МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. К. Горбунов

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ: теория и построение

Учебное пособие

Ульяновск 2013

УДК 330:517(6758)
ББК 65в631я73
Г67

Печатается по решению Ученого совета
Института экономики и бизнеса Ульяновского государственного университета

Рецензент – доктор экономических наук, профессор *С. Г. Капканщиков*

Горбунов, В. К.
Г67 **Производственные функции: теория и построение** : учебное пособие / В. К. Горбунов. – Ульяновск : УлГУ, 2013. – 84 с.

Производственные функции (ПФ) являются математическими моделями достаточно крупных производственных объектов, отраслей, региональных и национальных экономик. ПФ позволяют решать задачи экономического анализа, недоступные калькуляционным методам. В пособии излагается теория ПФ, основные модели теории производства, использующие эти функции, и метод их построения по статистическим данным. Изложен авторский метод построения «капитальных» производственных функций, один из факторов которых – стоимость используемых фондов, формируемая по информации об инвестициях в основные и/или оборотные фонды.

Материал пособия соответствует программам дисциплин экономических специальностей и направлений, включающим разделы экономико-математического моделирования. Предполагается знакомство читателя с теорией и методами решения задач нелинейного программирования.

УДК 330:517(6758)
ББК 65в631я73

Директор Издательского центра *Т. В. Филиппова*
Редактирование *Е. Г. Туженковой*
Подготовка оригинал-макета *Е. Е. Гусевой*

Подписано в печать 15.03.13.
Формат 60х84/16. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 4,9. Уч.-изд. л. 4,2. Тираж 100 экз. Заказ 27 /

Оригинал-макет подготовлен и отпечатано в Издательском центре
Ульяновского государственного университета
432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

Оглавление

Введение

Производственные функции являются базовым элементом математического аппарата моделирования производственных объектов и систем на различных уровнях – от крупного предприятия (фирмы) до национальных экономик. Такие функции являются *математическими моделями* исследуемых объектов типа *чёрного ящика*, представляющими зависимости выпуска продукции от затрат производственных факторов в предположении их рационального использования. Производственные функции описывают сложный объект упрощённо на основе выделения его наиболее существенных (для конкретного исследования) показателей затрат, имеющих количественные меры, и установления конкретной функциональной связи, которая, по предположению, существует между затратами и выпуском.

Для экономического анализа производства его инженерные и технологические характеристики не представляют явного интереса. Важны стоимостные показатели используемых в различных комбинациях факторов производства и соответствующих выпусков. Основными факторами производства являются труд и «капитал», представляющий стоимость производственных фондов. Более детальный анализ учитывает, кроме того, затраты энергии и материальных ресурсов, а также выделяет различные виды труда по квалификации, виды капитальных затрат (основные и оборотные фонды). Факторы и выпуск измеряются в натуральных, стоимостных или относительных (индексах) показателях. Исследуемые объекты, как правило, являются многопродуктовыми. Для экономического анализа наиболее важной характеристикой производственного объекта является стоимость его валового (агрегированного) продукта. Для этого и служит метод моделирования производства в виде производственной функции.

Понятие производственной функции (ПФ) сформировалось на рубеже XIX и XX вв. как одно из проявлений математизации экономической науки и становления неоклассического анализа (Mishra, 2010). Наибольшую известность получила функция, предложенная шведским экономистом Кнутом Викселлем (Knut Wicksell, 1851–1926) для абстрактного производственного объекта. Викселль предположил, что выпуск продукции, измеряемой стоимостью Y, однозначно определяется используемым основным капиталом K (стоимостью основных фондов) и трудом L (рабочим временем или оплатой труда), т.е. является функцией $Y = F(K,L)$. Более того, он предложил конкретную функцию $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, параметры которой A, α, β должны обеспечивать математические свойства функции выпуска, согласованные с экономическим смыслом.

Частный случай функции Викселля, когда $\alpha + \beta = 1$ и она принимает вид $AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, был применен американскими исследователями – экономистом П. Дугласом (Paul Douglas) и математиком Ч. Коббом (Charles Cobb) для исследования влияния величин используемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США периода 1899–1922 гг. (Cobb, Douglas, 1928). Кобб применил метод наименьших квадратов для оценки параметров функции $AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, и Дуглас выполнил содержательный экономический анализ выбранного сегмента американской экономики рассмотренного периода. Работа Кобба и Дугласа заложила направление экономико-математического моделирования, не потерявшего значения до настоящего времени. Функция Викселля стала называться в литературе функцией Кобба–Дугласа. Однако для уточнения приоритета мы используем имя Викселля для производственной функции $AK^{\alpha}L^{\beta}$ и её частный случай $AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ называем производственной функцией Кобба.

Функция Викселля (Кобба–Дугласа) очень проста и не позволяет достаточно хорошо представлять сложные объекты и особенно исследовать процессы *замещения* (взаимной замены) производственных факторов. Фундаментальное понятие *эластичности замещения*, изучаемое в данном пособии, здесь вырождается, принимая значение единицы. Со временем были предложены более сложные классы ПФ, обобщающие функцию Викселля в различных направлениях и повышающие возможности экономического анализа. Однако с повышением сложности ПФ усложняются задачи их идентификации. Функция Викселля остаётся до настоящего времени наиболее распространённой моделью в публикациях по моделям производства.

Метод производственных функций можно отнести к высоким технологиям количественного экономического анализа. Он используется в промышленно развитых странах и крупных транснациональных корпорациях (Hackman, 2008). Метод ПФ активно использовался и развивался в научном отношении в СССР (и других социалистических странах) в исследовательских работах и практическом планировании на союзном (государственном), региональном и отраслевом уровнях при решении сложных задач управления одной из ведущих индустриальных экономик мира (Терехов, 1974; Иванилов, Лотов, 1979; Плакунов, Раяцкас, 1984; Клейнер, 1986).

Перевод индустриальной экономики советской России в сырьевую провинцию «мирового рынка» (рынка наиболее развитых стран) поставил новые проблемы для применения метода ПФ. В новой, рыночной реальности предположение о рациональности производства, представляемого отчётными статистическими данными, не всегда реализуется. Причинами могут быть как нерациональность (в легальном понимании) поведения объекта, так и несоответствие статистической информации истинному состоянию в силу различных причин, в том числе неполной загруженности имеющихся фондов (см., например, Воскобойников, 2004; Ханин и Фомин, 2007), а также в силу коррупционного присвоения инвестиций. Последнее особенно характерно для современной России, и исследователь должен принимать это во внимание при построении производственных функций. Математическая модель, построенная по официальным статистическим данным, может плохо отражать соответствующий объект. Однако во многих случаях методология ПФ позволяет учитывать эти негативные явления и решать новые задачи оценивания реальных уровней использования наличных производственных фондов и выделенных инвестиций.

В первой части пособия излагаются основные факты теории производственных функций, их характеристики и свойства. Приведены основные классы ПФ, используемые в математическом моделировании достаточно крупных производственных объектов. Описан новый класс однородных квазивогнутых функций с переменной эластичностью замещения.

Во второй части изложены задача максимизации прибыли в долгосрочном периоде и задача минимизации издержек. Приведены свойства факторного спроса, функции прибыли, условного факторного спроса и функции издержек.

Третья часть посвящена методу наименьших квадратов для построения производственных функций для реальных объектов по статистике использования производственных факторов и соответствующих выпусков на некотором периоде наблюдения объекта. Задача МНК проста для функций

Викселля–Кобба–Дугласа, но для других функций, более адекватных реальным объектам, она становится достаточно сложной. Для преодоления вычислительных проблем при усложнении классов используемых функций предлагается методика их поэтапного построения от простого класса (начиная с функций Викселля) к более сложному классу с использованием на новом этапе результатов предыдущего этапа.

В случае, когда известно о неполной загруженности производственных фондов, отражаемых отчётной статистикой (балансовых фондов), стандартный подход к построению «капитальных» производственных функций, один из факторов которых – рационально используемые фонды, – не может использоваться. Если при этом известны производственные инвестиции на промежутке наблюдения объекта, то капитальная ПФ может быть построена с использованием уравнений динамики формирования фондов – освоения инвестиций с учётом амортизации фондов и скорости освоения инвестиций. В этом случае формируются оценки *эффективных фондов*, под которыми понимается та часть балансовых фондов, которые реально используются для производства выпускаемой продукции. Такая задача существенно сложнее стандартной и требует дополнительной информации о значении эффективных фондов в один из моментов промежутка наблюдения, а также о показателях амортизации и освоения инвестиций.

В заключительном разделе приведены результаты решения тестовых задач построения ПФ, а также для официальных статистических данных российской экономики. Все расчеты и графические иллюстрации реализованы А.Г. Львовым при выполнении диссертационного исследования под руководством автора данного пособия (Львов, 2012) в программной системе «Mathematica». Автор выражает благодарность Александру Геннадьевичу за добросовестную и плодотворную работу.

Новые результаты третьего раздела получены при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.), проект 2.1.3/6763 «Развитие математических моделей и анализ рыночного спроса и производства», и Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-97029.

1. Производственные функции: основные характеристики и классы

1.1. Функция Викселля (Кобба–Дугласа). Простейшие характеристики

1.1.1. Понятие *производственной функции* как модели достаточно крупного производственного объекта или системы (производственное объединение, отрасль, экономика региона, страны) основано на предположении, что величина выпуска однозначно определяется набором и уровнем использования *производственных факторов*. При этом внутренняя структура исследуемого производственного объекта считается несущественной для целей исследования и предполагается, что производственные факторы используются *рационально*. Рациональность в данном контексте означает, что персонал данного объекта работает как можно лучше в соответствии с легальными целями производственной деятельности, внешними условиями (прежде всего ценами и спросом на выпускаемую продукцию), квалификацией и уровнем организации. Под легальными целями производственной деятельности обычно понимается *максимизация прибыли* или *минимизация издержек* при выборе вариантов использования производственных факторов с учётом внешних условий.

Модель производственной функции, как и формально близкая модель представления предпочтений ансамбля потребителей некоторого рынка, выражаемая с помощью *функции предпочтения* (Горбунов, 2004), имеют принципиальное отличие от большинства математических моделей естествознания и многих экономических моделей *структурного типа*. Структурные модели представляют объект в виде соотношений, построенных на основе теоретически и экспериментально обоснованных связей между содержательными элементами моделей. При этом на операции, применяемые к содержательным переменным (имеющим содержательные меры: массу, энергию, стоимость и т.д.), накладываются ограничения, обеспечивающие согласование размерностей. Разумеется, размерностные требования следует относить к уравнениям структурной модели и результатам её анализа. В промежуточных же вычислениях к содержательным величинам можно относиться как к отвлечённым, применяя к ним трансцендентные операции (логарифмирование, возведение в степени и т.п.).

Модели «производственная функция» и «функция предпочтения» являются *функциональными моделями,* реализующими кибернетическую концепцию *«чёрного ящика»* (Лопатников, 2003). Такие модели описывают особенно сложные объекты, для которых на данном этапе развития экономической науки не существует эффективных структурных моделей, реализующих концепцию «*микрооснования макроэкономики»* (*microfoundation for macroeconomics*). В этом случае объект характеризуется двумя совокупностями *входных* и *выходных* характеристик (числовых параметров или функций времени) и задачей моделирования является установление таких функциональных связей, при которых расчётные значения выходных характеристик, соответствующие наблюдаемым значениям входов, наилучшим образом повторяли бы наблюдаемые выходные значения, а также известные качественные и количественные характеристики объекта.

Производственная функция выражает функциональную связь между основными наблюдаемыми и измеримыми входными показателями и скалярным выходным показателем. Входные показатели соответствуют выделенным производственным факторам. Единственным выходным показателем является величина выпуска, измеряемая в простейшем случае производства одного продукта (например, угля) натуральным показателем (весом) и в общем случае – стоимостью валовой продукции.

Можно также рассматривать относительные значения показателей, т.е. *элементарные индексы*[1] затрат факторов и выпуска продукции относительно их значений в некоторый *базовый* период. Такую ПФ будем называть *индексной производственной функцией.* Индексы – это безразмерные величины, соответственно, индексная ПФ представляет взаимосвязь выбранных показателей в относительных значениях. Переход к индексным ПФ облегчает задачи их построения для конкретных объектов по соответствующей статистической информации. Однако для содержательного экономического анализа более информативны производственные функции с абсолютными показателями.

[1] *Элементарными индексами* некоторой содержательной величины, представленной временным рядом её значений или набором однотипных значений, представляющих различные однотипные объекты, называются отношения данных значений к некоторому *базовому* значению.

Несмотря на существенное упрощение описания производства метод производственных функций позволяет, как будет показано, решать достаточно важные и сложные задачи экономического анализа.

1.1.2. В данном параграфе ограничимся классом двухфакторных ПФ, отражающих зависимость выпуска от уровней использования производственных факторов, необходимых для любого производства, – *основных производственных фондов* и *труда*. Двухфакторный уровень представления производства был и остаётся основным в теории и приложениях метода ПФ. Однако при наличии соответствующих статистических данных анализ производства может углубляться на основе детализации затрат труда и фондов (труд различных видов и квалификации, разделение производственных фондов на основные и оборотные), учёта затрат энергии и т.д.

Рассмотрим производственный объект, выпускающий продукцию, измеряемую показателем Y, и использующий основные фонды (основной капитал), стоимость которых равна K, и труд в количестве L (рабочее время или суммарная зарплата). Связь между этими показателями зададим *производственной функцией*

$$Y = F(K, L). \qquad (1.1)$$

Значения всех переменных (K, L, Y) здесь неотрицательны.

Экономический смысл модели (1.1) накладывает ограничения на математические свойства функции $F(K, L)$. Эта функция должна быть положительной и возрастающей по каждому аргументу в области определения функции или некоторой её подобласти, называемой *экономической областью*. Кроме того, представления о рациональности использования факторов производства и практика использования модели (1.1) для описания конкретных производственных объектов подсказали целесообразность наложения дополнительных аналитических условий на классы математических функций, которые можно использовать в качестве ПФ. Это общематематические свойства вогнутости, квазивогнутости (обобщение вогнутости) и положительной однородности, а также специфическое свойство *отдачи от расширения масштаба* (*return to scale)*, введённое в связи с потребностями экономического анализа.

Свойства выпуклости и вогнутости функций, определённых на выпуклых множествах, а также некоторое обобщение этих характеристик важны для теории и методов решения экстремальных задач (Васильев, 2002; Горбунов, 1999), представляющих математический инструмент современной экономической теории и количественного экономического анализа высокого (продвинутого) уровня (Интрилигатор, 1975; Mas-Colell et al., 1995).

Запись (1.1) подразумевает, что одинаковый уровень выпуска Y может обеспечиваться при различных сочетаниях значений переменных-факторов (K,L). Это означает, что допускается *замещение* одного фактора другим и этот процесс отражается линиями заданного уровня выпуска

$$E(Y)=\{(K,L)\geq 0: F(K,L)=Y\}, \tag{1.2}$$

т.е. *изоквантами* функции F. Каждая изокванта $E(Y)$ представляет график *функции замещения труда капиталом* $K_Y(L)$ или *обратной функции замещения капитала трудом* $L_Y(K)$, определяемых неявно уравнением $F(K,L)=Y$.

Для уточнения свойств изоквант (1.2) или соответствующих функций замещения $K_Y(L)$ и $L_Y(K)$ введём множества *не меньших, чем* Y*, уровней*

$$P(Y)=\{(K,L)\geq 0: F(K,L)\geq Y\}. \tag{1.3}$$

Будем называть эти множества также *верхними множествами уровней* Y[2]. Изокванты (1.2) являются границами множеств $P(Y)$.

Известно, что если функция $F(K,L)$ вогнута (строго вогнута), то её верхние множества (1.3) выпуклые (строго выпуклые). Для развития возможностей экономического анализа продуктивно выделить более общий класс функций $F(K,L)$, имеющих выпуклые или строго выпуклые верхние множества уровней $P(Y)$.

Определение 1. *Функция* $F(K,L)$ *называется* ***квазивогнутой (строго квазивогнутой)****, если любое её верхнее множество уровня* (1.3) *выпуклое (строго выпуклое).*

Выпуклость или строгая выпуклость множества уровня (1.3) характеризуется соответствующим свойством изокванты (1.2), представляющей границы этого множества. Очевидно, любая вогнутая или строго вогнутая

---

[2] В книге (Васильев, 2002) такие множества называются множествами Лебега.

функция является квазивогнутой или строго квазивогнутой, но обратное утверждение неверно. Пример производственной функции, демонстрирующий эти характеристики, приведен ниже.

Выпуклость или строгая выпуклость множеств (1.3) существенно обогащает анализ моделей производства. Для экономического анализа также продуктивно следующее свойство функций.

Определение 2. *Функция $F(K,L)$ называется **положительно однородной степени** μ, если она удовлетворяет тождеству*

$$F(tK,tL)=t^{\mu}F(K,L),\ t>0. \tag{1.4}$$

*В случае $\mu=1$ функция $F(K,L)$ называется **линейно однородной.***

Для производственных функций в силу требования монотонного возрастания степень однородности μ должна быть положительной.

В теории производства большое значение имеет следующая качественная характеристика зависимости выпуска продукции от расширения масштаба производства.

Определение 3. *Говорят, что производственная функция $F(K,L)$ обладает свойством **убывающей / постоянной / возрастающей** отдачи от расширения масштаба производства, если её значения $F(tK,tL)$ для $t>1$ будут соответственно **меньше / равны / больше** значений $tF(K,L)$.*

Очевидно, положительно однородная степени $\mu>0$ функция $F(K,L)$ будет иметь свойство убывающей, или постоянной, или возрастающей отдачи от расширения масштаба (или короче – *отдачи от масштаба*), если соответственно $0<\mu<1$, или $\mu=1$, или $\mu>1$.

1.1.3. Рассмотрим приведенные и другие характеристики производства на примере исторически первой ПФ, предложенной шведским математиком-экономистом К. Викселлем в качестве теоретической модели производства в начале XX в. и впервые применённой для количественного анализа, – степенной мультипликативной функции

$$F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}. \tag{1.5}$$

Функция (1.5), очевидно, положительно однородная степени $\mu=\alpha+\beta$. Свойство возрастания этой функции по обоим аргументам обеспечивается в области их неотрицательных значений положительностью степеней: $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. В дальнейшем это, как и положительность масштабного коэффициента $A > 0$, предполагается выполненным.

Частный случай функции Викселля (1.5), когда она линейно однородна, т.е. когда $\mu \equiv \alpha + \beta = 1$, соответственно, $\beta = 1 - \alpha$ и

$$F(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}, \tag{1.6}$$

был успешно использован (без ссылок на Викселля) американскими исследователями – экономистом П. Дугласом и математиком Ч. Коббом (Cobb, Douglas, 1928) для анализа сектора обрабатывающих отраслей США в 1899–1922 гг. Выбор Коббом линейно однородной функции (1.6) был сделан на основе утвердившегося в то время представления о постоянной отдаче производства от масштаба.

До настоящего времени общая функция Викселля (1.5) называется функцией Кобба–Дугласа. Для уточнения приоритета мы будем далее называть общую степенную мультипликативную функцию (1.5) *производственной функцией Викселля*, а её частный случай (1.6) – *производственной функцией Кобба*.

Свойства вогнутости класса производственных функций Викселля (1.5) устанавливаются анализом её изоквант и вторых производных, составляющих матрицу Гессе. Изокванты (1.2) функции Викселля представляются функцией замещения труда капиталом $K_Y(L)$ или капитала трудом $L_Y(K)$:

$$K_Y(L) = \left(\frac{Y}{A}\right)^{1/\alpha} L^{-\beta/\alpha}, \quad L_Y(K) = \left(\frac{Y}{A}\right)^{1/\beta} K^{-\alpha/\beta}. \tag{1.7}$$

Первые производные функции (1.5) удобно записать в виде

$$F_K^{'}(K, L) = \alpha AK^{\alpha-1} L^{\beta} \equiv \frac{\alpha}{K} F(K, L), \quad F_L^{'}(K, L) = \frac{\beta}{L} F(K, L). \tag{1.8}$$

Дифференцируя эти выражения ещё раз по обеим переменным, получим матрицу Гессе

$$H(K, L) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{K^2} & \dfrac{\alpha\beta}{KL} \\ \dfrac{\alpha\beta}{KL} & -\dfrac{\beta(1-\beta)}{L^2} \end{bmatrix} F(K, L). \tag{1.9}$$

Утверждение 1. *Функция Викселля (1.5) при* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$ *строго квазивогнутая, при* $0 < \mu = \alpha + \beta < 1$ *строго вогнутая и при* $\mu = 1$ *(функция Кобба) вогнутая.*

Доказательство. 1) Функции замещения (1.7) функции (1.5) в силу положительности параметров α, β убывающие и строго выпуклые. Последнее означает, что верхние множества уровней (1.3) для функции (1.5) строго выпуклые, что означает её строгую квазивогнутость.

