Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный университет
Институт экономики и бизнеса

Е. М. БЕЛЫЙ, А. Е. ЭТКИН, Г. П. ЭТКИНА

Математика для экономистов

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области финансов, учета и мировой экономики в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальностям "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет, анализ и аудит", "Мировая экономика", "Налоги и налогообложение"

Ульяновск 2006

ББК
Б-00

Рецензенты:

Зав. кафедрой математического анализа Ульяновского государственного педагогического университета, к.ф.-м.н., доцент Фолиадова Е.В.;

Зав. кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, д.ф.-м.н., профессор Мищенко С.П.;

Доцент кафедры прикладной математики Волжского университета им. В.Н. Татищева, к.ф.-м.н. Каверина И.А.;

Профессор кафедры математического моделирования экономических процессов Финансовой акдемии при Правительстве РФ, д.ф.-м.н. Красс М.С.

Белый Е.М., Эткин А.Е., Эткина Г.П.

Б-00 Математика для экономистов: Учебное пособие. Ульян. гос. ун-т. – Ульяновск: УлГУ, 2006. – 208с.

ISBN

Учебное пособие содержит основные разделы курса математики для студентов экономических специальностей, предусмотренные Государственным образовательным стандартом: линейная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения. Кроме изложения теоретических вопросов, пособие содержит примеры решения типовых задач, а также материал для самостоятельной работы студентов: контрольные вопросы, тесты и задачи.

Пособие предназначено для студентов специальностей "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет, анализ и аудит", "Мировая экономика", "Налоги и налогообложение", но может быть полезным и студентам других экономических специальностей.

ББК 00.0

Печатается в авторской редакции

Художник обложки Н.В. Пенькова

Подписано в печать 20.06.06. Формат 60x84/16.
Гарнитура Computer Modern. Усл. печ. л.12,1. Уч.-изд. л.16,6.
Тираж 500 экз. Заказ № 100/

Отпечатано с оригинал-макета в типографии
Ульновского государственного университета
432970, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

Переплет изготовлен в облтипографии "Печатный двор"
432061, г. Ульяновск, ул. Пушкарева, 27

Оглавление

Глава 1

Общематематические понятия

1.1 Логическая символика

Под *высказыванием* понимается предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно.

В дальнейшем мы будем использовать символы математической логики $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ для обозначения соответственно отрицания "не"и логических связок "и", "или", "влечет", "равносильно". Вместо $\neg A$ используется также обозначение $\overline{A}$, а вместо знака $\wedge$ используется также знак &.

Употребление отрицания в выражении $\neg A$ и союза "и"в выражении $A \wedge B$ не требуют пояснений. Следует, однако, обратить внимание на то, что в выражении $A \vee B$ союз "или"имеет неразделительный смысл, т. е.. высказывание $A \vee B$ считается истинным в том случае, когда хотя бы одно из высказываний A или B истинно.

Запись $A \Longrightarrow B$ может быть прочитана одним из следующих способов: "из A следует B", "если A, то B", "A влечет B", "B есть *необходимое условие* для A", "A есть *достаточное условие* для B"и означает, что из истинности высказывания A следует истинность высказывания B. Отметим, что если A ложно, то независимо от B высказывание $A \Longrightarrow B$ считается истинным. Это отличает принятое в математике определение от житейского.

Доказательство утверждения $A \Longrightarrow B$ состоит в построении цепочки следствий $A \Longrightarrow C_1 \Longrightarrow ... \Longrightarrow C_n \Longrightarrow B$, каждый элемент которой является ранее доказанным утверждением. В доказательствах далее будет использоваться классическое правило вывода: если A истинно и $A \Longrightarrow B$, то B тоже истинно. Будет применяться также метод *доказательства от противного*. Схема применения этого метода следующая. Пусть требуется доказать высказывание A. Предполагают, что A ложно, и исходя из этого получают два противоречащих друг другу высказывания: B и $\overline{B}$. Отсюда делается вывод об истинности A.

Запись $A \Longleftrightarrow B$ можно прочитать любым из следующих способов: "A равносильно B", "A тогда и только тогда, когда B", "A необходимо и достаточно для B". Она означает, что $A \Longrightarrow B$ и $B \Longrightarrow A$. Поэтому для доказательства утверждения $A \Longleftrightarrow B$ нужно доказать, что $A \Longrightarrow B$ и $B \Longrightarrow A$.

Основные термины

Высказывание. Логические связки.

Необходимое условие, достаточное условие.

Доказательство от противного.

Контрольные вопросы

1. Любое ли предложение является высказыванием?
2. Является ли истинным высказывание $A \vee B$, если оба высказывания A и B истинны?
3. Пусть A – ложное высказывание. Что можно сказать о высказывании $A \Longrightarrow B$?
4. Если высказывание $A \Longrightarrow B$ истинно, то следует ли отсюда истинность (ложность) высказывания $B \Longrightarrow A$.
5. Могут ли быть истинными одновременно оба высказывания $A \Longrightarrow B$ и $A \Longrightarrow \overline{B}$?

1.2 Понятие о множествах и функциях

1.2.1 Множества и операции над ними

Понятие *множества* является первичным и не определяется через более простые понятия. Синонимами этого понятия являются: класс, набор, совокупность, собрание, коллекция и т. п. Множество состоит из *элементов*. Множества обычно обозначают прописными латинскими буквами, а элементы – малыми. Запись $a \in A$ ($a \notin A$) означает, что элемент a принадлежит (не принадлежит) множеству A. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$.

