ОГЛАВЛЕНИЕ

«ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЭКОЛОГОВ»

Профессиональный уровень любого специалиста во многом зависит от того, освоил ли он математический аппарат и умеет ли использовать его при анализе сложных реальных процессов и принятии решений. Поэтому в подготовке специалистов естественного профиля изучение математики занимает значительное место.

РАЗДЕЛ 3. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

Описание биологических и экологических процессов часто предполагает изучение взаимосвязей большого количества переменных величин. Например, при изучении природных экосистем может потребоваться регистрация или моделирование роста и взаимодействия 100 (и более) видов растений и животных. Чтобы следить за всеми необходимыми переменными и сделать возможным математическое описание столь сложных систем, нужно иметь достаточно простую систему математических обозначений. Единственный путь, ведущий к этому, состоит в использовании векторов и матриц.

Тема 11. Определение детерминанта.

- **Определение детерминанта.**

Матрицей (нем. matrize, от лат. matrix – матка, источник, начало) размера $m \times n$ называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Если количество строк равно *m*, а количество столбцов – *n*, то пишут, что $i = 1,...,m$ (или $i = \overline{1,m}$), $j = 1,...,n$ (или $j = \overline{1,n}$). Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где *i*- номер строки, а *j*- номер столбца:

$$\mathrm{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Впервые матрицы упоминались еще в древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений. Так же волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц. Хотя исторически рассматривались, например, треугольные матрицы, в настоящее время говорят исключительно о матрицах прямоугольной (квадратной) формы, так как они являются наиболее общими и удобными. Современное обозначение – две вертикальные черточки – ввел А. Кэли (1841).

Пример: [6] Пять лабораторных животных кормят тремя различными видами пищи. Если определить a_{ij} как суточное потребление i-го вида пищи *j*-м животным, то

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

является матрицей размера 3×5, отражающей общее суточное потребление. Она дает удобный способ ведения записей.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Например, n-мерный вектор-строка является матрицей размера $1 \times n$, а n-мерный вектор-столбец – матрицей размера $n \times 1$. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m = n$), то матрица (3.1) называется **квадратной**.

Элементы квадратной матрицы, идущие из левого верхнего угла матрицы, в правый нижний угол, называются **главной диагональю матрицы** (от греч. $\delta\iota\alpha\gamma\omega\nu\iota o\varsigma$ - идущий от угла к углу). Элементы квадратной матрицы, идущие из левого нижнего угла матрицы, в правый верхний угол, называются вспомогательной диагональю матрицы.

- **Определитель матрицы второго порядка.**

Определителем матрицы второго порядка называется число, вычисляемое по формуле

$$\det A = \Delta(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{3.1}$$

То есть, определитель матрицы второго порядка равен произведению элементов главной диагонали матрицы минус произведение элементов вспомогательной диагонали.

Термин «определитель» в современном его значении ввел О. Коши (1815), хотя ранее (1801) «детерминантом» К. Гаусс назвал дискриминант квадратичной формы. Идея «определителя» восходит к Г. Лейбницу, который пришел к определителю (1693) при решении систем линейных уравнений. В 1750 метод определителя был вновь разработан Г. Крамером. А. Вандермонд (1772) опубликовал первое обширное исследование, посвященное определителю. Первые полные изложения теории определителя даны в 1812 Ж. Бине и О. Коши. Обозначение – вертикальные линии – ввел А. Кэли (1841).

Пример: Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. По формуле (3.1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-3) = 2 + 15 = 17.$$

- **Определитель матрицы третьего порядка.**

Определителем матрицы третьего порядка называется число, вычисляемое по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}. \tag{3.2}$$

Одним из методов, позволяющих запомнить эту громоздкую формулу, является **метод треугольников**. Первые три слагаемых, стоящих в правой части формулы, являются произведениями элементов главной диагонали и треугольников, одна из сторон которых параллельна главной диагонали матрицы. Последние три слагаемые берутся с противоположным знаком и являются произведениями элементов вспомогательной диагонали матрицы и треугольников, одна из сторон которых параллельна вспомогательной диагонали.

Пример: Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользовавшись методом треугольников, получим

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 7 + (-3)\cdot 4\cdot(-1) + 5\cdot 4\cdot 2 -$$

$$-(-1)\cdot 1\cdot 2 - 5\cdot(-3)\cdot 7 - 4\cdot 4\cdot 2 = 14 + 12 + 40 + 2 + 105 - 32 = 141.$$

Вычислять определитель любого порядка можно, используя метод разложения определителя по строке или столбцу.

Алгебраическим дополнением (дополнительным минором) A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется число, равное определителю матрицы A' (n-1)-го порядка, полученной из матрицы A путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца и взятому со знаком плюс, если сумма $i+j$ является четным число, и со знаком минус, если это число нечетное. Таким образом, алгебраическое дополнение можно найти по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'.$$

Если в матрице A выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** (от лат. minor – меньший) матрицы A. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Определителем квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} A_{1k} ,$$

где A_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k–го столбца.

Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, то есть матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} A_{ik} , \quad i = 1,\dots,\text{n}.. \tag{3.3}$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Пример: Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

раскладывая его по первой строке.

Решение. Воспользуемся формулой (3.3):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+4\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя каждый из определителей третьего порядка по правилу треугольников (или разложения по строке или столбцу), получим:

$$6-2\cdot18+3\cdot0-4\cdot(-6)=-6.$$

- **Основные свойства определителя.**

Перечислим без доказательства некоторые основные свойства определителя:

1. При транспонировании величина определителя не меняется:
   $$\det A = \det A^T.$$
2. Из первого свойства следует, что все остальные свойства, сформулированные для строк определителя, справедливы также и для его столбцов.
3. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей:
   $$\det(AB) = \det A\cdot\det B.$$
4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки, то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.
5. При умножении строки матрицы на число ее определитель умножается на это число.
6. Если в матрице A строки или столбцы **линейно зависимы** (то есть, существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения), то ее определитель равен нулю.
7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, так как считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)
8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк прибавить (вычесть) элементы другой строки, умноженные на какое-либо число, не равное нулю.
9. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Приведенные выше преобразования матрицы:

- умножение строки на число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;
- перестановка строк;
- вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк;
- транспонирование

назовем **элементарными преобразованиями**.

Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями, с помощью которых можно к какой-либо строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Пример: Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ -5 & 2 & 2 & 8 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя свойство определителя, приведем матрицу определителя к треугольному виду. Выполним первую серию преобразований:

1) первую строку оставим без изменений;

2) из второй строки вычтем удвоенную первую строку, записав результат во второй строке;

3) к третьей строке прибавим первую строку;

4) вычтем из четвертой строки третью строку, умноженную на 3;

5) из пятой строки вычтем третью строку, умноженную на 5.

Тогда получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ -5 & 2 & 2 & 8 & 8 \end{vmatrix} \underset{\substack{IV-3\cdot III \\ V-5\cdot III}}{\overset{\substack{II-2\cdot I \\ III+I}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -7 & -2 \end{vmatrix}.$$

Произведем следующую серию преобразований:

$$\Delta \underset{V-2\cdot IV}{\overset{\substack{III-2\cdot II \\ IV-II}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Поменяв четвертый и пятый столбец местами и внеся, после этого, знак (-) в четвертую строку, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Наконец, прибавив к пятой строке четвертую строку, умноженную на 2, получим треугольную матрицу, определитель которой равен произведению элементов главной диагонали:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-1) = -1.$$

Тема 12. Действия над матрицами.

- **Матрицы.**

Напомним, что **матрицей** (нем. matrize, от лат. matrix – матка, источник, начало) размера $m \times n$ называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Если количество строк равно *m*, а количество столбцов – *n*, то пишут, что $i = 1,...,m$ (или $i = \overline{1,m}$), $j = 1,...,n$ (или $j = \overline{1,n}$). Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где *i*- номер строки, а *j*- номер столбца:

$$\mathrm{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}. \quad (3.4)$$

Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E \quad (3.5)$$

называется **единичной матрицей**.

Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

называется **диагональной** матрицей.

- **Действия над матрицами.**

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, можно определить операции сложения и вычитания матриц.

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}. \quad (3.7)$$

Пример: Вычислить

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используя свойство (3.7), имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Пример: Вычислить

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используя формулу (3.8), имеем

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 12 & 6 & -9 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел α и β выполняются свойства:

1) $A+B=B+A$;
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3) $A+O=A$;

4) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
5) $\alpha(A\pm B)=\alpha A\pm\alpha B$;
6) $A(\alpha\pm\beta)=\alpha A\pm\beta A$.

Пример: Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -4\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -5 & 7 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \text{найти } 3A+2B.$$

Решение. Используя формулы (3.7) и (3.8), имеем

$$3A=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ 6 & 3 & -12\\ 15 & 6 & 9\end{pmatrix},\quad 2B=\begin{pmatrix}0 & 6 & 8\\ -10 & 14 & 12\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix},\quad 3A+2B=\begin{pmatrix}-3 & 12 & 17\\ -4 & 17 & 0\\ 17 & 10 & 15\end{pmatrix}.$$

- **Транспонированная матрица.**

Матрицу B называют **транспонированной** (нем. transponieren – перекладывать, от лат. transpono – переставляю) матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\qquad B=A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

другими словами, $b_{ji}=a_{ij}$.

- **Перестановочные матрицы.**

Произведением матриц $A\cdot B=C$ называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй**:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+\dots+a_{1n}\cdot b_{n1} & \dots & a_{11}\cdot b_{1k}+\dots+a_{1n}\cdot b_{nk}\\ a_{21}\cdot b_{11}+\dots+a_{2n}\cdot b_{n1} & \dots & a_{21}\cdot b_{1k}+\dots+a_{2n}\cdot b_{nk}\\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ a_{m1}\cdot b_{11}+\dots+a_{mn}\cdot b_{n1} & \dots & a_{m1}\cdot b_{1k}+\dots+a_{mn}\cdot b_{nk}\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Таким образом, при умножении матрицы A размерности $m \times n$ на матрицу B размерности $n \times k$ мы получаем матрицу C размерности $m \times k$.

Свойства умножения матриц:

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких–либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера:

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \;\; O \cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство:

$$(AB)C = A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$$A(B+C) = AB + AC,$$

$$(A+B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

где индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

Пример: Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

Решение. Используя формулу (3.9), получаем

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно формуле (3.10),

$$A^TB = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3-3\cdot 4+1\cdot 2 \\ 0\cdot 3+2\cdot 4-4\cdot 2 \\ 3\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

По свойству (3.8)

$$\alpha C = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, согласно (3.7), получаем:

$$A^TB+\alpha C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

Пример: Найти произведение матриц AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. По формуле (3.9)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 3 & 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 = 1 + 6 + 3 = 10.$$

Таким образом, мы на примере убедились, что умножение матриц не коммутативно.

Пример: [6] **Контакты первого и второго порядков в эпидемиологии.** Предположим, что три человека заболели заразной болезнью. Вторую группу из шести человек опрашивают с целью выяснения, кто из них имел контакт с тремя больными. Затем опрашивают третью группу из семи человек, чтобы выяснить контакты с кем-либо из шести человек второй группы. Определим матрицу $A = (a_{ij})$ размера 3×6, полагая a_{ij} =1, если j-й человек второй группы находился в контакте с i-м больным из первой группы, и a_{ij} =0 в противном случае. Аналогично определим матрицу $B = (b_{ij})$ размера 6×7, полагая b_{ij} =1, если j-й человек третьей группы находился в контакте с i-м человеком из второй группы, и b_{ij} =0 в противном случае. Эти две матрицы описывают схему контактов первого порядка между группами.

Могло бы, например, оказаться, что

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

В данном случае a_{24}=1 означает, что 4-й человек второй группы находился в контакте со 2-м больным первой группы. Аналогично, b_{33}=0 означает, что 3-й человек третьей группы не соприкасался с 3-м человеком из второй группы.

Нас могут интересовать также непрямые контакты, или контакты второго порядка, между семью людьми третьей группы и тремя больными первой. Эти контакты второго порядка описывает матричное произведение *C*=*AB*. Элемент $c_{ij}=\sum_{k=1}^{6}a_{ik}b_{kj}$ дает число контактов второго порядка между *j*-м человеком третьей группы и *i*-м человеком из группы больных.

Для заданных матриц *A* и *B* получаем

$$C=AB=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&1&1\\0&0&2&1&0&1&0\\2&0&1&1&0&2&1\end{pmatrix}.$$

Элемент c_{23}=2 показывает, что имеется два контакта второго порядка между 3-м человеком третьей группы и 2-м инфекционным больным. Заметим, что у 6-го человека из третьей группы оказалось 1+1+2=4 непрямых контактов с зараженной группой. Таких контактов нет только у 5-го человека.

Пример: Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&2\\1&3\end{pmatrix}.$$

Найти det (*AB*).

Решение.

1-й способ: $\det A=4-6=-2$; $\det B=15-2=13$; $\det(AB)=\det A\cdot\det B=-26$.

2-й способ: согласно (3.8), $AB=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3\\3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8\\19&18\end{pmatrix}$,

$$\det(AB)=7\cdot18-8\cdot19=126-152=-26.$$

- **Обратная матрица.**

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Если существуют квадратные матрицы *X* и *A* одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю, имеет обратную матрицу и притом только одну.

Обратную матрицу находят по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Можно записать также следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{\det A},$$

где A_{ji} - дополнительный минор (алгебраическое дополнение) элемента a_{ji} матрицы A.

Пример: Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

найти A^{-1} и сделать проверку.

Решение. Обратную матрицу найдем по формуле (3.11), которая для случая n=3 имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем $\det A = |A| = 2$. Так как определитель исходной матрицы отличен от нуля, то обратная матрица существует.

Найдем алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Из полученных алгебраических дополнений составим новую матрицу, транспонируем ее и разделим на определитель $\det A$. Таким образом, мы получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 11 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 & -1 & 1{,}5 \\ -5 & 2 & -2 \\ 5{,}5 & -2 & 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Для выполнения проверки найдем произведение $A \cdot A^{-1}$, которое должно быть равно единичной матрице:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\3&1&-1\\-2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3{,}5&-1&1{,}5\\-5&2&-2\\5{,}5&-2&2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A;$

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1};$

3) $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}.$

Тема 13. Система линейных уравнений.

- **Система линейных алгебраических уравнений.**

Система *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases}a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1,\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2,\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m,\end{cases} \tag{3.12}$$

где через a_{ij} обозначен коэффициент при неизвестном x_j в *i*-м уравнении системы (*i*=1,…,*m*; *j*=1,…,*n*); $x_1, x_2, ..., x_n$ - неизвестные; а числа $b_1, b_2, ..., b_m$ называются свободными членами.

Таблица коэффициентов при неизвестных называется **матрицей системы**

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

столбец $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}$ - **столбцом неизвестных**, а столбец $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_m\end{pmatrix}$ - **столбцом свободных членов**.

Таким образом, систему линейных алгебраических уравнений можно представить в матричном виде:

$$A\cdot X=B.$$

Если столбец *B* нулевой (все элементы равны нулю), то такая система называется **однородной**, в противном случае **– неоднородной**.

Основными методами решения систем линейных алгебраических уравнений являются матричный метод, метод Крамера и метод Гаусса. Первые два метода применимы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей. Методом Гаусса можно решать любую систему линейных алгебраических уравнений.

- **Матричная запись и матричный метод решения систем линейных уравнений.**

Этот метод удобен для решения систем невысокого порядка и основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в виде:

$$A \cdot X = B.$$

Если матрица A невырожденная ($\det A \neq 0$), сделаем следующее преобразование:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, откуда получаем:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{3.13}$$

Пример: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

По формуле (3.11) найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4\text{-}9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30 \neq 0.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ -1 & 14 & -19 \\ -1 & -16 & 11 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

По формуле (3.13) находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Пример: [6] На новый ареал переселяют три вида птиц общей численностью в 10000 особей. Согласно наблюдениям, популяции этих трех видов должны возрастать с ежегодным коэффициентом прироста в 3, 4 и 5% соответственно для I, II и III видов. Установлено, что общий прирост популяций за первый год составит 380 особей и что прирост популяции первого вида равен приросту третьего вида. Найдите начальные численности популяций трех видов.

Решение. Обозначим x, y, z – первоначальную численность особей I, II и III видов соответственно.

Тогда имеет место уравнение:

$$x + y + z = 10000.$$

Прирост популяции первого вида составляет 3% от x, то есть $0{,}03x$. Соответственно для популяций второго и третьего типов будем иметь прирост $0{,}04y$ и $0{,}05z$. Тогда из условий задачи будем иметь еще два уравнения:

$$0{,}03x + 0{,}04y + 0{,}05z = 380,$$

$$0{,}03x = 0{,}05z.$$

Умножив обе части этих уравнений на 100, составим и решим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 10000, \\ 3x + 4y + 5z = 38000, \\ 3x = 5z. \end{cases}$$

Следовательно, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10000 \\ 38000 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Согласно (3.11), найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 3(5 - 4) - 5(4 - 3) = 3 - 5 = -2 \neq 0.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -20; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 30; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -20 & 30 & -12 \\ 5 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -20 & 5 & 1 \\ 30 & -8 & -2 \\ -12 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -15 & 4 & 1 \\ 6 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -15 & 4 & 1 \\ 6 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-15+6 & -\frac{5}{2}+4-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} \\ 30-60+30 & -\frac{15}{2}+16-\frac{15}{2} & -\frac{3}{2}+4-\frac{5}{2} \\ 30-30 & -\frac{15}{2}+\frac{15}{2} & -\frac{3}{2}+\frac{5}{2} \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -15 & 4 & 1 \\ 6 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10000 \\ 38000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, x =5000; y = 2000; z = 3000.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

Иногда требуется решить матричное уравнение вида

$$X \cdot A = B.$$

Если A – квадратная невырожденная матрица, то можно умножить справа обе части уравнения на A^{-1}, получим:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1},$$

откуда имеем

$$X = B \cdot A^{-1}. \qquad (3.14)$$

Пример: Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$$

и сделать проверку.

Решение. Решением этого матричного уравнения, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix},$$

является матрица $X_{2\times 2}$, которая определяется по формуле $X = B \cdot A^{-1}$.
Найдем

$$\Delta(A) = -10 - (-12) = 2, \ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -2 \\ 1{,}5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 & -2 \\ 1{,}5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

- **Метод Крамера.**

Габриэль Крамер (1704-1752) – швейцарский математик, ученик и друг Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры. Самая известная из работ Крамера – изданный незадолго до кончины трактат «Введение в анализ алгебраических кривых». В нем он решает систему линейных уравнений с помощью алгоритма, названного позже его именем: метод Крамера. Термина «определитель» (детерминант) тогда еще не существовало (его ввел Гаусс в 1801 году), но Крамер дал точный алгоритм его вычисления: алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, по одному из каждой строки и каждого столбца. Методы Крамера сразу же получили дальнейшее развитие в трудах Безу, Вандермонда и Кэли, которые и завершили создание основ линейной алгебры.

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0:

$$\det A \neq 0.$$

Система из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \dots;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (3.15)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- определитель системы, а Δ_j $(j = 1,2,\dots,n)$ - вспомогательные определители, которые получаются из определителя Δ заменой столбца из коэффициентов при x_j столбцом свободных членов:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\dots a_{1n} \\ a_{21}\dots a_{2,j-i} & b_2 & a_{2,j+1}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\dots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\dots a_{nn} \end{vmatrix},\ j = 1,2,\dots,n.$$

Эти формулы называются **формулами Крамера**.

Пример: Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 10000, \\ 3x + 4y + 5z = 38000, \\ 3x = 5z, \end{cases}$$

используя формулы Крамера.

Решение. Определитель системы равен

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 3(5 - 4) - 5(4 - 3) = 3 - 5 = -2 \neq 0.$$

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10000 & 1 & 1 \\ 38000 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 10000 & 1 \\ 38000 & 4 \end{vmatrix} = -5(40000-38000) = -10000;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10000 & 1 \\ 3 & 38000 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 3(50000-38000)-5(38000-30000)=36000-40000=-4000;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10000 \\ 3 & 4 & 38000 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3(38000-40000)=-6000.$$

По формулам Крамера (3.15) найдем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10000}{-2} = 5000; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4000}{-2} = 2000; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6000}{-2} = 3000.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

- **Метод Гаусса.**

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

Система *m* уравнений с *n* неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Решениями системы являются *n* чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Как было ранее показано, для системы линейных уравнений матрица

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей системы.

Матрица системы, к которой присоединен столбец свободных членов, называется **расширенной матрицей** системы

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Элементарными преобразованиями в расширенной матрице называются преобразования, которые не меняют множество решений системы (см. выше).

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времен, «королем математики». Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс заметил, что попарные суммы с противоположных концов одинаковы, и мгновенно получил результат 5050. Гаусс чрезвычайно строго относился к своим печатным трудам и никогда не публиковал даже выдающиеся результаты, если считал свою работу над этой темой незавершенной. На его личной печати было изображено дерево с несколькими плодами, под девизом: «Pauca sed matura» (немного, но спелые).

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений (3.12):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1, \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m, \end{cases}$$

где $d_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, $d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}$, $i = 2, 3, \ldots, n$; $j = 2, 3, \ldots, n+1$.

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и так далее.

Пример: Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Проведем некоторые элементарные преобразования:

1-й шаг – формирование первого столбца:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{II+2I \\ III-3I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right);$$

2-й шаг – формирование второго столбца:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 6 & 20\\ 0 & -1 & -4 & -14\end{array}\right) \overset{III+II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 6 & 20\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 6 & 20\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right).$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + 6x_3 = 20, \quad , \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

откуда получаем: x_1 =1, x_2 =2, x_3 =3.

Пример: Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z = 10000, \\ 3x + 4y + 5z = 38000, \\ 3x = 5z. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и проведем элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 10000\\ 3 & 4 & 5 & 38000\\ 3 & 0 & -5 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 10000\\ 0 & 1 & 2 & 8000\\ 0 & -3 & -8 & -30000\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 10000\\ 0 & 1 & 2 & 8000\\ 0 & 0 & -2 & -6000\end{array}\right).$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + y + z = 10000, \\ y + 2z = 8000, \\ z = 3000, \end{cases}$$

откуда получаем: z =3000; y =2000; x =5000.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

- **Ранг матрицы.**

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких-либо выбранных s строк и s столбцов.