2) Покажем, что функция (1.5) строго вогнутая при $0 < \mu < 1$. Дифференцируемая функция $F(K, L)$ строго вогнута тогда и только тогда, когда её матрица Гессе $H(K, L)$ отрицательно определённая (Васильев, 2002). Согласно критерию Сильвестра матрица $H(K, L)$ отрицательно определённая, если её первый и второй главные диагональные миноры имеют знаки соответственно «минус» и «плюс». Последнее, как нетрудно убедиться из представления (1.9), эквивалентно выполнению неравенств

$$-\alpha(1-\alpha) < 0, \ \alpha\beta(1-\alpha-\beta) > 0.$$

Эти неравенства, очевидно, выполняются при $0 < \alpha < \mu < 1$, что обеспечивает строгую вогнутость функции (1.5).

3) В предельном случае $\mu = 1$ функция (1.5) перестаёт быть строго выпуклой, так как её сужение вдоль любого луча из начала координат, т.е. при $K / L = \text{const}$, становится линейной функцией. При этом, очевидно, сохраняется свойство выпуклости. ■

1.1.4. Рассмотрим некоторые характеристики двухфакторных ПФ (1.1). Самыми простыми характеристиками являются *средние производительности факторов*

$$\frac{Y}{K}, \quad \frac{Y}{L},$$

называемые соответственно средней фондоотдачей и средней производительностью труда, а также предельные производительности факторов

$$\frac{\partial F}{\partial K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L}.$$

Для функции (1.5) эти характеристики в силу формул (1.8) связаны соотношениями

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha \frac{F}{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \beta \frac{F}{L}. \tag{1.10}$$

Эти выражения проясняют смысл степенных параметров функции Викселля как отношения предельных и средних производительностей, или логарифмических производных функции по соответствующему фактору:

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial K} : \frac{F}{K} \equiv \frac{\partial \ln F}{\partial \ln K}, \quad \beta = \frac{\partial F}{\partial L} : \frac{F}{L} \equiv \frac{\partial \ln F}{\partial \ln L}. \tag{1.11}$$

Отношения вида (1.11) (или логарифмические производные функций) являются предельным (дифференциальным) вариантом понятия *эластичности функции* относительно её аргументов, введённого А. Маршаллом (1890) в теорию спроса (у Маршалла – эластичность спроса $D(p)$ по цене p) на языке процентов, предпочитаемом экономистами-практиками.

Напомним (Вэриан, 1997), эластичность функции $y = f(x)$ по аргументу x показывает, на сколько процентов увеличится значение функции $\Delta y = f(x) - f(x+\Delta x)$, если величина аргумента увеличится на 1 %, т.е. при $\Delta x = 0.01x$. Такая величина

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}, \tag{1.12}$$

называемая в микроэкономической теории *хордовой эластичностью,* не зависит от единиц измерения аргументов и функции.

Понятие хордовой (процентной) эластичности в экономической науке имеет вводное, поясняющее значение. В случае дифференцируемости функции $f(x)$ предельный переход от конечного приращения аргумента к нулю ($\Delta x \to 0$) даёт формулу для *точечной, или предельной, эластичности*

$$\varepsilon = \frac{df(x)}{f(x)} : \frac{dx}{x} \equiv \frac{d \ln f(x)}{d \ln x}. \tag{1.13}$$

Предельная эластичность называется далее просто *эластичностью*.

Формулы (1.12) и (1.13) подсказывают следующее универсальное определение.

Определение 4. *Эластичность дифференцируемой функции* $y = f(x)$ *относительно аргумента есть предел* (1.13) *отношения* (1.12) *относительных приращений функции и аргумента при* $\Delta x \to 0$.

Наиболее часто в экономическом моделировании используются степенные функции. К ним, в частности, относится функция Викселля (1.5). Рассмотрим функцию

$$f(x) = Ax^{\alpha}. \tag{1.14}$$

Эластичность этой функции (1.13) равна

$$\varepsilon = \frac{d \ln A x^{\alpha}}{d \ln x} = \frac{d(\ln A + \alpha \ln x)}{d \ln x} = \alpha .$$

Таким образом, эластичность степенной функции (1.14) относительно аргумента равна показателю степени α. Этот общий результат согласуется с формулами эластичностей (1.11) функции Викселля относительно её аргументов (K, L).

Дифференциальные выражения (1.11) для двухфакторной функции Викселля (1.5) обобщаются в соответствии с этим определением для любой дифференцируемой ПФ (1.1):

$$\varepsilon_K = \frac{\partial F}{\partial K} : \frac{F}{K} \equiv \frac{\partial \ln F}{\partial \ln K}, \quad \varepsilon_L = \frac{\partial F}{\partial L} : \frac{F}{L} \equiv \frac{\partial \ln F}{\partial \ln L} \tag{1.15}$$

и называются *факторными эластичностями* соответственно *по капиталу и труду*.

Аналитические свойства и характеристики функции Викселля (1.5) стали ориентиром для общих требований, накладываемых на более сложные классы ПФ, некоторые из которых приведены ниже.

При построении конкретных производственных функций с целью устранения влияния выбора единиц измерения на вид функций обычно выполняется переход от исходных показателей, имеющих стоимостное (фонды, выпуск, труд), временное (труд), физическое (энергия) измерения, к их относительным значениям (индексам), приведенным к начальным значениям на периоде представления статистических данных.

1.1.5. Представим в заключение параграфа функцию Кобба (1.6), построенную для сектора обрабатывающих отраслей американской экономики (1899–1922 гг.), в индексной форме:

$$\frac{Y}{Y_0} = 1.01 \left(\frac{K}{K_0} \right)^{1/4} \left(\frac{L}{L_0} \right)^{3/4} . \tag{1.16}$$

Здесь значения Y_0, K_0, L_0 представляют соответственно выпуск, используемые фонды и труд в базовом 1899 г. Для анализа указанного сектора экономики США в абсолютных показателях требуется знание этих базовых значений.

На рисунке 1 представлены две изокванты этой функции, соответствующие состояниям объекта в 1899 и 1920 гг. Первая изокванта E_0 проходит через базовую точку пространства факторов (1; 1) с расчётным по модели (1.16) выпуском $Y^0 = 1.01 \cdot Y_0$, и вторая E_1 – через точку (4.07; 1.93), отражающую относительный рост использования факторов к 1920 г. Уровень расчётного (модельного) выпуска 1920 г. равен $Y^1 = 2.35 \cdot Y_0$. Для изокванты E_0 в базовой точке (1; 1) построена касательная, наклон которой характеризует возможное замещение факторов вблизи данной точки, обеспечивающее постоянство выпуска продукции. Этот виртуальный процесс рассмотрен подробно в следующем подразделе.

Функция Викселля остаётся до настоящего времени наиболее используемой многими авторами. В силу простоты её построения по производственной статистике реальных объектов она может использоваться в математическом моделировании производства в качестве первого приближения.

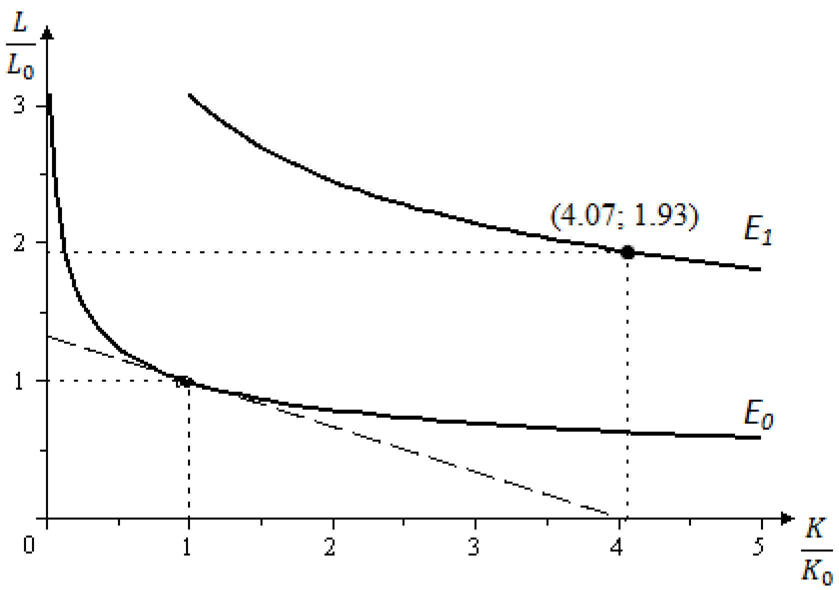

Рис. 1. Изокванты функции Кобба (1.16)

Упражнение 1. *Построить по две изокванты функции Викселля* (1.5) *для значений* $A = 1, Y \in \{1; 2\}$ *для каждого из наборов степеней:*

1) $\alpha = 1/2, \beta = 1/4$ ($\mu = 0.75$);

2) $\alpha = 1/4, \beta = 3/4$ ($\mu = 1$);

3) $\alpha = 3/4, \beta = 2/3$ ($\mu = 17/12 = 1.41(6)$).

1.2. Другие двухфакторные ПФ

Любые модели являются упрощением реальных объектов. После исследования объекта на основе простой модели естественно переходить к более сложной модели, полнее учитывающей наблюдаемые характеристики и особенности объекта. Однако усложнение описания объекта затрудняет проблему её идентификации, в частности требует большей информации об объекте и решения всё более сложных математических задач МНК или других методов оценки параметров модели, число которых возрастает. Соответственно, вопрос сложности используемой модели должен решаться с учётом этих обстоятельств.

Функция Викселля (1.5), содержащая три параметра, слишком проста и не позволяет, в частности, адекватно анализировать такой важный и сложный процесс, как замещение факторов при сохранении уровня выпуска. В работе Р. Солоу (Solow, 1956) была предложена производственная функция

$$Y = A(\nu K^{-\rho} + (1-\nu)L^{-\rho})^{-\mu/\rho} \tag{1.17}$$

с ограничениями на параметры $(A,\mu) > 0$, $0 \le \nu \le 1$, $-1 \le \rho \ne 0$. Эта функция была исследована и использована для анализа реальных национальных экономик в (Arrow et al., 1961), после чего она стала широко использоваться как модель производства, более адекватная реальности, чем функция Викселля (Кобба–Дугласа).

В общематематической терминологии функции класса (1.17), как и функции (1.5), относятся к классу «степенных средних» функций, используемых в экономической статистике для агрегирования многомерных однотипных показателей. При этом функция Викселля называется «взвешенной средней геометрической». Функции этих классов положительно однородные степени μ.

В математической экономике функция (1.17), как и аналогичная ей по форме функция полезности, называется функцией *постоянной эластичности замещения* (*ПЭЗ*) (*constant elasticity of substitution, CES*). Характеристика «эластичность замещения» определена и рассмотрена в следующем параграфе.

Нетрудно убедиться, что класс функций ПЭЗ является обобщением класса функций (1.5).

Упражнение 2. *Доказать, что функция* (1.17) *при* $\rho \to 0$ *переходит в функцию* Викселля (1.5), где

$$\alpha = \mu\nu,\ \beta = \mu(1-\nu). \qquad (1.18)$$

Указание. Прологарифмировать равенство (1.17) и применить правило Бернулли–Лопиталя.

Формулы (1.18) полезны при построении функции (1.17) по статистической информации реальных объектов. Эта проблема изучается в третьем разделе пособия.

Исследуем свойство вогнутости функций (1.17). Изокванты этих функций представляются функцией замещения труда капиталом

$$K_Y(L) = \left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{Y}{A}\right)^{-\rho/\mu} - \frac{1-\nu}{\nu}L^{-\rho}\right]^{-1/\rho}$$

или функцией обратного замещения капитала трудом

$$L_Y(K) = \left[\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{Y}{A}\right)^{-\rho/\mu} - \frac{\nu}{1-\nu}K^{-\rho}\right]^{-1/\rho}.$$

Нетрудно показать, что при ограничении $-1 \le \rho \ne 0$ эти изокванты убывающие и выпуклые, причём для значений $\rho > -1$ они строго выпуклые, следовательно, функция (1.17) соответственно квазивогнутая и при $\rho > -1$ эта функция строго квазивогнутая. Для $\rho > 0$ изокванты будут иметь асимптоты, параллельные осям ортанта $R_+^2 = \{K \ge 0, L \ge 0\}$: первая, параллельная оси OL, определяется пределом

$$\lim_{L\to\infty} K_Y(L) = \nu^{1/\rho}\left(\frac{Y}{A}\right)^{1/\mu},$$

и вторая, параллельная оси OK, определяется пределом

$$\lim_{K\to\infty} L_Y(K) = (1-\nu)^{1/\rho}\left(\frac{Y}{A}\right)^{1/\mu}.$$

Вопрос о вогнутости функции (1.17) требует исследования отрицательной определённости её матрицы Гессе. Это свойство может выполняться в некоторой области ортанта R_+^2 лишь в случае невозрастающей отдачи от масштаба, когда степень однородности $\mu \le 1$.

При $\rho = -1$ функция (1.17), т.е. функция

$$Y = A(\nu K + (1-\nu)L)^{\mu},$$

квазилинейная. Это в данном контексте значит[3], что её изокванты – прямые линии

$$K_Y(L) = \frac{1}{\nu}\left(\frac{Y}{A}\right)^{1/\mu} - \frac{1-\nu}{\nu}L,$$

ограниченные областью R_+^2.

Упражнение 3. *Построить по две изокванты для значений* $A=1$, $\mu=1$, $Y \in \{1; 3\}$ *для каждого из наборов параметров:*

1) $\rho = -3/4, \nu = 1/2$;
2) $\rho = -1/4, \nu = 2/3$;
3) $\rho = 1/4, \nu = 1/2$;
4) $\rho = 4, \nu = 2/3$.

Свойство однородности является одной из идеализаций математического моделирования реальных объектов (как и линейность, стационарность), упрощающей исследования и позволяющей их углубить. Ближайшим неоднородным обобщением функции ПЭЗ является *неоднородная функция Солоу* (называемая в литературе *функцией Солоу*)

$$Y = A(\nu K^{\alpha} + (1-\nu)L^{\beta})^{\gamma}. \tag{1.19}$$

Однородная функция (1.17) является частным случаем функции (1.19) при $\alpha = \beta = -\rho$, $\gamma = -\mu/\rho$. Здесь ограничения на параметры A, ν аналогичны, и степени α, β, γ ненулевые. При построении функции (1.19) для реального производственного объекта требуется обеспечивать свойства монотонности и квазивогнутости. Это нетривиальная проблема, и её аналитическое решение в виде явных условий на коэффициенты неизвестно. Содержательному анализу функции Солоу (1.19) посвящена статья (Клейнер, Пионтковский, 1999).

---

[3] Встречается и другое определение квазилинейных функций (Mas-Colell et al., 1995).

Приведём ещё две неоднородные функции, расширяющие возможности моделирования. Первая – функция Джири (Geary, 1950)

$$Y = A\left(K - K^*\right)^{\alpha}\left(L - L^*\right)^{\beta}. \tag{1.20}$$

Эта функция известна как функция полезности в теории потребительского спроса, порождающая достаточно простые и в то же время хорошо аппроксимирующие реальную торговую статистику функции спроса – «линейные системы расходов». Она является неоднородным обобщением функции Викселля с дополнительными параметрами – минимальными уровнями использования капитала $K^* \geq 0$ и труда $L^* \geq 0$. Область определения этой функции – $\left\{K \geq K^*, L \geq L^*\right\}$. Все параметры этой функции положительные и $(\alpha, \beta) < 1$.

Замечание. С целью расширения класса функций (1.20) параметры K^* и L^* можно считать формальными, не ограниченными условием неотрицательности. В этом случае область определения функций (1.20) будет $\left\{K \geq \max\left\{0, K^*\right\}, L \geq \max\left\{0, L^*\right\}\right\}$.

Вторая неоднородная функция – логарифмическая функция

$$Y = A\ln[(1+\delta K)^{\alpha}(1+\gamma L)^{\beta}] \equiv A\left[\alpha\ln(1+\delta K) + \beta\ln(1+\gamma L)\right]. \tag{1.21}$$

Здесь область определения стандартная: $\left\{K \geq 0, L \geq 0\right\}$. При больших значениях параметров δ и γ (и малом коэффициенте *A*) эта функция становится подобной по поведению (графически) функции Викселля (1.5).

Можно строить и другие ПФ с основными аналитическими свойствами: возрастанием, квазивогнутостью, вогнутостью и однородностью. Однако этим не следует увлекаться. Все приведенные примеры функций являются различными обобщениями функции Викселля, свойства которой хорошо изучены и параметры осмыслены. Недостаток функции Викселля – небольшая «степень свободы», определяемая числом параметров, которых всего три. Более содержательной функцией является четырёхпараметрическая функция ПЭЗ (1.17). Она, как и функция Викселля, – однородная, что является как преимуществом (удобно исследовать), так и недостатком (возможная неадекватность). Функции Солоу (1.19), Джири (1.20) и логарифмическая (1.21) содержат по пять параметров, и эти функции неоднородные. Соответственно, они потенциально более адекватны реальным объектам и могут улучшать качество исследования реальных объектов в поэтапной процедуре построения – вначале простой функции Викселля, затем функции ПЭЗ и далее – неоднородных функций указанных классов. При этом результаты построения (методом наименьших квадратов) ПФ более простого класса следует использовать при переходе к следующему, более сложному классу.

1.3. Замещение факторов. Эластичность замещения

1.3.1. Исследуем глубже свойство замещаемости производственных факторов. Эта возможность означает, что одно и то же количество продукта Y может быть произведено при различных сочетаниях рассматриваемых факторов. Целесообразность взаимной замены факторов вытекает из того, что тот или иной ресурс может быть дефицитным или дорогим. У крупных производственных систем, как правило, имеются широкие возможности маневрирования ресурсами (факторами).

Количественные характеристики замещения была впервые введены Дж. Хиксом и Р. Алленом (Hicks, Allen: 1934a, 1934b) в теорию потребительского спроса, пересмотренную на основе понятия кривых безразличия, введённых ранее В. Парето и Ф. Эджвортом в качестве альтернативы понятию функции полезности. Хикс ввёл (для рынка двух благ) понятия *предельной нормы замещения* (ПНЗ) и *эластичности замещения*. Эти понятия-характеристики были позже обобщены на случай любого количества благ (как парные характеристики потребительского спроса) и перенесены в теорию производства. Наиболее полно эти характеристики спроса и рационального производства исследуются в случае положительной однородности непрерывно дифференцируемых вогнутых функций предпочтения (порядковой полезности) и производственных функций.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую производственную функцию $F(K,L)$. Пусть $Y_0 = F(K_0, L_0)$. Совокупность альтернативных сочетаний количеств использования капитала и труда (K,L), при которых может быть произведено количество продукции Y_0, представляется изоквантой $E(Y_0)$, определяемой уравнением

$$F(K,L) = Y_0. \tag{1.22}$$

Это уравнение определяет два представления изокванты функциями замещения труда капиталом $K(L)$ и капитала трудом $L(K)$. В силу свойства возрастания функции по каждому аргументу приращение одного из них влечёт убывание другого для сохранения равенства (1.22). Соответственно, функции $K(L)$ и $L(K)$ убывающие.

Продифференцировав равенство (1.22), получим дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}dK+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}dL=0. \qquad (1.23)$$

Отсюда получаем выражение для производной функции замещения труда капиталом $K(L)$, представляющей изокванту $E(Y_0)$:

$$\frac{dK(L)}{dL}=-\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}:\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}. \qquad (1.24)$$

Эта величина представляет предельную пропорцию замены части используемого труда капиталом при сохранении исходного уровня выпуска Y_0. В любой точке (K,L) изокванты $E(Y_0)$ производная (1.24) является тангенсом угла наклона касательной к изокванте относительно оси OL.

На языке процентов условная конечно-разностная аппроксимация производной (1.24), т.е. отношение $\Delta K/\Delta L$ при условии $F(K+\Delta K,(1\pm 0.01)L)=Y_0$ показывает, *на сколько процентов нужно уменьшить (или увеличить) стоимость используемых фондов, чтобы компенсировать увеличение (или уменьшение) использования труда на 1 %*. Таким образом, предельная величина (1.24) может приниматься за приближённое выражение этого «процентного смысла».