Множество записывается с помощью фигурных скобок. Множество может быть задано с помощью перечисления его элементов, например, множество всех цифр: $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Другой способ задания множества – с помощью характеристического свойства $P(x)$, где $P(x)$ – некоторый предикат: $A = \{x|\ P(x)\}$ (читается: A есть множество элементов x таких, что $P(x)$). Свойство $P(x)$ выделяет элементы данного множества из другого более широкого множества. В множество A при этом входят те элементы x, для которых высказывание $P(x)$ истинно. Например, множество четных целых чисел может быть записано как $\{x|x\vdots 2\}$. (Запись $x\vdots 2$ означает, что x делится на 2 без остатка). Здесь $P(x) = (x\vdots 2)$. Одно и то же множество может быть записано различным образом. Например:
$\{1, 4, 9, 16, ...\} = \{x|\ x = n^2,\ n \in \mathbf{N}\} = \{n^2|\ n \in \mathbf{N}\}$ – множество квадратов натуральных чисел, $\{x|\ x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

В записи высказываний о множествах часто используются логические операторы $\forall$ ("для любого"или "для всех") и $\exists$ ("существует"или "найдется"), называемые *кванторами общности* и *существования* соответственно.

Множество A называется *подмножеством* (или частью) множества B, если любой элемент множества A является элементом множества B. Записывается это так: $A \subset B$. В этом случае говорят также, что B содержит A, и записывают: $B \supset A$. Это определение можно записать с использованием логической символики следующим образом:

$$A \subset B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in A)\ x \in B.$$

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Заметим, что

$$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Объединением множеств называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств. Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$. Таким образом,

$$A \cup B := \{x|\ (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

(Символ := означает равенство по определению. При этом двоеточие ставится со стороны определяемого понятия.)

Пересечением множеств называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств. Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$.

$$A \cap B := \{x|\ (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т. е.

$$A \setminus B := \{x \in A|\ x \notin B\}.$$

Пример 1.2.1 Даны множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
Найдем их объединение, пересечение и разность.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ A \cap B = \{3, 4\},\ A \setminus B = \{1, 2\}.$$

Обозначим U так называемое *универсальное множество*, т. е. такое, что все рассматриваемые нами множества являются его подмножествами. Тогда для любого множества A разность $U \setminus A$ обозначается $\overline{A}$ и называется *дополнением* множества A.

Определенные выше операции над множествами обладают следующими свойствами:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ – свойства коммутативности;

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – свойства ассоциативности;

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – свойства дистрибутивности;

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – законы де Моргана.

Эти свойства можно доказать, исходя из данных выше определений операций.

Заметим, что каждое свойство содержит два *двойственных* равенства, одно из которых получается из другого заменой знака $\cup$ на $\cap$ и наоборот.

Из школьного курса математики известны следующие числовые множества: $\mathbf{N}$ – натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ –целых, $\mathbf{Q}$ –рациональных, $\mathbf{I}$ – иррациональных, $\mathbf{R}$ – действительных. Как известно, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ и $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Геометрически действительные числа изображаются точками *числовой прямой* (или *числовой оси*), т. е. прямой с выбранным началом отсчета, положительным направлением и единицей масштаба. Между множеством $\mathbf{R}$ и числовой прямой существует взаимно-однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой и наоборот, каждой точке на числовой прямой соответствует единственное действительное число.

В дальнейшем мы будем иметь дело со следующими подмножествами множества $\mathbf{R}$:
$\{x \in \mathbf{R}|\ a \le x \le b\} := [a, b]$ называется *отрезком* или *сегментом*;
$\{x \in \mathbf{R}|\ a < x < b\} := (a, b)$ называется *интервалом*;
множества $\{x \in \mathbf{R}|\ a \le x < b\} := [a, b)$ и $\{x \in \mathbf{R}|\ a < x \le b\} := (a, b]$ называются *полуинтервалами*.

Наряду с ними будем рассматривать бесконечные интервалы и полуинтервалы:
$\{x \in \mathbf{R}|\ x < a\} := (-\infty, a)$, $\{x \in \mathbf{R}|\ x \leq a\} := (-\infty, a]$,
$\{x \in \mathbf{R}|\ x > a\} := (a, +\infty)$, $\{x \in \mathbf{R}|\ x \geq a\} := [a, +\infty)$,
а все множество $\mathbf{R}$ записывается как $(-\infty, +\infty)$. Все указанные множества называются *промежутками*. Промежуток $(0, +\infty)$ будем также обозначать $\mathbf{R}^+$.

1.2.2 Функции

Понятие функции уже не является первичным и может быть строго определено через понятие множества. Однако, чтобы не усложнять изложение, мы не будем давать такого определения. Следующее ниже описание понятия функции включает не определяемый нами термин "правило"и поэтому не может претендовать на роль определения.

Пусть заданы два множества X и Y и правило, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ единственный элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что задана *функция* f, *отображающая* множество X во множество Y.

Множество X называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$. Символ x общего элемента множества X называется *аргументом функции* или *независимой переменной*; соответствующий конкретному значению $x_0 \in X$ аргумента x элемент $y_0 \in Y$ называют *значением функции на элементе* x_0 и обозначают $f(x_0)$. Величину $y = f(x)$ часто называют *зависимой переменой*. Множество

$$f(X) := \{f(x)|\ x \in X\} \subset Y$$

всех значений функции, которые она принимает на элементах множества X, называется *множеством значений* или *областью значений функции* и обозначается $E(f)$.