Например, в матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

определитель $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ (или $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ и т.д.) является ее минором второго порядка, а определитель

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

- минором третьего порядка.

Рангом матрицы называется наивысший порядок ее минора, отличного от нуля. Для ранга матрицы A используют обозначение $r(A)$.

Если ранг матрицы равен k, то из этого следует, что среди миноров k-го порядка хотя бы один отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка равны нулю.

Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, поэтому их используют при определении ранга матрицы.

Пример: Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \; r(A) = 2.$$

Пример: Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \; r(A) = 2.$$

- **Системы линейных однородных уравнений.**

Однородная система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0; \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений всегда имеет нулевое (тривиальное) решение:

$$x_1 = 0\,,\ x_2 = 0\,,\ \dots\,,\ x_n = 0\,.$$

У любой однородной системы $r(A) = r(B)$, так как расширенная матрица B отличается от матрицы A только нулевым столбцом.

Если у однородной системы $r(A) = r(B) = n$, то она имеет только нулевое решение.

Если у однородной системы $r(A) = r(B) < n$, то она имеет ненулевые решения.

Если матрица A однородной системы – квадратная, то однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $|A|$=0.

- **Фундаментальная система решений.**

Пусть однородная система линейных алгебраических уравнений имеет k ненулевых линейно независимых решений (ни одно из них нельзя выразить линейно через остальные) $X_1, X_2, ..., X_k$. Эти решения образуют **фундаментальную систему**, если любое решение системы X можно представить в виде

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_k X_k\,.$$

Число решений k в фундаментальной системе равно числу свободных неизвестных и определяется по формуле

$$k = n - r(A)\,, \tag{3.17}$$

где n - число неизвестных, а $r(A)$ - ранг матрицы системы.

Пример: Имеет ли однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

ненулевые решения? Если да, то найти их, выписав фундаментальную систему решений.

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее по методу Гаусса:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} x_1 \quad x_4 \quad x_3 \quad x_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} x_1 \quad x_4 \quad x_3 \quad x_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Число неизвестных n=4, а $r(A) = r(B)$=2. Поскольку $r(A) = r(B) < n$, то однородная система имеет ненулевые решения. Выпишем систему, которая соответствует полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 8x_2 = 0; \\ x_4 + 5x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_2 + x_3; \\ x_4 = -5x_2. \end{cases}$$

Неизвестные x_2 и x_3 - свободные, их можно задавать произвольно. Обозначим $x_2 = C_1$ и $x_3 = C_2$, где C_1, C_2 - любые вещественные числа. Выпишем решение системы в матричном виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8C_1 + C_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ -5C_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2 .$$

Решения

$$X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ и } X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Таким образом, в разделе 3 мы познакомились со следующими основными понятиями:

- Матрицы и действия над ними.
- Определители и их основные свойства.
- Обратная матрица.
- Ранг матрицы.
- Системы линейных уравнений. Матричная запись систем линейных уравнений.
- Матричный метод решения систем линейных уравнений.
- Метод Крамера.
- Метод Гаусса.
- Системы линейных однородных уравнений.
- Фундаментальная система решений.

Овладение этим материалом позволит успешно освоить другие разделы дисциплины «Математика»

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Тема 14. Функция нескольких переменных.

- **Понятие функции нескольких переменных.**

Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин.

Уравнение состояния газа $pV = RT$ представляет зависимость между тремя переменными: давлением p, объемом V и температурой T, R – универсальная газовая постоянная. Любая из переменных уравнения $pV = RT$ есть функция двух переменных, например,

$$p = \frac{RT}{V} = f(T, V).$$

Любая физиологическая характеристика организма (давление, температура, вес, рост и так далее) является функцией многих переменных.

Для изучения подобных зависимостей вводится понятие функции нескольких переменных. Так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных, то ограничимся рассмотрением этих функций.

Переменная величина z называется **функцией двух переменных** x, y, если каждой паре чисел, которые могут (по условию задачи) быть значениями переменных x и y, соответствует определенное значение z. Символически функция двух переменных обозначается так: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ и так далее.

- **Область определения функции нескольких переменных.**

Пара значений $(x; y)$ может рассматриваться как точка на плоскости. Поэтому, имея дело с функцией $z = f(x, y)$, часто говорят, что z есть функция точки $(x; y)$.

Множество пар значений, которые могут принимать переменные x и y, называется **областью определения** или **областью существования** функции.

Геометрически область определения функции соответствует некоторой совокупности точек плоскости Oxy. В частном случае областью определения функции может быть и вся плоскость. Обычно области определения функции представляют собой части плоскости, ограниченные линиями. Линию, ограничивающую данную область, называют **границей** области. Точки области, не лежащие на границе, называют **внутренними точками** области. Область, состоящая из внутренних точек, называется **открытой** или **незамкнутой**. Если же к области относятся и точки границы, то область называется **замкнутой**.

Часто функция $z = f(x, y)$ задается без указания физического смысла входящих в нее величин. В этом случае область определения охватывает все те точки, для которых формула имеет смысл.

Пример. [1] Функция $z = x^2 + y$ задана для всевозможных x и y. Поэтому пара чисел $(x; y)$ может представлять собой координаты любой точки плоскости. В связи с этим говорят, что данная функция определена на всей плоскости Oxy.

Пример. [1] Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена только при $x^2 + y^2 \leq 1$, то есть в круге, ограниченном окружностью $x^2 + y^2 = 1$, включая эту окружность (замкнутая область).

Пример. [1] Функция $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ определена в круге $x^2 + y^2 < 1$, то есть в круге, ограниченном окружностью $x^2 + y^2 = 1$, исключая эту окружность (открытая область).

Таким образом, областью определения функции двух переменных служит вся плоскость или некоторая ее часть (говорят: область G на плоскости).

- **Способы задания функции двух переменных.**

1. Аналитический способ.

Функцию двух переменных можно задать формулой (или несколькими формулами). Функция, заданная формулой, может быть явной или неявной. Например, $pV = RT$ – каждая из переменных p, V и T есть неявная функция от двух других; $p = \frac{RT}{V}$ – явная функция.

2. Табличный способ.

Функцию двух переменных можно задать таблицей. Таблицу удобно располагать в виде прямоугольника. В верхней строке представляются значения одного из аргументов, в левом столбце – значения другого аргумента. На пересечении соответствующих строки и столбца записывают значение функции. Таблица такого вида называется таблицей с двойным входом.

Приведенная ниже таблица 1 дает значения площади прямоугольника $S = ab$ по значениям его сторон a и b.

Таблица 1.

b \ a	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Если же функциональная зависимость $z = f(x, y)$ возникает в результате измерений величины z при экспериментальном изучении какого-либо явления, то сразу получается таблица, определяющая z как функцию двух переменных. В этом случае функция задается только таблицей.

3. Графический способ.

Функцию двух независимых переменных можно представить пространственной моделью (пространственным графиком). Пространственная модель функции $z = f(x, y)$ есть некоторая поверхность, отнесенная к прямоугольной системе координат в пространстве $Oxyz$.

Графиком функции двух переменных является поверхность, проектирующаяся в область определения функции на плоскость Oxy.

Пример. [1] Графиком функции $z = 1 - x - y$ является плоскость, проходящая через точки (1;0;0), (0;1;0) и (0;0;1).

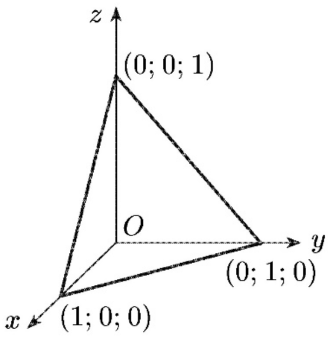


Рис. 1.

Пример. [1] $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

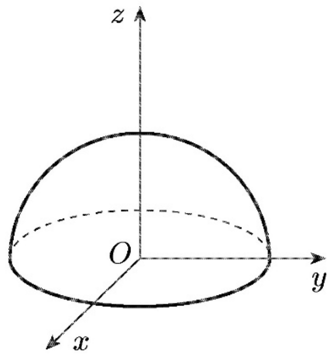


Рис. 2.

Пример. [1] $z = x^2 + y^2$

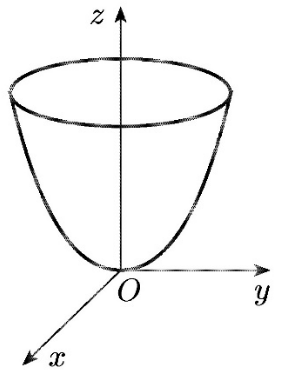


Рис. 3.

Функции трех (и большего числа) переменных не имеют наглядного геометрического представления.

- **Предел и непрерывность функции двух переменных.**

Понятие предела функции двух переменных устанавливается так же, как для функции одной переменной.

Число A называется **пределом функции** $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если z неограниченно приближается к A всякий раз, когда точка $M(x; y)$ неограниченно приближается к точке $M_0(x_0; y_0)$.

Функция $z = f(x,y)$ двух независимых переменных x и y непрерывна для значений $(x; y)$, если

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Поясним это геометрически. Пусть поверхность, выражаемая функцией $z = f(x,y)$, имеет вид, указанный на рис. 4. Точка M на этой поверхности имеет координаты x, y, z. Дадим приращение Δx и Δy независимым переменным x и y. При этом z получит приращение $QM_1 = \Delta z$. Новая точка M_1 на поверхности будет иметь координаты $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$.

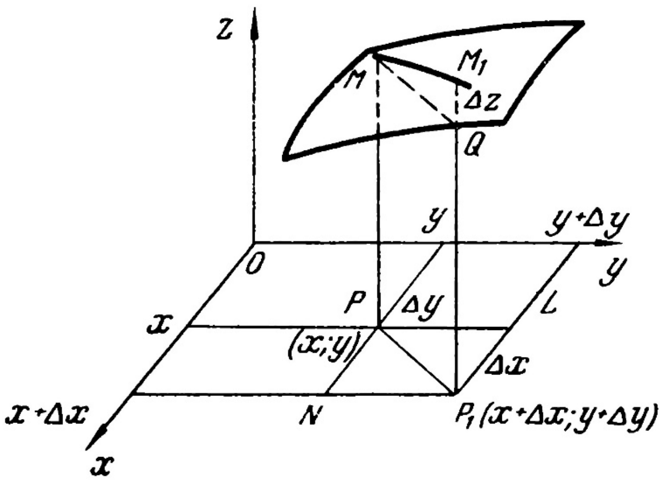


Рис. 4.

Если в точке M функция непрерывна, то, каким бы образом Δx и Δy ни приближались к пределу, равному нулю, Δz будет также приближаться к пределу, равному нулю, то есть P_1M_1 будет стремиться к PM.

Тема 15. Производные функции нескольких переменных.

- **Частные производные.**

Производная функции двух независимых переменных является многозначной, так как приращению x и y соответствует прямоугольник приращений PLP_1N со сторонами Δx и Δy (рис. 6.4) и переход из точки P_1 в точку P может быть осуществлен бесчисленным множеством путей. Производная функции в точке P, как видим, зависит от пути перехода. Поэтому задачу ее нахождения можно решать в два приема: предположив сначала, что изменяется x, а y остается постоянным, а затем, что изменяется y, а x остается постоянным. В этом случае производные называют частными производными.

Частной производной функции $z = f(x,y)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции, когда изменяется x, к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю. Обозначения частной производной z по x:

$$z'_x,\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$ надо понимать как неразрывный символ частной производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Частная производная по y определяется и обозначается аналогично. Например, частная производная от функции z по переменной y обозначается:

$$z'_y,\ f'_y(x,y),\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y}$$

и определяется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Определение частных производных можно распространить и на функцию какого угодно числа независимых переменных. Исходя из определения, частная производная по существу есть производная функции одной переменной и выражает скорость изменения функции при изменении одной из переменных, когда другие переменные не изменяются.

Пример. [1] Если $z = xy + xy^2 - 1$, то $z'_x = y + y^2$, $z'_y = x + 2xy$.

Пример. [14] Найти значения частных производных от функции $z = 2x^2 + y^2$ в точке $P(1; 2)$.
Решение. Считая z функцией одного аргумента x, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y^2) = 4x.$$

В точке $P(1; 2)$ значение этой производной равно $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P(1;2)} = 4.$

Считая z функцией одного аргумента y, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y^2) = 2y.$$

В точке $P(1; 2)$ значение этой производной равно $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P(1;2)} = 4.$

Пример. [14] Найти частные производные $\frac{\partial p}{\partial V}, \frac{\partial V}{\partial T}, \frac{\partial T}{\partial p}$ из уравнения Клайперона-Менделеева $pV = RT$.
Решение. Имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{RT}{V}\right) = -\frac{RT}{V^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{p}\right) = \frac{R}{p},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pV}{R}\right) = \frac{V}{R}.$$

- **Дифференциал функции двух переменных.**

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y.

Произведение $z'_x \Delta x$ называют **частным дифференциалом** по x функции z и обозначают символом $d_x z = z'_x \Delta x$ или $d_x z = z'_x dx$, где $dx = \Delta x$ – приращение независимой переменной x. Аналогично $d_y z = z'_y dy$, где $dy = \Delta y$.

Сумма частных дифференциалов функции z называется ее **полным дифференциалом** и обозначается символом dz. Таким образом,

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Пример. [1] Если $z = (x + y)^2$, то $z'_x = z'_y = 2(x + y)$ и $dz = 2(x + y)(dx + dy)$.

Пример. [14] Найти ошибку в определении фокусного расстояния линзы $F = \frac{ab}{a+b}$, где a – расстояние от линзы до предмета, b – от линзы до изображения.

Решение. Ошибки переменных a и b обозначим через da и db, ошибку F через dF. $dF \approx \Delta F$.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{ab}{a+b}\right) da + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{ab}{a+b}\right) db =$$

$$= \frac{b^2 da + a^2 db}{(a+b)^2},$$

$$\Delta F \le \frac{b^2|da| + a^2|db|}{(a+b)^2}.$$

Относительная ошибка

$$\left|\frac{dF}{F}\right| \le \left|\frac{1}{a+b}\right| \left(\left|\frac{da}{a}\right| + \left|\frac{db}{b}\right|\right).$$

- **Производные и дифференциалы высших порядков.**

Допустим, что функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Эти производные в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y. Частные производные от этих функций называются вторыми частными производными или **частными производными второго порядка** от данной функции $z = f(x, y)$. Каждая производная первого порядка имеет две частных производных. Таким образом, для функции $z = f(x, y)$ мы получаем четыре частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ носят название **смешанных частных производных второго порядка** и получаются в результате дифференцирования функции сначала по x, затем по y и наоборот.

Пример. [14] Найти частные производные первого и второго порядка для функции

$$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1.$$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1) = 3x^2y^2 - 3y^3 - y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1) = 2x^3y - 9xy^2 - x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 3y^3 - y) = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y - 9xy^2 - x) = 6x^2y - 9y^2 - 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y - 9xy^2 - x) = 2x^3 - 18xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 3y^3 - y) = 6x^2y - 9y^2 - 1.$$

В приведенном примере смешанные производные оказались тождественными, и это не случайно, так как имеет место теорема.

Теорема. Вторые смешанные производные функции $z = f(x, y)$ при условии их непрерывности равны между собой, то есть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Аналогично можно получить частные производные третьего и более высоких порядков от функции многих независимых переменных.

Пусть теперь имеется функция $z = f(x, y)$, обладающая непрерывными частными производными второго порядка. Рассмотрим ее полный дифференциал

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Так как z'_x и z'_y по предположению имеют непрерывные частные производные первого порядка, то от функции dz, в свою очередь, можно взять полный дифференциал $d(dz)$. Так получим **полный дифференциал второго порядка** (или второй дифференциал), который обозначается d^2z.

Аналогично, потребовав существование непрерывных частных производных третьего, четвертого, -го порядков, можно получить полные дифференциалы соответственно третьего, четвертого, n-го порядков.

- **Касательная плоскость и нормаль к поверхности.**

Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

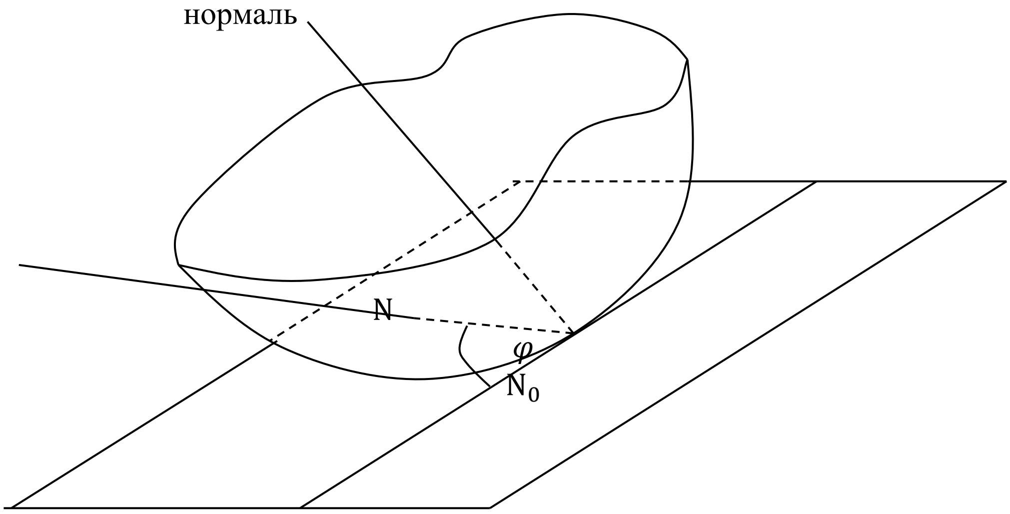


Рис. 5.

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности. В какой–либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $N_0\big(x_0; y_0; (x_0, y_0)\big)$, касательная плоскость в точке $N_0\big(x_0; y_0; (x_0, y_0)\big)$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пример. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке $M(1; 1; 1)$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2.$$

Найдем значения частных производных в точке $M(1; 1; 1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z-1=-(x-1)+2(y-1) \text{ или } x-2y+z=0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

- **Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.**

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ является приращение координаты z касательной плоскости к поверхности при переходе от точки $(x_0;y_0)$ к точке $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

- **Производная по направлению.**

Рассмотрим функцию $u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ и точке $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS:

$$\Delta S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}.$$

Высказанные выше предположения проиллюстрируем на рисунке (рис. 6.6).

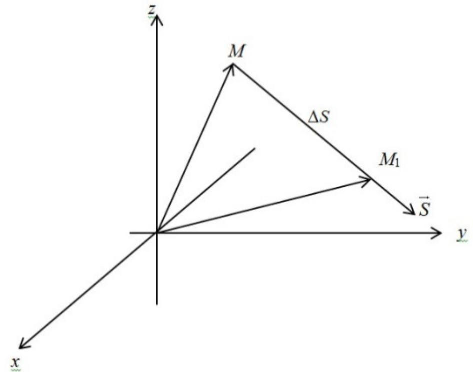


Рис. 6.

Далее предположим, что функция $u(x,y,z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y, z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z,$$

где величины ε_1, ε_2, ε_3 – бесконечно малые при $\Delta S\to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta,\ \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma.$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Заметим, что величина S является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение. Предел $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции** $u(x,y,z)$ **по направлению вектора** $\vec{S}$ в точке с координатами (x,y,z).

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке $A(1;2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, где точка $B(3;0)$.
Решение. Прежде всего, необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3-1; 0-2) = (2;-2) = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}.$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx.$$

Значения этих величин в точке A:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 4.$$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{\jmath}.$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, то есть определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

- значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

- **Градиент.**

Если в некоторой области G задана функция $u(x, y, z)$ и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

При этом говорят, что в области G задано поле градиентов.

Пример. Найти градиент функции $u = x^2 - arctg\,(y + z)$ в точке $M(2; 1; 1)$.

Решение. Находим частные производные функции $u = x^2 - arctg\,(y + z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1+(y+z)^2}, \ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{1+(y+z)^2}.$$

Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - arctg\,(y + z)$ в точке $M(2; 1; 1)$:

$$u'_x(2; 1; 1) = 4, \ u'_y(2; 1; 1) = -\frac{1}{5}, \ u'_z(2; 1; 1) = -\frac{1}{5}.$$

Вычисляем градиент функции $u = x^2 - arctg\,(y + z)$ в точке $M(2; 1; 1)$:

$$grad\, u|_{(2;1;1)} = \{u'_x(2; 1; 1), u'_y(2; 1; 1), u'_z(2; 1; 1)\} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}.$$

- **Скалярное поле. Лапласиан скалярного поля.**

Величины, которые полностью определяются заданием их численных значений, называются **скалярными**. Скалярными величинами, например, являются длина, площадь, объем, масса, температура тела и др.

Если в каждой точке M пространства или некоторой его части V поставлено в соответствие определенное значение u некоторой скалярной физической величины, то говоря, что в V определено **скалярное поле** этой величины, то есть функция точки M: $u = u(M)$. Эту функцию называют **функцией поля** или просто **полем.**

Пример. u может быть температурой, давлением газа и так далее.

Если величина $u = u(M)$ не зависит от времени t, то скалярное поле называется **стационарным**.

Например, если в пространстве ввести прямоугольную систему координат $Oxyz$, то точка M в этой системе будет иметь определенные координаты x, y, z и скалярная величина u

станет функцией этих координат: $u = u(x, y, z)$. Можно ввести в пространстве и другие системы координат, например, цилиндрическую и сферическую.

Для скалярного поля $u = u(x, y, z)$ можно ввести дифференциальный оператор второго порядка:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

называемый оператором Лапласа или **лапласианом**.

С помощью данного оператора удобно записывать уравнения Лапласа, Пуассона и волновое уравнение. В физике оператор Лапласа применим в электростатике и электродинамике, квантовой механике, во многих уравнениях физики сплошных сред, а также при изучении равновесия мембран, плёнок или поверхностей раздела фаз с поверхностным натяжением, в стационарных задачах диффузии и теплопроводности, которые сводятся, в непрерывном пределе, к обычным уравнениям Лапласа или Пуассона или к некоторым их обобщениям.

- **Экстремум функции нескольких переменных.**

Понятие максимума и минимума можно распространить и на функции нескольких переменных (здесь для случая двух переменных).