Для возрастающих функций частные производные положительны, поэтому величина (1.24) всегда отрицательна. Это соответствует тому, что при уменьшении использования одного из пары факторов (K,L) другой фактор должен использоваться в большем количестве.

В экономическом анализе предпочтение отдаётся положительным показателям, поэтому вместо характеристики замещения (1.24) используется противоположная по знаку величина

$$S_{LK}\left(K,L\right)=\frac{\partial F\left(K,L\right)}{\partial L}:\frac{\partial F\left(K,L\right)}{\partial K}. \qquad (1.25)$$

Определение 5. *Отношение* (1.25) *предельных производительностей труда* $F_L^{'}\left(K,L\right)$ *и капитала* $F_K^{'}\left(K,L\right)$ *называется предельной нормой замещения (ПНЗ) труда капиталом в точке* $\left(K,L\right)$.

Несмотря на изменение знака, содержательный смысл предельной пропорции замены (1.24) переносится на ПНЗ (1.25), т.е. величина $S_{LK}\left(K,L\right)$ приближённо показывает, на сколько процентов нужно увеличить (или уменьшить) стоимость используемых фондов, чтобы компенсировать уменьшение (или увеличение) использования труда на 1 %.

Во втором разделе пособия показано, что парная характеристика – предельная норма замещения – определяет наиболее рациональный выбор пропорции использования соответствующих факторов в зависимости от их цен. Это свойство усиливает важность данной характеристики производства для экономического анализа и стимулирует её углублённое исследование.

Во-первых, отметим, что ПНЗ (1.25) обратима, причём *предельная норма обратного замещения* (капитала трудом)

$$S_{KL}\left(K,L\right)=\frac{\partial F\left(K,L\right)}{\partial K}:\frac{\partial F\left(K,L\right)}{\partial L} \qquad (1.26)$$

является величиной, обратной к (1.25): $S_{KL} = 1/S_{LK}$.

Во-вторых, характеристика *ПНЗ инвариантна относительно произвольного дифференцируемого преобразования производственной функции* $F(K,L)$. Это значит, что для любой непрерывно дифференцируемой функции одной переменной $\phi(t)$ функция $\Phi(K,L)=\phi(F(K,L))$ имеет ту же ПНЗ, что и $F(K,L)$, т.е. (1.26). Эта инвариантность отражает то, что ПНЗ является аналитической характеристикой изоквант (их локального направления в точках пространства факторов), и форма изоквант при данном преобразовании не меняется.

1.3.2. Вторая характеристика возможностей замещения факторов – *эластичность замещения* – определена Хиксом (Hicks, Allen, 1934a, p. 59) как характеристика взаимозависимости ПНЗ и соответствующей пропорции использования факторов. В рассмотренном Хиксом двухфакторном случае[4] эластичность замещения определена как «*отношение относительного роста пропорции использования факторов к относительному росту соответствующей предельной нормы замещения, когда количества использования факторов меняются так, что количество выпуска сохраняется*». Аллен придал этому содержательному определению следующую математическую форму (Hicks, Allen, 1934b, p. 199).

Определение 6. *Эластичностью замещения труда капиталом называется величина*

$$\sigma_{LK}\left(K,L\right)=\frac{d\left(K/L\right)}{K/L}:\frac{dS_{LK}}{S_{LK}}=\frac{d\ln\left(K/L\right)}{d\ln S_{LK}}, \tag{1.27}$$

вычисляемая при условии $F(K,L)=const$[5].

Величина (1.27) называется *эластичностью замещения (труда капиталом) Хикса–Аллена*. На языке процентов эта величина приближённо показывает, на сколько процентов должно измениться отношение факторов K/L при изменении S_{LK} на 1 %.

Отметим, что инвариантность ПНЗ (1.25) относительно произвольного дифференцируемого преобразования производственной функции, очевидно, переносится на эластичность замещения (1.27), однако с усилением требования дифференцируемости до второго порядка. Это следует из того, что формула определения (1.27) содержит дифференцирование ПНЗ $S_{LK}(K,L)$, определяемой первыми производными функции $F(K,L)$, следовательно, эластичность замещения $\sigma_{LK}\left(K,L\right)$ определяется вторыми производными от $F(K,L)$.

Покажем, что *эластичность* (1.27) *и эластичность обратного замещения капитала трудом* $\sigma_{KL}\left(K,L\right)$ *совпадают*. Действительно,

$$\sigma_{KL}\left(K,L\right)=\frac{d\ln\left(K/L\right)}{d\ln S_{KL}}=\frac{d\ln\left(K/L\right)^{-1}}{d\ln\left(S_{LK}\right)^{-1}}=\frac{-d\ln\left(K/L\right)}{-d\ln\left(S_{LK}\right)}=\sigma_{LK}\left(K,L\right).$$

---

[4] Хикс и Аллен рассматривали проблему замещения в рамках теории индивидуального потребительского спроса, формально эквивалентную проблеме замещения производственных факторов. Здесь мы перефразируем их определения в терминах теории производства.

[5] У Аллена вместо «условия изокванты» $F(K,L)=\mathrm{const}$ использовано эквивалентное условие «вдоль направления безразличия» в точке (K,L).

Таким образом, в двухфакторном случае

$$\sigma_{KL}(K,L)=\sigma_{LK}(K,L)=\sigma(K,L)\,. \tag{1.28}$$

Понятие эластичности замещения (1.27) в общем случае очень сложно в концептуальном и техническом отношениях. Оно определено для дважды дифференцируемых производственных функций $F(K,L)$ и при вычислении дифференциалов, осложнённом условием изокванты $F(K,L)=\mathrm{const}$, будет явно зависеть от вторых производных функции $F(K,L)$, появляющихся при вычислении дифференциала

$$dS_{LK}\left(K,L\right)=d\left(\partial F\big/\partial L:\partial F\big/\partial K\right) \text{ при } F(K,L)=\mathrm{const}\,. \tag{1.29}$$

Можно сказать, что предельная норма замещения S_{LK} является дифференциальной характеристикой производственной функции $F(K,L)$ первого порядка и эластичность замещения $\sigma(K,L)$ – её дифференциальной характеристикой второго порядка. Конкретная реализация определения 6 Хикса–Аллена допускает различные толкования проблемы (1.29) (Stern, 2011). Следует также иметь в виду, что производные функции, особенно вторые, в общем случае очень чувствительны к форме функций, и это может приводить к существенной неустойчивости значений эластичности замещения относительно класса функций, выбираемых для конкретных объектов, и неточностей исходных данных (производственной статистики), по которым строятся производственные функции. По этим причинам понятие эластичности замещения редко используется в прикладном экономическом анализе.

В случае *однородности производственной функции* $F(K,L)$ понятие эластичности замещения (1.29) существенно упрощается. Далее ограничим исследование данной характеристики этим случаем. Ввиду инвариантности ПНЗ и эластичности замещения относительно произвольного дважды дифференцируемого преобразования производственной функции при исследовании и вычислении этих характеристик замещения можно ограничиться *линейно однородными* ПФ.

1.3.3. Выше введены две однородные производственные функции – Викселля (1.5) и степенная средняя (1.17). Вычислим для них введённые характеристики замещения, допуская произвольную степень однородности $\mu>0$. Начнём с функции Викселля

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}. \quad (1.30)$$

Для этой функции $\mu = \alpha + \beta$ и, как нетрудно убедиться, ПНЗ имеет вид

$$S_{LK}(K,L) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}. \quad (1.31)$$

Отметим, что эта величина зависит лишь от отношения степеней α и β, и она не меняется при их пропорциональном изменении, изменяющем степень однородности μ. Это иллюстрирует инвариантность величины ПНЗ относительно дифференцируемых преобразований функции (1.30), в данном случае при возведении функции (1.30) в степень μ^{-1}.

Функция (1.31) является фактически функцией одной переменной – отношения факторов

$$k = \frac{K}{L}, \quad (1.32)$$

называемого *фондовооружённостью труда*. Отразим это, записав равенство (1.31) в виде

$$s_{LK}(k) = \frac{\beta}{\alpha}k, \quad (1.33)$$

где вместо имени S_{LK} (прописная буква) функции (1.31) двух переменных (K,L) введено имя s_{KL} (строчная буква) функции одной переменной k.

Перепишем формулу (1.27) для новых аргумента (1.32) и *приведенной функции ПНЗ* (1.33), учтя зависимость эластичности замещения (1.28) в случае функции Викселля от фондовооружённости труда (1.32):

$$\sigma(k) = \frac{s_{LK}}{k}\cdot\frac{dk}{ds_{LK}} = \frac{d\ln k}{d\ln s_{LK}}. \quad (1.34)$$

Ниже показано, что ПНЗ в общем однородном случае является функцией фондовооружённости $s_{KL}(k)$, и, соответственно, формула (1.34) относится ко всем двухфакторным однородным ПФ. Эта формула существенно проще общей формулы (1.27). Она не содержит сложного дифференциала (1.29) от отношения производных функции $F(K,L)$ и не нуждается в дополнительном условии изокванты $F(K,L) = \text{const}$.

Формула (1.34) также проясняет с формальной стороны эластичность замещения (1.27) в (двухфакторных) случаях, когда ПНЗ зависит от фондовооружённости k, как Маршаллову эластичность (определение 4) обратной относительно (1.33) функции

$$k(s_{LK}) = \frac{\alpha}{\beta} s_{LK}. \tag{1.35}$$

Применяя формулу (1.34) к функции (1.35), получаем эластичность замещения

$$\sigma = 1$$

для любых значений фондовооружённости $k > 0$. Таким образом, любая функция Викселля (1.30) имеет единичную эластичность замещения факторов. Это, конечно, существенно ограничивает адекватность моделирования реальных объектов в классе таких функций.

Рассмотрим двухфакторную *степенную среднюю* функцию (1.17)

$$F(K,L) = A(\nu K^{-\rho} + (1-\nu)L^{-\rho})^{-\mu/\rho}$$

с ограничениями на параметры $(A,\mu) > 0$, $0 \le \nu \le 1$, $-1 \le \rho \ne 0$. Производные этой функции

$$F_K^{'}(K,L) = \frac{\mu \nu K^{-(\rho+1)}}{(\nu K^{-\rho} + (1-\nu)L^{-\rho})} F(K,L),$$

$$F_L^{'}(K,L) = \frac{\mu(1-\nu) L^{-(\rho+1)}}{(\nu K^{-\rho} + (1-\nu)L^{-\rho})} F(K,L),$$

соответственно, ПНЗ (1.25) имеет вид

$$S_{LK}\left(K,L\right) = \frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}.$$

Как и в случае функции Викселля (1.30), функция ПНЗ зависит от пропорции используемых факторов – фондовооружённости (1.33). Соответственно, перейдём от этой функции $S_{LK}\left(K,L\right)$ к приведенной функции

$$s_{LK}\left(k\right) = \frac{1-\nu}{\nu} k^{\rho+1}. \tag{1.36}$$

Для вычисления эластичности замещения по приведенной формуле (1.34) обратим эту степенную функцию, полагая $\rho > -1$:

$$k\left(s_{LK}\right) = \left(\frac{\nu}{1-\nu} s_{LK}\right)^{1/(1+\rho)}.$$

В этом случае формула (1.34) даёт значение эластичности замещения

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}. \tag{1.37}$$

Полученное выражение, как и в случае функции Викселля, одинаково для любых значений фондовооружённости $k > 0$ и не зависит от степени однородности μ. Однако теперь оно может принимать любое положительное значение соответственно диапазону изменения параметра $\rho \in \left(-1, \infty\right)$. При $\rho \to 0$ функция (1.17) принимает вид функции Викселля, и этому соответствует значение эластичности $\sigma = 1$. Формула (1.37) поясняет название степенной средней функции (1.17) в экономическом анализе как ***функции постоянной эластичности замещения (ПЭЗ).***

Естественно возникает вопрос, существуют ли другие аналитические классы однородных функций, имеющих постоянную эластичность замещения? Оказывается, что класс двухфакторных степенных средних функций (1.17) совпадает с классом двухфакторных однородных функций ПЭЗ.

1.3.4. Рассмотрим произвольную двухфакторную однородную ПФ $F(K,L)$ степени $\mu > 0$. Такие функции характеризуются свойством (1.4):

$$F(tK,tL) = t^{\mu} F(K,L), \quad \forall t > 0.$$

Полагая $t = 1/L$, получим тождество

$$F(\frac{K}{L},1) = \frac{1}{L^{\mu}} F(K,L), \quad \forall L > 0. \tag{1.38}$$

Введём *приведенную производственную функцию* от фондовооружённости (1.32)

$$f(k) = F(k,1) \tag{1.39}$$

и перепишем тождество (1.38) в виде

$$F(K,L) = L^{\mu} f(k), \quad \forall L > 0.$$

Дифференцируя последнее тождество с учётом связи $k = K/L$, получим представление производных функции $F(K,L)$ через приведенную функцию (1.39):

$$F_K^{'}(K,L) = L^{\mu-1} f'(k),\ F_L^{'}(K,L) = L^{\mu-1}\left[\mu f(k) - kf'(k)\right].$$

Разделив эти производные в соответствии с определением ПНЗ (1.25), получим формулу

$$S_{LK}\left(K,L\right) = \frac{\mu f(k) - kf'(k)}{f'(k)}. \tag{1.40}$$

Упражнение 4. *Показать, что переход от положительно-однородной степени* $\mu > 0$ *функции* $F(K,L)$ *к линейно-однородной функции* $\Phi(K,L) = F^{1/\mu}(K,L)$ *не изменит функцию ПНЗ* (1.40).

Правая часть выражения (1.40) зависит от переменной фондовооруженности, как и в рассмотренных выше двух примерах однородных функций Викселля и ПЭЗ. Соответственно, как и в этих частных случаях, общую для однородных двухфакторных производственных функций ПНЗ (1.40) продуктивно записать как приведенную функцию ПНЗ

$$s_{LK}\left(k\right) = \mu\frac{f(k)}{f'(k)} - k. \tag{1.41}$$

При этом равенство (1.34) распространяется на общий случай однородных двухфакторных ПФ.

Рассмотрим равенства (1.34) и (1.41) как систему дифференциальных уравнений, связывающих три функции: $f(k)$ – однородную производственную функцию в приведенной форме (1.39), $s_{LK}\left(k\right)$ – приведенную функцию ПНЗ, и эластичность замещения $\sigma(k)$. Запишем эту систему в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{ds_{LK}}{dk} = \dfrac{s_{LK}}{k\sigma(k)}, \\ \dfrac{df\left(k\right)}{dk} = \dfrac{\mu f\left(k\right)}{s_{LK} + k}. \end{cases} \tag{1.42}$$

Исключив из этой системы функцию $s_{LK}(k)$, нетрудно получить выражение эластичности замещения через приведенную производственную функцию $f(k)$ и её производные:

$$\sigma(k)=\frac{\mu f(k)f'(k)-k\left(f'(k)\right)^2}{k\left[(\mu-1)\left(f'(k)\right)^2-\mu f(k)f''(k)\right]}. \tag{1.43}$$

Данное выражение существенно упрощается[6] для линейно однородных ПФ, т.е. при $\mu=1$:

$$\sigma(k)=\frac{f'(k)\left[kf'(k)-f(k)\right]}{kf(k)f''(k)}. \tag{1.44}$$

Система (1.42) также позволяет описать класс функций, порождаемый заданной функцией эластичности замещения $\sigma(k)$. В конце пункта 1.3.3 заявлено, что класс двухфакторных степенных средних функций (1.17) совпадает с классом двухфакторных однородных функций ПЭЗ. Это заявление обосновывается построением общего решения системы дифференциальных уравнений (1.42), где функция $\sigma(k)$ считается постоянной, т.е. принимается за параметр σ.

Упражнение 5. *Построить общее решение системы (1.42) и показать, что это решение можно представить в виде приведенной функции ПЭЗ*

$$f(k)=A(\nu k^{-\rho}+1-\nu)^{-\mu/\rho}, \tag{1.45}$$

где параметры $A>1$ *и* $0<\nu<1$ *представляют произвольные постоянные частных решений, и параметр* ρ *определяется эластичностью замещения* σ:

$$\rho=\frac{1-\sigma}{\sigma}.$$

Указание. Первое уравнение в (1.42) имеет общее решение $s_{LK}(k)=C_1k^{1/\sigma}$. При интегрировании второго уравнения с этой функцией использовать подстановку $k^{1-\sigma}=t^{\sigma}$.

---

[6] Отметим, что переход от формулы (1.43) для ПФ, однородной степени $\mu\neq1$, к формуле (1.44) возведением исходной ПФ в степень $1/\mu$ меняет приведенную функцию $f(k)$.

1.3.5. Свойство постоянства эластичности замещения, как и свойства однородности, стационарности, линейности, является идеализацией реальных производственных объектов. В общем случае статистический анализ производства показывает, что эластичность замещения факторов не является постоянной. Такой анализ основан на изучении кривизны эмпирических изоквант выпуска. Это требует использования «богатой» статистики, в которой приблизительно равные выпуски достигаются при различных комбинациях производственных факторов.

Аналитическое описание класса двухфакторных однородных функций с линейной зависимостью эластичности замещения от пропорции факторов было найдено Н. Реванкаром в 1966 г. (Sato, Hoffman, 1968; Revankar, 1971). Он построил класс ПФ

$$F\left(K,L\right)=AK^{\mu(1-\delta\rho)}\left[L+\left(\rho-1\right)K\right]^{\mu\delta\rho} \tag{1.46}$$

с ограничениями на параметры:

$$\left(A,\mu\right)>0,\quad 0<\delta<1,\quad 0\le\delta\rho\le 1,\ k\equiv\frac{K}{L}<\frac{1-\delta\rho}{1-\rho}.$$

Легко увидеть, что функция Реванкара (1.46) положительно однородная степени μ. Она переходит в функцию Викселля $AK^{\alpha}L^{\beta}$ при

$$\rho=1,\ \alpha=\mu(1-\delta)\ \text{и}\ \beta=\mu\delta.$$

Приведенная форма (1.39) для функции (1.46)

$$f\left(k\right)=Ak^{\mu(1-\delta\rho)}\left[1+\left(\rho-1\right)k\right]^{\mu\delta\rho}. \tag{1.47}$$

Упражнение 6. *Показать, что эластичность взаимной замены труда и капитала для функции (1.46) является линейной функцией от фондовооруженности труда* k

$$\sigma\left(k\right)=1+\frac{\rho-1}{1-\delta\rho}k. \tag{1.48}$$

Указание. Вычислить первую и вторую производные приведенной функции Реванкара (1.47) и воспользоваться формулой (1.43).

В соответствии со свойством линейной зависимости эластичности замещения от фондовооружённости (1.48) функция Реванкара (1.46) называется также производственной функцией с линейной эластичностью замещения (ЛЭЗ) (*linear elasticity of substitution, LES*). Эта функция имеет в литературе и другие эквивалентные представления. Дадим ей представление, подобное функции Викселля:

$$F(K,L) = AK^{\alpha}\left[L + \nu K\right]^{\beta}. \tag{1.49}$$

Здесь параметры (A,α,β) положительны, $\nu \geq 0$, степень однородности равна $\mu = \alpha + \beta$, и функция (1.49) при $\nu = 0$ становится функцией Викселля $AK^{\alpha}L^{\beta}$. Нетрудно проверить, что теперь эластичность замещения равна

$$\sigma(k) = 1 + \frac{\mu}{\alpha}\nu k.$$

Общий класс двухфакторных однородных функций с переменной эластичностью замещения, как уже отмечено, определяется (в приведенной форме $f(k)$) системой (1.42). Эта система была исследована Р. Сато и Р. Гофманом (Sato, Hoffman, 1968) для случая постоянной отдачи ($\mu = 1$). Они выписали её общее решение с произвольной непрерывной функцией $\sigma(k)$ относительно функции $f(k)$ в виде неопределённых интегралов

$$f(k) = A\exp\int \frac{dk}{k + B\exp\int \frac{d\ln k}{\sigma(k)}}, \quad (A,B) > 0. \tag{1.50}$$

Интегралы формулы Сато–Гофмана (1.50) выражаются в элементарных функциях в двух случаях: когда эластичность замещения σ постоянна и когда она – линейная функция $\sigma(k) = 1 + bk$. В первом случае получается приведенная функция ПЭЗ (1.45) (для $\mu = 1$ и с точностью до обозначения параметров), во втором – линейно однородная функция ЛЭЗ вида (1.49). В общем случае формула (1.50) не является эффективным инструментом построения ПФ реальных объектов, так как в ней требуется задавать зависимость эластичности замещения $\sigma(k)$ и переходить к определённым интегралам, а соответственно, и к их приближённым вычислениям. Эластичность замещения может оцениваться по статистике лишь грубо, и это делает задачу обоснования любой её нелинейной формы очень трудной.