Правило сопоставления значениям аргумента значений функции может быть задано формулой (аналитический способ), таблицей, графиком или словесным описанием. В случае аналитического задания кроме формулы должна быть указана область определения функции. Если она не указана, то предполагается, так называемая, естественная область определения, т. е. множество тех значений аргумента, при которых формула имеет смысл. Для функции приняты следующие обозначения: $f : X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$. Когда из контекста ясно, каковы множества X и Y, используют также обозначения $x \mapsto f(x)$ или $y = f(x)$. Вместо термина "функция"используется также термин "отображение".

Когда функцию $f : X \to Y$ называют отображением, значение $y = f(x) \in Y$, которое она принимает на элементе x, обычно называют *образом* элемента x. При этом элемент x называется *прообразом* элемента y. Заметим, что элемент $y \in Y$ может не иметь прообраза (если $y \notin E(f)$) или иметь более одного прообраза.

Пример 1.2.2 Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $f(x) = x^2$.
Образом числа 2 является число 4, но число 4 имеет два прообраза: 2 и -2, т. к. $2^2 = 4$ и $(-2)^2 = 4$. Отрицательные числа вообще не имеют прообразов, т. к. $x^2 \geq 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

Определение 1.2.1 *Если для функции $f : X \to Y$ каждый элемент $y \in Y$ имеет, причем единственный, прообраз, то функция f называется обратимой (или взаимно однозначным соответствием между множествами X и Y), а отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $y \in Y$ его прообраз, называется обратным к отображению f (или обратной функцией) и обозначается f^{-1}. Очевидно, $f^{-1} : Y \to X$ и*
$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.

Пример 1.2.3 Отображение $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ необратимо. Это непосредственно следует из определения и предыдущего примера.
Отображение $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, заданное тем же выражением $h(x) = x^2$ является обратимым, т. к. при $x_1, x_2 \geq 0$ $x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow x_1 = x_2$. Обратное к нему отображение
$h^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Отметим, что обратное отображение к f^{-1} совпадает с исходным отображением f: $(f^{-1})^{-1} = f$, т. е. свойство отображений быть обратными является взаимным: если f^{-1} – обратное для f, то f – обратное для f^{-1}.

Пример 1.2.4 Функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$ и $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $g(x) = \log_a x$ являются взаимно обратными.

Заметим, что обратимость функции $f : X \to Y$, заданной формулой $y = f(x)$, означает, что $\forall y \in Y$ уравнение $y = f(x)$ имеет единственное решение $x = \varphi(y)$. Функция $\varphi : Y \to X$ и является в этом случае обратной к f.

Пример 1.2.5 Показать, что функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ является обратимой и найти обратную.
Для произвольного $y \in \mathbf{R}$ уравнение $y = x^3 + 1$ имеет единственное решение $x = \sqrt[3]{y - 1}$.
Следовательно, функция f обратима и $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$.

Определение 1.2.2 *Пусть $f : X \to Y$, $g : E(f) \to Z$. Функция $g \circ f : X \to Z$, определенная $\forall x \in X$ равенством $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, называется композицией функций f и g (или суперпозицией, или сложной функцией).*

Пример 1.2.6 Функция $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin \ln x$ является композицией функций
$\ln : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ и $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

В приведенных выше определениях множества X и Y могут быть, вообще говоря, любой природы. В математическом анализе мы в основном будем иметь дело с ситуацией, когда множества X и Y являются подмножествами множества $\mathbf{R}$ (в частности, могут совпадать с ним). Такие функции мы будем называть *числовыми функциями* или, точнее, *действительными функциями действительной переменной*.

1.2.3 Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие функции (изучаемые в школьном курсе математики):
1) постоянные $f(x) = \mathrm{const}$;
2) степенные: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$;
3) показательные: $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
4) логарифмические: $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
5) тригонометрические: $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$;
6) обратные тригонометрические : $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$.

Рекомендуем читателю вспомнить или повторить по школьному учебнику свойства этих функций (область определения, область значений, четность, нечетность, монотонность, периодичность), их графики и свести их в таблицу.

Определение 1.2.3 *Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и операций композиции функций, называются элементарными.*

Например, функция $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-2}}{\cos(x^3+1)} + 5x^{x^2-1}\operatorname{tg}\sqrt{x}$ является элементарной. Примерами неэлементарных функций являются функции $f(x) = [x]$ – целая часть x, $f(x) = \{x\}$ – дробная часть x.

Замечание. Хотя в предыдущем определении нет операции возведения в степень, функция $f(x)^{g(x)}$ является элементарной, если функции f и g элементарны, т. к. $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Функция вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbf{R}$, называется *многочленом* или *полиномом.*

Отношение двух многочленов $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *рациональной функцией.*

1.2.4 Применение функций в экономике

В экономической теории и практике широко используются различные виды функций. Например, *функции спроса и предложения* выражают зависимость спроса или предложения для определенного товара от различных факторов (цены, дохода и т.п.). В модели потребительского спроса используются функции Торнквиста, устанавливающие зависимость величины спроса y от величины дохода x

а) для малоценных товаров: $y = \dfrac{ax(x+b)}{x^2+c}$;

б) для товаров первой необходимости: $y = \dfrac{ax}{x+b}$;

в) для товаров второй необходимости: $y = \dfrac{a(x-c)}{x+b}$;

г) для предметов роскоши: $y = \dfrac{ax(x-c)}{x+b}$.

Соответствующие графики приведены на рисунке.