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности и отличных от M_0 выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y))$$

или

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0 \quad (\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0).$$

Теорема (необходимые условия существования экстремума).
Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум и в этой точке существуют частные производные z_x и z_y, то

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Примечание. Приведенные условия существования экстремума не являются достаточными, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример. [1] Рассмотрим функцию $z = x^3 + y^3$. Имеем $z'_x = 3x^2$, $z'_y = 3y^2$. Производные равны нулю в точке (0;0), но экстремума эта функция в точке (0;0) не имеет, так как в любой окрестности этой точки она принимает значения разных знаков, а в самой точке (0;0) имеем $z = 0$.

Достаточные условия существования экстремума для функций нескольких переменных имеют более сложный вид, чем для функций одной переменной.

Теорема (достаточные условия существования экстремума). Пусть функция $f(x, y)$, непрерывная вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, удовлетворяет условиям

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Обозначим:

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{y^2}(x_0, y_0), \quad D = AC - B^2,$$

тогда:

1) если $D > 0$, то в точке M_0 функция $f(x, y)$ имеет экстремум, а именно максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$;
2) если же $D < 0$, то в точке M_0 функция $f(x, y)$ экстремума не имеет.

Пример. [1] Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$. Ее частные производные

$$z'_x = 3x^2 - 3y, z'_y = 3y^2 - 3x$$

обращаются в ноль в точках $M_0(0,0)$ и $M_1(1,1)$. Ее вторые производные равны

$$z''_{x^2} = 6x, \; z''_{xy} = -3, \; z''_{y^2} = 6y.$$

В точке M_0 имеем $D = -9 < 0$, следовательно, экстремума в этой точке нет. В точке M_1 имеем $D = 27 > 0$, причем $A = 6 > 0$, следовательно, в точке M_1 – минимум.

Примечание. Отметим, что в случае $D = 0$ экстремум может быть, но его может и не быть.

Пример. [1] Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3$. В точке (0;0), где $D = 0$, эта функция, как показано ранее, экстремума не имеет.

Пример. [1] Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$. В точке (0;0), где $D = 0$, эта функция имеет минимум, потому что в любой окрестности этой точки данная функция положительна, а в самой точке (0;0) $z = 0$.

Пример. [1] В химической реакции участвуют три вещества с концентрациями x, y и z. Скорость реакции v в любой момент времени выражается законом

$$v = kx^2yz.$$

Найти концентрации x, y и z, при которых скорость v течения реакции максимальна.
Решение. Пусть $x + y + z = 100$ (%). Тогда:

$$z = 100 - x - y$$

$$v = kx^2y(100 - x - y). \qquad (*)$$

Найдем частные производные функции v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = k(200xy - 3x^2y - 2xy^2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = k(100x^2 - x^3 - 2x^2y).$$

Приравнивая полученные выражения к нулю, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 200xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 100x^2 - x^3 - 2x^2y = 0. \end{cases}$$

Так как значения $x = 0$ и $y = 0$ максимума функции (*) не дают, то сводим оба уравнения сокращением к виду:

$$\begin{cases} 200 - 3x - 2y = 0, \\ 100 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x = 50$, $y = 25$. Тогда $z = 25$. Легко проверить, что в точке $M_0(50{,}25)$ $D > 0$ и $A < 0$. Следовательно, при концентрациях $x = 50$ %, $y = 25$ % и $z = 25$ % скорость v течения реакции максимальна.

- **Набольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.**

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области D. Пусть в этой области заданная функция имеет конечные частные производные первого порядка (за исключением, быть может, конечного количества точек). Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в данной замкнутой области требуется выполнить четыре шага простого алгоритма.

Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений
функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D.

1. Найти критические точки функции $z = f(x, y)$, принадлежащие области D.
2. Исследовать поведение функции $z = f(x, y)$ на границе области D, найдя точки возможного наибольшего и наименьшего значений.
3. Найти значения функции $z = f(x, y)$ во всех точках, полученных в предыдущих двух пунктах.
4. Из значений, полученных в третьем пункте, выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример.[21] Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$$

в замкнутой области, ограниченной линиями

$$x = 3, y = 0 \text{ и } y = x + 1.$$

Решение. Будем следовать указанному выше алгоритму, но для начала разберемся с чертежом заданной области, которую обозначим буквой D. Нам заданы уравнения трех прямых, которые эту область ограничивают. Прямая $x = 3$ проходит через точку (3;0) параллельно оси ординат (оси Oy). Прямая $y = 0$ – это уравнение оси абсцисс (оси Ox). Ну, а для построения прямой $y = x + 1$ найдем две точки, через которые и проведем данную прямую. Можно, конечно, подставить вместо x несколько произвольных значений. Например, подставляя $x = 10$, получим: $y = x + 1 = 10 + 1 = 11$. Мы нашли точку (10;11), лежащую на прямой $y = x + 1$. Однако лучше отыщем те точки, в которых прямая $y = x + 1$ пересекается с линиями $x = 3$ и $y = 0$. Почему это лучше? Потому, что мы сразу получим две точки для построения прямой $y = x + 1$ и заодно выясним, в каких точках эта прямая пересекает иные линии, ограничивающие заданную область. Прямая $y = x + 1$ пересекает прямую $x = 3$ в точке (3;4), а прямую $y = 0$ – в точке (−1;0). Всё готово для построения чертежа, который будет иметь такой вид:

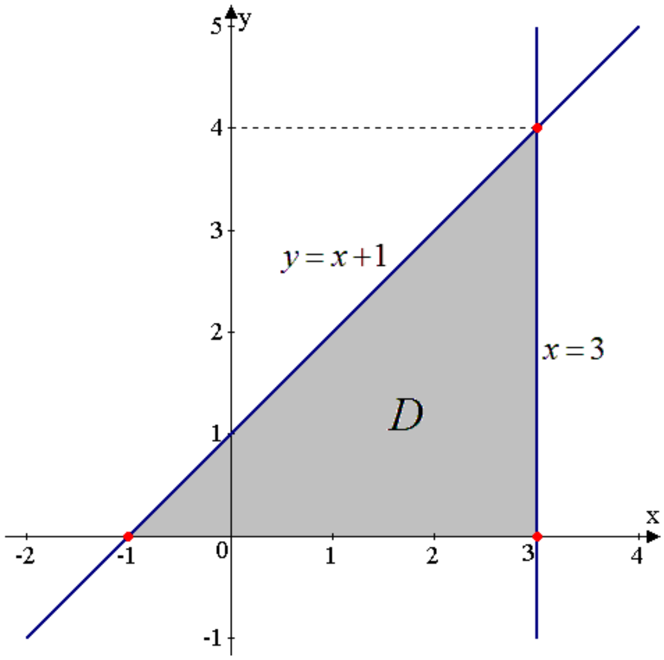


Рис. 7.

Вот теперь перейдём к первому шагу алгоритма. Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y.$$

Найдем точки, в которых обе частные производные равны нулю (стационарные точки):

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0, \\ 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что (1;1) – единственная стационарная точка функции z. Однако недостаточно просто найти стационарные точки. Нужно выбрать те из них, которые принадлежат области D. В нашем случае точка (1;1) принадлежит этой области. Обозначим эту точку как $M_1(1;1)$. Эта первая точка из того списка, который мы сформируем к концу третьего шага алгоритма.

Теперь настал черед исследовать поведение функции на границе области, то есть переходим ко второму шагу алгоритма. Начнем с прямой $y = 0$. Прямая $y = 0$ (ось абсцисс) ограничивает область D при условии $-1 \le x \le 3$. Подставим $y = 0$ в нашу функцию $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$:

$$z = x^2 + 2x \cdot 0 - 0^2 - 4x = x^2 - 4x.$$

По сути, мы получили функцию одной переменной x. Для этой функции нужно найти наибольшее и наименьшее значения на отрезке $-1 \le x \le 3$. Отыщем производную этой функции и приравняем её к нулю:

$$z'_x = 2x - 4,\quad 2x - 4 = 0,\quad x = 2.$$

Значение $x = 2$ принадлежит отрезку $-1 \le x \le 3$, поэтому к списку точек добавим ещё и $M_2(2;0)$. Кроме того, введем в рассмотрение еще и точки на концах отрезка $-1 \le x \le 3$, то есть точки $M_3(-1;0)$ и $M_4(3;0)$. Кстати, если бы какая-то точка не принадлежала рассматриваемому отрезку, мы бы просто не вводили ее в рассмотрение.

Теперь обратимся к прямой $x = 3$. Эта прямая ограничивает область D при условии $0 \leq y \leq 4$. Подставим $x = 3$ в заданную функцию:

$$z = 3^2 + 2 \cdot 3y - y^2 - 4 \cdot 3 = -y^2 + 6y - 3.$$

Мы получили функцию одной переменной y. Для этой функции нужно найти наибольшее и наименьшее значения на отрезке $0 \leq y \leq 4$. Отыщем производную этой функции и приравняем ее к нулю:

$$z'_y = -2y + 6, \quad -2y + 6 = 0, \quad y = 3.$$

Значение $y = 3$ принадлежит отрезку $0 \leq y \leq 4$, поэтому к списку точек добавим еще и $M_5(3; 3)$. Кроме того, нужно ввести в рассмотрение еще и точки на концах отрезка $0 \leq y \leq 4$, то есть точки (3;0) и (3;4). Одну из них мы уже получали ранее (это точка $M_4(3; 0)$), а вот вторую добавим в наш список точек, обозначив ее как $M_6(3; 4)$.

И, наконец, рассмотрим последнюю границу области D, то есть прямую $y = x + 1$. Эта прямая ограничивает область D при условии $-1 \leq x \leq 3$. Подставляя $y = x + 1$ в уравнение функции z будем иметь:

$$z = x^2 + 2x(x + 1) - (x + 1)^2 - 4x = 2x^2 - 4x - 1.$$

Вновь мы получили функцию одной переменной x. И вновь нужно найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $-1 \leq x \leq 3$. Отыщем производную этой функции и приравняем ее к нулю:

$$z'_x = 4x - 4, \quad 4x - 4 = 0, \quad x = 1.$$

Значение $x = 1$ принадлежит отрезку $-1 \leq x \leq 3$. Если $x = 1$, то $y = x + 1 = 2$. Добавим к списку точек ещё и $M_7(1; 2)$. Точки на концах отрезка $-1 \leq x \leq 3$ были добавлены в список ранее.

Второй шаг решения закончен. Мы получили семь точек: $M_1(1; 1)$, $M_2(2; 0)$, $M_3(-1; 0)$, $M_4(3; 0)$, $M_5(3; 3)$, $M_6(3; 4)$, $M_7(1; 2)$.

Обратимся к третьему шагу алгоритма. Найдем значения функции z в семи точках, полученных в предыдущем пункте:

$$z(M_1) = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1^2 - 4 \cdot 1 = -2;$$
$$z(M_2) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 0^2 - 4 \cdot 2 = -4;$$
$$z(M_3) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 0^2 - 4 \cdot (-1) = 5;$$
$$z(M_4) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0 - 0^2 - 4 \cdot 3 = -3;$$
$$z(M_5) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3^2 - 4 \cdot 3 = 6;$$
$$z(M_6) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 4^2 - 4 \cdot 3 = 5;$$
$$z(M_7) = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 - 4 \cdot 1 = -3.$$

Наконец, настал черед для последнего, четвертого шага алгоритма. Выбирая наибольшее и наименьшее значения из тех чисел, что были получены в третьем пункте, будет иметь:

$$z_{min} = -4; \quad z_{max} = 6.$$

- **Условный экстремум.**

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию $u = f(x,y)$, не являются независимыми, то есть существует некоторое соотношение $\varphi(x,y) = 0$, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, так как другая может быть выражена через нее из уравнения связи. Тогда $u = f(x, y(x))$ и

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\ . \qquad (4.1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (4.2)$$

Умножим равенство (4.2) на число λ и сложим с равенством (4.1):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум. Выражение $u = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ называется **функцией Лагранжа.**

Пример. Найти экстремум функции $f(x,y) = xy$, если уравнение связи: $2x + 3y - 5 = 0$.
Решение. Построим функцию Лагранжа:

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5),$$

для которой будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda,$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

В результате получаем:

$$\lambda = -\frac{5}{12}, \quad x = \frac{5}{4}, \quad y = \frac{5}{6}.$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Таким образом, в разделе 4 мы познакомились со следующими понятиями:

- Функция двух переменных
- Область определения (область существования) функции нескольких переменных
- Граница области определения функции нескольких переменных
- Внутренние точки области определения функции нескольких переменных
- Открытая (незамкнутая) область определения функции нескольких переменных
- Замкнутая область определения функции нескольких переменных
- График функции нескольких переменных
- Предел функции двух переменных
- Частная производная функции двух переменных
- Частный дифференциал функции двух переменных
- Полный дифференциал функции двух переменных
- Частные производные второго порядка
- Смешанные частные производные второго порядка
- Полный дифференциал второго порядка
- Касательная плоскость к поверхности
- Нормаль к поверхности
- Геометрический смысл полного дифференциала
- Направляющие косинусы
- Производная функции по направлению
- Градиент функции
- Скалярная величина
- Скалярное поле
- Функция поля
- Стационарное поле
- Лапласиан
- Условный экстремум
- Уравнение связи
- Функция Лагранжа
- Метод множителей Лагранжа

Овладение этим материалом позволит успешно освоить другие разделы дисциплины «Математика».

РАЗДЕЛ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Тема 16. Неопределенный интеграл.

- **Первообразная и неопределенный интеграл.**

Функция $F(x)$ называется **первообразной** (антипроизводной, примитивной (от лат. primitivus – «первый, самый ранний»)) функцией для данной функции $f(x)$ на данном промежутке, если на этом промежутке $F'(x) = f(x)$.

Пример: Функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси, так как при любом x имеем $\left(x^3\right)' = 3x^2$. Отметим при этом, что вместе с функцией $F(x) = x^3$ первообразной для функции $f(x) = 3x^2$ является любая функция $\Phi(x) = x^3 + C$, где C - произвольное постоянное число (это следует из того, что производная постоянной равна нулю). Это свойство имеет место и в общем случае.

Таким образом, если производная для функции одна, то есть операция дифференцирования однозначна, то нахождение первообразной для функции возможно лишь с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, то есть выражение $F(x)+C$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$, а C - произвольная постоянная, называют **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначают символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

$f(x)$ при этом называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, знак $\int$ - знаком интеграла.

Ньютон использовал (не везде) в качестве символа интегрирования значок квадрата (перед обозначением функции или вокруг него), но эти обозначения не получили широкого распространения. Современное обозначение неопределенного интеграла было введено Лейбницем в 1675 году. Он образовал интегральный символ из буквы S — сокращения слова лат. summa (сумма).

Русскоязычная традиция начертания знака интеграла (рис.8.а) отличается от принятой в некоторых западных странах. В англоязычной традиции, реализованной в системе LaTeX, символ существенно наклонен вправо (рис.8.б). Немецкая форма интеграла вертикальна (рис.8.в).

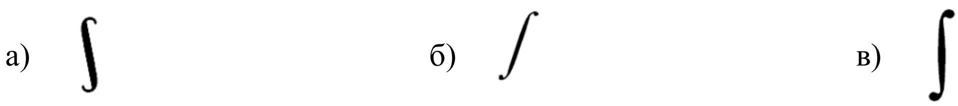


Рис.8.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит и неопределенный интеграл? Имеет место теорема: «Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$, то на этом сегменте у функции $f(x)$ существует первообразная».

- **Свойства неопределенного интеграла.**

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие свойства:

1. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ и, значит, $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$, что может быть переписано в виде: $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:
$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx . \tag{5.1}$$

4. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:
$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx . \tag{5.2}$$

Равенства (5.1) и (5.2) следует понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Равенство (5.2) распространяется на случаи алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Пример: [1] Рассмотрим скорость простой реакции первого порядка, которую можно представить так:
$$\frac{dx}{dt} = -kx ,$$
где x - концентрация реагирующего вещества в момент времени t, k - константа (знак «минус» показывает, что реагирующее вещество исчезает, то есть концентрация его в ходе реакции уменьшается). Отсюда
$$\frac{dx}{xdt} = -k \text{, или, что то же, } \frac{d(\ln x)}{dt} = -k .$$
Значит,
$$\ln x = -k\int dt \text{, и поэтому } \ln x = -kt + C \text{, откуда } x = e^C e^{-kt} .$$

Если мы примем, что при $t = 0$ $x = x_0$, то будем иметь $x_0 = e^C$. Тогда $x = x_0 e^{-kt}$. Это соотношение позволяет найти концентрацию x для любого момента времени.

- **Таблица интегралов.**

Таблица содержит формулы, легко проверяемые непосредственным дифференцированием.

Таблица 2.

Интеграл	Значение	Интеграл	Значение
$\int x^\alpha dx$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$
$\int \dfrac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x+a}{x-a}\right\| + C$

$\int e^x dx$	$e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \cos x dx$	$\sin x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tg\ x + C$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctg\ x + C$
$\int tg\ x dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int ctg\ x dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg \frac{x}{2}\right\rvert + C$

Используя таблицу основных интегралов и свойства неопределенных интегралов, решим следующие примеры.

Пример: Найти интеграл $\int x^5 dx$.

Решение. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

Пример: Найти интеграл $\int (3^x + \sin x) dx$.

Решение. $\int (3^x + \sin x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} - \cos x + C$.

Пример: Найти интеграл $\int \left(2x^3 - \sqrt{x} + 3\right) dx$.

Решение. $\int \left(2x^3 - \sqrt{x} + 3\right) dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 3x + C$.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

- **Замена переменных.**

При нахождении многих интегралов оказывается эффективной следующая идея: вместо исходной переменной x вводят новую переменную по формуле $x = \varphi(t)$ (где φ - дифференцируемая функция) таким образом, чтобы относительно новой переменной интеграл был значительно проще, вычисляют этот преобразованный интеграл, а затем возвращаются к старой переменной.

Итак, если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x=\varphi(t)$ и дифференциала $dx=\varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Иногда удобнее сделать подстановку в виде $t=\varphi(x)$, тогда $dt=\varphi'(x)dx$ и

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt\,.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int\sqrt{\sin x}\cos xdx.$$

Решение. Сделаем замену $t=\sin x$, дифференциал $dt=\cos xdt$. Тогда имеем:

$$\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=\int\sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+C\,.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx.$$

Решение. Сделаем замену $t=x^2+1$, тогда $dt=2xdx$, откуда $dx=\dfrac{dt}{2x}$. Получаем:

$$\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx=\int\frac{xt^{\frac{3}{2}}dt}{2x}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C=\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5}+C\,.$$

Используя известное равенство $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$, отметим ряд преобразований дифференциала, полезных для дальнейшего:

- $dx=d(x+b)$, где b - постоянная;
- $dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)$, где a, b - постоянные, $a\neq 0$;
- $xdx=\dfrac{1}{2}d(x^2)$;
- $\sin xdx=-d(\cos x)$;
- $\cos xdx=d(\sin x)$;
- $\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{dx}{x}=d(\ln x)$;
- $e^x dx=d(e^x)$ и так далее.

Про последние пять преобразованиий говорят, что функция, стоящая перед дифференциалом, внесена под знак дифференциала. Пользуясь этими преобразованиями, найдем следующие неопределенные интегралы.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{2x+3}\,.$$

Решение. Дифференциал dx можно представить в виде $dx = \frac{1}{2} d(2x+3)$, тогда

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \int \frac{\frac{1}{2} d(2x+3)}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C .$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int x e^{x^2} dx .$$

Решение. Внесем x под знак дифференциала, то есть $xdx = \frac{1}{2} d\left(x^2\right)$. Тогда

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d\left(x^2\right) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C .$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int ctg(3x+5) dx .$$

Решение. Имеем

$$ctg(3x+5) = \frac{\cos(3x+5)}{\sin(3x+5)} .$$

Используя замену $u = \sin(3x+5)$, получим дифференциал $du = 3\cos(3x+5)dx$, откуда $\cos(3x+5)dx = \frac{du}{3}$. Подставляя полученное выражение в исходный интеграл, имеем:

$$\int ctg(3x+5)dx = \int \frac{\cos(3x+5)}{\sin(3x+5)} dx = \int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|\sin(3x+5)| + C .$$

Итак, технически метод замены переменной в неопределенном интеграле реализуется двумя способами:

- Подведение функции под знак дифференциала.
- Собственно замена переменной.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx .$$

Решение. Используя замену $t = e^{\cos^2 x}$, получим дифференциал

$$dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \sin x dx = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx .$$

Тогда

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = -\int dt = -t + C = -e^{\cos^2 x} + C .$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} .$$

Решение. Используя замену $\sqrt{x}=t$, получим $dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$, откуда $dx=2tdt$. Тогда

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctg\,t+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}.$$

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение (выделим полный квадрат):

$$\frac{1}{x^2-6x+25}=\frac{1}{(x-3)^2+16}.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}.$$

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение (выделим полный квадрат):

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}}=\frac{1}{\sqrt{9-(x+1)^2}}.$$

Внесем (+1) под знак дифференциала, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$$

Сделаем замену $x+1=t$, тогда $dx=dt$ и

$$\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

- **Интегрирование по частям.**

Пусть u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. Тогда имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (5.3)$$

Формула показывает, что нахождение интеграла $\int udv$ приводит к нахождению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым, чем исходный. При переходе от левой части формулы (5.3) к ее правой части мы должны функцию u дифференцировать, а выражение dv - интегрировать.

Поэтому интегрирование по частям предполагает правильный выбор множителей u и dv под интегралом. Общий принцип такой: за u надо принимать множитель, который от дифференцирования упрощается, а за dv - множитель, который легко интегрируется.

По частям берутся интегралы вида (здесь $P_n(x)$ - многочлен n-й степени, k - натуральное число, m - число, $\alpha \neq -1$):

Таблица 3.