Для функций с числом факторов более двух аналитическое представление ПФ с переменной эластичностью замещения нам не известно.

1.4. Многофакторные ПФ. Общие свойства

1.4.1. Перейдём к общему случаю, когда моделируемый объект производит продукцию, используя n видов факторов. Кроме основных факторов – производственных фондов и труда – можно учитывать энергию и другие ресурсы, отдельно основные и оборотные фонды, труд разных видов и квалификации. Величина выпуска за некоторый промежуток времени представляется скалярной мерой. Как правило, это стоимость валового продукта.

Все понятия и характеристики, введённые в двухфакторном случае, распространяются и на многофакторный случай. Здесь эти понятия уточняются, и приводятся новые факты теории производственных функций.

Обозначим через x_j количество j-го вида производственных факторов, $j = \overline{1, n}$. Все затраты представляются *вектором* $x = (x_1, ..., x_n)$, компоненты которого – неотрицательные числа. Таким образом, пространство факторов является неотрицательным ортантом n-мерного евклидова пространства R_+^n. Меру выпуска обозначим неотрицательным числом q.

Определение 7. *Однозначная функция*

$$q = f(x_1, ..., x_n), \tag{1.51}$$

*представляющая в некоторой области G пространства производственных факторов R_+^n зависимость выпуска продукции q от затрат факторов $(x_1, ..., x_n)$ при их относительно рациональном использовании, называется **производственной функцией.** Область G называется **экономической областью**.*

Экономическая область $G \subseteq R_+^n$ (нестрогое подмножество) может быть как частью R_+^n ($G \subset R_+^n$, строгое подмножество), так и совпадать с ним ($G = R_+^n$). В приведенных выше примерах только экономическая область функции Джири (1.20) является строгим подмножеством пространства факторов R_+^n. Существуют функции, для которых область G может быть ограниченной.

Понятие *относительной рациональности* в определении производственной функции является условным. Оно зависит от уровня принятия управленческих решений и квалификации персонала фирмы или фирм, представляющих в совокупности моделируемый объект. Однако в любом случае считается, что рост использования любого фактора не может привести к снижению выпуска или приводит к его росту. Это проявляется в свойстве неубывания или возрастания функции $f(x)$ по всем аргументам.

Также принято считать, что любая ПФ должна быть непрерывной и, по крайней мере, *квазивогнутой*. Это математическое свойство, введённое в двухфакторном случае (определение 1), означает, что *верхние множества уровней* функции

$$P(q) = \{x \in G : f(x) \geq q\} \qquad (1.52)$$

выпуклы для любого уровня выпуска q.

Выпуклость множества $P(q)$ означает, что для любых «затрат» $x, y \in P(q)$ и числа $\lambda \in [0,1]$ будет $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Экономический смысл этого неравенства: *любая выпуклая комбинация двух наборов используемых факторов обеспечит выпуск, не меньший выпуклой комбинации соответствующих выпусков.*

Величина выпуска q определяется не только величиной объекта и затрат, но и единицей времени, за которое учитывается выпуск. Обычно это год. Для сельскохозяйственного и других сезонных производств, а также сегментов экономики, включающих сезонные производства, год является минимальной единицей времени.

Таким образом, **обязательными аналитическими свойствами** функций $f(x)$, которые могут привлекаться в качестве производственных функций с экономической областью $G \subseteq R_+^n$, являются:

- *непрерывность* в области G;
- *положительность и строгое возрастание* внутри области G;
- *квазивогнутость*, т.е. выпуклость множеств (1.52).

Дополнительными свойствами являются *непрерывная дифференцируемость*, *вогнутость* и *положительная однородность* степени $\mu > 0$. Последнее означает (в соответствии с определением 2) выполнение условия

$$f(tx) = t^{\mu} f(x), \quad t > 0. \qquad (1.53)$$

В случае $\mu = 1$ функция $f(x)$ называется *линейно однородной*.

Для дифференцируемых однородных функций $f \in C^1(G)$ имеет место **формула (теорема) Эйлера**:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i = \mu f(x). \qquad (1.54)$$

Эта формула получается дифференцированием равенства (1.53) по переменной t в точке $t = 1$. Справедливо также и обратное утверждение: *любая непрерывно дифференцируемая функция* $f \in C^1(G)$, *для которой выполняется равенство* (1.54), *положительно однородная степени* μ (Фихтенгольц, 1947).

Дважды непрерывно дифференцируемые положительно однородные квазивогнутые ПФ называются *неоклассическими* ПФ.

Описанные аналитические свойства ПФ подобны свойствам функций полезности классической теории потребительского спроса. Однако функция полезности играет вспомогательную роль в теории спроса, определяя основной объект – функцию спроса. При этом выбор функции полезности, порождающей данную функцию спроса, неоднозначен. Любое положительное возрастающее преобразование данной функции приводит к эквивалентной функции, порождающей тот же спрос. Производственная функция является содержательной моделью объекта, чувствительной к аналитическим преобразованиям. Конкретная ПФ является основой качественного и количественного экономического анализа данного объекта.

1.4.2. Основные классы многофакторных ПФ, обобщающие приведенные выше двухфакторные функции:

1) мультипликативная степенная (Викселля или Кобба–Дугласа)

$$f(x) = A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \quad A > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1; \qquad (1.55)$$

2) степенная средняя (ПЭЗ)

$$f(x) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}, \quad \left(A, \mu, \nu_i\right) > 0, \quad \sum_i \nu_i = 1, \quad -1 \le \rho \ne 0; \qquad (1.56)$$

3) Солоу–Мукерджи[7]

[7] Ватсала Мукерджи (Vatsala Mukerji) ввела многофакторное обобщение функции Солоу.

$$f(x)=A\left(\sum_{i=1}^{n}\nu_i x_i^{\alpha_i}\right)^{\gamma},\quad \left(A,\nu_i\right)>0,\quad \sum\nolimits_i \nu_i=1,\quad \alpha_i\neq 0,\quad \gamma\neq 0; \qquad (1.57)$$

4) Джири

$$f(x)=A\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_i^*)^{\alpha_i},\quad x\geq x^*,\quad A>0,\quad 0<\alpha_i<1; \qquad (1.58)$$

5) логарифмическая

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln(1+\beta_i x_i),\quad (\alpha_i,\beta_i)>0. \qquad (1.59)$$

Аналитические свойства этих функций повторяют свойства двухфакторных функций. Все, кроме функции Солоу–Мукерджи (1.57), при указанных ограничениях на параметры являются при $x>0$ положительными, возрастающими и квазивогнутыми. Для функции (1.57) свойства возрастания и квазивогнутости при данных параметрах должны контролироваться. Область определения функции Джири (1.58) $G=\left\{x\geq x^*\right\}$.

Функция Викселля (1.55) – положительно однородная степени $\mu=\sum\nolimits_i\alpha_i$. Она является предельным случаем также однородной степени μ степенной средней функции (1.56) при $\rho\to 0$. Параметры предельной функции Викселля $\alpha_i=\mu\beta_i$.

1.4.3. Основные экономические характеристики производственных функций, введённые в двухфакторном случае, переносятся на многофакторные ПФ:

- ***средняя эффективность*** *i-фактора – отношение выпуска к используемому количеству фактора:*

$$\frac{q}{x_i}=\frac{f(x)}{x_i}; \qquad (1.60)$$

- ***предельная (дифференциальная) эффективность*** *i-фактора – частная производная*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}; \qquad (1.61)$$

- ***эластичность выпуска*** *относительно i-фактора – отношение соответствующих предельной и средней эффективностей:*

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} : \frac{f(x)}{x_i} \equiv \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \ln x_i}; \qquad (1.62)$$

- *ПФ $f(x)$ представляет производство с **убывающей / постоянной / возрастающей эффективностью (отдачей) от возрастания масштаба производства**, если при $\alpha > 1$ значение выпуска $f(\alpha x)$ будет меньше / равно / больше значения $\alpha f(x)$.*

Смысл средней и предельной эффективностей очевиден. Их обратные отношения (1.62) – факторные эластичности – являются дифференциальными представлениями Маршалловой эластичности, показывающей, на сколько процентов увеличится выпуск q, если затраты x_i возрастут на 1 %.

Для функции Викселля (1.55) предельные эффективности (1.61) и факторные эластичности (1.62) равны соответственно

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \alpha_i \frac{f(x)}{x_i}, \quad \varepsilon_i = \alpha_i. \qquad (1.63)$$

Содержательно свойства убывания-постоянства-возрастания отдачи производства от масштаба означают, что темп прироста выпуска продукции отстаёт, совпадает или опережает темп пропорционального расширения использования факторов производства.

Упражнение 7. *Доказать, что строго вогнутая ПФ имеет убывающую отдачу от масштаба.*

Для положительно однородных функций, удовлетворяющих условию (1.53), эффективность от масштабирования использования факторов, очевидно, определяется степенью однородности. При $\mu < 1$ отдача от масштаба убывающая, при $\mu = 1$ (линейно однородная ПФ) – постоянная и при $\mu > 1$ – возрастающая.

Реакцию величины выпуска на масштабирование использования факторов также удобно анализировать в предельном проявлении в данной точке пространства факторов. При этом вводятся следующие характеристики.

Определение 8. ***Предельной эффективностью масштабирования** затрат называется величина*

$$m_f(x) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{df(\alpha x)}{d\alpha} \equiv \lim_{\alpha \to 1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\alpha x)}{\partial x_i} x_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i. \qquad (1.64)$$

Определение 9. ***Эластичностью производства по масштабу*** *называется отношение предельной эффективности масштабирования затрат* (1.64) *к уровню исходного выпуска* $f(x)$:

$$\varepsilon_0(x) = m_f(x) : f(x) \overset{(2.13)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{x_i}{f(x)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \ln x_i}. \qquad (1.65)$$

Содержательный смысл эластичности производства по масштабу аналогичен смыслу факторных эластичностей. Величина $\varepsilon_0(x)$ приближённо показывает, на сколько процентов увеличится выпуск q, если масштаб использования факторов увеличится на 1 %.

Сравнивая выражения для факторных эластичностей (1.62) и эластичности производства по масштабу (1.65), непосредственно получаем

Утверждение 2. *Эластичность производства по масштабу равна сумме факторных эластичностей:*

$$\varepsilon_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x). \qquad (1.66)$$

Исследуем подробнее понятие эластичности для **положительно однородных функций** $f(x)$, определяемых условием (1.53). Для функции Викселля (1.55) эластичность производства в силу утверждения 2 и (1.63) равна степени её однородности μ.

Утверждение 3. *Для любой положительно однородной степени* μ *производственной функции эластичность производства по масштабу равна степени однородности:*

$$\varepsilon_0(x) = \mu. \qquad (1.67)$$

Доказательство. Поделим тождество Эйлера (1.54) на $f(x)$, используем определение факторных эластичностей (1.62) и затем равенство (1.66):

$$\mu = \frac{1}{f(x)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x) = \varepsilon_0(x).$$

Равенство (1.67) доказано. ■

Углублённое изучение взаимосвязи между средними и предельными эффективностями (отдачами) факторов ПФ представлено в статье Г.Б. Клейнера (Клейнер, 1994).

1.5. Многофакторные ПФ. Эластичность замещения

1.5.1. Исследуем свойство взаимной замещаемости производственных факторов в многофакторном случае. В силу концептуальной и технической сложности этого понятия в общем случае, что отмечено в подразделе 1.3, ограничимся случаем положительной однородности непрерывно дифференцируемых вогнутых производственных функций.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую квазивогнутую и положительно однородную степени $\mu > 0$ производственную функцию $f \in C^1(G)$ в её экономической области $G \subseteq R_+^n$. Замещение факторов производства исследуется для воображаемого процесса с постоянным уровнем выпуска, когда уровни использования всех факторов, кроме выделенной пары (i, j), постоянны. Условие постоянства – уравнение

$$f(x) = q_0, \quad x \in G, \tag{1.68}$$

где q_0 – заданное положительное число, например выпуск при использовании факторов $x^0 \in G$. В плоскости факторов $\{x_i, x_j\}$ уравнение (1.68) определяет сечение (след) изокванты функции $f(x)$ – множество всевозможных комбинаций этих факторов, при которых выпуск постоянен:

$$E_{ij}(q) = \{(x_i, x_j) \ge 0 : f(x) = q\}.$$

Изокванта $E_{ij}(q)$ может рассматриваться как неявная функция $x_j = \varphi_j(x_i)$, определяемая уравнением (1.68), где переменные x_k^0 при $k \ne i \vee j$ фиксированы. При этом $x_j^0 = \varphi_j(x_i^0)$.

Применим к уравнению (1.68) в точке x^0 частичный дифференциал по выделенным факторам (i, j) (при $dx_k = 0$ для $k \ne i \vee j$):

$$d_{ij} f(x^0) \equiv \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j} dx_j = 0. \tag{1.69}$$

Отсюда получаем выражение для производной изокванты $x_j = \varphi_j(x_i)$ в точке x^0:

$$\frac{d\varphi_j(x^0)}{dx_i} = -\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} : \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j}. \tag{1.70}$$

Эта величина представляет предельную пропорцию замены использования фактора x_i фактором x_j в окрестности точки x^0 при сохранении исходного уровня выпуска q_0. На рисунке 2 она является тангенсом угла наклона (относительно оси x_i) касательной к данной изокванте в точке x^0, т.е. $\operatorname{tg}\alpha$.

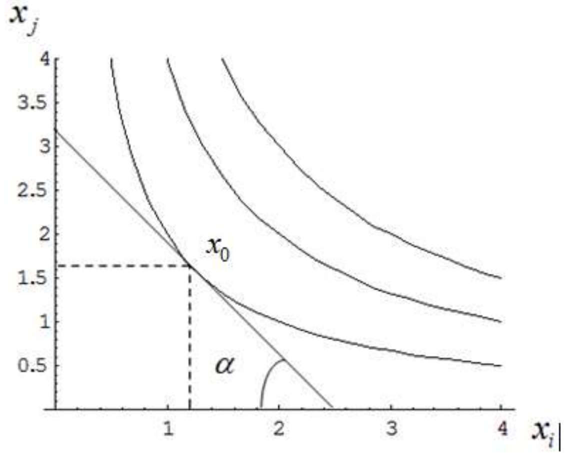

Рис. 2. Сечения изоквант $E_{ij}(q)$

В силу произвольности выбора изокванты равенства (1.69) и (1.70) можно отнести к произвольной точке экономической области $x \in G$. Для возрастающих функций частные производные положительны, поэтому величина (1.70) всегда отрицательна. Это соответствует тому, что при уменьшении использования одного из пары факторов (i, j) другой фактор должен использоваться в большем количестве. В экономическом анализе предпочтение отдаётся положительным показателям, поэтому вместо характеристики замещения (1.70) используется противоположная по знаку величина

$$S_{ij}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} : \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \tag{1.71}$$

называемая *предельной нормой замещения (ПНЗ) фактора* x_i *фактором* x_j *в окрестности точки* $x \in G$.

Для традиционного приближенного процентного представления дифференциальных характеристик ПНЗ $S_{ij}(x)$ приближенно показывает, на сколько процентов нужно увеличить (или уменьшить) использование фактора x_j, чтобы компенсировать уменьшение (или увеличение) фактора x_i на 1 % при условии, что остальные факторы и выпуск продукции остаются неизменными.

Как уже отмечено в подразделе 1.3 и будет показано во втором разделе, предельные нормы замещения $S_{ij}(x)$ определяют оптимальные (наиболее рациональные) наборы использования факторов x в зависимости от их цен. Это стимулирует углублённое исследование характеристики ПНЗ (1.71).

1.5.2. Выделим произвольный замещаемый фактор x_i и, используя свойство положительной однородности (степени μ) функции $f(x)$, представим её в виде

$$f(x) = x_i^{\mu} f\left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right). \tag{1.72}$$

Введём обозначения:

- *пропорция использования факторов* относительно фактора x_i

$$\xi_{ji} = \frac{x_j}{x_i},$$

- $(n-1)$-мерный *вектор пропорций*

$$\xi^i = (\xi_{1i}, \ldots, \xi_{i-1,i}, \xi_{i+1,i}, \ldots, \xi_{ni}),$$

- *приведенная производственная функция*

$$\varphi(\xi^i) = f(\xi_{1i}, \ldots, \xi_{i-1,i}, 1, \xi_{i+1,i}, \ldots, \xi_{ni}).$$

При этом функция (1.72) принимает вид

$$f(x) = x_i^{\mu} \varphi(\xi^i). \tag{1.73}$$

Дифференцируя это представление по x_i, x_j и подставляя полученные производные в (1.71), приходим к следующему – приведенному виду ПНЗ, зависящей от $(n-1)$ переменной:

$$s_{ij}(\xi^i) = \frac{\mu\varphi(\xi^i) - \langle \xi^i, \varphi'(\xi^i) \rangle}{\partial\varphi(\xi^i) / \partial\xi_{ji}}. \tag{1.74}$$

Таким образом, функции ПНЗ (1.71) в однородном случае являются функциями от пропорций использования факторов (1.74). В n-мерном пространстве факторов мы имеем систему из $n(n-1)$ уравнений

$$s_{ij} = \psi_{ij}(\xi^i),\ i, j = \overline{1,n} \wedge i \neq j\,. \tag{1.75}$$

Здесь правая часть обозначает правую часть выражений (1.74):

$$\psi_{ij}(\xi^i) = \frac{\mu\varphi(\xi^i) - \langle \xi^i, \varphi'(\xi^i)\rangle}{\partial\varphi(\xi^i)/\partial\xi_{ji}}.$$

1.5.3. Введём многофакторное обобщение эластичности замещения Хикса–Аллена (определение 6) для рассматриваемого однородного случая на основе двухфакторной формулы (1.34), справедливой в общем двухфакторном однородном случае. Однако теперь вместо скалярного уравнения (1.41) мы имеем систему уравнений (1.75), определяющую систему обратных функций

$$\xi_{ji}(s_{i1},\ldots,s_{i,i-1},s_{i,i+1},\ldots,s_{in}) \triangleq \psi_{ij}^{-1}\left(s_{i1},\ldots,s_{i,i-1},s_{i,i+1},\ldots,s_{in}\right),\ i, j = \overline{1,n} \wedge i \neq j\,. \tag{1.76}$$

Определение 10. *Эластичностью замещения фактора x_i фактором x_j в окрестности точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется величина*

$$\sigma_{ij}(\xi^i) = \frac{s_{ij}}{\xi_{ji}}\frac{\partial\xi_{ji}}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial \ln \xi_{ji}}{\partial \ln s_{ij}}\,. \tag{1.77}$$

Упражнение 8. *Провести вычисления и показать, что эластичности замещения для многофакторных однородных ПФ Викселля* (1.55) *и степенной средней* (1.56) *одинаковы для любых пар факторов (i, j) и постоянны, причём для функции Викселля $\sigma_{ij}(\xi^i) = \sigma = 1$ и для степенной средней*

$$\sigma_{ij}(\xi^i) = \sigma = \frac{1}{1+\rho}. \tag{1.78}$$

Таким образом, упомянутое выше название степенной средней ПФ (1.56) как ***функции постоянной эластичности замещения*** (ПЭЗ) обосновывается формулой (1.78).

Известно, что математический класс степенных средних функций (1.56) с указанными ограничениями на параметры совпадает с классом квазивогнутых однородных степени μ производственных функций постоянной эластичности замещения (Клейнер, 1986).