Производственная функция(однофакторная) устанавливает зависимость между стоимостью выпускаемой продукции и стоимостью суммарных затрат на ее производство. Если роль аргумента играют затраты, а зависимая переменная определяет уровень выпуска, то такая производственная функция называется *функцией выпуска*. Если же наоборот, аргументом является объем выпуска, а зависимой переменной – затраты, то такая производственная функция называется *функцией издержек*. Модели функций выпуска и функций издержек могут быть самыми различными: линейные, степенные, показательные, рациональные и т.д. Например, зависимость урожайности y от количества внесенных удобрений можно моделировать квадратичной функцией: $y = a_0 + a_1x - a_2x^2 \quad (a_0, a_1, a_2 > 0)$. Эта модель отражает то, что сначала, с ростом количества удобрений урожайность растет, а затем начинает падать (избыток удобрений).

Основные термины

Множество. Элемент множества. Подмножество. Равные множества.
Кванторы общности и существования.
Объединение, пересечение, разность множеств.
Универсальное множество. Дополнение множества.
Числовые множества $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{I}, \mathbf{R}$. Числовая прямая.
Промежуток, отрезок, интервал, полуинтервал.
Функция, отображение.
Аргумент функции, значение функции.
Область определения, область значений. Естественная область определения.
Образ, прообраз.
Обратная функция. Обратимая функция (взаимно однозначное соответствие).
Композиция функций (суперпозиция, сложная функция).
Числовая функция.
Элементарная функция. Основные элементарные функции.
Многочлен (полином), рациональная функция.

Контрольные вопросы

1. Существует ли множество, не содержащее ни одного элемента?
2. Верно ли, что $A \subset A$?
3. Существует ли функция, графиком которой является окружность?
4. Сколько образов может иметь элемент $x \in X$ при отображении $f : X \to Y$?
5. Сколько прообразов может иметь элемент $y \in Y$ при отображении $f : X \to Y$?
6. Любая ли функция имеет обратную?
7. Обратима ли функция $\sin x$? $\arcsin x$?
8. Обратима ли функция a^x? $\log_a x$?

Тест

1. Какие из следующих равенств верны для любого A?
а) $A \cup A = A$; б) $A \cup A = 2A$; в) $A \cap A = A$; г) $A \cap A = \emptyset$;
д) $A \cup \emptyset = A$; е) $A \cup \emptyset = A$; ж) $A \cup \emptyset = \emptyset$; з) $A \backslash A = \emptyset$.
2. Какие из следующих равенств верны для любых A и B?
а) $A \cup B = B \cup A$; б) $A \cap B = B \cap A$; в) $A \backslash B = B \backslash A$;
г) $(A \backslash B) \cup B = A$; д) $(A \backslash B) \cup B = A \cap B$; е) $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$.

3. Какие из следующих числовых функций определены на всем $\mathbf{R}$?
а) x^2; б) x^3; в) $\sqrt{x}$; г) $\sin x$; д) $\operatorname{tg} x$; е) 2^x; ж) $\lg x$.

4. Какие из функций п.3 определяют взаимно-однозначное отображение множества $\mathbf{R}$ на себя?

5. Какая их функций является обратной к $f(x) = 2^x$?
а) 2^{-x}; б) $\dfrac{1}{2^x}$; в) $\lg x$; г) $\log_2 x$; д) $2^{\frac{1}{x}}$.

6. Пусть $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Тогда $(f \circ g)(x) =$
а) $\dfrac{x^2+1}{x-2}$; б) $\dfrac{1}{x^2+1}$; в) $\dfrac{1}{(x-2)^2} + 1$; г) $\dfrac{1}{x^2+1} - 2$; д) $\left(\dfrac{1}{x-2} + 1\right)^2$.

7. Какие из следующих функций являются элементарными?
а) $\sqrt{x}$; б) $|x|$; в) $\operatorname{tg} x$; г) x^x; д) $\sin |x|$.

Глава 2

Элементы аналитической геометрии

Основными понятиями аналитической геометрии являются простейшие геометрические образы (точки, векторы, прямые, плоскости, кривые и поверхности 2-го порядка), а основными методами исследования служат метод координат и методы элементарной алгебры.

Возникновение метода координат тесно связано с бурным развитием астрономии, механики и техники в 17 в. Отчетливое и исчерпывающее изложение этого метода и основ аналитической геометрии было сделано французским математиком (а также философом, физиком и физиологом) Рене Декартом (1596-1650) в его "Геометрии"(1637). Основные идеи метода были известны также его современнику П. Ферма. Дальнейшая разработка аналитической геометрии связана с трудами Г. Лейбница, И. Ньютона и особенно Л. Эйлера. Средствами аналитической геометрии пользовался Ж. Лагранж при построении аналитической механики, Г. Монж в дифференциальной геометрии.

Ныне аналитическая геометрия не имеет самостоятельного значения как наука, однако ее методы широко применяются в различных разделах математики, механики, физики и других наук.

2.1 Линейная зависимость векторов

В дальнейшем изложении мы будем предполагать известными следующие основные понятия, изучаемые в школьном курсе геометрии: *вектор, нулевой вектор, равные векторы, коллинеарные и компланарные векторы, сумма векторов, противоположный вектор, разность векторов, произведение вектора на действительное число, длина (модуль) вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами, ортогональность векторов.*

Предполагаются также известными *свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число, свойства скалярного произведения векторов,* а так же *формулы, выражающие через декартовы координаты: скалярное произведение векторов, расстояние между двумя точками и угол между векторами.*

Векторы могут обозначаться как двумя прописными буквами (указывающими начало и конец вектора), так и одной строчной буквой с чертой или стрелкой, либо выделяться жирным шрифтом, например: $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ или $\overline{a} = \overline{AB}$. Мы будем в дальнейшем придерживаться первого из этих обозначений.