Типы интегралов	Действия над интегралами
$\int P_n(x)\cdot \sin mx\,dx$	Во всех таких интегралах следует принимать $P_n(x)=u$, а произведение «прямой» функции на dx - за dv. Интегрировать придется n раз.
$\int P_n(x)\cdot \cos mx\,dx$	
$\int P_n(x)\cdot e^{mx}\,dx$	
$\int P_n(x)\cdot a^{mx}\,dx$	
$\int P_n(x)\cdot \arcsin^k x\,dx$	Во всех таких интегралах произведение $P_n(x)\,dx$ принимаем за dv, а «обратную» функцию берем в качестве u. Необходимо применить к интегралу k раз формулу интегрирования по частям.
$\int P_n(x)\cdot \arccos^k x\,dx$	
$\int P_n(x)\cdot arctg^k\, x\,dx$	
$\int P_n(x)\cdot arcctg^k\, x\,dx$	
$\int P_n(x)\cdot \ln^k x\,dx$	
$\int \frac{\ln^k x}{x^\alpha}dx$	

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int x^2 \sin xdx.$$

Решение. По формуле интегрирования по частям (5.3):

$$\int x^2 \sin xdx = \left| u = x^2; \quad dv = \sin xdx \right|.$$

Теперь от функции $u = x^2$ берем дифференциал $du = 2xdx$, а выражение $dv = \sin xdx$ интегрируем: $\int dv = \int \sin xdx$, откуда получаем $v = -\cos x$. Тогда

$$\int x^2 \sin xdx = \begin{vmatrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2xdx.$$

Полученный интеграл содержит многочлен $(2x)$ степени, на единицу меньшей, чем исходный (x^2). Еще раз применим формулу (5.3) интегрирования по частям:

$$-x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2xdx = \begin{vmatrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{vmatrix} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin xdx\right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int x^2 e^{5x} dx.$$

Решение. По формуле интегрирования по частям (5.3):

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; dv = e^{5x} dx; \\ du = 2xdx; v = \frac{1}{5} e^{5x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2xdx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int xe^{5x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x; & dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; & v = \frac{1}{5} e^{5x} \end{array} \right| = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + C = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right) + C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int x \ln xdx .$$

Решение. По формуле интегрирования по частям (5.3):

$$\int x \ln xdx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \frac{1}{x} dx; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int xdx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx .$$

Решение. По формуле интегрирования по частям (5.3):

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & dv = \frac{1}{x^3} dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; & v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

В некоторых случаях, применяя формулу (5.3) интегрирования по частям, опять получаем данный интеграл (**возвратный**). Тогда интеграл определяется из получившегося алгебраического уравнения. К таким интегралам относятся:

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx ; \quad \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx ; \quad \int \sqrt{x^2 \pm a} \, dx .$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{x^2 + 3} \, dx .$$

Решение. По формуле интегрирования по частям (5.3):

$$\int \sqrt{x^2+3}\,dx = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{x^2+3};\, dv=dx; \\ du=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}dx;\, v=x \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{x^2+3};\, dv=dx; \\ du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx;\, v=x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2+3} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}dx = x\sqrt{x^2+3} - \int \frac{x^2+3-3}{\sqrt{x^2+3}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+3} - \int \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+3} - \int \sqrt{x^2+3}\,dx + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| + C\,.$$

Сравнивая начало и конец равенства, получим уравнение

$$2\int \sqrt{x^2+3}\,dx = x\sqrt{x^2+3} + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| + C\,,$$

откуда

$$\int \sqrt{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+3} + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| \right) + C\,.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int e^{2x}\cos x\,dx\,.$$

Решение. По формуле интегрирования по частям (5.3):

$$\int e^{2x}\cos x dx = \left| \begin{matrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos x dx; & v=\sin x \end{matrix} \right| = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin x dx; & v=-\cos x \end{matrix} \right| = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right] =$$

$$= e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx + C\,.$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства:

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C\,,$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Тема 17. Неопределенные интегралы некоторого специального вида.

- **Интегрирование рациональных дробей.**

Рациональной называется функция, которую можно представить в виде отношения двух многочленов, то есть

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,,$$

где $P_n(x)$ - многочлен *n*-ой степени, $Q_m(x)$ − многочлен *m*-ой степени. Такую функцию $f(x)$ еще иногда называют **рациональной дробью**.

Основное свойство рациональной дроби может быть выражено фразой: «Числитель и знаменатель рациональной дроби можно умножить и разделить на одно и то же отличное от нуля число, одночлен или многочлен».

Основное свойство дроби дает возможность умножить и разделить числитель и знаменатель рациональной дроби на одно и то же выражение, отличное от нуля. Такая операция называется сокращением дроби. Для того чтобы сократить рациональную дробь, нужно разложить ее числитель и знаменатель на множители. При этом сокращение возможно, лишь если числитель и знаменатель имеют общие множители. Если же они не имеют общих множителей, то дробь сократить нельзя.

Дробно-рациональная функция

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

называется **правильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, ниже степени многочлена в знаменателе, и неправильной в противном случае.

Простейшими называют правильные рациональные дроби следующих четырех типов:

1-й тип: $\dfrac{A}{x-a}$;

2-й тип: $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, где k =2, 3, …;

3-й тип: $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, где $D=b^2-4ac<0$;

4-й тип: $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, где $D=b^2-4ac<0$, k =2, 3, …

Дроби 4-го типа мы изучать и использовать не будем.

При разложении рациональной дроби на сумму простейших дробей следует предварительно перейти к правильной дроби путем выделения целой части.

Пример: Преобразовать дробь:

$$\frac{x^3}{x^2-1}.$$

Решение.

$$\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{x^3-x+x}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}.$$

Вид разложения рациональной дроби на сумму простейших дробей зависит от знаменателя дроби $Q_m(x)$. Будем считать, что многочлен $Q_m(x)$ может быть разложен на множители линейные и квадратичные с отрицательными дискриминантами; при этом некоторые из линейных множителей могут быть одинаковыми.

Далее следует воспользоваться следующими правилами:

- Каждому линейному множителю $(x-a)$ ставить в разложении слагаемое

$$\frac{A}{x-a}.$$

- Каждому множителю вида $(x-b)^k$, k=2, 3, … ставить в разложении k слагаемых

$$\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{(x-b)^{k-1}}+\frac{A_k}{(x-b)^k}.$$

- Каждому множителю вида ax^2+bx+c, $D=b^2-4ac<0$ ставить в разложении слагаемое

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

Числа A, B, A_1, A_2, …, A_{k-1}, A_k являются неопределенными коэффициентами. Методы их нахождения рассмотрим ниже.

Пример: Разложить рациональную дробь на простейшие

$$f(x)=\frac{4x+1}{(x-1)(x+4)}.$$

Решение. Опираясь на сформулированные правила, делаем вывод, что $f(x)$ представима в виде:

$$f(x)=\frac{4x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю мы получим тождество:

$$4x+1=A(x+4)+B(x-1).$$

Первый метод нахождения неопределенных коэффициентов заключается в том, что, полагая последовательно в этом тождестве значения x равными вещественным корням знаменателя, сразу находим коэффициенты:

при $x=1$ имеем $5=5A$, то есть A=1;

при $x=-4$ имеем $-15=-5B$, то есть B=3.

Таким образом,

$$\frac{4x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+4}.$$

Первый метод имеет достоинством простоту и эффективность нахождения коэффициентов. Однако с его помощью не всегда удается найти все коэффициенты, а иногда их нельзя найти вовсе.

Пример: Разложить рациональную дробь на простейшие

$$f(x)=\frac{2x^3+2x^2+8x+13}{(x^2+4)(x^2+9)}.$$

Решение. Опираясь на сформулированные правила, делаем вывод, что $f(x)$ представима в виде:

$$\frac{2x^3+2x^2+8x+13}{(x^2+4)(x^2+9)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+9}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю мы получим тождество:

$$2x^3+2x^2+8x+13=(Ax+B)\left(x^2+9\right)+(Cx+D)\left(x^2+4\right). \qquad (5.4)$$

Второй метод нахождения коэффициентов основан на том, что коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (5.4) должны совпадать. Поэтому

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=2, \\ x^2 & B+D=2, \\ x & 9A+4C=8, \\ x^0 & 9B+4D=13. \end{array}$$

Получили систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Откуда получаем, что A=0, B=1, C=2, D=1.

Таким образом, мы имеем

$$\frac{2x^3+2x^2+8x+13}{(x^2+4)(x^2+9)}=\frac{1}{x^2+4}+\frac{2x+1}{x^2+9}.$$

Второй метод универсален, но решение часто оказывается громоздким из-за того, что приходится составлять и решать систему большого числа уравнений.

Наиболее рационально поступить так: вначале, используя первый метод, находим столько коэффициентов, сколько удается; затем берем на вооружение второй метод, но составляем лишь столько уравнений, сколько коэффициентов мы не смогли найти первым методом.

Идея интегрирования рациональных дробей заключается в том, чтобы представить данную дробь в виде суммы так называемых простейших (интегралы от которых известны) и воспользоваться свойством линейности интеграла.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx.$$

Решение. Сначала перейдем к правильной дроби путем выделения целой части:

$$\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{x^3-x+x}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}.$$

Затем разложим дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю мы получим тождество:

$$x=A(x+1)+B(x-1).$$

Используя первый метод нахождения неопределенных коэффициентов, подставим в полученное тождество значения $x=-1$ и $x=1$:

при $x=-1$ имеем $-1=-2B$, откуда $B=\frac{1}{2}$;

при $x=1$ имеем $1=2A$, откуда $A=\frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}.$$

Вычисление интеграла теперь не представляет труда:

$$\int\frac{x^3}{x^2-1}dx=\int xdx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C=\frac{1}{2}\left(x^2+\ln\left|x^2-1\right|\right)+C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx.$$

Решение. Так как

$$(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4),$$

то исходная дробь приводится к виду:

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

или

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

Откуда

$$\begin{cases}A+B+C=9,\\-4A-2B-6C+D=-30,\\4A+4B+8C-6D=28,\\-16A-8B+8D=-88\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=5,\\B=3,\\C=1,\\D=2.\end{cases}$$

Итого:

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx=\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=$$
$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$
$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\,\frac{x}{2}+C.$$

- **Интегрирование тригонометрических функций.**

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

- **Интеграл вида** $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

  Здесь $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция своих аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Такой интеграл всегда можно проинтегрировать с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную, причем

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad x = 2arctg\,t;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

  Таким образом:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int r(t)\,dt.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2} + 1}{4} + C.$$

- **Интеграл вида** $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где функция R является нечетной относительно $\cos x$.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$. Преобразуем:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos xdx.$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos x$ только в четных степенях, а, следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos xdx = \int r(t)dt.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}.$$

Решение.

$$\int \frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos xdx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} + 3\int dt - \int t^2 dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

- **Интеграл вида** $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где функция R является нечетной относительно $\sin x$.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin xdx = -\int r(t)dt.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin xdx \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2 + 4t + 4 - 4t - 5}{t+2}dt = \int \frac{(t+2)^2 - 4t - 5}{t+2}dt =$$

$$= \int \left[t + 2 - \frac{4t}{t+2} - \frac{5}{t+2} \right] dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|-4\int\frac{t+2-2}{t+2}dt=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|-4t+8\ln|t+2|+C=$$
$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

- **Интеграл вида** $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где функция R является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$.

  Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = tg\, x$. Тогда
$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл
$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}.$$
Решение.
$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x+6tgx-16}dx=\left|\begin{matrix}tg\, x=t;\\ \frac{1}{\cos^2 x}dx=d(tg\, x)=dt\end{matrix}\right|=$$
$$=\int\frac{dt}{t^2+6t-16}=\int\frac{dt}{(t+3)^2-25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tg\, x+3-5}{tg\, x+3+5}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tg\, x-2}{tg\, x+8}\right|+C.$$

- **Интеграл произведения** синусов и косинусов различных аргументов ($m \neq n$).

  В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int\cos mx\cos nx dx=\int\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right].$$
$$\int\sin mx\cos nx dx=\int\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n}-\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right].$$
$$\int\sin mx\sin nx dx=\int\frac{1}{2}[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n}+\frac{\sin(m-n)}{m-n}\right].$$

Пример: Найти неопределенный интеграл
$$\int\sin 7x\sin 2x dx.$$
Решение.
$$\int\sin 7x\sin 2x dx=\frac{1}{2}\int\cos 5x dx-\frac{1}{2}\int\cos 9x dx=\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{18}\sin 9x+C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left| d(ctg\, 2x) = \frac{-2}{\sin^2 x}dx \right| = -2\int d(ctg\, 2x) = -2ctg 2x + C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \sin^4 x dx.$$

Решение.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

- **Интегрирование иррациональных выражений.**

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

- В интегралах, содержащих лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}$, где $a \neq 0$, n - натуральное число, то есть в интегралах вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx,$$

полезно сделать подстановку $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

Решение.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}} = \begin{vmatrix} t = \sqrt[3]{x+1}; \\ x = t^3 - 1; \\ dx = 3t^2 dt \end{vmatrix} = 3\int \frac{\left(t^3-1\right)t^2 dt}{t} = 3\int \left(t^4 - t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^2 + C = \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

- В интегралах вида

$$\int R\left(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[k_m]{ax+b}\right)dx$$

надо сделать подстановку $ax + b = t^n$, где n - наименьшее общее кратное натуральных чисел k_1, k_2, …, k_m.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left|\begin{array}{ll} \sqrt[12]{x-1}=t; & x=t^{12}+1; \\ dx=12t^{11}dt & \end{array}\right| = \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt =$$

$$=12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt+\int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right)=12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt+\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right)=$$

$$=12\int tdt-12\int\frac{tdt}{t^2+1}+12\int dt-12\int\frac{dt}{1+t^2}=6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12arctgt+C=$$

$$=6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-12arctg\sqrt[12]{x-1}+C.$$

- Интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[k_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

рационализируются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где n - наименьшее общее кратное натуральных чисел k_1, k_2, …, k_m. Тогда имеем:

$$x=\frac{t^n-b}{a-ct^n} \text{ и } dx=\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)'_t dt.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx = \left|\begin{array}{l} \frac{x}{x-1}=t^2;\, x=\frac{t^2}{t^2-1}; \\ dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \end{array}\right| = -\int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^4}t\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=$$

$$=-2\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{2}{t}+C=2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C.$$

- Интеграл от простейшей квадратичной иррациональности

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

с помощью выделения полного квадрата в трехчлене ax^2+bx+c сводится к одному из двух интегралов $\int\frac{dx}{\sqrt{a\pm x^2}}$, которые являются табличными.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+4}} =$$

$$= \left|t = x-3\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right| + C.$$

- **Тригонометрические подстановки.**

Интегралы вида

$$\int R\left(x^{2n}, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx;\ \int R\left(x^{2n}, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx;\ \int R\left(x^{2n}, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

интегрируются с помощью следующих тригонометрических подстановок:

Таблица 4.

Интеграл	Подстановка
$\int R\left(x^{2n}, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x = a\cos t$ (или $x = a\sin t$), $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\cos^2 t} = a\sin t$, $dx = -a\sin t\, dt$,
$\int R\left(x^{2n}, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x = atg\, t$ (или $x = actg\, t$), $\sqrt{a^2+x^2} = a\dfrac{1}{\cos t}$, $dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt$,
$\int R\left(x^{2n}, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x = \dfrac{a}{\cos t}$ (или $x = \dfrac{a}{\sin t}$), $\sqrt{x^2-a^2} = atg\, t$, $dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{25-x^2}\,dx.$$

Решение.

$$\int \sqrt{25-x^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = 5\sin t; \\ dx = 5\cos tdt \end{vmatrix} = \int \sqrt{5^2-5^2\sin^2 t}\,5\cos tdt = \int 25\cos^2 tdt = \frac{25}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{25t}{2} + \frac{25}{4}\sin 2t + C = \frac{25t}{2} + \frac{25}{2}\sin t\cos t + C = \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5} + \frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{36+x^2}}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{36+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = 6tg\,t;\, dx = \dfrac{6}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{36+x^2} = \dfrac{6}{\cos t} \end{array} \right| = \int \frac{6\cos tdt}{\cos^2 t 36^2 tg^4 t\cdot 6} = \int \frac{\cos^3 tdt}{36^2 \sin^4 t} = \frac{1}{36^2}\int \frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t} =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 36^2 \sin^3 t} + \frac{1}{36^2 \sin t} + C = \left| \sin t = \sqrt{1-\frac{36}{36+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{36+x^2}} \right| = -\frac{(36+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 36^2 x^3} + \frac{\sqrt{36+x^2}}{36^2 x} + C.$$

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}} \quad .$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t};\, dx = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{x^2-4} = 2tg\,t \end{array} \right| = \int \frac{2\sin t\cos tdt}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5 tg^5 t} = \frac{1}{32}\int ctg^4 tdt =$$

$$= \frac{1}{32}\int ctg^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt = -\frac{1}{32}\int ctg^2 td(ctgt) - \frac{1}{32}\int ctg^2 tdt = -\frac{1}{96}ctg^3 t - \frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt =$$

$$=$$

$$= -\frac{1}{96}ctg^3 t + \frac{1}{32}ctgt + \frac{t}{32} + C = \left| ctg\, t = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} \right| =$$

$$= -\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x} + C.$$

- **О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.**

При вычислении производной наличие формул для производной суммы, разности, произведения, частного и композиции - всех тех операций, при помощи которых элементарные функции образуются из минимального набора - приводит к тому, что производная любой элементарной функции снова является элементарной функцией. При нахождении неопределенных интегралов, однако, формул для первообразной произведения, частного и композиции нет.

Это приводит к такому положению, что отнюдь не для любой элементарной подынтегральной функции можно «взять интеграл», то есть выразить некоторую первообразную для подынтегральной функции в виде некоторого выражения, использующего лишь элементарные функции.

Дело не в том, что пока что не придумано способа это сделать, а в принципиальной невозможности: никакая из первообразных в случае «неберущегося» интеграла никаким образом не может быть выражена как комбинация элементарных функций, связанных знаками арифметических действий и знаками композиции.

Не следует думать, что если такое представление невозможно, то и функции такой нет: можно считать, что для ее выражения просто не хватает запаса рассматриваемых операций или запаса рассматриваемых исходных функций, и их надо расширить, то есть выйти за рамки множества функций, называемых элементарными.

В науке и ее приложениях в технике, экономике и других дисциплинах применяются многие неэлементарные функции; часто их называют **специальными**. К специальным функциям относятся и многие первообразные для элементарных функций, причем часто не столь уж «сложной» структуры. Интегралы, выражающиеся через такие первообразные, называются (по традиции, берущей начало в 18 веке,) **неберущимися**.

Итак, интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

не берется, если функция $F(x)$ не является элементарной. Приведем примеры неберущихся интегралов и названия первообразных - специальных функций, связанных с этими интегралами.

- $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}\Phi(x) + C$.

  Здесь одна из первообразных, которую мы обозначили $\sqrt{2\pi}\Phi(x)$, выделяется из всего набора первообразных условием $\Phi(0) = 0$. Функция называется **функцией Лапласа**. Она широко применяется в теории вероятностей, физике, математической и прикладной статистике и других разделах науки и ее приложений. Для вычисления значений функции Лапласа составлены таблицы, имеющиеся во многих учебниках, задачниках и справочниках по теории вероятностей и статистике. Возможность вычисления предусмотрена также на многих моделях калькуляторов. Так что, с практической точки зрения, пользоваться функцией Лапласа ничуть не сложнее, чем, скажем, синусом, арктангенсом или натуральным логарифмом, которые мы условно относим к элементарным функциям.

Пьер-Симон **Лаплас** (1749 – 1827) - выдающийся французский математик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики и, особенно, в астрономии громадны: он усовершенствовал почти все отделы этих наук. Был членом Французского Географического общества.

- $\int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x) + C$.

  Доопределим подынтегральную функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, полагая ее равной 1 при $x = 0$. В соответствии с тем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, доопределенная функция будет непрерывна на всей числовой оси. Среди ее первообразных $F(x)$ выделим ту, для которой $F(0) = 0$. Эта неэлементарная функция называется **интегральным синусом** и обозначается $Si(x)$. Именно ее мы использовали в приведенной выше формуле.

- $\int \frac{\cos x}{x} dx = Ci(x) + C$.

  Одна из первообразных - та, что мы использовали в правой части и обозначили $Ci(x)$ - называется **интегральным косинусом**.

- $\int \frac{e^x}{x} dx = Ei(x) + C$.

  Это тоже неберущийся интеграл. Одна из первообразных, которую мы обозначили $Ei(x)$, - специальная функция, называющаяся **интегральной экспонентой**.

- $\int \frac{dx}{\ln x} = li(x) + C$ (при $x > 0$).

  Одна из первообразных, $li(x)$, называется **интегральным логарифмом**.

- Интегралы

$$\int \sin \frac{\pi x^2}{2} dx = S(x) + C, \quad \int \cos \frac{\pi x^2}{2} dx = C(x) + C, \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

называются **интегралами Френеля**.

Огюстен Жан **Френель** (1788 – 1827) - французский физик, один из создателей волновой теории света. Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещенный на первом этаже Эйфелевой башни.

- $\int e^{-x^2} dx$.

  Интеграл Пуассона, табулирован (значения собраны в специальные таблицы), также широко применяется в теории вероятностей, физике, математической и прикладной статистике и других разделах науки и ее приложений.

Симеон Дени **Пуассон** (1781 – 1840) - знаменитый французский физик и математик. При Наполеоне он возведен в бароны, а при Луи-Филиппе был сделан пэром Франции. Число ученых трудов Пуассона превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики.

Тема 18. Определенный интеграл.

- **Понятие определенного интеграла.**

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $f(x)$.

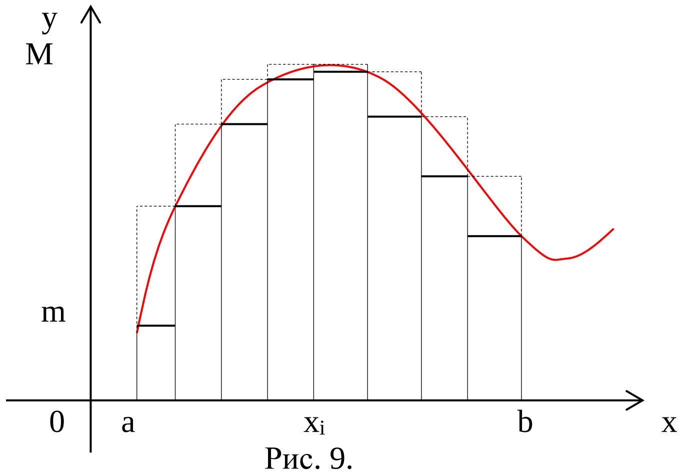


Рис. 9.

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Тогда

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_0;x_1] \to m_1, M_1;\ \ [x_1;x_2] \to m_2, M_2;\ \ \ldots;\ \ [x_{n-1};x_n] \to m_n, M_n.$$

Составим суммы:

$$\underline{S_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

$$\overline{S_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Сумма $\underline{S_n}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S_n}$ – **верхней интегральной суммой**.