1.5.4. В общем случае решение системы (1.75) относительно пропорций использования факторов (1.76) может оказаться очень сложным и требует применения численных методов. Решение этой задачи можно избежать переходом от системы (1.75) к решению *системы в вариациях* из $n(n-1)^2$ линейных уравнений относительно $n(n-1)$ переменных (*вариаций*) $\partial\xi_{ji} / \partial s_{ij}$:

$$\sum_{r\neq i}\frac{\partial\psi_{ij}(\xi^i)}{\partial\xi_{ri}}\cdot\frac{\partial\xi_{ri}}{\partial s_{ik}}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}\qquad j=\overline{1,n}\wedge j\neq i. \tag{1.79}$$

Для двух факторов система (1.79) при $i=1$ принимает вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_{12}\left(\xi_{21}\right)}{\partial\xi_{21}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{21}}{\partial s_{12}}=1,\\[2mm] \dfrac{\partial\psi_{12}\left(\xi_{21}\right)}{\partial\xi_{21}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{21}}{\partial s_{21}}=0,\end{cases}$$

и при $i=2$ –

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_{21}\left(\xi_{12}\right)}{\partial\xi_{12}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{12}}{\partial s_{12}}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\psi_{21}\left(\xi_{12}\right)}{\partial\xi_{12}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{12}}{\partial s_{21}}=1.\end{cases}$$

Отсюда получаем выражение

$$\frac{\partial\xi_{ji}}{\partial s_{ij}}=\frac{1}{\partial\psi_{ij}\left(\xi_{ji}\right)/\partial\xi_{ji}},\quad j\neq i. \tag{1.80}$$

В случае трех факторов система (1.79) при $i=1$ принимает вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_{12}\left(\xi^1\right)}{\partial\xi_{21}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{21}}{\partial s_{12}}+\dfrac{\partial\psi_{12}\left(\xi^1\right)}{\partial\xi_{31}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{31}}{\partial s_{12}}=1,\\[2mm] \dfrac{\partial\psi_{12}\left(\xi^1\right)}{\partial\xi_{21}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{21}}{\partial s_{13}}+\dfrac{\partial\psi_{12}\left(\xi^1\right)}{\partial\xi_{31}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{31}}{\partial s_{13}}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\psi_{13}\left(\xi^1\right)}{\partial\xi_{21}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{21}}{\partial s_{12}}+\dfrac{\partial\psi_{13}\left(\xi^1\right)}{\partial\xi_{31}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{31}}{\partial s_{12}}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\psi_{13}\left(\xi^1\right)}{\partial\xi_{21}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{21}}{\partial s_{13}}+\dfrac{\partial\psi_{13}\left(\xi^1\right)}{\partial\xi_{31}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{31}}{\partial s_{13}}=1.\end{cases}$$

Для $i = 2{,}3$ система в вариациях выписывается аналогично, при этом ее решением будет

$$\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial \psi_{it}\left(\xi^i\right)}{\partial \xi_{ti}} : \left[\frac{\partial \psi_{ij}\left(\xi^i\right)}{\partial \xi_{ji}} \cdot \frac{\partial \psi_{it}\left(\xi^i\right)}{\partial \xi_{ti}} - \frac{\partial \psi_{ij}\left(\xi^i\right)}{\partial \xi_{ti}} \cdot \frac{\partial \psi_{it}\left(\xi^i\right)}{\partial \xi_{ji}} \right], \quad t \neq i, j. \qquad (1.81)$$

Формулы (1.80) и (1.81) облегчают вычисление эластичностей (1.77).

1.5.5. Как и в двухфакторном случае, предположение о постоянной эластичности замещения факторов является идеализацией реального производства. Расширение возможностей математического моделирования требует привлечения более гибких моделей производства в виде удобных параметрических классов ПФ с переменной эластичностью замещения. Ввиду высокой сложности и неоднозначности этого понятия в общем случае целесообразно ограничиться однородными функциями. В подразделе 1.3 приведен класс двухфакторных однородных ПФ (Реванкара) с эластичностью замещения, зависящей от фондовооружённости линейно (ЛЭЗ). Там также дано интегральное представление Сато–Гофмана линейно-однородных ПФ с произвольной зависимостью эластичности замещения от фондовооружённости. Для многофакторных (более двух) однородных ПФ аналитических классов с переменной эластичностью замещения до недавнего времени описания предложено не было.

Проблема аналитического описания класса двух- и многофакторных ПФ, удобного для применения, решается на основе аналитического представления класса линейно однородных неотрицательных вогнутых функций, полученного автором пособия (Горбунов, 1999, 2004). Это представление тривиально обобщается на положительно однородные неотрицательные функции следующим образом.

Введём обозначения

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad S_n = \left\{ x \geq 0 : \langle x \rangle = 1 \right\}.$$

Теорема (Горбунов, 1999). *Любая положительно однородная степени $\mu > 0$ и неотрицательная на ортанте R_+^n функция $f(x)$ может быть представлена в виде*

$$f(x) = \langle x \rangle^{\mu} \upsilon \left(\frac{x}{\langle x \rangle} \right), \qquad (1.82)$$

где $\upsilon(y)$, $y \in R_+^n$, – некоторая вогнутая и неотрицательная на симплексе S_n функция.

Представление (1.82) существенно расширяет возможности моделирования производственных объектов и систем в предположении их положительной однородности. В качестве базовой функции $\upsilon(y)$ можно брать любые функции с указанными в теореме свойствами. Однако произвол их выбора должен быть согласован с возможностью их идентификации, определяемой статистической базой об использовании факторов производства и соответствующих выпусках. Начав с построения функции Викселля и затем функции ПЭЗ, можно перейти к функции вида (1.82) с базовой функцией логарифмической (1.59) (параметров $2n$), затем Джири (1.58) (параметров $2n+1$), затем Солоу–Мукерджи (1.57) (число параметров $2n+2$). Более гибкий класс базовых функций – вогнутые квадратичные функции

$$\upsilon(x) = \alpha + \langle c, x\rangle + \langle Qx, x\rangle \tag{1.83}$$

с отрицательно определёнными матрицами $Q = \{q_{ij}\}$. Однако здесь существенно больше параметров, и требуется обеспечивать свойства монотонности и квазивогнутости функции (1.82), которые могут нарушаться.

Приведём два примера применения теоремы о представлении вогнутых линейно-однородных функций (1.82) с базовыми функциями Солоу (1.57) и квадратичной (1.83) для случая двух факторов. Все аналитические формулы полечены с помощью системы компьютерной математики «Mathematica».

Пример 1. Рассмотрим в качестве базовой функции двухфакторную функцию Солоу (1.82) с параметрами $A=1.2$, $\nu=0.8$, $\alpha_1=0.1$, $\alpha_2=0.8$, $\gamma=3.2$, т.е.

$$\upsilon(x) = 1.2\left(0.8x_1^{0.1} + 0.2x_2^{0.8}\right)^{3.2}. \tag{1.84}$$

Соответствующая линейно-однородная функция (1.82) имеет вид

$$F(x) = 1.2(x_1 + x_2)\left(0.8\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^{0.1} + 0.2\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^{0.8}\right)^{3.2}. \tag{1.85}$$

Изокванты функций (1.84) и (1.85) представлены на рисунке 3.

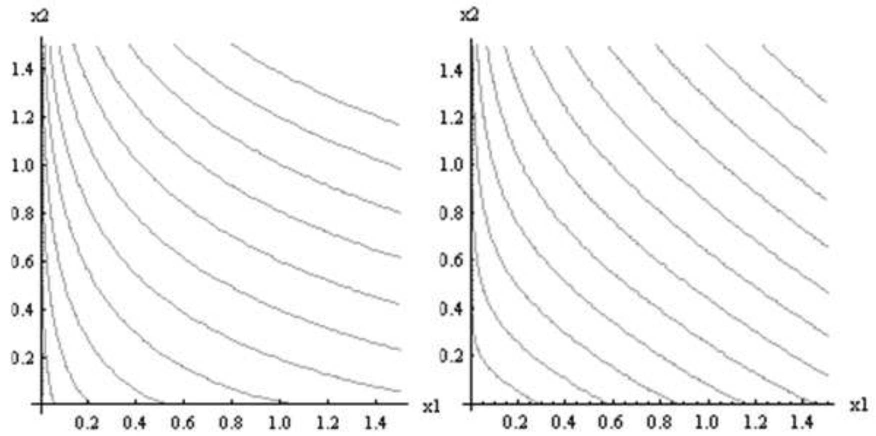

Рис. 3. Изокванты функций (1.84) (слева) и (1.85) (справа)

Для этого примера аналитическая формула вычисления эластичности замещения первого фактора вторым достаточно громоздкая. Несколько ее значений представлено в таблице 1.

Таблица 1

Эластичность замещения $\sigma_{12}\left(\xi_{21}\right)$ функции (1.85)

ξ_{21}	0.5	1	3	5	8
$\sigma_{12}\left(\xi_{21}\right)$	5.048	3.161	1.643	1.364	1.221

Таким образом, двухфакторная функция (1.85) имеет переменную эластичность замещения.

Пример 2. Рассмотрим двухфакторную базовую квадратичную функцию (1.83):

$$\upsilon\left(x\right)=\alpha+c_1x_1+c_2x_2+q_{11}x_1^2+2q_{12}x_1x_2+q_{22}x_2^2. \qquad (1.86)$$

В этом случае линейно-однородная функция (1.85) имеет вид

$$f\left(x\right)=\frac{\left(\alpha+c_1+q_{11}\right)x_1^2+\left(2\alpha+c_1+c_2+2q_{12}\right)x_1x_2+\left(\alpha+c_2+q_{22}\right)x_2^2}{x_1+x_2}.$$

Пусть фактор x_1 заменяется фактором x_2. Тогда приведенная функция от пропорции использования факторов $\xi_{21}=x_2/x_1$ имеет вид

$$\varphi_1\left(\xi_{21}\right)=F\left(1,\xi_{21}\right)=\frac{\alpha+c_1+q_{11}+\left(2\alpha+c_1+c_2+2q_{12}\right)\xi_{21}+\left(\alpha+c_2+q_{22}\right)\xi_{21}^2}{1+\xi_{21}},$$

а приведенная функция ПНЗ (1.74) равна величине

$$s_{12}\left(\xi_{21}\right)=\frac{c_1+q_{11}+\alpha+2\left(c_1+q_{11}+\alpha\right)\xi_{21}+(c_1+2q_{12}-q_{22}+\alpha)\xi_{21}^2}{c_2-q_{11}+2q_{12}+\alpha+\left(q_{22}+\alpha+c_2\right)\left(2\xi_{21}+\xi_{21}^2\right)}.$$

Эластичность замещения (1.77) первого фактора вторым равна

$$\sigma_{12}\left(\xi_{21}\right)=\frac{\left(c_1+q_{11}+\alpha+2\left(c_1+q_{11}+\alpha\right)\xi_{21}+(c_1+2q_{12}-q_{22}+\alpha)\xi_{21}^2\right)}{2\xi_{21}\left(2q_{12}-q_{11}-q_{22}\right)}\times$$
$$\times\frac{\left(c_2-q_{11}+2q_{12}+\alpha+\left(q_{22}+\alpha+c_2\right)\left(2\xi_{21}+\xi_{21}^2\right)\right)}{\left(c_1+q_{11}+\alpha+\left(c_1+c_2+2\left(q_{12}+\alpha\right)\right)\xi_{21}+\left(c_2+q_{22}+\alpha\right)\xi_{21}^2\right)}.$$

Зададим значения параметров функции (1.86):

$$\alpha=1,\quad c=\left(2,1\right),\quad Q=\begin{pmatrix}-2 & 0.5\\ 0.5 & -1\end{pmatrix}.$$

При этом базовая функция

$$\upsilon\left(x\right)=1+2x_1+x_2-2x_1^2+x_1x_2-x_2^2 \qquad (1.87)$$

строго вогнута. Соответствующая линейно-однородная функция (1.82) имеет вид

$$f\left(x\right)=\frac{x_1^2+6x_1x_2+x_2^2}{x_1+x_2}. \qquad (1.88)$$

Изокванты функций (1.87) и (1.88) представлены на рисунке 4.

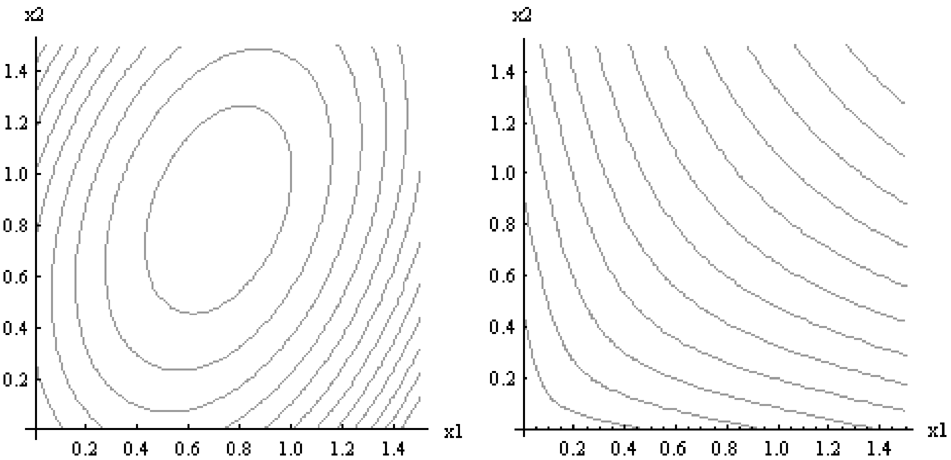

Рис. 4. Изокванты функций (1.87) (слева) и (1.88) (справа)

Эластичность замещения первого фактора вторым равна

$$\sigma_{12}\left(\xi_{21}\right)=\frac{0.625\left(0.2+0.4\xi_{21}+\xi_{21}^{2}\right)\left(5+2\xi_{21}+\xi_{21}^{2}\right)}{\xi_{21}\left(1+6\xi_{21}+\xi_{21}^{2}\right)}.$$

Можно проверить, что эта функция выпуклая с минимумом $\sigma_{12}(1)=1$, причем $\sigma_{12}\left(\xi_{21}\right)\to\infty$ при $\xi_{21}\to 0$. Несколько её значений представлено в таблице 2.

Таблица 2

Эластичность замещения $\sigma_{12}\left(\xi_{21}\right)$ функции (1.88)

ξ_{21}	0.5	1	3	5	8
$\sigma_{12}\left(\xi_{21}\right)$	1.195	1	1.548	2.429	3.961

Так же как и в первом примере, эластичность замещения функции (1.88) переменная.

2. Задачи рационального производства

2.1. Максимизация прибыли. Стратегическое планирование

Неоклассическая теория фирмы построена на предположении, что известна производственная функция фирмы

$$q = f(x) \equiv f(x_1, ..., x_n), \tag{2.1}$$

представляющая количество выпуска q (в натуральном или стоимостном выражении) при затратах факторов производства $x = (x_1, ..., x_n)$. Будем считать, что выпуск имеет натуральное измерение. В случае стоимостного измерения выпуска в дальнейшем анализе цена выпуска должна считаться единицей.

Считая ПФ ***непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой*** (убывающая отдача по масштабу), поставим и исследуем одну из основных задач теории производства, заключающуюся в максимизации прибыли путем выбора видов затрат, при заданных ценах выпуска p и ценах затрат (факторов) $v = (v_1, ..., v_n)$. Исследуем здесь проблему для *долгосрочного периода*, или же задачу *стратегического планирования*.

Прибыль Π равна доходу R за некоторый период за вычетом издержек производства C, т.е. $\Pi = R - C,$ где доход продукта q вычисляется в силу (2.1) как $R = pq \equiv pf(x)$, а издержки производства

$$C = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \equiv \langle v, x \rangle. \tag{2.2}$$

При этом прибыль фирмы

$$\Pi(x) = pf(x) - \langle v, x \rangle. \tag{2.3}$$

Решая долгосрочную задачу, фирма свободна выбрать любой неотрицательный вектор затрат, и задача максимизации прибыли формулируется как

$$\max\left\{ pf(x) - \langle v, x \rangle : x \geq 0 \right\}. \tag{2.4}$$

Задача (2.4) представляет собой задачу выпуклого программирования, в которой при заданных $(n+1)$ параметрах p и w требуется найти неотрицательный вектор затрат x, максимизирующий вогнутую функцию прибыли $\Pi(x)$ на выпуклом множестве $\{x \geq 0\}$.

Необходимыми и достаточными условиями для решения задачи (2.4) являются условия Куна–Таккера (Васильев, 2002; Горбунов, 1999):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} \equiv p\frac{\partial f(x)}{\partial x} - v \le 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot x \equiv \left(p\frac{\partial f(x)}{\partial x} - v\right)\cdot x = 0, \quad x \ge 0. \qquad (2.5)$$

Рассмотрим эти условия подробнее. Первая группа неравенств (2.5)

$$p\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \le v_j, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (2.6)$$

означает, что *стоимость предельного продукта* относительно фактора j-го вида в оптимальном режиме (левая часть неравенства) не превосходит цены этого фактора. Из второй группы (условий дополнительности) получаем, что

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = v_j, & \text{если} \quad x_j > 0, \\ x_j = 0, & \text{если} \quad p\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} < v_j. \end{cases}$$

Это значит, что если j-фактор действительно используется, соответствующая стоимость предельного продукта и цена фактора совпадают, и если стоимость предельного продукта для некоторого фактора ниже его цены, то данный фактор не используется.

Рассмотрим наиболее типичный случай, когда все факторы оптимального плана использованы ($x > 0$), тогда неравенства (2.6) становятся равенствами (условия Куна–Таккера (2.5) становятся классическими):

$$p\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = v_j, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2.7)$$

В этом случае стоимости предельных продуктов по всем факторам равны их ценам. Разделив два любых уравнения системы (2.7) одно на другое, например уравнение i на j, получим соотношения

$$S_{ij}(x) \triangleq \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} : \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \frac{v_i}{v_j}, \qquad (2.8)$$

где левая часть есть предельная норма замещения фактора x_i фактором x_j, исследованная в предыдущем разделе. Эти соотношения называются *условиями равновесия в производстве*.

Рассмотрим систему уравнений (2.7) с точки зрения её разрешимости относительно вектора x при произвольных положительных значениях параметров (p, v), т.е. задачу о неявной функции $x(p, v)$. Якобиан этой системы есть (с точностью до положительного множителя p) матрица Гессе производственной функции (2.1)

$$p \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}.$$

В силу строгой вогнутости $f(x)$ эта матрица невырожденная и отрицательно определённая. Из этого следует, что система (2.7) разрешима относительно оптимальных затрат факторов x^* при любых положительных ценах (p, v), т.е. эта система определяет однозначную, непрерывную и непрерывно дифференцируемую векторную функцию

$$x^* = x(p, v). \tag{2.9}$$

Функция (2.9) называется *функцией факторного спроса.* Легко видеть, что эта функция ***однородная нулевой степени***, т.е.

$$x(\alpha p, \alpha v) = x(p, v), \quad \forall \alpha > 0.$$

Действительно, умножение всех цен на положительный коэффициент α реализуется как умножение равенств (2.7) на этот коэффициент. При этом решение x^* не изменится.

Подставляя функции спроса (2.9) в производственную функцию (2.1), получим выпуск как функцию цен:

$$q^* \equiv q(p, v) = f(x(p, v)). \tag{2.10}$$

Эта функция называется *функцией предложения выпуска.* Так как функция спроса на затраты однородна нулевой степени, то и функция предложения (2.10) обладает этим свойством:

$$q(\alpha p, \alpha v) = q(p, v), \quad \forall \alpha > 0.$$

Соответственно, пропорциональное изменение в ценах продукции и факторов производства не влияет ни на затраты, ни на выпуск продукции.

Пример 3. Построим функции спроса (2.9) и предложения (2.10) для двухфакторной ПФ Викселля (Кобба–Дугласа)

$$q = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad \mu \equiv \alpha_1 + \alpha_2 < 1. \tag{2.11}$$

Все параметры (A, α_1, α_2) положительные.

Решение. Система (2.7) для функции (2.11) имеет вид

$$pA\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} = v_1, \quad pA\alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} = v_2 .$$

Логарифмируя эти уравнения, получим систему линейных уравнений относительно величин $\ln x_1$ и $\ln x_2$. Решение линейной системы и потенцирование результата приводит к функциям спроса

$$x_1(p,v) = (pA)^{1/1-\mu} \left(\frac{\alpha_1}{v_1} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\mu}} \left(\frac{\alpha_2}{v_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{1-\mu}}, \quad x_2(p,v) = (pA)^{1/1-\mu} \left(\frac{\alpha_1}{v_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{1-\mu}} \left(\frac{\alpha_2}{v_2} \right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\mu}} . \tag{2.12}$$

Функции предложения получаются подстановкой полученных функций факторного спроса в (2.10):

$$q(p,v) = A(pA)^{\mu/1-\mu} \left(\frac{\alpha_1}{v_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{1-\mu}} \left(\frac{\alpha_2}{v_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{1-\mu}} . \tag{2.13}$$

2.2. Функция прибыли. Лемма Хотеллинга

Функцией прибыли называется зависимость значения задачи максимизации прибыли (2.4) от цен:

$$\pi(p,v) = \Pi(x(p,v)) \equiv pf(x(p,v)) - \langle v, x(p,v) \rangle . \tag{2.14}$$

Изучим некоторые свойства функция прибыли.