2.1.1 Определение линейной зависимости векторов

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ называется вектор $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbf{R}$ (действительные числа). При этом числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются *коэффициентами* линейной комбинации. Заметим, что если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, то линейная комбинация будет равна $\mathbf{0}$. Для удобства дальнейших определений будем называть такую линейную комбинацию *тривиальной.*

Определение 2.1.1 *Система векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ *называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы равная* $\mathbf{0}$. *В противном случае система векторов называется линейно независимой.*

Сформулируем простейшие предложения о линейной зависимости векторов.

Предложение 2.1.1 *Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.*

Доказательство. Для упрощения обозначений предположим, что первый вектор системы – нулевой, т. е. дана система $\mathbf{0}, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$. Рассмотрим линейную комбинацию $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{a}_n$, в которой все коэффициенты, кроме первого, равны 0. Она, очевидно, равна $\mathbf{0}$ и нетривиальна, т. к. $\lambda_1 = 1$. Следовательно, система линейно зависима.

Предложение 2.1.2 *Если часть системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Доказательство. Пусть дана система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, ..., \mathbf{a}_n$, часть которой – $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m$ линейно зависима. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$. Рассмотрим линейную комбинацию $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + ... + 0 \cdot \mathbf{a}_n$ данной системы векторов. Она, очевидно, равна $\mathbf{0}$ и нетривиальна, т. к. среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ есть отличные от 0. Следовательно, вся система векторов линейно зависима.

Предложение 2.1.3 *Система векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ $(n > 1)$ *является линейно зависимой тогда и только тогда , когда один из векторов этой системы линейно выражается через остальные векторы этой системы (т. е. представим их линейной комбинацией).*

Доказательство. 1) Пусть один из векторов, например, $\mathbf{a}_1$ линейно выражается через остальные, т. е. $\mathbf{a}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n$. Тогда $1 \cdot \mathbf{a}_1 - \lambda_2\mathbf{a}_2 - ... - \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, т. е. мы имеем нетривиальную линейную комбинацию равную $\mathbf{0}$. Следовательно, система линейно зависима.

2) Пусть, наоборот, система линейно зависима. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. Среди коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ есть отличные от нуля. Предположим, для простоты обозначений, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда вектор $\mathbf{a}_1$ линейно выражается через остальные векторы системы: $\mathbf{a}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 - ... - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{a}_n$.

2.1.2 Геометрический смысл линейной зависимости векторов

Предложение 2.1.4 *Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

Предложение 2.1.5 *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Предложение 2.1.4 следует из определения линейной зависимости, а предложение 2.1.5 – из предложения 2.1.3.

Предложение 2.1.6 *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Доказательство. 1) Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы. Тогда (предложение 2.1.3) один из них линейно выражается через остальные. Пусть, например, $\mathbf{a}_3 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$. Тогда из определения операций умножения вектора на число и сложения векторов следует, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны.

2) Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны. Если среди них есть один нулевой или два коллинеарных, то из предложений 2.1.2, 2.1.4 и 2.1.5 следует их линейная зависимость. Предположим теперь, что никакие два из них не коллинеарны. Разложим вектор $\mathbf{a}_3$ по векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Для этого совместим начала всех векторов, и через конец вектора $\mathbf{a}_3$ проведем прямые параллельные векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ до пересечения соответственно с прямыми, на которых лежат векторы $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1$. Из рисунка видим, что по правилу сложения векторов $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Но $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}_1,\ \mathbf{c} \parallel \mathbf{a}_2$ и, следовательно, $\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1,\ \mathbf{c} = \lambda_2\mathbf{a}_2$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Поэтому $\mathbf{a}_3 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$ и векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы.

Предложение 2.1.7 *Любые 4 вектора линейно зависимы.*

Доказательство. Если среди этих векторов есть три компланарных, то из предложений 2.1.6 и 2.1.2 следует, что система линейно зависима. Предположим теперь, что никакие 3 из них не компланарны. Разложим вектор $\mathbf{a}_4$ по векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Для этого совместим начала всех векторов в т.O. Пусть α – плоскость, содержащая векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Через конец A вектора $\mathbf{a}_4$ проведем прямую, параллельную $\mathbf{a}_3$, до пересечения с плоскостью α в точке B. В плоскости ΔOAB через точку A проведем прямую, параллельную OB до пересечения с прямой, на которой лежит вектор $\mathbf{a}_3$, в точке C. Тогда $\mathbf{a}_4 = \mathbf{OB} + \mathbf{OC}$. Но т. к. векторы $\mathbf{OB}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ компланарны, то $\mathbf{OB} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$ при некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ (см. предложение 2.1.6). Из коллинеарности $\mathbf{OC}$ и $\mathbf{a}_3$ следует, что $\mathbf{OC} = \lambda_3\mathbf{a}_3$ при некотором

$\lambda_3 \in \mathbf{R}$. Следовательно, $\mathbf{a}_4 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3$ и векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ линейно зависимы.

Основные термины

Линейная комбинация векторов. Коэффициенты линейной комбинации.
Тривиальная линейная комбинация.
Линейно зависимая и линейно независимая системы векторов.

Контрольные вопросы

1. Для любой ли системы векторов найдется ее линейная комбинация, равная нулевому вектору?
2. Сколько линейных комбинаций имеет система из n векторов?
3. Сколько тривиальных линейных комбинаций имеет данная система из n векторов?
4. Сколько существует линейных комбинаций, равных нулевому вектору, для заданной линейно независимой системы векторов?
5. Каково наибольшее число линейно независимых векторов в пространстве (на плоскости, на прямой)?