Так как $m_i \leq M_i$, то $\underline{S_n} \leq \overline{S_n}$, а $m(b-a) \leq \underline{S_n} \leq \overline{S_n} \leq M(b-a)$.

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε_i:

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1,\ \ x_1 < \varepsilon_2 < x_2,\ \ldots,\ \ x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i.$$

Тогда можно записать:

$$m_i\Delta x_i \leq f(\varepsilon_i)\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

или

$$\underline{S_n} \leq S_n \leq \overline{S_n},$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a;b]$ стремится к бесконечности.

При этом, если

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i,$$

то

$$\lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$$

Если при любых разбиениях отрезка $[a; b]$ таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

где
a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a; b]$ – отрезок интегрирования.

Если для функции $f(x)$ существует предел

$$\lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad (5.5)$$

то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a; b]$.

Определенный интеграл выражает собой число. Значение его зависит от вида функции $f(x)$ и от значений верхнего и нижнего пределов.

С помощью определенного интеграла могут быть решены все задачи из любой области науки и техники, если их решение сводится к нахождению существующего предела интегральной суммы (5.5).

- **Определенный интеграл и его свойства.**

  - Интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов слагаемых функций:
  $$\int_a^b (u + v + \dots + w)dx = \int_a^b udx + \int_a^b vdx + \dots + \int_a^b wdx.$$
  - Постоянный множитель k подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла:
  $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$
  - Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то интеграл изменит только знак:
  $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$
  - Если верхний и нижний пределы интегрирования совпадают, то такой интеграл равен нулю:
  $$\int_a^a f(x)dx = 0.$$
  - Если отрезок интегрирования $[a; b]$ разбит на две части $[a; c]$ и $[c; b]$, то
  $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- **Формула Ньютона-Лейбница.**

Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижнем пределах интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (5.6)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Иными словами, значение определенного интеграла равно приращению любой первообразной функции в интервале интегрирования. Выражение (5.6) носит название **формулы Ньютона-Лейбница**.

Эту формулу иногда записывают так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Вертикальная черта с нижним и верхним индексами, стоящая справа от символа функции, назыввается знаком двой ной подстановки и указывает, что из значения функции, принимаемого ею при верхнем индексе, нужно вычесть ее значение при нижнем индексе.

Формула Ньютона-Лейбница дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов в том случае, когда известна первообразная подынтегральной функции. Она значительно расширила область применения определенного интеграла, так как математика получила общий метод для решения различных задач частного вида, и поэтому могла значительно расширить круг приложений определенного интеграла к технике, механике, химии, биологии, медицине и так далее.

Пример. $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Пример. $\int_0^{\pi/2} \cos x\; dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$

Пример. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

Решение: Скорость тела равна нулю в момент начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для этого приравняем скорость к нулю и решим уравнение относительно t:

$$12t - 3t^2 = 0,\ t(4 - t) = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 4.$$

Теперь искомый путь будет:

$$S = \int_0^4 (12t - 3t^2)\,dt = (6t^2 - t^3)|_0^4 = 32 \text{ (м)}.$$

- **Замена переменных в определенных интегралах.**

Применим в определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx$ подстановку $x = \varphi(t)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

где $\varphi(a) = \alpha,\ \ \varphi(b) = \beta$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 x\sqrt{1 + x^2}\,dx$.

Решение: Введем подстановку $1 + x^2 = t$, откуда $2xdx = dt$. Найдем новые пределы интегрирования функции: при $x = 0$ $t = 1$, а при $x = 1$ $t = 2$. Тогда

$$\int_0^1 x\sqrt{1 + x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

- **Среднее значение функции.**

Под **средним значением функции** $f(x)$ в отрезке $[a; b]$ понимают число

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \qquad (5.7)$$

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ выражает собой площадь криволинейной трапеции *APQE* (рис. 10).

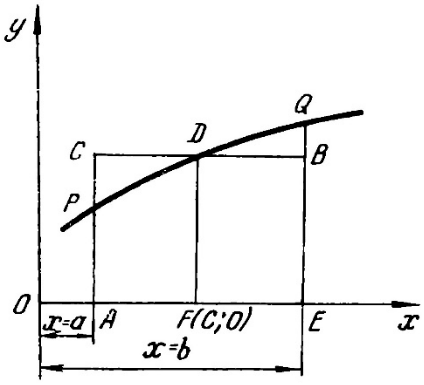


Рис. 10.

Если построить прямоугольник *ACBE*, площадь которого равновелика площади этой трапеции, то

$$(b-a)\cdot FD = \int_a^b f(x)dx, \text{ откуда } FD = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, среднее значение функции равно значению ординаты *FD*. Если абсцисса точки *F* равна *c*, то $FD = f(c)$, тогда

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \text{ откуда } \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Последнее выражение представляет теорему о среднем значении определенного интеграла «Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$, то в интервале $(a;b)$ найдется такая точка *c*, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).»$$

Пример. [13] Зависимость топлоемкости *c* от температуры t для бензина выражается формулой

$$\mathrm{c} = 0{,}2237 + 0{,}0010228t.$$

Найти среднюю теплоемкость $\mathrm{c}_{\text{ср}}$ бензина для температур, лежащих в интервале от $116°$ до $218°$ *C*.

Решение:

$$\mathrm{c}_{\text{ср}} = \frac{1}{218-116}\int_{116}^{218} c\,dt = \frac{1}{102}\int_{116}^{218}(0.2237 + 0.0010228t)dt = 0.3945.$$

- **Определенный интеграл для вычисления площади плоской фигуры.**

Ранее было показано, что определенный интеграл

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{5.8}$$

численно равен площади криволинейной трапеции. Условимся площади криволинейной трапеции, расположенной над осью *Ox*, приписывать знак плюс, а расположенной под осью *Ox* – знак минус. Тогда определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ всегда можно рассматривать, независимо от конкретного смысла переменной интегрирования x и функции $f(x)$, как алгебраическую площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной линией $y = f(x)$.

Пример. [1] Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью Ox (рис. 11).

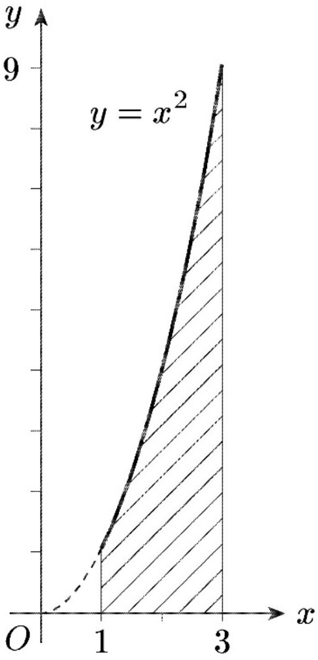


Рис. 11.

Решение: Пользуяь формулой (5.8), находим искомую площадь

$$S = \int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Пример. [1] Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при уловии $0 \le x \le 2\pi$ (рис. 12).

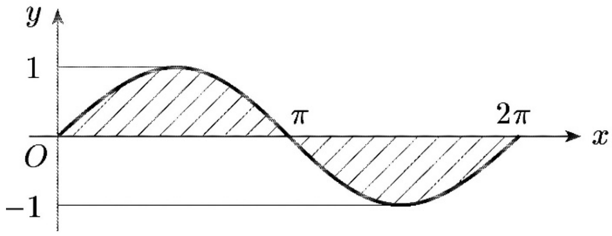


Рис. 12.

Решение: Разбиваем сегмент $[0; 2\pi]$ на два сегмента $[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$. На первом из них $\sin x \ge 0$, на втором - $\sin x \le 0$. Следовательно, имеем, что искомая площадь

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| = -\cos x|_0^{\pi} + |-\cos x|_{\pi}^{2\pi}| = 4.$$

- **Определенный интеграл для вычисления дуги кривой.**

Пусть дуга $\overset{\frown}{AB}$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – функция, имеющая на сегменте $[a; b]$ непрерывную производную.

Тогда длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ может быть вычислена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx. \tag{5.9}$$

Пример. [1] Найти длину дуги данной линии $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \leq x \leq 1$ (рис. 13).

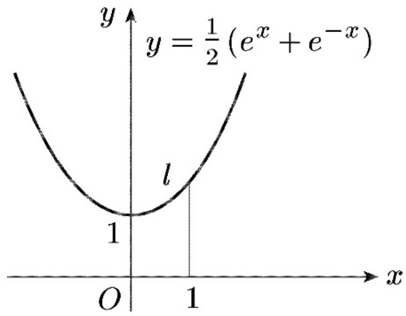


Рис. 13.

Решение: Имеем $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ и по формуле (5.9) находим

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (e^x + e^{-x})\, dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

- **Определенный интеграл для вычислений в кинематике.**

Статистическим моментом материальной точки, находящейся в плоскости xOy, относительно координатной оси Ox (или Oy) называется произведение массы этой точки на ее ординату (соответственно абсциссу). Статистическим моментом системы таких точек $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_n$ относительно координатной оси называется сумма статистических моментов всех точек системы относительно этой оси.

Центром тяжести системы материальных точек с массами $m_1, \dots, m_n$ называется точка C, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу системы $m = m_1 + \cdots + m_n$, то ее статистический момент по отношению к любой оси равен статистическому моменту системы точек относительно той же оси. Поэтому если обозначить через S_x и S_y статистические моменты системы точек относительно координатных осей Ox и Oy, то координаты x_C и y_C центра тяжести C удовлетворяют соотношениям

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{m},\ y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{m}.$$

Статистические моменты и координаты центра тяжести дуги плоской линии можно выразить через определенные интегралы.

Пусть дуга $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – функция, имеющая на сегменте $[a; b]$ непрерывную производную, и на этой же дуге непрерывно распределено вещество с плотностью $\rho = \rho(x)$.

Тогда статистические моменты системы точек S_x и S_y относительно координатных осей Ox и Oy можно найти по формулам:

$$S_x = \int_a^b \rho y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,\ S_y = \int_a^b \rho x \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (5.10)$$

Для нахождения координат центра тяжести x_C и y_C имеем формулы:

$$x_C = \frac{S_y}{m},\ y_C = \frac{S_x}{m}. \qquad (5.11)$$

Пример. [1] Найти центр тяжести полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ при условии $\rho = 1$.

Решение: Из соображений симметрии заключаем, что $x_C = 0$. Далее имеем: $m = \pi R$,

$$S_x = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R \int_{-R}^{R} dx = Rx|_{-R}^{R} = 2R^2.$$

Поэтому

$$y_C = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}637\, R.$$

- **Биологические приложения определенного интеграла.**

Численность популяции.

Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Если условия существования популяции благоприятны, то рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции растет со временем. Назовем скоростью роста популяции прирост числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость $v = v(t)$. В «старых», установившихся популяциях, давно обитающих в данной местности, скорость роста $v(t)$ мала и медленно стремится к нулю. Но если популяция молода, ее взаимоотношения с другими местными популяциями еще не установились или существуют внешние причины, изменяющие эти взаимоотношения, например, сознательное вмешательсьво человека, то $v(t)$ может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь.

Если известна скорость роста популяции $v(t)$, то мы можем найти прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T. В самом деле, из определения $v(t)$ следует, что эта функция является производной от численности популяции $N(t)$ в момент t, и, следовательно, численность популяции $N(t)$ является первообразной для $v(t)$. Поэтому

$$N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^{T} v(t)\, dt. \qquad (5.12)$$

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна, то есть $v(t) = ae^{kt}$. Популяция в этом случае как бы «не стареет». Такие условия можно создать, например, для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. Применяя формулу (5.12), в этом случае получим:

$$N(T) = N(t_0) + a \int_{t_0}^{T} e^{kt}\, dt = N(t_0) + \frac{a}{k} e^{kt}|_{t_0}^{T} = N(t_0) + \frac{a}{k}(e^{kT} - e^{kt_0}).$$

По подобной формуле подсчитывают, в частности, численность культивируемых плесневых грибков, выделяющих пенициллин.

Средняя длина пролета.

В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пробега, или среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Приведем соответствующий расчет для птиц. Пусть участком будет круг радиуса R (рис. 14). Будем считать, что R не слишком велико, так что большинство птиц изучаемого вида пересекает этот круг по прямой.

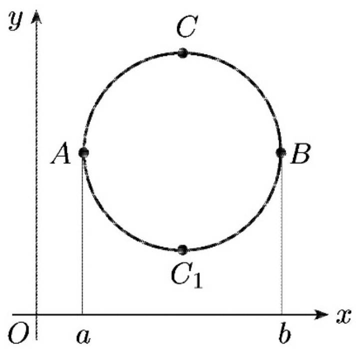


Рис. 14.

Птица может под любым углом в любой точке пересечь окружность. В зависимости от этого длина ее пролета над кругом может быть равной любой величине от 0 до $2R$. Нас интересует средняя длина пролета. Обозначим ее через l.

Так круг симметричен относительно любого своего диаметра, нам достаточно ограничиться лишь теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, параллельном оси Oy. Тогда средняя длина пролета – это среднее расстояние между дугами ACB и AC_1B. Иными словами, это среднее функции $f_1(x) - f_2(x)$, где $y = f_1(x)$ – уравнение верхне дуги, а $y = f_2(x)$ – уравнение нижней дуги, то есть

$$l = \frac{\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx}{b-a} \text{ или } l = \frac{\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx}{b-a}. \quad (5.13)$$

Так как

$$\int_a^b f_1(x)\,dx$$

равен площади криволинейной трапеции $aACBb$, а интеграл

$$\int_a^b f_2(x)\,dx$$

равен площади криволинейной трапеции aAC_1Bb, то их разность равна площади круга, то есть πR^2. Разность $b - a$ равна, очевидно, $2R$. Подставив это в (5.13), получим:

$$l = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2}R.$$

Приведенные примеры далеко не исчерпывают возможных приложений определенных интегралов.

Таким образом, в разделе 5 мы познакомились со следующими основными понятиями:

- Первообразная функции.
- Неопределенный интеграл.
- Замена переменных в неопределенном интеграле.
- Интегрирование по частям.
- Интегрирование рациональных дробей.
- Интегрирование тригонометрических функций.
- Интегрирование иррациональных выражений.
- Тригонометрические подстановки.
- Функции, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.

- Нижняя интегральная сумма
- Верхняя интегральная сумма
- Интегральная сумма
- Определенный интеграл
- Интегрируемая функция
- Формула Ньютона-Лейбница
- Среднее значение функции
- Площадь плоской фигуры
- Объем тела по площадям параллельных сечений
- Объем тела вращения
- Статистический момент материальной точки
- Статистический момент системы материальных точек
- Центр тяжести системы материальных точек

Овладение этим материалом позволит успешно освоить другие разделы дисциплины «Математика».

Приложение 1

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

А, α - альфа
В, β - бета
Г, γ - гамма
Δ, δ - дельта
Е, ε - эпсилон
Z, ζ - дзета
Н, η - эта
Θ, θ - тета
I, ι - йота
K, κ - каппа
Λ, λ - ламбда
М, μ - мю
N, ν - ню
Ξ, ξ - кси
О, o - омикрон
П, π - пи
Р, ρ - ро
Σ, σ - сигма
Т, τ - тау
Y, υ - ипсилон
Ф, φ - фи
Х, χ - хи
Ψ, ψ - пси
Ω, ω - омега

Приложение 2

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Дисциплина:	Математика
Кафедра:	Биологии, экологии и природопользования

Специальность (направление) 05.03.06 Экология и природоподьзование
(код специальности (направления), полное наименование)

Сведения о разработчиках:

ФИО	Аббревиатура кафедры	Ученая степень, звание
Дмитриева Марина Валерьевна	БЭиП	кандидат физико-математических наук

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Цели освоения дисциплины:
воспитание у молодых людей высокой математической культуры и ориентирование на развитие:
- верного представления о роли математики в современной цивилизации и мировой культуре;
- умения логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами;
- корректности в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений;
- отношения к дисциплине как к необходимому инструменту в будущей профессиональной деятельности.

Задачи освоения дисциплины:
- дать понятие о предмете высшей математики как о необходимой системе знаний в экологическом цикле наук;
- выработать умение студентами самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных инженерных задач;
- выработать умение студентами применять математические методы, используемые при решении типовых профессиональных задач;
- способствовать овладению студентами методами математического моделирования биологических процессов.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП:

- Дисциплина «Математика» является базовой дисциплиной математического и естественнонаучного цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) по направлению подготовки 05.03.06 Экология и природопользование (уровень бакалавриата);
- Для изучения данной дисциплины необходимы базовые знания школьного курса математики (алгебры, математического анализа, геометрии);
- Дисциплина «Математика» является общим теоретическим и методологическим основанием для всех математических и естественнонаучных дисциплин, входящих в ООП бакалавра.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕНЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Изучение дисциплины «Математика» в рамках освоения образовательной программы направлено на формирование у обучающихся следующих общекультурных и общепрофессиональных компетенций:

№ п/п	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или ее части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны:		
			знать	уметь	владеть
1	**ОК-7**	Обладать способностью к самоорганизации	фундаментальные разделы математики	применять полученные знания для	приемами решения естественнонау

		и самообразованию	(математический анализ, аналитическую геометрию, линейную алгебру, дифференциальные уравнения, численные методы, теорию вероятности и математическую статистику)	анализа основных задач, типичных для естественнонаучных дисциплин	чных задач
2	**ОПК-1**	Обладать базовыми знаниями в области фундаментальных разделов математики в объеме, необходимом для владения математическим аппаратом экологических наук, для обработки информации и анализа данных по экологии и природопользованию	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, дискретной математики; дифференциальное и интегральное исчисления; гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистику; случайные процессы; статистическое оценивание и проверку гипотез; статистические методы обработки экспериментальных данных; математические модели в биологии	применять математические методы при решении типовых профессиональных задач; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные	методами математического моделирования биологических процессов

4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего): 8 ЗЕ
4.2. по видам учебной работы (в часах):

Вид учебной работы	**Количество часов 288 (форма обучения___очная__)**			
	Всего по плану	**в т.ч. по семестрам**		
		1	**2**	**3**
1	2	3	4	5
Контактная работа обучающихся с преподавателем	*126/54**	*36/18**	*54/18**	*36/18**
Аудиторные занятия:				
Лекции	*54/54**	*18/18**	*18/18**	*18/18**
Практические и семинарские занятия	*72*	*18*	*36*	*18*
Лабораторные работы (лабораторный практикум)	не предусмотрены			
Самостоятельная работа	*126*	*36*	*54*	*36*
Текущий контроль (количество и вид: Устный опрос, коллоквиум, реферат)	Тестирование, устный опрос			
Курсовая работа	не предусмотрена			
Виды промежуточной аттестации (экзамен, зачет)	*36*			экзамен
Всего часов по дисциплине	*288/54**	*72/18**	*108/18**	*108/18**

* - *количество часов, проводимых в интерактивной форме*

5. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА.

Раздел 1. *Аналитическая геометрия.*

Тема 1. Векторы.

Форма проведения: лекция – дискуссия.

Вопросы для обсуждения:

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Линейная запись векторов.
3. Система декартовых координат.
4. Координаты вектора и точки.
5. Проекция вектора на ось.

Тема 2. Прямоугольные координаты.

Форма проведения: лекция – дискуссия.

Вопросы для обсуждения:

1. Система декартовых координат.
2. Единичные векторы.
3. Базис на плоскости.
4. Базис в пространстве.

Тема 3. Полярные, сферические и цилиндрические координаты.

Форма проведения: лекция - беседа.
Вопросы для обсуждения:
1. Полярные координаты на плоскости.
2. Цилиндрические координаты в пространстве.
3. Сферические координаты в пространстве.
4. Различные способы задания линий и поверхностей.

Тема 4. Скалярное произведение.

Форма проведения: лекция – дискуссия.
Вопросы для обсуждения:
1. Скалярное произведение.
2. Свойства скалярного произведения.
3. Вычисление внутреннего угла треугольника.

Тема 5. Уравнение прямой на плоскости.

Форма проведения: лекция - беседа.
Вопросы для обсуждения:
1. Понятие линии и поверхности.
2. Прямая на плоскости и в пространстве.
3. Параметрические уравнения прямой.
4. Плоскости в пространстве.
5. Взаимные расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Тема 6. Векторное произведение.

Форма проведения: лекция - беседа.
Вопросы для обсуждения:
1. Векторное произведение.
2. Свойства векторного произведения.
3. Вычисление площади треугольника.
4. Смешанное произведение.

Раздел 2. *Дифференциальное исчисление функции одной переменной.*

Тема 7. Определение функции вещественной переменной.

Форма проведения: лекция - беседа.
Вопросы для обсуждения:
1. Множество вещественных чисел.
2. Функции.
3. Область определения функции.

4. Способы задания.
5. Простейшие характеристики функций.

Тема 8. Непрерывность функции вещественной переменной.

Форма проведения: лекция – работа в малых группах.
Вопросы для обсуждения:
1. Непрерывность дифференцируемой функции.
2. Основные правила дифференцирования.
3. Дифференцирование основных элементарных функций.

Тема 9. Определение производной функции вещественной переменной.

Форма проведения: лекция - беседа.
Вопросы для обсуждения:
1. Производная сложной и неявной функции.
2. Производная обратной функции.
3. Производная функции, заданной параметрически.

Тема 10. Экстремум дифференцируемой функции вещественной переменной.

Форма проведения: лекция – дискуссия.
Вопросы для обсуждения:
1. Возрастание и убывание функции на интервале.
2. Экстремум функции.
3. Признаки монотонности функции.
4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
5. Выпуклость и вогнутость графика функции.
6. Точки перегиба.
7. Асимптоты.
8. Полное исследование функции и построение ее графика.

Раздел 3. Линейная алгебра.

Тема 11. Определение детерминанта.

Форма проведения: лекция – дискуссия.
Вопросы для обсуждения:
1. Определение детерминанта.
2. Определитель второго порядка
3. Определитель третьего порядка.
4. Основные свойства определителей.

Тема 12. Действия над матрицами.

Форма проведения: лекция - беседа.
Вопросы для обсуждения:
1. Матрицы.
2. Действия над матрицами.
3. Перестановочные матрицы.
4. Транспонированные матрицы.
5. Обратная матрица.

Тема 13. Система линейных уравнений.

Форма проведения: лекция – дискуссия.

Вопросы для обсуждения:

1. Системы линейных уравнений.
2. Матричная запись и матричная форма решения систем линейных уравнений.
3. Метод Гаусса.
4. Системы линейных однородных уравнений.
5. Фундаментальная система решений.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Тема 14. Функция нескольких переменных.