1. Из установленного выше свойства однородности нулевой степени функций спроса $x(p,v)$ и определения (2.14) очевидно следует, что

$$\pi(tp,tv) = t\pi(p,v), \quad \forall t > 0 , \tag{2.15}$$

т.е. ***функция прибыли*** (2.14) ***однородная 1-й степени***.

2. Продифференцируем равенство (2.14) по цене продукта p:

$$\frac{\partial \pi(p,v)}{\partial p} = f(x(p,v)) + \left[p\frac{\partial f}{\partial x} - v \right] \frac{\partial x}{\partial p} . \tag{2.16}$$

Учитывая условие равновесия фирмы

$$p\frac{\partial f(x(p,v))}{\partial x} = v , \tag{2.17}$$

получим справа в (2.16) функцию предложения $f(x(p,v)) \equiv q(p,v)$. Таким образом,

$$\frac{\partial \pi(p,v)}{\partial p} = q(p,v) . \tag{2.18}$$

Равенство (2.18) называется ***леммой Хотеллинга***. Оно дает количественную меру предельного изменения прибыли относительно изменения цены выпускаемого продукта. Именно величина предельного роста прибыли с ростом цены выпускаемого продукта равна значению уровня выпуска.

3. Продифференцируем равенство (2.14) по ценам факторов v и, также используя условие равновесия (2.17), получим

$$\frac{\partial\pi(p,v)}{\partial v}=\left[p\frac{\partial f}{\partial x}-v\right]\frac{\partial x}{\partial v}-x(p,v)=-x(p,v),$$

т.е. равенство

$$\frac{\partial\pi(p,v)}{\partial v}=-x(p,v). \qquad (2.19)$$

Теперь продифференцируем условие равновесия (2.19) по ценам факторов v:

$$pH(x^*)\frac{\partial x}{\partial v}-I=0.$$

Отсюда получаем, что матрица вариаций спроса

$$\frac{\partial x(p,v)}{\partial v}=\frac{1}{p}H^{-1}(x^*) \qquad (2.20)$$

симметричная, отрицательно определенная. Дифференцируя равенство (2.19) ещё раз по ценам факторов v, получим матрицу вторых производных функции прибыли

$$\frac{\partial^2\pi(p,v)}{\partial v^2}=-\frac{1}{p}H^{-1}(x^*). \qquad (2.21)$$

Матрица (2.21) отличается от отрицательно определённой матрицы (2.20) знаком, следовательно, она положительно определённая и, соответственно, ***функция прибыли выпукла по ценам факторов***. Итак, доказано следующее

Утверждение 4. *Функция прибыли* $\pi(p,v)$*:*

1) однородная 1-й степени;

2) вариация прибыли относительно цены продукта равна уровню выпуска (2.18)*;*

3) монотонно убывает и выпуклая по ценам факторов, причём её вариации относительно цен факторов равны величинам их использования (2.19).

Упражнение 9. *Построить функции факторного спроса, предложения и прибыли для ПФ:*

1) $q = A(\nu K^{-\rho} + (1-\nu)L^{-\rho})^{-\mu/\rho}$, $0 < \mu < 1$;

2) $q = A\left(K - K^*\right)^{\alpha}\left(L - L^*\right)^{\beta}$, $0 < \alpha + \beta < 1$;

3) $q = A[(1+\delta K)^{\alpha}(1+\gamma L)^{\beta}]$, $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$;

4) $q = a\sqrt{K^2 + bL}$ (Солоу).

2.3. Минимизация издержек. Лемма Шепарда

Предыдущий анализ ограничен свойством строгой вогнутости ПФ. Это ограничение можно ослабить, сохранив свойство ***непрерывной дифференцируемости*** ПФ и заменив требование строгой вогнутости на более слабое свойство ***строгой выпуклости*** её *верхних множеств уровня*

$$P_f(q) = \left\{x \geq 0: \quad f(x) \geq q\right\}. \tag{2.22}$$

Строгая выпуклость некоторого множества означает, что для любых двух его различных граничных точек x^1 и x^2 точки интервала $\left(x^1, x^2\right)$ являются внутренними. Функция $f\left(x\right)$ при этом называется ***строго квазивогнутой***.

Для множества (2.22) строгая выпуклость означает: если $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $x^1 \neq x^2$, $f(x^1) = f(x^2) = q$, $0 < \lambda < 1$, то $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) > q$. Матрица Гессе строго квазивогнутой функции $f(x)$ может вырождаться или быть неопределённой. Так будет у положительно однородных вогнутых функций, степень однородности которых не меньше единицы. Этим охватывается более широкий класс производственных функций, представляющий произвольные характеристики отдачи от масштаба.

Рациональность плана выпуска фирмы будем понимать как минимизацию стоимости факторов x, положительные цены которых представлены вектором $v > 0$, факторов, обеспечивающих выпуск продукции в количестве q. Таким образом, требуется минимизировать функцию $\left\langle v, x\right\rangle$, представляющую издержки производства, при условиях $f(x) \geq q, x \geq 0$. Обозначим эту задачу как

$$c(v,q) = \min\left\{\left\langle v, x\right\rangle: f(x) \geq q, x \geq 0\right\}. \tag{2.23}$$

Значение $c(v,q)$ задачи (2.23) называется *функцией издержек.* Формально для каждого уровня выпуска q она является опорной функцией для верхнего множества уровня (2.22) относительно цен v.

Задача минимизации издержек (2.23), как и рассмотренная выше задача максимизации прибыли, относится к выпуклому программированию. Эта задача разрешима при любых положительных параметрах (v,q) (почему?). Из монотонного возрастания функции $f(x)$ также следует, что решение задачи (2.23) достигается на границе её допустимого множества:

$$f(x) = q\,. \tag{2.24}$$

Строгая вогнутость допустимого множества (2.22), как нетрудно убедиться, обеспечивает единственность решения.

Задача (2.23) подобна задаче минимизации потребительских расходов теории потребительского спроса, где зависимость решения от параметров называется компенсированным спросом, или *спросом Хикса*. Решение задачи (2.23) обозначим

$$x^* = h\,(v,q)\,. \tag{2.25}$$

Векторная функция (2.25) называется *функцией условного факторного спроса (Хикса).* Эта функция определяет функцию издержек (2.23) в виде

$$c(v,q) = \langle v, h(v,q) \rangle\,. \tag{2.26}$$

Рассмотрим основной случай функционирования производства, когда в оптимальном режиме используются все факторы, т.е. $x > 0$. При этом задача (2.23) может рассматриваться как классическая задача минимизации линейной функции $\langle v, x \rangle$ при условии (2.24). Введём функцию Лагранжа этой задачи

$$L(x,\lambda) = \langle v, x \rangle + \lambda\left[q - f(x)\right]. \tag{2.27}$$

Необходимое и достаточное условие для решения задачи выпуклого программирования (2.23) есть условие стационарности функции (2.27) по основным переменным *x*:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_i} \equiv v_i - \lambda \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}\,. \tag{2.28}$$

Отметим, что в силу положительности цен и производных функции $f(x)$ множитель Лагранжа $\lambda > 0$.

Множитель Лагранжа несёт информацию о функции издержек (2.26). В силу маргинального свойства множителя по уровню выпуска q (правой части ограничения (2.24)) имеем равенство

$$\frac{\partial c(v,q)}{\partial q} = \lambda(v,q)\,, \tag{2.29}$$

означающее, что множитель Лагранжа равен предельным издержкам производства. Из этого равенства в силу положительности множителя $\lambda(v,q)$ следует, что функция издержек $\tilde{n}(v,q)$ возрастает с ростом выпуска q. Характер зависимости функции издержек относительно цен факторов v не так очевиден и более содержателен.

Рассмотрим систему (2.28). Как и в задаче максимизации прибыли из этой системы следует *условие равновесия в производстве*:

$$S_{ij}(x) \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} : \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \frac{v_i}{v_j}, \quad i \neq j\,, \tag{2.30}$$

где левая часть есть ПНЗ фактора x_i фактором x_j.

Двухиндексная система (2.30) избыточна. Можно закрепить значение одного индекса, например, положить $j = n$, и вместо $n(n-1)$ уравнений (2.30) использовать систему

$$S_{in}(x) = \frac{v_i}{v_n}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{2.31}$$

Остальные уравнения системы (2.30) получаются делением соответствующих пар уравнений (2.31). Для определения факторного спроса Хикса (2.25) достаточно решить систему (2.31) вместе с уравнением (2.24). При этом очевидна справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5. *Условный факторный спрос* (2.25) *является функцией однородной нулевой степени относительно факторных цен v:*

$$h\,(tv,q) = h\,(v,q), \quad \forall t > 0\,. \tag{2.32}$$

Множитель Лагранжа $\lambda(v,q)$ находится после определения спроса (2.25) с помощью любого из уравнений (2.28):

$$\lambda(v,q) = v_i : \frac{\partial f\,(h(v,q))}{\partial x_i}, \quad i \in \overline{1,n}\,.$$

Утверждение 6. *Функция издержек* $\tilde{n}(v,q)$ *однородна степени 1 относительно цен v, возрастает по q и удовлетворяет* ***равенству Шепарда****:*

$$\frac{\partial c(v,q)}{\partial v} = h(v,q). \tag{2.33}$$

Доказательство. 1) Однородность степени 1 функции издержек является непосредственным следствием формулы (2.26), т.е. $c(v,q) = \langle v, h(v,q) \rangle$, и утверждения 5:

$$c(tv,q) = \langle tv, h(tv,q) \rangle = t \langle v, h(v,q) \rangle = c(v,q), \quad \forall t > 0 \cdot$$

Возрастание $c(v,q)$ по q следует из равенства (2.29) и положительности множителя $\lambda > 0$.

2) Продифференцируем (2.26) по *v*:

(а) $$\frac{\partial c(v,q)}{\partial v} = h(v,q) + \left\langle v, \frac{\partial h(v,q)}{\partial v} \right\rangle \cdot$$

В уравнение (2.24) подставим функцию спроса (2.25):

$$f(h(v,q)) = q \cdot$$

Продифференцируем это равенство по ценам *v*:

(б) $$\left\langle \frac{\partial f(h(v,q))}{\partial x}, \frac{\partial h(v,q)}{\partial v} \right\rangle = 0 \cdot$$

Из условия равновесия (2.28) имеем соотношение

$$\frac{\partial f(h(v,q))}{\partial x} = \frac{v}{\lambda(v,q)} \cdot$$

В силу этого соотношения и равенства (б) получаем

$$\left\langle v, \frac{\partial h(v,q)}{\partial v} \right\rangle = 0 \cdot$$

Учёт этого соотношения в равенстве (а) приводит к равенству Шепарда (2.33). ■

Пример 4. Построим функции условного факторного спроса $h(v,q)$ и функцию издержек $\tilde{n}(v,q)$ для двухфакторной ПФ Кобба–Дугласа

$$q = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad \mu \equiv \alpha_1 + \alpha_2, \quad 0 < \alpha_i \le 1. \tag{2.34}$$

Все параметры (a, α_1, α_2) положительные.

Решение. Система (2.28) для функции (2.34) имеет вид

$$\lambda a \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} = v_1, \quad \lambda a \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} = v_2 \,.$$

Разделив первое уравнение на второе, после элементарных преобразований получим пропорцию

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2 x_1} \cdot$$

С помощью этой пропорции можно исключить одну из переменных, а вторую определить из уравнения выпуска (2.24). При этом получим функции спроса

$$h_1(v,q)=\left(\frac{q}{a}\right)^{1/\mu}\left(\frac{\alpha_1 v_2}{\alpha_2 v_1}\right)^{\alpha_2/\mu},\quad h_2(v,q)=\left(\frac{q}{a}\right)^{1/\mu}\left(\frac{\alpha_2 v_1}{\alpha_1 v_2}\right)^{\alpha_1/\mu}.$$

Функция издержек получается подстановкой полученных функций спроса в выражение (2.26):

$$c(v,q)=\mu\left(\frac{q}{a}\right)^{1/\mu}\left(\frac{v_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1/\mu}\left(\frac{v_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2/\mu}.$$

Упражнение 10. *Построить функции условного факторного спроса и функцию издержек для ПФ:*

1) $q=a(\beta K^{-\rho}+(1-\beta)L^{-\rho})^{-\mu/\rho},\quad 0<\mu,\quad 0<\beta<1,\quad -1\le\rho\ne 0$;

2) $q=A\left(K-K^*\right)^{\alpha}\left(L-L^*\right)^{\beta},\quad 0<\alpha<1, 0<\beta<1$;

3) $q=A\ln[(1+\delta K)^{\alpha}(1+\gamma L)^{\beta}],\quad 0<\alpha,\beta$;

4) $q=a\sqrt{K^2+bL}$.

3. Построение производственных функций

3.1. Параметрический метод

3.1.1. Ограничимся проблемой построения по статистической информации о работе производственного объекта – построения наиболее распространенных стационарных двухфакторных ПФ вида

$$Y = F(K, L), \tag{3.1}$$

где Y – стоимость валового выпуска исследуемого производственного объекта, определяемая факторами: K – стоимость производственных фондов (капитал), L – затраты труда.

Функция F в соответствии с экономическим смыслом должна быть положительной (при положительных аргументах), непрерывной, возрастающей и квазивогнутой. Возможны также дополнительные условия вогнутости и положительной однородности. В первом разделе приведен ряд классов функций, как наиболее распространённых в литературе – Викселля (Кобба–Дугласа) и ПЭЗ, так и более сложных по структуре и более адекватных реальным объектам – ЛЭЗ, Солоу, Джири, логарифмическая, новый класс однородных функций с переменной эластичностью замещения.

Функция F строится в некотором параметрическом классе по статистическим данным, представляющим значения факторов и выпуска в стандартном случае непосредственно. В рассматриваемом случае это значения выпуска и производственных факторов в моменты сбора данных

$$\left\{Y_t, K_t, L_t : t = \overline{0,T}\right\}. \tag{3.2}$$

Отметим, что длина T временного ряда (3.2) не может быть достаточно большой, так как реальные производственные объекты на значительных промежутках времени не являются стационарными, а единицей времени естественно принимать год. Меньшие промежутки времени могут порождать сезонную нестационарность данных (3.2). Производство с течением времени меняет свои характеристики в силу различных процессов, как негативных (например, старение оборудования, ухудшение характеристик используемых ресурсов), так и позитивных (технический прогресс). Учёт нестационарности в экономических моделях – это достаточно сложная специальная проблема, исследуемая в макроэкономическом моделировании.

3.1.2. Для описания метода построения ПФ в параметрических классах список ее аргументов удобно расширить, включив вектор параметров

$$Y = F(K, L; w). \tag{3.3}$$

Записи (3.1) и (3.3) эквивалентны и выбираются в зависимости от контекста. На параметры w накладываются условия, обеспечивающие требуемые аналитические свойства искомой функции. Эти условия определяют допустимое множество параметров W. Требуется так подобрать класс функций (3.3) и конкретные параметры w, чтобы значения (3.2) достаточно хорошо удовлетворяли равенству (3.3). Точное удовлетворение этого равенства при всех значениях $\left(Y_t, K_t, L_t\right)$, как правило, невозможно, так как любая модель (3.1) является упрощением сложного объекта, и данные (3.2) содержат неточности различного происхождения.

Для учёта неточностей моделирования и статистики, данные (3.2) и модель (3.3) принято связывать регрессионной системой уравнений с аддитивной погрешностью

$$Y_t = F(K_t, L_t; w) + \varepsilon_t, \quad t = \overline{0, T}, \tag{3.4}$$

где ε_t – случайные величины, представляющие неточности измерений данных и ошибки моделирования. Задача определения параметров w из символических условий (3.4) называется *задачей оценивания* параметров w. Эта задача должна быть конструктивно доопределена.

Наиболее распространенный способ «хорошего» удовлетворения равенства (3.3) на статистических данных (3.2) – это метод наименьших квадратов (МНК), предложенный К. Гауссом и А. Лежандром (на рубеже XVIII–XIX вв.) для обработки астрономических измерений. Для рассматриваемой нелинейной проблемы МНК заключается в нахождении оценок параметров $\hat{w}$ из условия минимизации суммы квадратов невязок уравнений

$$Y_t = F(K_t, L_t; w), \quad t = \overline{0, T},$$

на допустимом множестве W:

$$\varphi(w) = \sum_{t=0}^{T} [Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2 \to \min_{W}. \tag{3.5}$$

Качество ПФ, построенной в данном классе $F(K,L;w)$, определяется *остатками регрессии* (3.4):

$$r_t = Y_t - F\left(K_t, L_t; \hat{w}\right),\ t = \overline{0,T}, \tag{3.6}$$

которые можно понимать как реализации случайных величин ε_t, соответствующие полученной оценке параметров $\hat{w}$. Набор остатков (3.6) является *псевдослучайной последовательностью*. Для этих остатков определены основные характеристики случайных величин: среднее, дисперсия, моменты высоких степеней, показатель автокорреляции остатков. Но теперь это не теоретические, а выборочные характеристики, вычисляемые по известным формулам без использования функций распределения случайных величин ε_t. Качество оценивания параметров ПФ определяется степенью совпадения теоретических характеристик случайных величин ε_t и соответствующих выборочных характеристик остатков r_t.

Достаточно полный статистический анализ точности полученного уравнения связи (3.3) возможен лишь в рамках схемы, постулирующей, что класс $F(K,L;w)$ содержит в себе истинную функцию регрессии, случайные компоненты ε_t аддитивны (т.е. запись (3.4) корректна), независимы и подчиняются нормальному закону распределения со средним значением $M\varepsilon_t = 0$ и одинаковыми дисперсиями $D\varepsilon_t = \sigma^2$, т.е. $\varepsilon_t \in N(0;\sigma^2)$. Однако эти предпосылки в случае построения производственных функций трудно обосновать. Особенностью этой задачи является отмеченная выше типичная «малость» количества наблюдений T объекта, который предполагается стационарным. Чем длиннее временной ряд (3.2), тем менее обоснованно применение стационарной модели (3.1).

Если функция регрессии $F(K,L;w)$ зависит от параметров w существенно нелинейно, то МНК-оценки $\hat{w}$ определяются не системой линейных уравнений, а итерационными методами условной нелинейной минимизации, что существенно затрудняет исследование их статистических свойств.

В существенно нелинейном случае набор статистических критериев качества очень узкий и должен дополняться содержательными аргументами относительно выбора класса параметризации. Для построения ПФ, в частности, должны привлекаться более широкие классы функций: постоянной эластичности замещения (ПЭЗ), переменной эластичности – однородные и неоднородные функции. Переход к более широкому классу ПФ должен повышать качество аппроксимации моделью исследуемого объекта наблюдаемых данных, однако при этом задача минимизации (3.5) будет терять *вычислительную обусловленность*. Последнее означает, что «почти минимальное» значение функционала невязки $\varphi(w)$ будет меняться несущественно (относительно точности вычислений) при существенно различных значениях оцениваемых параметров w.

В качестве общих статистических критериев можно использовать коэффициент детерминации R^2 и критерий Дарбина–Уотсона. Чем ближе значение R^2 к единице, тем лучше модель $F(K,L;w)$ соответствует эмпирическим наблюдениям (3.2).

Критерий Дарбина–Уотсона проверяет стандартную гипотезу об отсутствии автокорреляции остатков регрессии (3.6), для чего требуется вычислить величину

$$DW = \sum_{t=1}^{T}(r_t - r_{t-1})^2 \,/ \sum_{t=0}^{T} r_t^2 .$$

Возможные значения критерия DW находятся в интервале от 0 до 4. Если автокорреляция остатков отсутствует, то $DW \approx 2$.