Тест

1. Выберите из следующих утверждений верные. Система векторов линейно зависима, если:

а) существует линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору;
б) любая линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору;
в) никакая линейная комбинация этих векторов не равна нулевому вектору;
г) линейная комбинация этих векторов с коэффициентами, равными нулю, равна нулевому вектору;
д) существует единственная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору;
е) существует более одной линейной комбинации этих векторов, равной нулевому вектору;
ж) любая линейная комбинация этих векторов тривиальна;
з) любая тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору.

2. Выберите из предыдущих вариантов ответа те, которые означают линейную независимость системы векторов.

3. Выберите из вариантов п.1 те предложения, которые верны для любой системы векторов.

4. Выберите из вариантов п.1 бессмысленные либо неверные для любой системы векторов.

5. Выберите из следующих утверждений верные. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда:

а) хотя бы один из них – нулевой; б) они лежат в одной плоскости;

в) они коллинеарны; г) они компланарны; д) они ортогональны;

е) хотя бы один из них отличен от нуля; ж) они неколлинеарны;

з) они не компланарны; и) они равны.

6. Какие из следующих условий являются необходимыми для линейной зависимости трех векторов?

а) Среди них есть нулевой вектор; б) среди них есть два коллинеарных вектора;

в) среди них есть два равных вектора; г) все они равны;

д) они компланарны; е) они не компланарны; ж) они попарно ортогональны;

з) один из них является линейной комбинацией двух других.

7. Какие из предыдущих условий являются достаточными для линейной зависимости трех векторов?

2.2 Базис и координаты

2.2.1 Понятие базиса

Определение 2.2.1 *Базисом системы векторов (конечной или бесконечной) называется часть этой системы (подсистема), удовлетворяющая двум условиям:*

1) Эта подсистема линейно независима.

2) Любой вектор данной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы.

Представление вектора в виде линейной комбинации векторов базиса называется *разложением вектора по базису.* Из этого определения и предложений предыдущего параграфа следует:

1) Базис множества всех векторов на прямой образуется любым ненулевым вектором.

2) Базис множества всех векторов плоскости образуют любые два неколлинеарных вектора этой плоскости.

3) Базис множества всех векторов пространства образуют любые три некомпланарных вектора.

2.2.2 Координаты вектора

Предложение 2.2.1 *Каждый вектор данной системы имеет единственное разложение по базису этой системы.*

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ – базис данной системы векторов. Предположим, что некоторый вектор $\mathbf{a}$ этой системы имеет два разложения по базису:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{a} = \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + ... + \mu_n\mathbf{e}_n.$$

Вычитая почленно эти равенства, получим:

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{e}_n.$$

Из линейной независимости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ следует, что $\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = ... = \lambda_n - \mu_n = 0$, т. е. $\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ \dots, \lambda_n = \mu_n$, и, следовательно, оба разложения совпадают.

Это предложение позволяет дать следующее определение.

Определение 2.2.2 *Коэффициенты разложения вектора по базису называются координатами вектора в этом базисе.*

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет в данном базисе координаты $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$, то будем записывать это так: $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ или $\mathbf{a}(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$.

Отметим свойства координат, которые непосредственно следуют из определения:

1) Координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат этих векторов.

Действительно, если $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$,

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n,$$

то $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{e}_n$.

2) Координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат этого вектора на данное число.

Действительно, если $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$, то

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda\alpha_1\mathbf{e}_1 + \lambda\alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \lambda\alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Из последнего свойства вытекает следующее предложение.

Предложение 2.2.2 *(Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов). Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты в некотором базисе пропорциональны.*

2.2.3 Системы координат

Аффинная система координат в пространстве определяется точкой O (началом координат) и тремя базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, исходящими из точки O, и обозначается $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.Для произвольной точки M вектор $\mathbf{OM}$ называется *радиус-вектором* этой точки. *Аффинными координатами* точки M называются координаты вектора $\mathbf{OM}$ в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Если точка M имеет координаты x, y, z, то это записывается так:

$M(x, y, z)$. Всякий вектор может быть представлен в виде разности радиус-векторов его конца и начала. Поэтому, если имеются две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. *Декартова прямоугольная система координат* является частным случаем аффинной системы координат, когда базисные векторы единичные, а их направления взаимно перпендикулярны, т. е. $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1, \quad \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$. Тогда эти векторы называются *ортами* и обозначаются $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i},\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{j},\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$.

Аналогично определяются системы координат на плоскости и на прямой.

2.2.4 Понятие об уравнениях линий и поверхностей

Пусть на плоскости задана декартова система координат. Рассмотрим промежуток (a, b) действительной оси (конечный или бесконечный). Множество точек плоскости, координаты которых представлены как непрерывные функции параметра $t \in (a, b)$: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, называют *линией на плоскости*, а сами уравнения – *параметрическими уравнениями линии.* Этот способ задания линии легко переносится на случай пространства: в пространстве линия задается тремя параметрическими уравнениями: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

Уравнение вида $F(x, y) = 0$ называется *уравнением линии L на плоскости*, если этой линии принадлежат те и только те точки плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Аналогичным образом поверхность в пространстве может быть задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ или параметрическими уравнениями $x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v)$, где параметры (u, v) пробегают некоторую область на плоскости.