Форма проведения: лекция - беседа.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие функции нескольких переменных.
2. Область определения.
3. Предел и непрерывность.

Тема 15. Производные функции нескольких переменных.

Форма проведения: лекция – дискуссия.

Вопросы для обсуждения:

1. Частные производные.
2. Полный дифференциал.
3. Производные и дифференциалы высших порядков.

Раздел 5. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Тема 16. Неопределенный интеграл.

Форма проведения: лекция – работа в малых группах.

Вопросы для обсуждения:

1. Неопределенный интеграл.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Замена переменных.
4. Интегрирование по частям.
5. Различные способы интегрирования.

Тема 17. Неопределенные интегралы некоторого специального вида.

Форма проведения: лекция - беседа.

Вопросы для обсуждения:

1. Интегрирование рациональных дробей.
2. Интегрирование тригонометрических функций.
3. Интегрирование иррациональных выражений. Тригонометрические подстановки.
4. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.

Тема 18. Определенный интеграл.

Форма проведения: лекция – эвристическая беседа.

Вопросы для обсуждения:

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Интегральная сумма.
3. Определенный интеграл и его свойства.
4. Интеграл с переменным верхним пределом.
5. Формула Ньютона-Лейбница.
6. Замена переменных.
7. Интегрирование по частям.

Раздел 6. Основные понятия теории вероятностей.

Тема 19. Случайные события и вероятность.

Форма проведения: лекция - беседа.

Вопросы для обсуждения:

1. Правило суммы, правило произведения.
2. Перестановки, сочетания, размещения с повторениями элементов и без повторения.
3. Формулы включений и исключений.
4. Рекуррентные соотношения.

Тема 20. Функции распределения.

Форма проведения: лекция - дискуссия.

Вопросы для обсуждения:

1. Определение случайной величины.
2. Функции распределения вероятностей.
3. Дискретные случайные величины.
4. Непрерывные случайные величины.

Тема 21. Числовые характеристики случайных величин.

Форма проведения: лекция - дискуссия.

Вопросы для обсуждения:

1. Математическое ожидание случайной величины.
2. Дисперсия случайной величины.
3. Коэффициент вариации.
4. Мода и медиана распределения.

Раздел 7. Математическая статистика.

Тема 22. Статистическая обработка результатов измерений.

Форма проведения: лекция - беседа.

Вопросы для обсуждения:

1. Задачи математической статистики.
2. Выборка, вариационный и статистический ряд, ранг, репрезентативность.
3. Выборочная функция распределения, гистограмма, полигон частот.
4. Статистические аналоги числовых характеристик и их асимптотика.

Тема 23. Статистические оценки параметров распределения.

Форма проведения: лекция - беседа.

Вопросы для обсуждения:

1. Статистические оценки и общие требования к ним.
2. Оценки максимального правдоподобия.
3. Метод моментов.
4. Понятие о робастных оценках.

Тема 24. Элементы теории корреляции. Ранговая корреляция.

Форма проведения: лекция - дискуссия.

Вопросы для обсуждения:

1. Корреляционный анализ.
2. Стратегия исследования зависимостей.
3. Корреляционное поле.
4. Выборочный коэффициент корреляции, его вычисление и свойства.
5. Линейная корреляция.
6. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции. Корреляционное отношение и его свойства.
7. Ранговые критерии проверки гипотезы независимости.
8. Проверка гипотез о значимости коэффициентов.

Тема 25. Элементы регрессионного анализа.

Форма проведения: лекция - дискуссия.

Вопросы для обсуждения:

1. Регрессионный анализ.
2. Классификация регрессионных моделей.
3. Основные положения классического регрессионного анализа.
4. Оценки параметров регрессионных моделей и их свойства.
5. Проверка гипотезы об адекватности модели.
6. Проверка гипотезы о значимости параметров.
7. Исследование остатков. Непараметрический регрессионный анализ.

Тема 26. Статистическая проверка статистических гипотез.

Форма проведения: лекция - беседа.

Вопросы для обсуждения:

1. Статистические оценки и общие требования к ним.
2. Оценки максимального правдоподобия.
3. Метод моментов.
4. Понятие о робастных оценках.

Тема 27. Элементы дисперсионного анализа.

Форма проведения: лекция – эвристическая беседа.

Вопросы для обсуждения:

1. Однофакторный дисперсионный анализ.
2. Основные понятия и терминология.
3. Представление экспериментальных результатов.
4. Измерительные шкалы.
5. Стратегия факторного анализа.
6. Непараметрический подход.

7. Ранговые методы проверки гипотезы однородности.
8. Критерий Краскела-Уоллеса.
9. Основное дисперсионное соотношение.
10. Дисперсионное отношение Фишера.

6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Векторы. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Вектор.
- Длина вектора.
- Коллинеарные векторы.
- Компланарные векторы.

Тема 2. Действия над векторами. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Сложение векторов.
- Умножение вектора на число.
- Вычитание векторов.
- Линейная зависимость векторов.

Тема 3. Прямоугольные координаты. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Прямоугольные координаты.
- Расстояние между точками.

Тема 4. Полярные, сферические и цилиндрические координаты. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Полярные координаты.
- Сферические координаты.
- Цилиндрические координаты.

Тема 5. Скалярное произведение. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Скалярное произведение векторов. Свойства.
- Векторное произведение векторов. Свойства.
- Смешанное произведение векторов. Свойства.

Тема 6. Уравнение прямой на плоскости. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Уравнение прямой на плоскости.
- Перпендикулярные прямые.
- Расстояния между прямыми и точками.
- Уравнения плоскости и прямой в пространстве.

Тема 7. Векторное произведение. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Векторное произведение.
- Площади параллелограмма и треугольника.
- Смешанное произведение.

- Объем параллелепипеда, правые и левые тройки векторов.
- Применение скалярного и векторного произведений в геометрии линейных образов.

Тема 8. Определение функции вещественной переменной. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Определение функции вещественной переменной.
- График функции вещественной переменной.
- Предел последовательности вещественных чисел.
- Предельное значение функции вещественной переменной.

Тема 9. Бесконечно малая функция вещественной переменной. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Бесконечно малые функции.
- Свойства бесконечно малых функций.
- Сравнение бесконечно малых.
- Эквивалентные бесконечно малые функции.
- Использование эквивалентных бесконечно малых функций при вычислении пределов.

Тема 10. Непрерывность функции вещественной переменной. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Непрерывность функции в точке и на интервале.
- Теоремы о непрерывных функциях.
- Непрерывность функции на отрезке.
- Свойства функций, непрерывных на отрезке.
- Точки разрыва и их классификация.
- Точка устранимого разрыва.
- Точка разрыва первого рода.
- Скачок функции.
- Точка разрыва второго рода.

Тема 11. Определение производной функции вещественной переменной. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Понятие производной.
- Физический и геометрический смысл.
- Непрерывность дифференцируемой функции.
- Основные правила дифференцирования.
- Дифференцирование основных элементарных функций.
- Производные сложной функции.

Тема 12. Приложения производной. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Теоремы Ролля.
- Лемма Ферма.
- Теорема Лагранжа.
- Теорема Коши.

- Правило Лопиталя.

Тема 13. Экстремум дифференцируемой функции вещественной переменной. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Возрастание и убывание функции в точке.
- Возрастание и убывание функции на интервале.
- Признаки монотонности функции.
- Экстремум функции.
- Точка максимума функции.
- Точка минимума функции.
- Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Тема 14. Определение детерминанта. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Определитель матрицы 2 порядка.
- Определитель матрицы 3 порядка.
- Алгебраическое дополнение.
- Определитель квадратной матрицы.

Тема 15. Действия над матрицами. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Матрица.
- Главная диагональ матрицы.
- Единичная матрица.
- Сложение и вычитание матриц.
- Умножение матрицы на произвольное число.

Тема 16. Обратная матрица. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Обратная матрица.

Тема 17. Однородная система линейных уравнений. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Матричная запись систем линейных уравнений.
- Матричный метод решения систем линейных уравнений.
- Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
- Совместная система уравнений.
- Несовместная система уравнений.
- Определенная система уравнений.
- Неопределенная система уравнений.
- Расширенная матрица системы.
- Метод Гаусса.

Тема 18. Ранг матрицы. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Ранг матрицы.
- Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.
- Теорема Кронекера-Капелли.

Тема 19. Функции нескольких переменных. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Понятие функции нескольких переменных.
- Область определения функции нескольких переменных.
- Предел функции нескольких переменных.
- Непрерывность функции нескольких переменных.

Тема 20. Частные производные. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Частные производные функции нескольких переменных.

Тема 21. **П**олный дифференциал функции n переменных. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Полный дифференциал функции нескольких переменных.

Тема 22. Экстремум функции n переменных. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
- Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.
- Скалярные и векторные поля.
- Поверхности уровня.
- Производная по направлению.
- Градиент.
- Экстремум функции нескольких переменных.
- Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.
- Условный экстремум.

Тема 23. Неопределенный интеграл. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Первообразная
- Неопределенный интеграл.
- Свойства неопределенного интеграла.
- Таблица интегралов.
- Замена переменных в неопределенном интеграле.
- Занесение под знак дифференциала.
- Формула интегрирования по частям.
- Виды интегралов, берущихся по частям.
- Возвратные интегралы.
- Многократное интегрирование по частям.

Тема 24. Неопределенные интегралы от правильных рациональных дробей. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:
- Рациональные дроби.
- Правильная дробь.
- Простейшие дроби.
- Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей.
- Интегрирование рациональных дробей.

Тема 25. Вычисление неопределенных интегралов от целых степеней синуса и косинуса. (Форма проведения – практическое занятие).

Вопросы к теме:

- Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.
- Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где функция R является нечетной относительно $\cos x$.
- Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где функция R является нечетной относительно $\sin x$.
- Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где функция R является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$.
- Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов ($m \neq n$).
-

Тема 26. Определенный интеграл. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
- Интегральная сумма.
- Определенный интеграл и его свойства.
- Интеграл с переменным верхним пределом.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Замена переменных.
- Интегрирование по частям.

Тема 27. Приложения определенного интеграла. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Среднее значение функции.
- Определенный интеграл для вычисления площади плоской фигуры.
- Определенный интеграл для вычисления дуги кривой.
- Определенный интеграл для вычислений в кинематике.

Тема 28. Случайные события и вероятность. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Правило суммы.
- Правило произведения.
- Перестановки.
- Сочетания.
- Размещения.
- Формулы включений и исключений.
- Рекуррентные соотношения.
- Пространство элементарных событий.
- Сложные события.
- Частота случайных событий.
- Классическая и геометрическая вероятности.
- Условная вероятность.
- Формула полной вероятности.
- Формулы Байеса.

Тема 29. Функции распределения. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Случайная величина.
- Дискретная случайная величина.

- Непрерывная случайная величина.
- Функция распределения вероятностей.
- Схема Бернулли.
- Биномиальный закон распределения.
- Закон распределения Пуассона.
- Равномерный закон распределения.
- Показательный закон распределения.
- Нормальный закон распределения.
- Гауссова кривая.
- Функция Лапласа.

Тема 30. Числовые характеристики случайных величин. (Форма проведения – практическое занятие).

Вопросы к теме:

- Математическое ожидание случайной величины.
- Дисперсия случайной величины.
- Коэффициент вариации.
- Мода распределения.
- Медиана распределения.

Тема 31. Статистическая обработка результатов измерений. (Форма проведения – практическое занятие).

Вопросы к теме:

- Генеральная совокупность.
- Выборка.
- Требования к выборке.
- Дискретные вариационные ряды.
- Интервальные вариационные ряды.
- Эмпирическая функция распределения.
- Полигон.
- Гистограмма.
- Вариационные ряды.
- Абсолютная частота варианта.
- Относительная частота варианта.

Тема 32. Статистические оценки (точечные и интервальные) параметров распределения. (Форма проведения – практическое занятие).

Вопросы к теме:

- Точечные оценки.
- Состоятельные оценки.
- Несмещенные оценки.
- Эффективные оценки.
- Интервальная оценка.
- Доверительная вероятность.
- Надежность оценки.
- Предельная ошибка выборки.
- Уровень значимости.

Тема 33. Элементы теории корреляции. Ранговая корреляция. (Форма проведения – практическое занятие).

Вопросы к теме:

- Корреляционный анализ.
- Стратегия исследования зависимостей.
- Корреляционное поле.
- Выборочный коэффициент корреляции, его вычисление и свойства.
- Линейная корреляция.
- Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции.
- Корреляционное отношение и его свойства.
- Ранговые критерии проверки гипотезы независимости.
- Проверка гипотез о значимости коэффициентов.

Тема 34. Элементы регрессионного анализа. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Регрессионный анализ.
- Классификация регрессионных моделей.
- Основные положения классического регрессионного анализа.
- Оценки параметров регрессионных моделей и их свойства.

Тема 35. Статистическая проверка статистических гипотез. (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Статистические гипотезы.
- Примеры математических формулировок.
- Общие принципы построения статистических критериев.
- Нулевая и альтернативная гипотезы.
- Уровень значимости.
- Ошибки первого и второго рода.

Тема 36. Элементы дисперсионного анализа**.** (Форма проведения – практическое занятие).
Вопросы к теме:

- Элементы дисперсионного анализа.

7. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

№	Раздел, тема	Краткое содержание	Самостоятельная работа	Подготовка к экзамену	Форма контроля
1	Векторы.	**МП** 5, 19-20, 22, 27, 30, 406, 408	4	1	Устный опрос
2	Прямоугольные координаты.	**МП** 50-51, 56, 59, 63-64, 66, 76, 78, 90-91, 99-100	4	1	Устный опрос
3	Полярные, сферические и цилиндрические координаты	**МП** 121-122, 126, 128	4	2	Устный опрос
4	Скалярное произведение.	**МП** 131-132, 147-149, 152-153, 164-167	4	1	Устный опрос
5	Уравнение прямой на плоскости.	**МП** 367-368, 385-389, 391, 405, 410	4	1	Устный опрос

		416-419, 421, 423-424			
6	Векторное произведение.	**МП** 175-178, 196 **МП** 183-186, 189-190, 194, 198 **МП** 529, 534, 537, 539, 541, 567-570, 577-578, 580-583, 605-610, 617, 621-622	2	2	Устный опрос
7	Определение функции вещественной переменной.	**Д** 30-31(209-213) **Д** 164-165(373-380) **Д** 170а,б,г,(42а, 68); 171-173(51), 176-179(50, 2546), 276, 278 **Д** 191-198(411, 418-423); 203-210(437-438, 440-443); 221-223(471, 474-477, 482-483)	4	1	Устный опрос
8	Непрерывность функции вещественной переменной.	**Д** 301а-в(1104, 650ж) **Д** 317-323(679, 687-689, 691); 330, 334-335(346, 362г-д); 338(1617) **Д** 901-913(626-627, 676, 1483).	4	1	Устный опрос
9	Определение производной функции вещественной переменной.	**Д** 359-361(827, 829-830, 834-835) **Д** 368-382, 384-385, 410-417, 420-425, 433-434, 548-550, 555-558(836-971) **Д** 622-624, 626, 629, 631(1055-1057, 1060-1062); 596-597, 634-635(1077-1079) **Д** 663-664(1029-1031) **Д** 737-738(1097-1103); 741-744, 746(1106-1108)	4	2	Устный опрос
10	Экстремум дифференцируемой функции вещественной переменной.	**Д** 777-779, 782-784(1318-1320, 1322, 1337, 1341) **Д** 811-825(1268-1275); 830-	4	1	Устный опрос

		839(1414-1416, 1429-1436); 841-843, 845-847(1437-1441); 861-864(1561-1564, 1566-1575);			
11	Определение детерминанта.	**ФС** 128-129, 131, 140-142, 146-147	4	1	Устный опрос
12	Действия над матрицами.	**ФС** 159-162 **ФС** 157, 172-175, 218, 255, **ФС** 290-291, 464-465, 468-469283, 288	6	2	Устный опрос
13	Система линейных уравнений.	**ФС** 480-481 **ФС** 335-343, 345, 348 **ФС** 344, 346-347, 349, 353 **ФС** 366-380, 398-420 **ФС** 422-424, 426-428 **ФС** 881-882, 902-903	6	1	Устный опрос
14	Функции нескольких переменных.	**Д** 1794-1796 (3151-3159, 3166-3170) **Д** 1814-1815, 1820-1821, 2083-2085, 1822-1823, 1825 (3212-3228) **Д** 1891-1893, 1895-1899 (3256-3266)	8	1	Устный опрос
15	Производные функции нескольких переменных.	**Д** 1831, 1833-1834, 1836, 1843-1844, 1847 (3235-3242) **Д** 1981, 1993, 1995 (3528-3534, 3539-3542, 3549-3551) **Д** 1853-1855, 3117, 3119, 3121, 1851, 3123-3124 (3245-3250) **Д** 1916-1917 (3269-3271) **Д** 1869, 1873-1875 **Д** 1884-1886, 1888 (3345-3348) **Д** 2008-2010, 2012, 2033, 2038-2039, 2048-2049 (3621-3628, 3642-3643)	6	2	Устный опрос
16	Неопределенный интеграл.	**Д** 1031-1039(1628-1632), 1500(2166-2170) **Д** 1191, 1201-1203, 1207-1208 (1778-1785,	4	1	Устный опрос

		1836-1865) **Д** 1211, 1214, 1216, 1223-1226, 1232, 1237, 1241 (1791-1792, 1795, 1798, 1828-1829)			
17	Неопределенные интегралы некоторого специального вида.	**Д** 1255-1256, 1275-1276, 1280, 1285, 1321 (1836-1843, 1866-1887) **Д** 1338-1339 (1991-1996, 2013)	6	1	Устный опрос
18	Определенный интеграл.	**Д** 1511-1512 (2232) **Д** 1514-1517,1521-1527, 1529-1531, 1536-1539, 1542 (2268, 2239-2242) **Д** 1612-1615 (2318) **Д** 1623-1624, 1631-1633, 1635-1636, 1638, 1645 (2397-2399, 2400) **Д** 1665, 1667-1669, 1678 (2431-2432, 2434, 2443)	6	2	Устный опрос
19	Случайные события и вероятность.	**С** 1.1-1.8 (с.75), 1.13-1.15(с.80), 1.20 (с.81), **М** 1-10 (с.36), **Б** 1-28 (с.267)	4	1	Устный опрос
20	Функции распределения.	**С** 2.1-2.2 (с.162), 2.11-2.14 (с.167), 2.21 (с.173) **М** 1-13 (с.71), **Б** 1-3 (с.290)	6	1	Устный опрос
21	Числовые характеристики случайных величин.	**С** 2.27-2.30 (с.176), **М** 1-10 (с.83) **Б** 4-21 (290)	6	2	Устный опрос
22	Статистическая обработка результатов измерений.	**С** 3.1-3.14 (с.256), **М** 1-14 (с.117), **Б** 1-6 (с.320)	6	1	Устный опрос
23	Статистические оценки (точечные и интервальные) параметров распределения.	**М** 1-17 (с.128), **Б** 7-15 (с.321)	4	1	Устный опрос
24	Элементы теории корреляции. Ранговая корреляция.	**М** 1-22 (с.154),	4	2	Устный опрос
25	Элементы	**Б** 18-19 (с.322)	4	1	Устный

	регрессионного анализа.				опрос
26	Статистическая проверка статистических гипотез. Проверка гипотезы о различии средних значений двух случайных величин.	**М** 1-23 (с.136), **Б** 16-17 (с.322)	4	1	Устный опрос
27	Элементы дисперсионного анализа.	**М** 1-14 (с.328), **Б** 7-15 (с.421)	4	2	Устный опрос
Итого			126	36	

Условные обозначения:

Б	Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей
БВ	Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты.
Г	Гильдерман Ю.И. Лекции по высшей математике для биологов. - Новосибирск, 1974 /3/.
Д ( )	Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
Д	Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. Ред. Б.П.Демидович
М	Максимова О.В., Махоткина А.М. Теория вероятностей и математическая статистика.
МП	Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии
С	Спирина М.С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистика.
ФС	Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Список рекомендуемой литературы

а) основная литература.

1. Шипачев В. С. Высшая математика. Полный курс:учебник для вузов/Шипачев Виктор Семенович,Тихонов А. Н.;под ред. А. Н. Тихонова; МГУ.-М.:Юрайт,2014.-607 с.
2. Дмитриева М. В. Элементы высшей математики в примерах и задачах:метод. пособие для экол. фак./Дмитриева Марина Валерьевна;УлГУ, Экол. фак..-Ульяновск:УлГУ,2012.-43 с.
3. Баврин И. И. Высшая математика:учебник для студ. вузов/Баврин Иван Иванович,Матросов В. Л..-М.:ВЛАДОС,2004.-400 с.
4. Шипачев В. С. Высшая математика. Полный курс:учебник для бакалавров : учебник для вузов/Шипачев Виктор Семенович;под ред. А. Н. Тихонова.-М.:Юрайт,2012.-607 с.

б) дополнительная литература.

1. Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2009.
2. Виленкин И.В., Гробер В.М. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. – Ростов н/Д: Феникс, 2009.
3. Максимова О.В., Махоткина А.М. Теория вероятностей и математическая статистика. - Ростов н/Д: Феникс, 2010.
4. Спирина М.С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования. – М.: Издательский центр «Академия»

в) программное обеспечение.

1. Microsoft Windows (актуальная версия не ниже Windows XP);

2. Microsoft Office Professional (актуальная версия не ниже Office 2003), включающая Word, Excel, Access;

3. Интернет-броузер (Internet Explorer, Opera, Mozila и т.п.).

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы.

1. Электронный каталог библиотеки УлГУ.
2. Система ГАРАНТ: электронный периодический справочник [Электронный ресурс]. Электр. Даню (7162 Мб: 473378 документов). [Б.и., 199-].
3. ConsultantPlus: справочно-поисковая система [Электронный ресурс]. – Электр. Дан. (733861 документов) - [Б.и., 199-].
4. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (http://window.edu.ru/.).

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для проведения лекционных и практических занятий необходима аудитория, оснащенная доской, а при возможности компьютером и мультимедийным оборудованием.