3.1.3. Существуют приемы линеаризации некоторых типов нелинейных регрессий, но в случае построения ПФ их можно применить лишь для класса функций Викселля

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}. \qquad (3.7)$$

Задача МНК (3.5) для модели (3.7) заключается в минимизации квадратичной невязки системы уравнений

$$Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{\beta}, \quad t = \overline{0,T}, \qquad (3.8)$$

т.е. минимизации функции

$$\varphi(A,\alpha,\beta) = \sum_{t=0}^{T}[Y_t - AK_t^{\alpha}L_t^{\beta}]^2 \qquad (3.9)$$

при ограничениях $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

Эта задача МНК является существенно нелинейной, и её решение требует применения численных методов и хорошего начального приближения. Специфика степенной функции (3.7) позволяет решить эту проблему. Прологарифмировав равенства (3.8), получим систему уравнений

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t, \quad t = \overline{0,T}. \tag{3.10}$$

Система (3.10) линейна относительно переменных

$$b = \ln A, \quad \alpha, \quad \beta. \tag{3.11}$$

Она несовместна, как и система (3.8), но соответствующая задача МНК заключается в минимизации квадратичной функции переменных (3.11) – невязки системы (3.10)

$$\varphi_{\ln}(b,\alpha,\beta) = \sum_{t=0}^{T} (\ln Y_t - b - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t)^2. \tag{3.12}$$

Функция (3.12) выпуклая и квадратичная. Поиск её единственного (как правило) минимума сводится к решению системы линейных уравнений, получаемых приравниванием к нулю частных производных этой функции. Проделав соответствующие вычисления, нетрудно построить эту систему уравнений:

$$\begin{cases} (T - t_1)b + \left(\sum_t \ln K_t\right)\alpha + \left(\sum_t \ln L_t\right)\beta = \sum_t \ln Y_t, \\ \left(\sum_t \ln K_t\right)b + \left(\sum_t \ln^2 K_t\right)\alpha + \left(\sum_t \ln K_t \ln L_t\right)\beta = \sum_t \ln K_t \ln Y_t, \\ \left(\sum_t \ln L_t\right)b + \left(\sum_t \ln K_t \ln L_t\right)\alpha + \left(\sum_t \ln^2 L_t\right)\beta = \sum_t \ln L_t \ln Y_t. \end{cases} \tag{3.13}$$

Решив эту систему (например, формулами Крамера), получим оценки параметров

$$A = e^b, \quad \alpha, \quad \beta. \tag{3.14}$$

Минимизация квадратичной невязки $\varphi_{\ln}(b,\alpha,\beta)$ (3.12) не эквивалентна минимизации более сложной неквадратичной невязки $\varphi(A,\alpha,\beta)$ (3.9) исходной системы (3.8). Невязка $\varphi(A,\alpha,\beta)$ более адекватно представляет меру аппроксимации данных (3.2) моделью (3.7). Однако естественно ожидать, что различие в оценках параметров прямым (без логарифмирования) и косвенным способами не очень существенное. Прямые оценки параметров (A, α, β) можно получить, используя косвенные оценки (3.14) как начальное приближение для численной минимизации неквадратичной невязки $\varphi(A, \alpha, \beta)$.

Содержательные выводы относительно реальных экономик, представляемых функцией Викселля, следует уточнять, применяя в качестве моделей объекта более сложные функции $F(K, L)$, которые должны обеспечивать лучшую аппроксимацию наблюдаемых данных $\{Y_t, K_t, L_t\}$ расчётными данными $F(K_t, L_t)$. Однако выбор класса ПФ является специальной нетривиальной проблемой.

3.2. Индексные производственные функции

Описанный метод наименьших квадратов приводит во всех случаях, кроме функции Викселля, к задаче нелинейного программирования, которая может быть вычислительно достаточно сложной. Преодоление вычислительных проблем возможно различными способами. Универсальным способом улучшения свойств минимизируемого функционала описываемой ниже задачи МНК является переход к безразмерным относительным – *индексным* – переменным, т.е. к отношениям переменных модели (3.1)

$$\upsilon = \frac{Y}{Y_0}, \quad \kappa = \frac{K}{K_0}, \quad \lambda = \frac{L}{L_0}, \tag{3.15}$$

где значения знаменателей соответствуют начальному состоянию объекта (Y_0, K_0, L_0) на периоде его наблюдений (3.2).

Модель (3.1) в переменных (3.15) принимает вид

$$\upsilon = F(\kappa, \lambda), \tag{3.16}$$

и данные (3.2) переходят в набор индексов

$$\left\{\upsilon_t, \kappa_t, \lambda_t : t = \overline{0,T}\right\}, \tag{3.17}$$

где $\upsilon_0 = \kappa_0 = \lambda_0 = 1$.

Отметим, что часто статистическая информация об объекте доступна именно в индексной форме (3.17), возможно, частично. Так, в классической работе Кобба и Дугласа (1928) использовались абсолютные данные о производственных фондах и труде, а данные о валовой продукции были в индексах (точнее, в процентах относительно базового 1899 г.). В таких случаях использование индексной модели (3.16) неизбежно.

Задача МНК (3.5) в индексной форме принимает вид

$$\psi(w)=\sum_{t=0}^{T}[\upsilon_t - F(\kappa_t,\lambda_t;w)]^2 \to \min_{W}. \qquad (3.18)$$

Решение этой задачи обозначим w^I и назовём *индексной МНК-оценкой* параметров функции $F(K,L;w)$.

Рассмотрим особенности индексной формы моделирования производства. Подставив равенства $\upsilon_0=\kappa_0=\lambda_0=1$ в уравнение индексной модели (3.16), получаем равенство

$$F(1,1)=1. \qquad (3.19)$$

Это равенство следует понимать как одну из реализаций модельного уравнения (3.16) на статистических данных (3.17). Соответственно, оно не должно выполняться точно для конкретной производственной функции $F(K,L;w)$, аппроксимирующей индексные данные (3.17) в смысле задачи (3.18), и компонента невязки $[1-F(1,1;w)]^2$ в функционале (3.18)$\psi(w)$ в общем случае будет положительной. Равенство (3.19) представляет приближённо значение функции $F(1,1;w^I)$ и говорит о том, что значения этой функции в окрестности индексных данных (3.17) имеют порядок единицы, как и сами индексы.

Переход к индексам (3.17) и индексной модели (3.16) в общем случае улучшает структуру поверхностей уровня функционала (3.18) относительно функционала (3.5), так как абсолютные значения факторов K и L, как правило, имеют различные порядки и функционал (3.5) может иметь «овражную» структуру, при которой стандартные методы минимизации часто не находят решения, если не указать хорошее приближение.

Предположим, индексная задача (3.18) успешно решена. Для перехода от индексных переменных $(\upsilon,\kappa,\lambda)$ к абсолютным переменным (Y,K,L) требуются их базовые значения (Y_0,K_0,L_0). Предположим, эти данные известны. Формулы (3.15) позволяют восстановить абсолютные показатели (3.2):

$$Y_t=Y_0\upsilon_t, \quad K_t=K_0\kappa_t, \quad L_t=L_0\lambda_t.$$

Из равенств (3.15) и (3.16) получаем новую производственную функцию:

$$Y = Y_0 F\left(\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right) \triangleq F_0(K, L),$$

или

$$F_0(K, L) \triangleq Y_0 F(\kappa, \lambda). \qquad (3.20)$$

Очевидно, новая функция $F_0(K, L)$ будет относиться к тому же параметрическому классу, что и индексная функция $F(\kappa, \lambda)$, но отличаться от последней значениями некоторых коэффициентов. Продемонстрируем это на примерах.

Пример 5. Пусть известна (построена) функция Викселля в индексной форме

$$F(\kappa, \lambda) = a\kappa^{\alpha}\lambda^{\beta}.$$

Восстановленная по ней функция (3.20), очевидно, имеет вид

$$F_0(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \text{ где } A = \frac{aY_0}{K_0^{\alpha}L_0^{\beta}}.$$

Пример 6. Пусть построена функция ПЭЗ в индексной форме

$$F(\kappa, \lambda) = a\left(\nu\kappa^{-\rho} + (1-\nu)\lambda^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}.$$

Проделав элементарные преобразования, нетрудно привести соответствующую функцию (3.20) к виду

$$F_0(K, L) = A\left(\nu' K^{-\rho} + (1-\nu')L^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}, \text{ где } A = \frac{aY_0}{\left(\nu K_0^{\rho} + (1-\nu)L_0^{\rho}\right)^{\mu/\rho}}, \quad \nu' = \frac{\nu K_0^{\rho}}{\nu K_0^{\rho} + (1-\nu)L_0^{\rho}}.$$

Построив согласно (3.20) стандартную функцию $F_0(K, L; w^I)$ по индексной функции $F(\kappa, \lambda; w^I)$ в некотором параметрическом классе $F(K, L; w)$, можно провести коррекцию полученных параметров w^1, решив ещё раз задачу МНК (3.5) в том же классе, т.е. задачу минимизации

$$\varphi_1(w) = \sum_{t=1}^{T}[Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2.$$

Для этой более сложной задачи естественно использовать параметры w^1 в качестве начального приближения.

Отметим, что функция Кобба (Cobb, Douglas 1928), приведенная в первом разделе (пункт 1.1.5), была построена в индексной форме:

$$\upsilon = 1.01\kappa^{1/4}\lambda^{3/4}.$$

Приведём индексную[8] функцию Викселля, построенную по статистике для валового продукта России на промежутке 1960–1994 гг. (Колемаев, 2002, с. 17):

$$\upsilon = 0.931\kappa^{0.539}\lambda^{0.594}. \tag{3.21}$$

Соответствующие базовые абсолютные значения показателей $\left(Y_0, K_0, L_0\right)$ не известны, и на основе функции (3.21) можно сделать частичный анализ. Эта функция имеет степень однородности $\mu \simeq 1.133$ и представляет экономику с возрастающей отдачей. Однако следует отметить, что экономика России находилась в режиме роста, когда имеющиеся в стране производственные фонды были полностью загружены, примерно до 1990 г., после чего рост прекратился и начался период распада экономики. Таким образом, выбранный период для построения стационарной модели экономики (3.21) является неудачным, так как он представляет фактически различные производственные системы. Последние годы всё большая часть фондов не использовалась, но этот процесс не отражался стандартной статистикой, и, очевидно, единая функция (3.21) плохо представляет две разные экономики.

Упражнение 11. *Установить соотношение параметров функций* $F_0(K,L)$ *и* $F(\kappa,\lambda)$*, связанных равенством (3.20), для классов Солоу*

$$F(K,L) = A(\nu K^{\alpha} + (1-\nu)L^{\beta})^{\gamma}$$

и Джири

$$F(K,L) = A\left(K - K^*\right)^{\alpha}\left(L - L^*\right)^{\beta}.$$

Далее функции $F(K,L)$ или $F(K,L;w)$, один из факторов которых – «капитал» K, будем называть *капитальными.*

3.3. Построение «капитальных» ПФ по данным об инвестициях

Для рыночной экономики в общем случае характерно неполное использование основных производственных фондов в различных секторах, определяемых изменчивой рыночной конъюнктурой. Особенно велика доля неиспользуемых фондов в периоды кризисов и депрессии. Последнее относится к России послесоветского периода. При либерализации внешне-

[8] По предположению автора пособия.

экономических связей в силу специфических российских издержек (холодный климат, соответственно, низкая плотность населения и высокие издержки транспорта и капитального строительства) производство многих видов продукции, кроме топливно-энергетического комплекса, металлургии, нефтехимии, вооружений, стало нерентабельным относительно «мировых цен». Значительная часть производственных фондов была законсервирована или уничтожена. Другая часть физически или морально устарела. Балансовая стоимость фондов (основная наблюдаемая характеристика экономики) подвергалась многократным переоценкам. В условиях несовершенства современной индексологии и высокой инфляции соответствующие данные, если они имеются, плохо представляют реальное состояние экономики страны или её регионов. Это состояние определяется как существующими (балансовыми) основными фондами (ОФ), пригодными для производства продукции и услуг (благ), так и той их частью, которая реально участвует в производстве благ в системе «мировых цен». Эту часть будем назвать эффективными основными фондами. Оценка эффективных фондов важна для оценки реального состояния и потенциала экономики.

Относительно надежная производственная статистика исследуемых объектов последних лет обычно содержит данные о выпуске Y_t, инвестициях I_t и затратах труда L_t:

$$\left\{Y_t, I_t, L_t : \quad t = \overline{0,T}\right\}. \tag{3.22}$$

По этим причинам последнее десятилетие в экономический анализ вместо стандартных капитальных производственных функций $F(K,L;w)$ введены функции, где вместо капитала K используются инвестиции I:

$$Y = F(I, L; w). \tag{3.23}$$

Будем называть такие функции *инвестиционными* ПФ.

Оценка параметров инвестиционных функций (3.23) по данным (3.22) может формально проводиться с помощью МНК, так же как и оценка параметров капитальных функций (3.3) по данным (3.2). Однако инвестиции представляют собой величину типа «поток», а капитал – «запасы». При отсутствии инвестиций производство может некоторое время функционировать за счет накопленного капитала. Соответственно, от моделей производства (3.23) трудно ожидать высокого качества.

Построение более содержательных капитальных функций $F(K,L;w)$ по данным (3.22) также возможно в силу того, что накопленный капитал K_t зависит от инвестиций, сделанных к настоящему моменту, и от процесса его выбытия (амортизации). Для формирования показателей K_t следует описать их динамику.

В общем случае для освоения инвестиций требуется время, и капитализация инвестиций происходит за несколько периодов наблюдений. Амортизация капитала является сложным процессом. Примем упрощающее предположение о постоянстве *нормы амортизации*, обозначив ее δ (*depreciation rate*), и будем считать, что прирост капитала определяется инвестициями текущего и предыдущего периодов в некоторой пропорции. Введём коэффициент $\xi \in [0,1]$, обозначающий долю инвестиций, освоенных в текущем периоде. При этом уравнение динамики фондов будет иметь вид

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + \xi I_t + (1-\xi)I_{t-1},\ t = \overline{1,T}. \tag{3.24}$$

Для определения величин $\{K_1,...,K_T\}$ следует определить начальное значение запаса капитала K_0. Теперь динамика капитала определяется, кроме известных на промежутке наблюдения значений инвестиций $\{I_0,...,I_T\}$, также неизвестными: начальным капиталом K_0, нормой амортизации δ и коэффициентом ξ. Соответственно, значения K_t являются функциями новых параметров $K_t = K_t(K_0,\delta,\xi)$ и список оцениваемых параметров расширяется до вектора $z = (w_1,...,w_m,K_0,\delta,\xi)$. Это усложняет задачу, но делает ее более адекватной проблеме моделирования производства и позволяет оценить реально используемый капитал.

Таким образом, задача оценивания параметров капитальной ПФ $F(K,L;w)$ и реконструкции динамики капитала (3.24) по данным (3.22) заключается в минимизации функции

$$\psi(z) = \sum_{t=0}^{T}[Y_t - F(K_t,L_t;w)]^2 \tag{3.25}$$

при условии (3.24) и ограничениях на параметры z:

$$w \in W, \quad K_0 > 0, \quad \delta > 0, \quad 0 \le \xi \le 1. \tag{3.26}$$

Параметры K_0, δ и ξ, найденные таким способом, определяют динамику эффективного капитала.

Легко увидеть, что восстанавливаемые значения капитала (3.24) при $\xi = 1$ и $\delta \uparrow 1$ (односторонний предел слева) принимают значения инвестиций I_t, и капитальная функция $F(K, L; w)$ совпадает на статистических данных (3.22) с инвестиционной функцией $F(I, L; w)$. Это значит, что капитальная и инвестиционная функции идентичны, если инвестиции осваиваются быстро – за один период ($\xi = 1$), а введенные фонды работают один период ($\delta = 1$). Соответственно, задача построения инвестиционной ПФ $F(I, L; w)$ по данным (3.22) – это частный случай новой задачи (3.25), (3.26), (3.24) для капитальной ПФ $F(K, L; w)$ при $\delta = \xi = 1$.

Рекуррентное уравнение (3.24) можно записать в конечной форме, исключая для каждого значения $t > 1$ промежуточные значения $K_1, \ldots, K_{t-1}$:

$$K_t = K_0(1-\delta)^t + \xi \sum_{\tau=1}^{t} I_\tau (1-\delta)^{t-\tau} + (1-\xi) \sum_{\tau=0}^{t-1} I_\tau (1-\delta)^{t-\tau-1}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (3.27)$$

Эти формулы можно использовать вместо условий (3.24) при минимизации функции (3.25).

Описанный метод построения капитальной ПФ, очевидно, применим для функций с любым числом факторов, среди которых есть капитал.

3.4. Метод продолжения по параметру

Задача минимизации (3.25) при условиях (3.26) и (3.27) существенно нелинейная относительно оцениваемых параметров. Правые части выражений (3.27) содержат высокие степени выражений $(1-\delta)$. Это влечет плохую обусловленность минимизируемой функции (3.25) и возможную многоэкстремальность задачи минимизации. Успех поиска минимизирующего набора $\hat{z} = \left(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_m, \hat{K}_0, \hat{\delta}, \hat{\xi}\right)$ в таком случае зависит от хорошего начального приближения параметров $z^0 = \left(w_1^0, \ldots, w_m^0, K_0^0, \delta^0, \xi^0\right)$. Такое допустимое начальное приближение называется *экспертным.*

Для решения поставленной задачи мы предлагаем специальный вариант известного итеративного *метода продолжения* (*Continuation Method*) для решения систем нелинейных уравнений (Ортега и Рейнболдт, 1975). Аналогично стандартной схеме метода продолжения для нашей экстремальной задачи вводится параметр λ, меняющийся от нуля до единицы и определяющий семейство вспомогательных задач так, что при $\lambda = 0$ задача имеет простой вид с известным решением, а при $\lambda = 1$ принимает исходный вид. При переходе к новому (возрастающему) значению λ с достаточно малым шагом решение, полученное на предыдущем шаге, принимается за начальное приближение решения новой задачи минимизации того же класса, но с новыми данными, мало отличающимися от предыдущих.

Опишем *алгоритм метода продолжения по параметру* λ, введя счетчик итераций k. Для краткости задачу минимизации (3.25) при условиях (3.26) и (3.27) с различными на каждой итерации данными будем обозначать задачей (3.25). Решение задачи на итерации k обозначим $z^k = \left(w_1^k, ..., w_m^k, K_0^k, \delta^k, \xi^k\right)$ и соответствующие выпуски обозначим $Y_t^k = F(K_t, L_t; w^k)$, $t = \overline{0,T}$.

1. Полагаем $k = 0$, $\lambda_0 = 0$, выбираем экспертное приближение вектора параметров $z^0 = \left(w_1^0, ..., w_m^0, K_0^0, \delta^0, \xi^0\right)$ и вычисляем условные выпуски $Y_t^0 = F(K_t, L_t; w^0)$, $t = \overline{0,T}$. Задача (3.25) с такими выпусками имеет очевидное решение z^0.

2. Полагаем $k := k+1$, присваиваем параметру λ_k некоторое умеренно большее значение и решаем задачу (3.25) с выпусками $Y_t^k = (1-\lambda_k)Y_t^{k-1} + \lambda_k Y_t$, $t = \overline{0,T}$.

3. Вычисления пункта 2 повторяются до некоторой итерации $k = N$, на которой $\lambda_N = 1$. При этом $Y_t^N = Y_t$, т.е. условные выпуски становятся реальными статистическими выпусками, и соответствующая оценка параметров принимается за решение основной задачи минимизации (3.25): $\hat{z} = z^N$.

Приращения параметра λ_k выбираются так, чтобы решения задач (3.25) достигались с требуемой точностью (например, по малости приращений аргументов в процедуре минимизации), а параметр продолжения $\lambda_N = 1$ – за конечное число итераций.

Разумеется, данный алгоритм нуждается в обосновании сходимости, так как последовательность параметров продолжения λ_k, при которых каждая новая задача минимизации невязки решается с требуемой точностью, может расти очень медленно. Это специальная сложная проблема вычислительной математики. Метод продолжения по параметру обоснован для широкого класса вычислительных задач и по литературным данным обеспечивает во многих случаях нахождение глобального минимума многоэкстремальных задач. Опыт его применения в рассматриваемой проблеме, излагаемый ниже, это подтверждает.

3.5. Примеры построения производственных функций

Метод построения капитальных ПФ продемонстрируем вначале на примере простейшего, но наиболее часто используемого класса двухфакторных *капитальных* степенных функций Викселля (Кобба–Дугласа)

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}. \tag{3.28}$$

Все параметры этой функции $w=(A,\alpha,\beta)$ – положительные. Эта функция положительно однородна степени $\alpha+\beta$ и имеет постоянную эластичность замещения факторов, равную единице. Выпуск (3.28) с учетом формулы (3.27) имеет вид

$$Y_t = A[K_0(1-\delta)^t + \xi\sum_{\tau=1}^{t} I_\tau(1-\delta)^{t-\tau} + (1-\xi)\sum_{\tau=0}^{t-1} I_\tau(1-\delta)^{t-\tau-1}]^{\alpha} L_t^{\beta}, \quad t=\overline{1,T}. \tag{3.29}$$

Такое представление упрощает задачу оценивания расширенного набора параметров $z=\left(w,K_0^0,\delta^0,\xi^0\right)$ по информации, которая принимает форму минимизации функции (3.25) при условиях (3.26).