Линия в пространстве может быть также задана пересечением двух поверхностей. В этом случае она задается системой уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Основная идея *метода координат* состоит в том, что геометрические свойства линии (поверхности) выясняются путем изучения аналитическими и алгебраическими средствами свойств уравнения этой линии (поверхности).

В аналитической геометрии на плоскости систематически исследуются *алгебраические линии 1-го и 2-го порядков*, т. е. линии, которые определяются соответственно алгебраическими уравнениями 1-й и 2-й степени. Линии 1-го порядка определяются уравнениями вида $Ax + By + C = 0$ и, как мы увидим чуть позже, являются прямыми. Линии 2-го порядка определяются уравнениями вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Основной метод исследования и классификации этих линий заключается в подборе такой декартовой прямоугольной системы координат, в которой уравнение линии имеет наиболее простой вид, и последующем исследовании этого уравнения.

В аналитической геометрии в пространстве изучаются *алгебраические поверхности 1-го и 2-го порядков*, т. е. поверхности задаваемые соответственно уравнениями вида
$Ax + By + Cz + D = 0$ (это – плоскости) и
$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$.

Основные термины

Базис системы векторов. Разложение вектора по базису. Координаты вектора.

Аффинная система координат. Радиус-вектор точки. Аффинные координаты точки.

Декартова прямоугольная система координат.

Линия на плоскости и в пространстве. Параметрические уравнения линии.

Поверхность в пространстве. Уравнения поверхности.

Контрольные вопросы

1. Сколько базисов существует в множестве всех векторов пространства (прямой, плоскости)?

2. Сколько разложений по данному базису имеет данный вектор?

3. Зависят ли координаты вектора от выбора базиса?

4. Определяются ли координаты точки однозначно выбором базиса?

5. В чем отличие аффинной и декартовой прямоугольной системы координат?

6. Напишите общий вид уравнения сферы в пространстве.

7. Запишите параметрические уравнения окружности радиуса r с центром в точке (a, b).

8. Зависит ли уравнение линии (поверхности) от выбора системы координат?

Тест

В каждом из предложений требуется выбрать верные утверждения.

1. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты:

а) в некотором базисе; б) в любом базисе;

в) в некоторой декартовой системе координат;

г) в любой декартовой системе координат;

д) в некоторой аффинной системе координат;

е) в любой аффинной системе координат.

2. Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда пропорциональны их координаты

(см. варианты предыдущего вопроса).

3. Координаты вектора зависят от:

а) выбора базиса; б) выбора системы координат;

в) выбора начала координат; г) выбора масштаба.

2.3 Прямая линия на плоскости

2.3.1 Общее уравнение прямой

Здесь и дальше мы будем предполагать, что задана некоторая декартова система координат и координаты точки или вектора будут означать координаты в этой системе. Получим уравнение прямой l, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной данному вектору $\mathbf{n}(A, B) \neq \mathbf{0}$.

Рассмотрим произвольную точку плоскости $M(x, y)$. $M \in l \iff \mathbf{M_0M} \perp \mathbf{n}$. Из определения скалярного произведения следует, что $\mathbf{M_0M} \perp \mathbf{n} \iff \mathbf{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0$. Вектор $\mathbf{M_0M}$ имеет координаты $(x - x_0, y - y_0)$. Пользуясь формулой, выражающей скалярное произведение векторов через их декартовы координаты, получим уравнение прямой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2.1}$$

Раскрывая скобки и вводя обозначение $C = -Ax_0 - By_0$, получим уравнение:

$$Ax + By + C = 0. \tag{2.2}$$

Это уравнение называется *общим уравнением прямой.* Заметим, что в этом уравнении A и B не равны нулю одновременно ($A^2 + B^2 \neq 0$), т. к. вектор $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Наоборот, любое уравнение вида (2.2), в котором $A^2 + B^2 \neq 0$, может быть приведено к виду (2.1) и, следовательно, является уравнением прямой. Для этого достаточно найти хотя бы одну точку $M_0(x_0, y_0) \in l$, т. е. такие x_0 и y_0, для которых $C = -Ax_0 - By_0$. Если $A \neq 0$, то можно взять $y_0 = 0, x_0 = -\dfrac{C}{A}$. Если же $A = 0$, то возьмем $y_0 = -\dfrac{C}{B}$ ($B \neq 0$, т. к. A и B не могут быть оба равны 0), при этом x_0 можно взять произвольным. Т. к. уравнение (2.2) при условии $A^2 + B^2 \neq 0$ есть общий вид уравнения первой степени, то мы приходим к выводу, что *линии первого порядка – прямые и только они.* Подчеркнем, что коэффициенты A и B в общем уравнении прямой могут быть истолкованы как координаты вектора $\mathbf{n}$, перпендикулярного этой прямой. Этот вектор называется *вектором нормали* к данной прямой.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой:

а) Если $A = 0$, то уравнение имеет вид $By + C = 0$, или $y = -\dfrac{C}{B}$. Эта прямая параллельна оси абсцисс.

б) Если $B = 0$, то уравнение имеет вид $Ax + C = 0$, или $x = -\dfrac{C}{A}$. Эта прямая параллельна оси ординат.

в) В случае $C = 0$ уравнение имеет вид $Ax + By = 0$, и соответствующая прямая проходит через начало координат.

2.3.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$ изучается в школьном курсе математики и является частным случаем общего уравнения прямой. Любая прямая, не параллельная оси ординат, может быть задана этим уравнением. Действительно, если в общем уравнении $B \neq 0$, то это уравнение приводится к виду $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. В уравнении

$y = kx + b$ коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. Поэтому k называют *угловым коэффициентом.* Число b есть ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

2.3.3 Каноническое уравнение прямой

Получим уравнение прямой l, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельной данному вектору $\mathbf{a}(a_1, a_2) \neq \mathbf{0}$.
Рассмотрим произвольную точку плоскости $M(x, y)$.