Приложения

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ФОС)

по дисциплине «_Математика__»

1. Оценочные средства для промежуточной аттестации

1.1 Примерный перечень контрольных вопросов при подготовке к экзамену

Индекс компетенции	№ задания	Формулировка вопроса
ОПК-1	1.	Введение. Векторы, их сложение, умножение на число, проекции.
ОПК-1, ОК-7	2.	Прямоугольные координаты, расстояние между точками.
ОПК-1, ОК-7	3.	Полярные, сферические и цилиндрические координаты.
ОПК-1	4.	Скалярное произведение, проекция вектора на направление, угол между векторами.
ОПК-1, ОК-7	5.	Уравнение прямой на плоскости.
ОПК-1	6.	Перпендикулярные прямые.
ОПК-1, ОК-7	7.	Расстояния между прямыми и точками.
ОПК-1	8.	Уравнения плоскости и прямой в пространстве.
ОПК-1	9.	Векторное произведение, площади параллелограмма и треугольника.
ОПК-1, ОК-7	10.	Смешанное произведение, объем параллелепипеда, правые и левые тройки векторов.
ОПК-1, ОК-7	11.	Определение функции вещественной переменной. График функции вещественной переменной.
ОПК-1, ОК-7	12.	Предел последовательности вещественных чисел.
ОПК-1, ОК-7	13.	Предельное значение функции вещественной переменной.
ОПК-1	14.	Бесконечно малая функция вещественной переменной.
ОПК-1	15.	Непрерывность функции вещественной переменной.
ОПК-1	16.	Определение производной функции вещественной переменной. Табличное дифференцирование элементарных функций.
ОПК-1, ОК-7	17.	Геометрические приложения производной. Кинематические приложения производной.
ОПК-1	18.	Первый дифференциал функции вещественной переменной.
ОПК-1	19.	Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя.
ОПК-1, ОК-7	20.	Экстремум дифференцируемой функции вещественной переменной.
ОПК-1, ОК-7	21.	Возрастание и убывание дифференцируемой функции вещественной переменной.
ОПК-1, ОК-7	22.	Построение графика дважды дифференцируемой функции вещественной переменной.
ОПК-1, ОК-7	23.	Выпуклость и точки перегиба графика дважды дифференцируемой функции вещественной переменной.
ОПК-1, ОК-7	24.	Формула Тейлора. Использование стандартных разложений.
ОПК-1	25.	Теоремы о среднем (Ролль, Лагранж, Коши) дифференцируемой функции вещественной переменной.
ОПК-1	26.	Определение детерминанта (определителя), перестановка и ее четность.

ОПК-1	27.	Минор, алгебраическое дополнение, вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
ОПК-1	28.	Вычисление определителя с использованием линейных комбинаций строк (столбцов).
ОПК-1, ОК-7	29.	Сложение и умножение матриц, коммутативные матрицы, определитель произведения квадратных матриц.
ОПК-1, ОК-7	30.	Обратная матрица.
ОПК-1	31.	Метод Гаусса и формула Крамера для системы линейных уравнений Ax=b.
ОПК-1, ОК-7	32.	Однородная система линейных уравнений, линейная независимость векторов.
ОПК-1	33.	Ранг матрицы, использование линейных комбинаций строк (столбцов) для его вычисления.
ОПК-1	34.	Система линейных уравнений с параметрами.
ОПК-1	35.	Скалярное произведение, линейное метрическое пространство, ортогональный базис, ортогональные матрицы.
ОПК-1, ОК-7	36.	Линии уровня функции двух переменных, поверхности уровня функции трех переменных.
ОПК-1, ОК-7	37.	Частные производные, вектор-функция.
ОПК-1, ОК-7	38.	Частные производные высших порядков.
ОПК-1, ОК-7	39.	Дифференцируемость, полный дифференциал функции n переменных.
ОПК-1	40.	Касательная плоскость и нормаль к поверхности, изображаемой функцией двух переменных.
ОПК-1	41.	Приближенные вычисления при помощи полного дифференциала функции n переменных.
ОПК-1	42.	Дифференциал второго порядка функции n переменных.
ОПК-1	43.	Частные производные сложной функции n переменных.
ОПК-1, ОК-7	44.	Градиент.
ОПК-1, ОК-7	45.	Экстремум функции n переменных.
ОПК-1, ОК-7	46.	Формула Тейлора для функции n переменных.
ОПК-1, ОК-7	47.	Неопределенный интеграл, интегрирование по таблице и путем подведения под знак дифференциала.
ОПК-1, ОК-7	48.	Метод подстановки для неопределенного интеграла.
ОПК-1	49.	Метод интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
ОПК-1	50.	Неопределенные интегралы от правильных рациональных дробей второго порядка, или приводимые к таковым.
ОПК-1, ОК-7	51.	Вычисление по частям неопределенных интегралов от целых степеней синуса и косинуса.
ОПК-1	52.	Определенный интеграл с переменными пределами.
ОПК-1	53.	Формула Ньютона-Лейбница для определенного интеграла.
ОПК-1, ОК-7	54.	Среднее значение функции.
ОПК-1, ОК-7	55.	Определенный интеграл для вычисления площади плоской фигуры.
ОПК-1	56.	Определенный интеграл для вычисления дуги кривой. Определенный интеграл для вычислений в кинематике.
ОПК-1	57.	Правило суммы, правило произведения.
ОПК-1	58.	Перестановки с повторениями элементов и без повторения.
ОПК-1, ОК-7	59.	Сочетания с повторениями элементов и без повторения.
ОПК-1, ОК-7	60.	Размещения с повторениями элементов и без повторения.

ОПК-1, ОК-7	61.	Формула включений и исключений.
ОПК-1, ОК-7	62.	Рекуррентные соотношения.
ОПК-1, ОК-7	63.	Случайные события. Действия над событиями. Полная группа событий.
ОПК-1	64.	Классическое определение вероятности события.
ОПК-1	65.	Геометрическое определение вероятностей.
ОПК-1	66.	Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.
ОПК-1, ОК-7	67.	Формула полной вероятности и формула Байеса.
ОПК-1	68.	Определение случайной величины и функции распределения вероятностей.
ОПК-1, ОК-7	69.	Свойства функций распределения.
ОПК-1	70.	Дискретные случайные величины.
ОПК-1	71.	Непрерывные случайные величины.
ОПК-1	72.	Биномиальное распределение. Распределение Пуассона.
ОПК-1	73.	Равномерное, нормальное, хи-квадратичное, экспоненциальное и др. распределения.
ОПК-1, ОК-7	74.	Математическое ожидание случайной величины.
ОПК-1, ОК-7	75.	Начальные и центральные моменты.
ОПК-1	76.	Дисперсия случайной величины. Коэффициенты вариации. Мода и медиана распределения.
ОПК-1, ОК-7	77.	Закон больших чисел.
ОПК-1	78.	Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.
ОПК-1	79.	Генеральная совокупность и выборка. Требования к выборке.
ОПК-1, ОК-7	80.	Вариационные ряды. Средние величины. Показатели вариации.
ОПК-1	81.	Понятие оценки параметров.
ОПК-1	82.	Статистическое оценивание. Точечное оценивание.
ОПК-1, ОК-7	83.	Метод моментов.
ОПК-1, ОК-7	84.	Метод максимального правдоподобия.
ОПК-1	85.	Оценка параметров генеральной совокупности по собственно-случайной выборке.
ОПК-1, ОК-7	86.	Интервальное оценивание. Построение доверительного интервала для генеральной средней и генеральной доли.
ОПК-1, ОК-7	87.	Понятие корреляционного анализа.
ОПК-1, ОК-7	88.	Линейная корреляция. Выборочный коэффициент корреляции.
ОПК-1, ОК-7	89.	Свойства и проверка значимости выборочного коэффициента корреляции.
ОПК-1	90.	Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Свойства.
ОПК-1	91.	Ранговая корреляция Кендалла. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Свойства.
ОПК-1, ОК-7	92.	Проверка гипотезы о значимости коэффициентов корреляции.
ОПК-1, ОК-7	93.	Уравнение регрессии.
ОПК-1	94.	Метод наименьших квадратов.
ОПК-1	95.	Оценка значимости уравнения регрессии.
ОПК-1	96.	Статистические критерии. Ошибки первого и второго рода.
ОПК-1, ОК-7	97.	Уровень значимости и мощность критерия. Параметрические и непараметрические критерии.
ОПК-1	98.	Критерии значимости и их связь с интервальным оцениванием.
ОПК-1, ОК-7	99.	Проверка гипотезы о распределении генеральной

		совокупности по биномиальному закону.
ОПК-1	100.	Проверка гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности.
ОПК-1, ОК-7	101.	Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по показательному закону.
ОПК-1	102.	Проверка гипотезы о различии средних значений двух случайных величин.
ОПК-1	103.	Однофакторный дисперсионный анализ.
ОПК-1, ОК-7	104.	Многофакторный дисперсионный анализ.

Критерии и шкалы оценки:

- критерии оценивания – правильные ответы на поставленные вопросы;
- показатель оценивания – процент верных ответов на вопросы;
- шкала оценивания (оценка) – выделено 4 уровня оценивания компетенций:

высокий (отлично) - более 80% правильных ответов;
достаточный (хорошо) – от 60 до 80 % правильных ответов;
пороговый (удовлетворительно) – от 50 до 60% правильных ответов;
критический (неудовлетворительно) – менее 50% правильных ответов.

1.2 Задачи (задания) к экзамену (примеры)

Индекс компетенции	№ задания	Условие задачи (формулировка задания)
ОПК-1 (владеть)	1.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.
ОК-7 (уметь)	2.	Найти A^{-1} и сделать проверку: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
ОПК-1 (владеть)	3.	Решить систему методом Крамера систему $\begin{cases} 2x - y + 4z = 7, \\ 7x + 3y - z = 3, \\ 5x - 2y - 3z = 4. \end{cases}$
ОПК-1 (владеть)	4.	Решить матричным методом систему $\begin{cases} x + 3y - z = 3, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + 2y + 5z = 10. \end{cases}$
ОПК-1 (уметь)	5.	Решить методом Гаусса систему $\begin{cases} x + y - 3z = 7, \\ 3x - y + 2z = 4, \\ 7x - y + z = 17. \end{cases}$
ОК-7 (владеть)	6.	Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (2; -4; 4)$ и $\vec{b} = (-3; 2; 6)$.
ОК-7 (владеть)	7.	Дан треугольник с вершинами в точках A(-3;1;-2), B(1;3;2), C(4;5;4). Найти площадь треугольника и длину высоты,

		опущенной из вершины С.
ОК-7 (владеть)	8.	Стороны треугольника заданы уравнениями (АВ): 4х+3у-5=0, (ВС): х-3у+10=0, (АС): х-2=0. Определить координаты его вершин.
ОПК-1 (уметь)	9.	Найти расстояние от точки А(-3;4) до прямой 12х+5у-10=0.
ОПК-1 (уметь)	10.	Дан эллипс $16x^2+25y^2=400$. Найти длины осей, координаты вершин и фокусов и эксцентриситет.
ОПК-1 (уметь)	11.	Дана гипербола $9x^2-16y^2=144$. Определить расстояние между фокусами и эксцентриситет.
ОК-7 (владеть)	12.	Найти область определения функции $y=(\sqrt{3+x}+\sqrt[5]{7-x})/(x-5)$.
ОПК-1 (владеть)	13.	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.
ОК-7 (владеть)	14.	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.
ОПК-1 (владеть)	15.	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$.
ОПК-1 (владеть)	16.	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}{(x-5)^2}$.
ОПК-1 (владеть)	17.	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.
ОК-7 (владеть)	18.	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\,\frac{\pi x}{2}$.
ОК-7 (владеть)	19.	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cos\pi x}{x}$.
ОПК-1 (уметь)	20.	Найти $(3+5i)(4-i)$.
ОПК-1 (уметь)	21.	Найти $\frac{3-i}{4+5i}$.
ОПК-1 (владеть)	22.	Найти $(4-7i)^2$.
ОК-7 (владеть)	23.	Представить числа i; -2; -i; 1+i; 1-i в тригонометрической форме.
ОК-7 (владеть)	24.	Найти все значения для указанных радикалов: $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt{-5-12i}$.
ОПК-1 (владеть)	25.	Используя формулу Эйлера, вычислить действительную и мнимую части, а также модуль выражения e^{-i}.
ОПК-1 (уметь)	26.	Найти производную функции $y=\frac{1}{x-3}$, пользуясь непосредственно определением производной.

ОК-7 (уметь)	27.	Найти производную функции $y=\frac{\left(3x^2+5\right)^3}{2x-3}$.
ОК-7 (уметь)	28.	Найти производную функции $y=tg^4\left(x^2+1\right)$.
ОПК-1 (владеть)	29.	Найти производную функции $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$.
ОПК-1 (владеть)	30.	Найти производную функции $y=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.
ОПК-1 (владеть)	31.	Найти производную функции $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}arctgx$.
ОК-7 (владеть)	32.	Найти производную функции $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$.
ОПК-1 (уметь)	33.	Разложение некоторого химического вещества протекает в соответствии с уравнением $m=m_0e^{-kt}$, где m – количество вещества в момент времени t, k – положительная постоянная. Найти скорость разложения вещества и выразить ее как функцию от m.
ОК-7 (владеть)	34.	Размер популяции насекомых в момент t (время выражено в днях) задается величиной $p(t)=1000-9000(1+t)^{-1}$. Вычислить скорость роста в момент t.
ОК-7 (владеть)	35.	Найти с помощью дифференциала приближенное значение выражения $\sqrt[3]{26{,}19}$.
ОПК-1 (уметь)	36.	Найти с помощью дифференциала приближенное значение выражения $\ln 1{,}007$.
ОПК-1 (владеть)	37.	Найти производную 2 порядка функции $y=e^{\cos x}$.
ОПК-1 (владеть)	38.	Найти производную 2 порядка функции $y=arcctg\,x$.
ОПК-1 (владеть)	39.	Используя правило Лопиталя, найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}$.
ОК-7 (уметь)	40.	Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=3x+\frac{3}{x}+5$.
ОК-1 (уметь)	41.	Исследовать на экстремум функцию $y=x\ln x$.
ОК-7 (владеть)	42.	Исследовать на экстремум функцию $y=\frac{x}{x^2+4}$.
ОПК-1 (уметь)	43.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.
ОПК-1 (владеть)	44.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=tgx-x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

ОПК-1 (владеть)	45.	Найти положительное число x, чтобы разность $x-x^2$ была наибольшей.
ОПК-1 (владеть)	46.	Найти число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение.
ОПК-1 (владеть)	47.	Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры этого окна, чтобы при данном его периметре 2p оно пропускало наибольшее количество света.
ОК-7 (уметь)	48.	Нужно изготовить коническую воронку с образующей l. Какова должна быть высота H воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
ОПК-1 (владеть)	49.	Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y=\sqrt[3]{x-1}$.
ОК-7 (владеть)	50.	Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y=-x^3+15x^2-x-250$.
ОК-7 (уметь)	51.	Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.
ОК-7 (владеть)	52.	Исследовать функцию и построить график $y=\dfrac{x}{x^2+16}$.
ОПК-1 (владеть)	53.	Вычислить интеграл $\int\dfrac{2x^2+x-1}{x^3}dx$.
ОПК-1 (владеть)	54.	Вычислить интеграл $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.
ОПК-1 (уметь)	55.	Вычислить интеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.
ОПК-1 (уметь)	56.	Вычислить интеграл $\int\left(x^2+5\right)^7 2xdx$.
ОПК-1 (уметь)	57.	Вычислить интеграл $\int x\sqrt{1+x^2}dx$.
ОПК-1 (владеть)	58.	Вычислить интеграл $\int\cos^5 4x\sin 4xdx$.
ОПК-1 (владеть)	59.	Вычислить интеграл $\int\dfrac{x^2+1}{x-1}dx$.
ОПК-1 (владеть)	60.	Вычислить интеграл $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.
ОПК-1 (владеть)	61.	Вычислить интеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.
ОПК-1 (владеть)	62.	Вычислить интеграл $\int\dfrac{dx}{2x^2-2x+1}$.
ОПК-1 (владеть)	63.	Вычислить интеграл $\int\sin 2x\cos 2xdx$.
ОПК-1 (владеть)	64.	Вычислить интеграл $\int\dfrac{dx}{5x^2-2}$.
ОПК-1 (владеть)	65.	Вычислить интеграл $\int xe^{-2x}dx$.

ОПК-1 (уметь)	66.	Вычислить интеграл $\int \frac{\ln x dx}{(x+1)^2}$.
ОПК-1 (уметь)	67.	Вычислить интеграл $\int \arccos 2x dx$.
ОПК-1 (владеть)	68.	Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{x^2+2x+5}$.
ОПК-1 (владеть)	69.	Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.
ОПК-1 (владеть)	70.	Вычислить интеграл $\int \frac{(1+\sin x)dx}{(1+\cos x)\sin x}$.
ОПК-1 (владеть)	71.	Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$.
ОПК-1 (уметь)	72.	Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^3} dx$.
ОПК-1 (уметь)	73.	Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{x^3+1}{(x^4+4x+2)^2} dx$.
ОПК-1 (уметь)	74.	Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 xe^{-x} dx$.
ОПК-1 (владеть)	75.	Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x arctgx\, dx$.
ОПК-1 (владеть)	76.	Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \ln x dx$.
ОК-7 (владеть)	77.	Доказать, что функция $y = xe^{-x^2/2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = (1-x^2)y$.
ОПК-1 (владеть)	78.	Доказать, что функция $y = 5e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' + 2y = e^x$.
ОПК-1 (уметь)	79.	Доказать, что функция $y = x\sqrt{1-x^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $yy' = x - 2x^3$.
ОК-7 (владеть)	80.	Найти интегральные кривые дифференциального уравнения $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.
ОК-7 (владеть)	81.	Найти интегральные кривые дифференциального уравнения $y(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$.
ОК-7 (уметь)	82.	Найти интегральные кривые дифференциального уравнения $e^x dx - (1+e^y)ydy = 0$.
ОПК-1 (владеть)	83.	Найти решения задачи Коши для дифференциального уравнения $xy' + y - e^x = 0$, $y(1)$=e-1.
ОПК-1 (владеть)	84.	Найти решения задачи Коши для дифференциального уравнения

		$y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$, y(0)=0.
ОПК-1 (владеть)	85.	Найти решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y'\sin x - y\cos x = 1$, y(π/2)=0.
ОПК-1 (уметь)	86.	Найти интегральные кривые дифференциального уравнения $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.
ОПК-1 (уметь)	87.	Найти интегральные кривые дифференциального уравнения $(3x^2 + 6xy^2)dx + \left(6x^2 y + 4y^3)dy = 0\right)$.
ОПК-1 (владеть)	88.	Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.
ОПК-1 (уметь)	89.	Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' + xy' = 1$.
ОПК-1 (владеть)	90.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 4x\cos x$.
ОПК-1 (владеть)	91.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.
ОК-7 (владеть)	92.	На завтрак студент экологического факультета Владимир может выбрать пиццу, бутерброд, пирожок или кекс, а запить их он может кофе, соком или кефиром. Из скольких вариантов завтрака Владимир может выбирать?
ОК-7 (владеть)	93.	В коридоре висят три лампочки. Сколько имеется различных способов освещения коридора?
ОК-7 (владеть)	94.	В семье – 6 человек, и за столом в кухне стоят 6 стульев. В семье решили каждый вечер, ужиная, рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?
ОПК-1 (владеть)	95.	В семье – 6 человек, из них двое детей. За столом в кухне стоят 6 стульев. В семье решили каждый вечер, ужиная, рассаживаться на эти 6 стульев по-новому, детей между собой при этом принято не различать. Сколько дней члены семьи смогут делать это?
ОПК-1 (владеть)	96.	Предположим, что проходит некий конкурс красоты с 8 участниками. Одновременно проводится викторина: нужно угадать, кто займет в конкурсе 1, 2 и 3 места. Сколько всего существует вариантов ответа?
ОПК-1 (уметь)	97.	Сколько может быть паспортов с зафиксированными двумя первыми цифрами серии и остальными изменяющимися двумя цифрами серии и шестью цифрами номера? (с повторениями и без повторений)
ОПК-1 (уметь)	98.	Кости домино можно рассматривать как цифры 0,1,2,3,4,5,6. Найдите число сочетаний (с повторениями, без повторений).
ОК-7 (владеть)	99.	Решите уравнение $C_x^3 = 2C_x^2$.
ОК-7 (владеть)	100.	Сколько чисел в первой сотне, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
ОПК-1 (владеть)	101.	На фирме есть переводчики со знанием английского или немецкого языка, причем 12 человек, знающих английский язык, и 8 человек, знающих немецкий язык, но 3 человека из них знают два языка. Глава фирмы решил дать премию одному из

		переводчиков. Сколько у него вариантов выбора?
ОПК-1 (владеть)	102.	При бросании игральной кости событие А означает выпадение четного числа очков, событие В означает выпадение не менее 3 очков и событие С означает выпадение одного очка. Найдите А+В, А+В+С, АВ, АВС, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, А-В, В-А.
ОПК-1 (уметь)	103.	На плоскости начерчены две концентрические окружности (имеющие общий центр, но разные радиусы), радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями.
ОПК-1 (уметь)	104.	Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают 5 карт. Какова вероятность того, что среди выбранных карт будет хотя бы одна карта бубновой масти?
ОПК-1 (уметь)	105.	В коробке лежат 20 компьютерных чипов, 4 из которых бракованные. Определить вероятность того, что два наудачу вынутые чипа окажутся бракованными, если изъятие производить методом невозвращенного шара.
ОПК-1 (владеть)	106.	При подготовке к экзамену студент выучил 40 вопросов из пятидесяти вопросов программы. Экзаменационный билет содержит три разных вопроса. Вычислить вероятность того, что студент ответит на все три вопроса.
ОПК-1 (владеть)	107.	При подготовке к экзамену студент выучил 40 вопросов из пятидесяти вопросов программы. Экзаменационный билет содержит три разных вопроса. Вычислить вероятность того, что студент ответит хотя бы на один из трех вопросов.
ОПК-1 (владеть)	108.	Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.
ОК-7 (владеть)	109.	На склад поступило 1000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460 – на 2-м, 340 – на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го – 0,02, для 3-го – 0,01. Взятый наудачу подшипник оказался нестандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?
ОПК-1 (уметь)	110.	Случайная величина X задана функцией распределения $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{где} \quad x\le -1;\\ \frac{x}{4}+1/4, & \text{где} \quad -1<x\le 3;\\ 1, & \text{где} \quad x>3.\end{cases}$$ Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0;2).
ОПК-1 (владеть)	111.	Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения $$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline X & 1 & 4 & 8\\ \hline p & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6\\ \hline\end{array}$$ Найти функцию распределения и начертить ее график.
ОПК-1 (владеть)	112.	Задана плотность вероятности случайной величины X $$f(x)=\begin{cases}0, & \text{где} \quad x\le 0;\\ 2x, & \text{где} \quad 0<x\le 1;\\ 0, & \text{где} \quad x>1.\end{cases}$$ Найти вероятность того, что в результате испытания X примет

		значение, принадлежащее интервалу (0,5;1).
ОК-7 (уметь)	113.	Найти функцию распределения по данной плотности $$f(x)=\begin{cases}0, & \text{где} \quad x\le a;\\ 1/(b-a), & \text{где} \quad a<x\le b;\\ 0, & \text{где} \quad x>b.\end{cases}$$ распределения
ОК-7 (владеть)	114.	В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей и построить многоугольник полученного распределения.
ОПК-1 (владеть)	115.	Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.
ОПК-1 (владеть)	116.	Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,3;1).
ОПК-1 (уметь)	117.	Случайная величина X распределена по нормальному закону (σ=10, a=30). Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10,50).
ОПК-1 (уметь)	118.	Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра p биномиального распределения $p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, если в n_1 независимых испытаниях событие А появилось $x_1=m_1$ раз и в n_2 независимых испытаниях событие А появилось $x_2=m_2$ раз.