Введем также *иинвестиционную* функцию КД

$$Y = AI^{\alpha}L^{\beta}. \tag{3.30}$$

Ограничения на параметры w при замене фактора K на I сохраняются. Выражение (3.29) показывает, что эта функция совпадает на статистических данных (3.22) с капитальной функцией (3.28) при $\delta=\xi=1$, т.е. когда инвестиции осваиваются мгновенно ($\xi=1$), а введенные фонды работают один период ($\delta=1$).

Рассмотрим два тестовых примера. В табл. П1, П2 (см. приложение) представлены условные статистические данные о затратах труда L_t и инвестициях I_t, смоделированные по уравнению (3.27) с начальными параметрами (K_0^0,δ^0,ξ^0) значения капитала K_t^0, смоделированные по вспомогательной ПФ $F(K,L;w)$ исходные данные выпуска $Y_t=F(K_t^0,L_t;w)$ и построенные после решения задачи минимизации невязки (3.25) с одновременной оценкой эффективного капитала $\hat{K}_t$.

В первом примере выпуски Y_t рассчитывались с помощью однородной ПФ с постоянной эластичностью замещения (ПЭЗ)

$$Y = A(\nu K^{-\rho} + (1-\nu)L^{-\rho})^{-\mu/\rho}, \tag{3.31}$$

где параметры $A > 0$, $0 \le \nu \le 1$, $-1 \le \rho \ne 0$, $\mu -$ степень однородности. Эта функция обобщает функцию Викселля (3.28). Последняя, как было выяснено в первом разделе, является предельной для функции ПЭЗ при $\rho \to 0$, причём параметры предельной функции Викселля равны $\alpha = \mu\nu$, $\beta = \mu(1-\nu)$.

Во втором примере применялась функция Солоу

$$Y = A(\nu K^{\alpha} + (1-\nu)L^{\beta})^{\gamma}. \tag{3.32}$$

Эта функция представляет собой неоднородное обобщение ПЭЗ (3.31). Здесь ограничения на параметры A, ν аналогичны, и степени α, β, γ ненулевые.

Использование в тестовых примерах более общих классов функций, чем класс поиска, желательно в силу того, что модель (функция Викселля) всегда проще исследуемого объекта.

Для первого примера выбраны следующие параметры функции (3.31): $A = 1.3$, $\nu = 0.7$, $\mu = 1$, $\rho = 0.002$. Начальный капитал $K_0^0 = 1250$, норма амортизации $\delta^0 = 0{,}1$, коэффициент освоения инвестиций $\xi^0 = 0{,}6$. В обоих примерах $I_0 = 0$.

Во втором примере параметры функции (3.32): $A = 0.9$, $\nu = 0.38$, $\alpha = 0.17$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 3.5$. Динамические параметры: $K_0^0 = 2355$, $\delta^0 = 0.05$, $\xi^0 = 0.8$.

В табл. П3, П4 (см. приложение) представлены результаты оценивания функций (3.31) и (3.32). Пример 3 построения соответствующих функций Викселля по реальным данным описан ниже. В скобках приведены t-статистики. По результатам оценивания капитальной функции (3.28) для тестовых примеров 1 и 2 видно, что полученные оценки начального капитала $\hat{K}_0$, нормы амортизации $\hat{\delta}$ и параметра $\hat{\xi}$ довольно точные. Это позволяет оценить динамику эффективного капитала $\hat{K}_t$ (табл. П1, П2).

В третьем примере использовались официальные данные 2000–2008 гг. из «Российского статистического ежегодника» за 2001–2009 гг. (РСЕ, 2009). В этом сборнике приведены стоимостные показатели валового внутреннего продукта (ВВП), балансовых основных фондов на начало года и годовых инвестиций в основной капитал в текущих ценах, а также среднегодовая численность занятых в экономике. Они представлены в табл. П5. Эта информация достаточна для решения задачи построения ПФ с оценкой эффективного капитала, но стоимостные показатели необходимо привести к сопоставимым ценам, например, базового 2000 г. Для этого использовались также доступные данные о годовых индексах (в сопоставимых ценах) перечисленных стоимостных показателей (табл. П6). По этим индексам были сформированы соответствующие индексы относительно базового 2000 г. Индексы основных фондов брались в среднем за год (среднее двух значений соседних лет на начало года). На основе этих индексов и начальных (на 2000 г.) значений стоимостных показателей сформированы абсолютные значения стоимостных показателей в ценах 2000 г., представленные, кроме основных фондов, в табл. П6. Ввиду высокой степени незагруженности фондов, находящихся на балансе многих предприятий, данные относительно балансовых фондов не должны использоваться для построения капитальных функций. Результаты построения капитальных ПФ, приведенные в табл. П7 (критерии качества и параметры) и табл. П8 (эффективные фонды), получены описанным выше методом без использования балансовых фондов. Соответствующие скорректированные данные (балансовых фондов) приводятся в табл. П8 для сравнения с получаемыми оценками эффективного капитала.

По данным о ВВП и инвестициях (табл. П6), значению инвестиций в предшествующем году $I_{1999} = 0.993$ и численности занятых (табл. П5) построены капитальная (3.28) и инвестиционная (3.30) производственные функции класса Викселля, а также оценены уровень амортизации фондов, скорость освоения инвестиций и эффективно используемый капитал на периоде наблюдения. Результаты оценивания параметров представлены в третьих строках табл. П3, П4 соответственно. Легко заметить, что статистические критерии качества регрессионных моделей гораздо лучше для капитальной ПФ, чем для инвестиционной.

Наряду с функцией Викселля для данных о ВВП, инвестициях и труде (табл. П5, П6), были построены капитальные функции ПЭЗ (3.31), Солоу (3.32) и функция Джири

$$Y = A\left(K - K^*\right)^{\alpha}\left(L - L^*\right)^{\beta}. \quad (3.33)$$

Данная функция является неоднородным обобщением функции Викселля с дополнительными параметрами – минимальными уровнями использования капитала K^* и труда L^*. Все параметры этой функции положительные.

Задачи нелинейного МНК с ограничениями на вектор параметров w для указанных параметрических классов требуют хороших начальных приближений w^0, поэтому они решались последовательно с передачей полученных параметров в качестве начальных для более сложной функции.

Так как функции ПЭЗ и Джири обобщают функции Викселля, то разумным начальным приблежением здесь будет нелинейная оценка параметров функции Викселля, получаемая минимизацией неквадратичной (относительно искомых параметров) невязки (3.25). Аналогичные рассуждения справедливы и для функции Солоу. Здесь в качестве начального приближения следует взять оценки параметров функции ПЭЗ. Получены следующие результаты. Оценки параметров функций:

ПЭЗ (3.31): $\hat{A}$ = 2.35 (0.036), $\hat{\nu}$ = 0.91 (0.188), $\hat{\mu}$ = 1.21 (0.63), $\hat{\rho}$ = 0.43 (0.037);

Солоу (3.32): $\hat{A}$ = 0.1146 (0.026), $\hat{\nu}$ = 0.989 (2.75), $\hat{\alpha}$ = – 2.52 (– 0.24), $\hat{\beta}$ = 0.118 (0.034), $\hat{\gamma}$ = – 1.007 (– 0.074);

Джири (3.33): $\hat{A}$ = 8.49 (0.002), $\hat{\alpha}$ = 0.261 (0.56), $\hat{\beta}$ = 0.0385 (0.0001), $\hat{K}^*$ =6.371 (0.077), $\hat{L}^*$ = 0.00063 (1.3×10^{-6}).

Показатели качества оценивания капитальных ПФ для реальных данных и параметры, определяющие динамику эффективного капитала, приведены в табл. П7. Эти показатели существенно лучше у функций Солоу и Джири, причём из них трудно выбрать лучшую.

Для однородных моделей производства среднегодовая норма амортизации равна 5.8 % (Викселля) и 7.8 % (ПЭЗ), а в неоднородных моделях Солоу и Джири норма амортизации практически одинакова и равна 15 %.

Скорость освоения инвестиций представляется параметром ξ. Полученные значения ξ для всех классов ПФ близки или равны 1. Это означает, что инвестиции осваиваются в течение того же периода и соответствует тому, что в новой экономике России практически не ведется промышленное капитальное строительство.

Динамика скорректированного номинального K_t и эффективного $\hat{K}_t$ капитала для рассмотренных классов ПФ представлена в табл. П8. При переходе от функции Кобба–Дугласа (Викселля) к более широким классам функций значения эффективного капитала уменьшаются, но динамика стабилизируется, несмотря на рост коэффициентов амортизации. Оценки эффективного капитала по функциям Солоу и Джири близки. Они показывают, что из наличных производственных фондов России в последние годы реально работает лишь около половины.

Литература

1. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. (1979): Математические модели в экономике. – М.: Наука.
2. Интрилигатор М. (1975): Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс (Второе рус. издание: М.: Айрис-Пресс, 2002).
3. Клейнер Г.Б. (1986): Производственные функции: Теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика.
4. Колемаев В.А. (2002): Математическая экономика. – М.: Юнити-Дана.
5. Черемных Ю.Н. (2008): Микроэкономика. Продвинутый уровень. – М.: Инфра-М.

Дополнительная литература

6. Багриновский К.А., Матюшок В.М. (1999): Экономико-математические методы и модели (микроэкономика). – М.: Изд-во РУДН.
7. Баркалов Н.Б. (1981): Производственные функции в моделях экономического роста. – М.: Изд-во Московского ун-та.
8. Бессонов В.А. (2002): Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике // Бессонов В.А., Цухло С.В. Анализ динамики российской переходной экономики. – М.: Ин-т экономики переходного периода. – С. 5–89.
9. Васильев Ф.П. (2002): Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс.
10. Воскобойников И.Б. (2004): О корректировке динамики основных фондов в российской экономике // Экономический журнал ВШЭ. – Т. 8, № 1.
11. Вэриан Х. (1997): Микроэкономика, Промежуточный уровень. Современный подход. – М.: ЮНИТИ.
12. Горбунов В.К. (1999а): Введение в теорию экстремума. – Ульяновск: УлГУ.
13. Горбунов В.К. (1999б): О представлении линейно однородных функций полезности // Ученые записки Ульяновского гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». Вып. 1(6). – С. 70–75.
14. Горбунов В.К. (2004): Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. – М.: Экономика.

15. Горбунов В.К., Львов А.Г. (2009б): Построение трёхфакторной производственной функции с переменной эластичностью замещения // Тр. Средневолжского матем. об-ва. – Саранск: СВМО. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 91–100.

16. Горбунов В.К., Львов А.Г. (2012): Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы. – № 2.

17. Громенко В.В. (2004): Математическая экономика. – М.: МЭСИ.

18. Демиденко Е.З. (1989): Оптимизация и регрессия. – М.: Наука.

19. Клейнер Г.Б. (1994): Взаимосвязи между средней и предельной отдачей факторов производственной функции // Экономика и математические методы. – Т. 35. – Вып. 1.

20. Клейнер Г.Б., Пионтковский Д.И. (1999): О характеризации производственных функций Солоу // Экономика и математические методы. – Т. 35, № 2.

21. Лопатников Л.И. (2003): Экономико-математический словарь: словарь современной экономической науки. – М.: Дело.

22. Лукашин Ю., Рахлина Л. (2004): Производственные функции в анализе мировой экономики // Мировая экономика и международные отношения. – № 1.

23. Львов А.Г. (2010): Построение производственных функций с переменной эластичностью замещения // Журн. экономической теории. – № 1. – С. 166–169.

24. Львов А.Г. (2012): Развитие методов построения производственных функций: дис. … канд. экон. наук. – Уфа: УГТАУ.

25. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сулакшин С.С. (2007): Применение вычислимых моделей в государственном управлении. – М.: Научный эксперт.

26. Ортега Дж., Рейнболдт В. (1975): Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир.

27. Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л. (1984): Производственные функции в экономическом анализе. – Вильнюс: Минтис.

28. Терехов Л.Л. (1974): Производственные функции. – М.: Статистика.

29. Фихтенгольц Г.М. (1947): Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. – М.; Л.: ОГИЗ-Гостехиздат.

30. Ханин Г.И., Фомин Д.А. (2007): Потребление и накопление основного капитала в России: альтернативная оценка // Проблемы прогнозирования. – № 1.

31. Afriat S. (1972): Efficiency estimation of production functions // International Economic Review. – Vol. 13. – P. 568–598.

32. Arrow K.J., Chenery H.B., Minhas B.S. and Solow R.M. (1961): Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency // The Review of Economics and Statistics. – Vol. 43.

33. Geary R.C. (1950): A note on “A constant-utility index of the cost of living” // The Review of Economic Studies. – Vol. 18, no. 1. – P. 65–66.

34. Cobb G.W., Douglas P.H. (1928): A theory of production // The American Economic Review. – December. – P. 139–65.

35. Hackman S.T. (2008): Production Economics: Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives. – Berlin: Springer.

36. Hicks J.R., Allen R.G.D. (1934a): A Reconsideration of the Theory of Value. Part I // Economica, New Series. – Vol. 1, no. 1. – P. 52–76.

37. Hicks J.R., Allen R.G.D. (1934b): Reconsideration of the Theory of Value. Part II. A Mathematical Theory of Individual Demand Functions // Economica, New Series. – Vol. 1, no. 2. – P. 196–219.

38. Mas-Colell A., Whinston M. and Green J. (1995): Microeconomic Theory. – New York: Oxford University Press.

39. Mishra S.K. (2010): A brief history of production functions // The IUP Journal of Managerial Economics, IUP Publications. – Vol. 0(4). http://www.webng.com/economics/A_Brief_History_of_Production_Functions.pdf

40. Revankar N.S. (1971): A class of variable elasticity of substitution production functions // Econometrica. – Vol. 39, no. 1.

41. Sato R., Hoffman R.F. (1968): Production Functions with Variable Elasticity of Factor Substitution: Some Analysis and Testing // The Review of Economics and Statistics. – Vol. 50, no. 4.

42. Solow R.M. (1956): A contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. – Vol. 70 (1). – P. 65–94.

43. Stern D.I. (2011): Elasticities of substitution and complementarity // Journal of Productivity Analysis. – Vol. 36, no. 1. – P. 79–89.

44. Uzawa H. (1962): Production functions with constant elasticities of substitution // The Review of Economic Studies. – Vol. 29, no. 4. – P. 291–299.

45. Varian H.R. (1984): The nonparametric approach to production analysis // Econometrica. – Vol. 52.

Приложение

Таблицы для п. 3.5

Таблица П1

Исходные данные и оценка эффективного капитала для примера 1

t	Исходные данные		Смоделированные данные		Оценка капитала $\hat{K}_t$
	L_t	I_t	K_t^0	Y_t	
1	100	230	1263.00	766.19	1262.84
2	110	270	1390.70	843.41	1390.51
3	120	450	1629.63	967.25	1629.42
4	130	350	1856.67	1085.41	1856.43
5	140	500	2111.00	1214.09	2110.73
6	150	600	2459.90	1379.43	2459.59
7	160	700	2873.91	1568.01	2873.56
8	170	900	3406.52	1798.36	3406.11
9	155	600	3785.87	1882.90	3785.41
10	100	230	3917.28	1828.76	3916.76

Таблица П2

Исходные данные и оценка эффективного капитала для примера 2

t	Исходные данные		Смоделированные данные		Оценка капитала $\hat{K}_t$
	L_t	I_t	K_t^0	Y_t	
1	75300	220	2413.25	939.78	2506.40
2	73840	200	2496.59	933.19	2588.32
3	72071	135	2519.76	921.58	2609.66
4	70100	110	2508.77	906.89	2597.49
5	68480	85	2473.33	893.58	2560.92
6	66409	65	2418.67	876.01	2505.18
7	65950	60	2358.73	870.01	2444.36
8	64693	55	2296.80	857.96	2381.48
9	63812	85	2260.96	849.81	2345.13
10	63963	155	2288.91	852.18	2373.06

Таблица П3

Оценки параметров инвестиционной ПФ (3.30)

Пример	**Оценки параметров** $\hat{w}$			**Критерии качества**		
	$\hat{A}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\varphi(\hat{w})$	R^2	DW
1	0.8504 (0.224)	0.0345 (0.053)	1.4514 (0.879)	551154	0.654	0.409
2	0.8862^{*} (3.367)	0 (0)	0.6208^{**} (22.415)	65.5315	0.994	0.616
3	278.618 (0.251)	0.4716^{**} (6.312)	1.3533 (0.933)	0.171	0.992	1.45

Примечание: «*» помечены оценки параметров, отличающихся от нуля на уровне значимости 5 %, «**» – на уровне 1 %.

Таблица П4

Результаты оценивания капитальной ПФ (3.28)

При-мер	**Оценки параметров** $\hat{z}$						**Критерии качества**		
	$\hat{A}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	K_t^0	$\hat{\delta}$	$\hat{\xi}$	$\psi(\hat{z})$	R^2	DW
1	1.3019^{**} (2181)	0.6987^{**} (48519)	0.3013^{**} (5358)	1249.87^{**} (5469)	0.1^{**} (2899)	0.599^{**} (12284)	5.1×10^{-5}	1	2.49
2	0.6806^{**} (5.918)	0.1222^{**} (6.78)	0.5586^{**} (375.3)	2446.42^{**} (6.741)	0.0486^{**} (6.67)	0.81^{**} (49.7)	6.7×10^{-4}	1	2.75
3	3.0024 (0.211)	0.6253 (1.536)	0.1504 (0.105)	7.058 (0.298)	0.058 (0.139)	1 (0.56)	0.069	0.997	1.68

Примечание: «**» помечены оценки параметров, отличающихся от нуля на уровне значимости 1 %.

Таблица П5

Россия: ВВП, фонды, инвестиции в текущих ценах (трлн руб.) и численность занятых (млн чел.)

Год t	Y_t	K_t	I_t	L_t
2000	7.306	16.605	1.165	64.5
2001	8.944	20.241	1.505	65.0
2002	10.831	24.431	1.762	65.6
2003	13.243	30.329	2.186	66.0
2004	17.048	32.541	2.865	66.4
2005	21.625	38.366	3.611	66.8
2006	26.903	43.823	4.730	67.2
2007	33.111	54.252	6.716	68.0
2008	41.668	64.553	8.765	68.5

Источник: РСЕ, 2009, табл. 5.5, 11.1, 11.23, 23.2.

Таблица П6

Россия: годовые индексы ВВП, фондов и инвестиций; значения ВВП и инвестиций в ценах 2000 г. (трлн руб.)

Год *t*	Y_t / Y_{t-1}	K_t / K_{t-1}	I_t / I_{t-1}	**ВВП** Y_t	**Инвестиции** I_t
2000	1.100	1.001	1.174	7.306	1.165
2001	1.051	1.009	1.100	7.678	1.282
2002	1.047	1.010	1.028	8.039	1.318
2003	1.073	1.013	1.125	8.626	1.482
2004	1.072	1.016	1.137	9.247	1.685
2005	1.064	1.019	1.109	9.839	1.869
2006	1.077	1.024	1.167	10.596	2.181
2007	1.081	1.031	1.227	11.455	2.676
2008	1.056	1.036	1.098	12.096	2.939

Источник: РСЕ, 2009, табл. 11.1, 11.23, 23.2.

Таблица П7

Критерии качества оценивания ПФ и параметры динамики эффективного капитала

Функция	**Критерии качества**			**Параметры динамики**		
	$\psi(\hat{z})$	R^2	DW	K_t^0	$\hat{\delta}$	$\hat{\xi}$
Викселля	0.069	0.997	1.688	7.058 (0.298)	0.058 (0.139)	1 (0.56)
ПЭЗ	0.0645	0.997	1.775	6.815 (0.22)	0.078 (0.104)	0.999 (0.193)
Солоу	0.0092	0.999	2.458	6.453 (0.222)	0.15 (0.203)	1 (0.594)
Джири	0.0146	0.999	2.286	7.0791 (0.086)	0.151 (0.0862)	0.9556 (0.44)

Таблица П8

Наличные и эффективные фонды в ценах 2000 г. (трлн руб.)

Год t	**Наличные фонды** K_t	**Эффективные фонды** $\hat{K}_t$			
		Викселля	**ПЭЗ**	**Солоу**	**Джири**
2000	16.605	7.846	7.476	6.684	7.196
2001	18.423	8.687	8.186	6.980	7.399
2002	18.608	9.479	8.840	7.232	7.577
2003	18.822	10.425	9.642	7.646	7.918
2004	19.094	11.516	10.580	8.198	8.408
2005	19.429	12.743	11.645	8.867	9.024
2006	19.846	14.198	12.925	9.735	9.841
2007	20.392	16.068	14.604	10.974	11.026
2008	21.075	18.028	16.351	12.226	12.245