интегрального функционала?
6. Дать определение допустимого управления.
7. Дать определение допустимого процесса.
8. Сформулировать задачу ОУ с фиксированными концами.
9. Сформулировать задачу быстродействия.

### *Задание для самостоятельной работы:*

1. Чем игольчатая вариация в доказательстве теоремы принципа максимума для задачи ОУ со свободным правым концом отличается от игольчатой вариации в теореме Вейерштрасса для сильного минимума в задаче ВИ?

2. Привести примеры экономических проблем, для которых построение моделей на основе аппарата теории ОУ является обоснованным.

*Указания для решения задач ОУ:*

При аналитическом решении задач оптимального управления предлагается использовать следующий алгоритм:

- а) составить функцию Гамильтона-Понтрягина;
- б) составить терминальную функцию;
- в) составить систему дифференциальных уравнений для сопряженных уравнений;
- г) составить краевые условия на основе терминальной функции;
- д) исходя из вида зависимости функции Гамильтона-Понтрягина от управляющих переменных, выявить структуру управления, соответствующую максимизации функции Гамильтона-Понтрягина;
- е) решить краевую задачу для фазовых и сопряженных переменных с учетом оптимальной структуры управления и терминальных условий.

Примеры решения задач ОУ приведены в [1], параграф 2.9.

*Практическое задание:*

1. Решить задачу ОУ:

$$\frac{dx}{dt} = -2 + u, \quad x(0) = 2, \quad -1 \leq u \leq 1; \quad \int_0^{10} (-3x + 3u) dt + (x(10))^2 \rightarrow \min.$$

2. Решить задачу ОУ:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - u, & \frac{dx_2}{dt} = x_1 + u, & x_1(0) = 2, & x_2(0) = 0, & -2 \leq u \leq 2; \\ \int_0^{10} (2u + x_1 + x_2) dt - x_2(3) \rightarrow \min. \end{cases}$$

3. Решить задачу ОУ:

$$\frac{dx}{dt} = x + u, \quad x(0) = 1, \quad -1 \leq u \leq 1; \quad \int_0^3 (2u^2 - 4x) dt + x(3) \rightarrow \min.$$

## *Тема 5. Численные методы*

*Подготовить ответы на вопросы:*

1. Метод локальных вариаций.
2. Метод Крылова Черноусько.
3. Метод параметризации.
4. Методы редукции задач ОУ.

*Рекомендации по изучению вопросов:*

Изучение вопросов данной темы служит теоретической основой для выполнения лабораторного практикума по дисциплине «Оптимальное управление в экономических процессах». Для полного освоения вопросов данной темы необходимо предварительно изучить курс математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, исследования операций, владеть основами программирования в системных языках или в специализированных математических пакетах.

Для изучения вопроса 1 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграф 3.1.

Для изучения вопроса 2 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграф 3.2.

Для изучения вопроса 3 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 3.3.

Для изучения вопроса 4 можно использовать учебник [1] основной литературы, параграфы 3.4.

*Контрольные вопросы:*

1. Для какого класса задач можно применять метод локальных вариаций?
2. В каком классе функций ищется решение методом локальных вариаций?
3. Какое условие необходимо для сходимости метода локальных вариаций?

4. Для каких задач можно применять метод Крылова-Черноузько?
5. В каком классе функций ищется решение методом Крылова-Черноузько?
6. Привести способы улучшения сходимости для метода Крылова-Черноузько.
7. В каком классе функций ищется решение методом параметризации?
8. В чем преимущество метода параметризации перед другими численными методами?
9. Привести примеры способов редукции задач ОУ.

*Задание для самостоятельной работы:*

1. Написать алгоритм реализации метода локальных вариации на одном из языков программирования.
2. Написать алгоритм реализации метода Крылова-Черноузько на одном из языков программирования.

## **РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

*основная:*

1. Лутошкин И.В. Оптимальное управление в экономике: Учеб. пособие. – Ульяновский государственный университет, ИЭиБ, 2007.

*дополнительная:*

1. Зубов В. И. Лекции по теории управления. - СПб. : Лань, 2009.
2. Оптимальное управление / Э.М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин, и др.; Под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.
3. Основы теории оптимального управления / под ред. В. Ф. Кротова. - Москва : Высшая школа, 1990. - 430 с
4. Сборник задач по оптимизации : теория, примеры, задачи: учеб. пособие для мат. спец. вузов / Алексеев Владимир Михайлович, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - Москва : Наука, 1984. - 288 с.

5. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.  
М., 1979.