Критерии и шкалы оценки:
- критерии оценивания – правильное решение задач;
- показатель оценивания – процент правильно решенных задач;
- шкала оценивания (оценка) – выделено 4 уровня оценивания компетенций:

высокий (отлично) - более 80% правильно решенных задач;
достаточный (хорошо) – от 60 до 80 % правильно решенных задач;
пороговый (удовлетворительно) – от 50 до 60% правильно решенных задач;
критический (неудовлетворительно) – менее 50% правильно решенных задач..

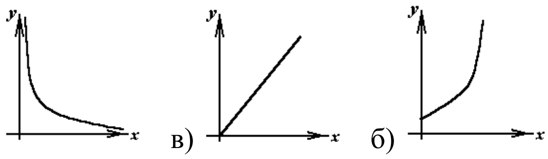
1.3.Тесты (тестовые задания)

Индекс компетенции	№ задания	Тест (тестовое задание)
ОПК-1 (владеть)	1.	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Вычислить $C=(c_{ij})=AB$. В ответе указать сумму наибольшего элемента матрицы C и элемента c_{21}. а) 6 б) 11 в) 8 г) 10.

ОК-7 (владеть)	2.	Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ 0 & -2 & -2\\ -4 & 4 & 1\end{pmatrix}$. Вычислить $B=(b_{ij})=A^{-1}$. В ответе указать сумму наибольшего элемента матрицы A^{-1} и элемента b_{31}. а) $\frac{2}{5}$ б) $-\frac{3}{5}$ в) $-\frac{1}{5}$ г) $-\frac{2}{5}$
ОПК-1 (уметь)	3.	Решить систему матричным методом $\begin{cases}-2x-2y-z=1,\\ -2y-2z=2,\\ -4x+4y+z=3\end{cases}$ и найти сумму $x+y+z$. а) $-\frac{9}{5}$ б) $-\frac{6}{5}$ в) $-\frac{13}{5}$ г) $-\frac{8}{5}$
ОПК-1 (владеть)	4.	Решить систему методом Крамера $\begin{cases}x-4y+4z=0,\\ 3x+3z=0,\\ -3x+3y-2z=-2\end{cases}.$ В ответе указать сумму определителей $\Delta+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$. При решении системы сокращения производить можно, однако надо учитывать, что если какое-то уравнение делится на k, то и все определители уменьшаются в k раз. а) 22 б) 21 в) 27 г) 26
ОК-7 (владеть)	5.	Решить систему методом Гаусса $\begin{cases}4x+3y+z=1,\\ 3z-y=11,\\ -3x+y+4z=7\end{cases}.$ В ответе указать сумму $x+y+z$. а) 0 б) 2 в) 5 г) 1
ОК-7 (владеть)	6.	Решить систему методом Гаусса $\begin{cases}-3t-3x-2y-3z=4,\\ -3t+x-2y-3z=3,\\ 3t+3y-2z=-1\end{cases}.$ В ответе указать такое значение t, при котором $x+y+z=0$. а) $-\frac{41}{36}$ б) $-\frac{37}{36}$ в) $-\frac{49}{36}$ г) $-\frac{47}{36}$
ОПК-1 (уметь)	7.	Даны 3 вершины треугольника: A(-3;3), B(-1;-3), C(5;4). Найти уравнение стороны AC в виде $y=kx+b$. В ответе указать сумму $k+b$. а) $\frac{17}{2}$ б) $\frac{15}{2}$ в) $\frac{7}{2}$ г) $\frac{13}{2}$
ОПК-1 (уметь)	8.	Даны 3 вершины треугольника: A(-3;3), B(-1;-3), C(5;4). Найти уравнение прямой, проведенной через вершину B параллельно AC, в виде $y=kx+b$. В ответе указать сумму $k+b$.

		а) $-\frac{11}{4}$ б) $-\frac{5}{4}$ в) $-\frac{15}{4}$ г) $-\frac{13}{4}$
ОК-7 (уметь)	9.	Даны 3 вершины треугольника: A(-3;3), B(-1;-3), C(5;4). Найти координаты основания высоты, опущенной из вершины B на AC. В ответе указать сумму координат. а) $\frac{21}{13}$ б) $\frac{18}{13}$ в) $\frac{24}{13}$ г) $\frac{17}{13}$
ОК-7 (владеть)	10	Что определяет уравнение $x^2-2x+y^2-2y+38=0$. Если это уравнение окружности, то указать в ответе сумму координат центра и радиуса. а) 3 б) 4 в) 7 г) Ничего.
ОПК-1 (владеть)	11	Найти координаты вершины параболы: $4y+x^2+4x+8=0$. В ответе указать разность между ординатой и абсциссой вершины. а) 0 б) -3 в) 1 г) 5
ОК-7 (владеть)	12	Известно, что $\|\vec{a}\|$=4, $\|\vec{b}\|$=4. Угол между этими векторами $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Найти $\left(5\vec{a}-4\vec{b},-\vec{a}+3\vec{b}\right)$. а) -271 б) -274 в) -272 г) -277
ОПК-1 (владеть)	13	Известно, что что $\|\vec{a}\|$=4, $\|\vec{b}\|$=4. Угол между этими векторами $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Найти $\left(-3\vec{a}+2\vec{b},-2\vec{a}-5\vec{b}\right)$. а) 152 б) 147 в) 149 г) 150
ОК-7 (владеть)	14	Даны 4 точки: A(-2;-1;-3), B(0;0;-1), C(2;-4;-4), D(3;0;5). Найти площадь треугольника ABC.
ОПК-1 (владеть)	15	При каком x векторы $\vec{a}=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-3\vec{k},\vec{b}=\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+x\vec{k},\vec{c}=-2\vec{\imath}-\vec{k}$ будут компланарны? а) $-\frac{15}{2}$ б) $-\frac{13}{2}$ в) $-\frac{23}{2}$ г) $-\frac{21}{2}$
ОПК-1 (владеть)	16	Вычислить $\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}}((3x+2)^{4/3}+5)dx$. а) $\frac{37}{21}$ б) $\frac{38}{21}$ в) $\frac{41}{21}$ г) $\frac{40}{21}$
ОПК-1 (владеть)	17	Вычислить $\int_3^6\frac{-6x^2+83x-243}{(x-9)^2x}dx$. а) $\frac{2}{3}$ б) $\frac{5}{3}$ в) $-\frac{1}{3}$ г) $\frac{1}{3}$
ОПК-1 (уметь)	18	Вычислить $\int_1^4(2x-4)\ln x dx$. а) $\frac{13}{2}$ б) $\frac{9}{2}$ в) $\frac{17}{2}$ г) $\frac{5}{2}$
ОК-7 (уметь)	19	Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-4x^2}{4x+5}+\frac{-2x^2-1}{5-2x}\right)$.

		а) $\frac{9}{4}$ б) $\frac{15}{4}$ в) $\frac{7}{4}$ г) $\frac{3}{4}$
ОК-7 (владеть)	20	Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-9x+4}{-5x^2+24x-16}$. а) $-\frac{17}{16}$ б) $-\frac{15}{16}$ в) $-\frac{7}{16}$ г) $-\frac{9}{16}$
ОК-7 (владеть)	21	Вычислить $\lim\limits_{x\to5}\frac{16-x^2}{3x^2-3}$. а) $\frac{9}{8}$ б) $\frac{11}{8}$ в) $-\frac{1}{8}$ г) $\frac{3}{8}$
ОК-7 (владеть)	22	Вычислить $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{5-2x}-1}{x^2-4}$. а) $\frac{3}{4}$ б) $-\frac{3}{4}$ в) $-\frac{5}{4}$ г) $-\frac{1}{4}$
ОПК-1 (владеть)	23	Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{9x^2tg(3x)}{2\sin x(1-\cos x)}$. а) 27 б) 25 в) 24 г) 29
ОПК-1 (уметь)	24	Вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x-3}{4-2x}\right)^x$. а) 0 б) $\frac{1}{e^7}$ в) $\frac{1}{e^4}$ г) ∞
ОПК-1 (уметь)	25	Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+3}\right)^{3x}$. а) $\frac{1}{e^{7/2}}$ б) $e^{5/2}$ в) $\frac{1}{e^{3/2}}$ г) 0
ОПК-1 (уметь)	26	Найдите производную функции: $f(x)=6x^4-3x^3-2x^2-8$. а) $6x^3-3x^2-2x$ б) $24x^3-9x^2-2x-8$ в) $24x^3-9x^2-4x$ г) $6x^3-3x^2-2x-8$
ОПК-1 (владеть)	27	Найдите производную функции: $f(x)=5x^3-4\sqrt{x}$. а) $15x^2-4$ б) $15x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}$ в) $15x^2-\frac{4}{\sqrt{x}}$ г) $15x^2-4x$
ОК-7 (владеть)	28	Найдите производную функции: $f(x)=x\cos x$. а) $\cos x+x\sin x$ б) $\sin x+x\cos x$ в) $\cos x-x\sin x$ г) $\sin x-x\cos x$
ОПК-1 (владеть)	29	Найдите производную функции: $f(x)=\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$. а) $5\cos 5x$ б) $5\sin(x-\frac{\pi}{3})$ в) $5\cos(5x-\frac{\pi}{3})$ г) $\cos(5x-\frac{\pi}{3})$
ОПК-1 (владеть)	30	Найдите $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x)=3\cos x$. а) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ б) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ в) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ г) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
ОК-7	31	Найти общее решение уравнения $y'=30x^5$.

(уметь)		а) $y = 6x^5 + C$ б) $y = 5x^6 + C$ в) $y = 150x^4$ г) $y = 30x^6$
ОК-7 (владеть)	32	Найти решение уравнения $y' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$. а) $y = \ln\|x\| + C$ б) $y = -\frac{1}{x^2} + C$ в) $y = -\frac{1}{x} + 2$ г) $y = \ln\|x\| + 1$
ОПК-1 (владеть)	33	Найти общее решение уравнения $y'' = \sin x$. а) $y = -\sin x + C_1 + C_2 x$ б) $y = \cos x + C_1 x + C_2$ в) $y = -\sin x$ г) $y = -\cos x$
ОК-7 (уметь)	34	Найти дифференциальное уравнение, имеющее общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. а) $y'' + y' - 2y = 0$ б) $y'' + 2y' - y = 0$ в) $y'' - y' - 2y = 0$ г) $y'' + 3y' - 2y = 0$
ОК-7 (владеть)	35	Найти дифференциальное уравнение, имеющее корни характеристического уравнения $7 - 2i$ и $7 + 2i$. а) $y'' + 14y' - 53y = 0$ б) $y'' - 53y = 0$ в) $y'' + 7y' + 2y = 0$ г) $y'' - 14 + 53y = 0$
ОПК-1 (владеть)	36	Определить тип уравнения $x^2 y' - x = y,\ x \neq 0$. а) $P(x)dx = Q(y)dy$ б) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, где $f(kx, ky) = f(x, y)$ в) $y' + P(x)y = Q(x)$ г) тип (Б) и (В)
ОПК-1 (владеть)	37	Найти частное решение уравнения $y'' - 4y = 4x$. а) $y = -x$ б) $y = 4x + 4$ в) $y = -2x + 2$ г) $y = e^{-2x} + e^{2x} + x$
ОК-7 (уметь)	38	Указать уравнения с разделяющимися переменными для уравнения $(1 + x^2)dx = (1 + y)x^2 dy$. а) $\frac{1 + x^2}{x^2} dy = (1 + y) \cdot dx$ б) $(1 + x^2) \cdot dx = (1 + y) \cdot x^2 \cdot dy$ в) $\frac{1 + x^2}{x^2} dx = (1 + y) \cdot dy$ г) разделение невозможно
ОПК-1 (уметь)	39	Преобразованное уравнение $x^2 y' = x^2 + y^2,\ y = ux$, имеет вид а) $u' \cdot x = 1 - u$ б) $u' \cdot x = u^2$ в) $u' \cdot x = 1 - u + u^2$ г) $u' \cdot x = 1 + u + u^2$
ОПК-1 (владеть)	40	График решения уравнения $y'' = e^x$, $y > 0$, $x > 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.  а) в) б) г) Ни один из вариантов а), б), в)
ОК-7 (уметь)	41	По какой формуле можно вычислить вероятность совместного появления двух зависимых событий? а) *P(A) + P(B) - P(A • B)*; б) *P(A) + P(B)*; в) *P(A) • P(B/A)*; г) *P(A) • P(B)*.
ОК-7 (владеть)	42	Известны вероятности событий *A, B* и *C*. Какая из вероятностей соответствует событию, состоящему в том, что выполнятся все события *A, B* и *C*? а) *1 - P(ABC)*; б) *P(A + B + C)*; в) $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$; d) $P(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$; г) *P(ABC)*.
ОПК-1 (владеть)	43	Известны вероятности событий *A, B* и *C*. Какая из вероятностей соответствует событию, состоящему в том, что выполняется хотя бы одно из событий *A, B* и *C*?

		а) $1 - P(A + B + C)$; б) $1 - P(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$; в) $P(ABC)$; г) $1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$.

Критерии и шкалы оценки:

- критерии оценивания – правильные ответы на поставленные вопросы;
- показатель оценивания – процент верных ответов на вопросы;
- шкала оценивания (оценка) – выделено 4 уровня оценивания компетенций:

высокий (отлично) - более 80% правильных ответов;
достаточный (хорошо) – от 60 до 80 % правильных ответов;
пороговый (удовлетворительно) – от 50 до 60% правильных ответов;
критический (неудовлетворительно) – менее 50% правильных ответов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 327 с.
2. Баранова Е.С. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие./ Е.С. Баранова, Н.В. Васильева, В.П. Федотов - Спб.: Питер, 2009. – 320 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 1971, - 703с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1988, - 175с.
5. Виленкин И.В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов / И.В. Виленкин, В.М. Гробер. – Изд. 5-е. – Ростов н/Д: Феникс, 2009, - 414 с.
6. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов: Пер. с англ. – М.: Высшая школа, 1983. – 384 с.
7. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1985, - 464с.
8. Крылов В.И. и др. Вычислительные методы высшей математики. - М.: Наука, т.2, 1978, - 400с.
9. Рафаэль Лаос-Бельтра. Мир математики в 40 т. Т. 28. Математика жизни. Численные модели в биологии и экологии. / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.
10. Жузеп Салес, Франсеск Баньюлс. Мир математики в 40 т. Т. 29. Таинственные кривые. Эллипсы, гиперболы и другие математические чудеса. / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.
11. AlexLarin.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам в изучении различных разделов высшей математики. URL: https://www.alexlarin.net (дата обращения: 20.03.2017)
12. EDU.ru – федеральный образовательный портал. URL: https://www.edu.ru (дата обращения: 20.03.2017)
13. Wikipedia.org – многоязычный проект по созданию полноценной и точной энциклопедии со свободно распространяемым содержимым. URL: https://www.wikipedia.org (дата обращения: 20.03.2017)

Дополнительная литература

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине: Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 327 с.
2. Галлеев Э.М. Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2003. – 68 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. – М.: Физматлит. Ч.1 – 2005, 7-е изд., 648 с.; Ч.2 – 2002, 4-е изд., 464 с.
4. Корниш-Боуден Э. Основы математики для биохимиков: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 144 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. В 3 томах. М.: Дрофа, Т.1. – 2003. – 704 с.; Т.2. – 2004. – 720 с.; Т.3. – 2006. – 351 с.
6. Математический энциклопедический словарь./Гл. ред. Ю.В. Прохоров; Ред. Кол.: С.И Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцков, А.П. Ершов, Л.Д. Кудрявцев, А.Л. Онищик, А.П. Юшкевич. - М.: Сов. Энциклопедия, 1988.-847 с.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1983. – 461 с.
8. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика/Глав. ред. М.Д.Аксенова. – М.: Аванта+, 2002. – 688 с.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Общематематические символы

$\lvert a \rvert$	абсолютное значение (модуль) числа a
$=$	равно
$\neq$	не равно
$>$	больше
$<$	меньше
$\geq$	больше или равно
$\leq$	меньше или равно
$\sqrt{}$	корень квадратный
$\sqrt[n]{}$	корень n-й степени
$\sum$	знак суммы
$\Rightarrow$	«следовательно»
$\Leftrightarrow$	«равносильно», «тогда и только тогда»
$\{$	знак системы (уравнений, неравенств)
$[$	знак совокупности (уравнений, неравенств)
$\mathrm{A} = (a_{ij})$	матрица *A*
E	единичная матрица
A^T	транспонированная матрица
$\det A = \Delta(A) = \lvert A \rvert$	определитель матрицы *A*
A^{-1}	обратная матрица
$r(A)$	ранг матрицы *A*
$P_n(x)$	многочлен степени n

Множества

N	натуральные числа
Z	целые числа
Q	рациональные числа
R	действительные числа
$[a, b]$	отрезок
(a, b)	интервал
$a \in A$	*à* принадлежит множеству *A*
$a \notin A$	*à* не принадлежит множеству *A*
$A \subset B$	*A* есть подмножество *B*
$A \not\subset B$	*A* не есть подмножество *B*
$A \cup B$	объединение множеств *A* и *B*
$A \cap B$	пересечение множеств *A* и *B*

Комплексные числа

i	мнимая единица
$\operatorname{Re} z$	действительная часть комплексного числа z
$\operatorname{Im} z$	мнимая часть комплексного числа z
$\bar{z}$	комплексное число, сопряженное к z
$\lvert z \rvert$	модуль комплексного числа z
$\arg z$	аргумент комплексного числа z

Геометрия

$\angle A$	угол *A*
$a \parallel b$	*à* параллельно b
$a \perp b$	*à* перпендикулярно b

$A(x;y)$	точка A с координатами x и y
$\vec{a}, \overrightarrow{AB}$	вектор
$\lvert\vec{a}\rvert$	модуль (длина вектора) $\vec{a}$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})$	скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
$\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a},\vec{b}]$	векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

Архимед (287 до н.э. – 212 до н.э.), древнегреческий математик, физик и инженер из Сиракуз; сделал множество открытий в геометрии; заложил основы механики, гидростатики, был автором ряда важных изобретений

Бернулли Якоб (1654 – 1705), швейцарский математик; развил методы исчисления бесконечно малых величин Лейбница; заложил фундамент теории вероятностей, в которой доказал простейший случай закона больших чисел; один из создателей вариационного исчисления

Больцано Бернард (1781 – 1848), чешский математик и философ; в начале XIX века наряду с Коши дал определение предела, дифференциала и интеграла, а также предложил строгое математическое доказательство теоремы о непрерывной на отрезке функции; был предшественником Кантора в исследовании бесконечных множеств

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815 – 1897), немецкий математик; автор трудов по математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре; разработал схему логического обоснования математического анализа

Галилей Галилео (1564 – 1642), итальянский физик, механик, астроном, философ и математик, оказавший значительное влияние на науку своего времени; первым использовал телескоп для наблюдения небесных тел и сделал ряд выдающихся астрономических открытий; основатель экспериментальной физики

Гамильтон Уильям Роуан (1805 – 1865), ирландский математик; дал полное изложение теории комплексных чисел; работал в области теории графов

Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855), немецкий математик; его труды оказали огромное влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, математической физики, геодезии, астрономии

Гранди Луиджи Гвидо (1671 – 1742), итальянский монах, священник, философ и инженер

Декарт Рене (1596 – 1650), французский философ и математик, физик и физиолог; заложил основы аналитической геометрии, дал понятия переменной величины и функции, ввел многие алгебраические обозначения

Кеплер Иоганн (1571 – 163), немецкий математик, астроном, механик, оптик, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы

Коши Огюстен Луи (1789 - 1857), французский математик; автор классических курсов математического анализа, основанных на систематическом применении понятия предела; один из основоположников теории аналитических функций, автор трудов по теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории чисел, геометрии

Кэрролл Льюис (1832 – 1898), английский писатель, математик, логик, философ, диакон и фотограф; профессор математики Оксфордского университета; автор произведений «Алиса в стране чудес», «Алиса в Зазеркалье»

Ламе Габриель (1795 – 1870), французский математик, механик, физик и инженер

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646 – 1716), немецкий философ, математик, физик; один из создателей дифференциального и интегрального исчислений

Лиссажу Жюль Антуан (1822 – 1880), французский математик, член-корреспондент Парижской Академии наук

Лопиталь Гийом Франсуа Антуан (1661 – 1704), французский математик; автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению

Ньютон Исаак (1643 – 1727), английский математик, механик, астроном и физик; автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии» (1687 г.); независимо от Лейбница разработал дифференциальное и интегральное исчисления, ввел степенные ряды и систематически пользовался ими для представления функций; работы Ньютона в различных областях естествознания намного опередили свое время

Хейн Пит (1905 – 1996), датский ученый, писатель, изобретатель, художник и инженер; наибольшую известность приобрел благодаря созданию стихотворных афоризмов, которые он называл груками

Эйлер Леонард (1707 – 1783), математик, механик, физик и астроном, по происхождению швейцарец; работал в России и Германии; автор свыше 800 работ по математическому анализу, теории чисел, дифференциальной геометрии, математической физике, небесной механике и др.; оказал значительное влияние на развитие науки