$M \in l \iff \mathbf{M_0M} \parallel \mathbf{a}$, т. е. когда векторы $\mathbf{M_0M}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны и, следовательно, $\mathbf{M_0M} = \lambda \mathbf{a}$ при некотором $\lambda \in \mathbf{R}$. Приравнивая координаты вектора $\mathbf{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ и вектора $\lambda \mathbf{a}$, получим систему *параметрических уравнений прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1, \\ y = y_0 + \lambda a_2. \end{cases}$$

Если $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, то, выражая из каждого из этих уравнений λ и приравнивая полученные выражения, получим *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \tag{2.3}$$

Подчеркнем, что коэффициенты a_1 и a_2 в уравнении (2.3) являются координатами вектора $\mathbf{a}$, параллельного данной прямой и называющегося *направляющим вектором прямой.* Следовательно, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$.

Если $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$, то каноническое уравнение также запиывается в виде (2.3). В случае $a_1 = 0$ эта запись означает, что $x = x_0$, а в случае $a_2 = 0$, что $y = y_0$.

Используя каноническое уравнение, легко получить *уравнение прямой, проходящей через две данные точки.* Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащие на прямой. Тогда в качестве начальной точки M_0 можно взять точку M_1, а в качестве направляющего вектора – вектор $\mathbf{a} = \mathbf{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

2.3.4 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана общим уравнением (2.2). Требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l, которое мы обозначим $\rho(M_0, l)$. Обозначим $\mathbf{n}$ вектор нормали к прямой l. Опустим из точки M_0 перпендикуляр M_0M_1 на прямую l.

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\mathbf{M_1M_0} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{M_1M_0}| \cdot |\mathbf{n}| \cdot \cos\alpha$, где α – угол между векторами $\mathbf{M_1M_0}$ и $\mathbf{n}$. Т. к. $\mathbf{M_1M_0} \parallel \mathbf{n}$, то $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$. Следовательно, $\cos\alpha = \pm 1$ и $|\mathbf{M_1M_0} \cdot \mathbf{n}| = |\mathbf{M_1M_0}| \cdot |\mathbf{n}|$. Отсюда находим

$$\rho(M_0, l) = |\mathbf{M_1M_0}| = \frac{|\mathbf{M_1M_0} \cdot \mathbf{n}|}{\mathbf{n}}. \tag{2.4}$$

Обозначим (x_1, y_1) координаты точки M_1. Тогда
$\mathbf{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$, $\mathbf{n} = (A, B)$. Следовательно,

$$\mathbf{M_1M_0} \cdot \mathbf{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1). \tag{2.5}$$

Т. к. $M_1 \in l$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$ и $Ax_1 + By_1 = -C$. Подставляя это выражение в равенство (2.5), получим:

$$\mathbf{M_1M_0} \cdot \mathbf{n} = Ax_0 + By_0 + C. \tag{2.6}$$

Учитывая, что $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, получим из (2.4):

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.7}$$

2.3.5 Геометрический смысл знака трехчлена $Ax + By + C$

Пусть прямая l задана общим уравнением (2.2). Для всех точек этой прямой и только для них трехчлен равен нулю. Для остальных точек $Ax + By + C \neq 0$. Выясним, каково множество точек, удовлетворяющих неравенству $Ax + By + C > 0$ (< 0).

Теорема 2.3.1 *В каждой из полуплоскостей, на которые прямая l разбивает плоскость, трехчлен $Ax + By + C$ сохраняет знак. При этом знак трехчлена положителен в той полуплоскости, на которую указывает вектор нормали $\mathbf{n}(A, B)$, и отрицателен в другой полуплоскости.*

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит в той полуплоскости, на которую указывает вектор $\mathbf{n}$ и M_1 – ортогональная проекция этой точки на прямую l. Тогда,
$\mathbf{M_1M_0} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{M_1M_0}| \cdot |\mathbf{n}| > 0$ и из (2.6) следует, что $Ax_0 + By_0 + C > 0$. Аналогично, если точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит в другой полуплоскости, то $\mathbf{M_1M_0} \cdot \mathbf{n} = -|\mathbf{M_1M_0}| \cdot |\mathbf{n}| < 0$ и $Ax_0 + By_0 + C < 0$.

2.3.6 Взаимное расположение прямых

Пусть имеются две прямые l_1 и l_2, заданные общими уравнениями
$l_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

1) Найдем *условие совпадения* этих прямых.

Прямые совпадают, если для любой точки, координаты которой удовлетворяют первому уравнению, они удовлетворяют и второму уравнению, и наоборот. Следовательно, $l_1 \equiv l_2$ тогда и только тогда, когда уравнения этих прямых равносильны. Т. к. оба этих уравнения линейны (первой степени), то они могут отличаться лишь числовым множителем. Таким образом, $l_1 \equiv l_2 \iff A_1 = \lambda A_2, \ B_1 = \lambda B_2, \ C_1 = \lambda C_2$ при некотором $\lambda \in \mathbf{R}$. Если $A_2 \neq 0, \ B_2 \neq 0, \ C_2 \neq 0$, то это условие можно записать так:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

2) Найдем *условие параллельности* прямых l_1 и l_2. Прямые параллельны тогда и только тогда, когда параллельны (коллинеарны) векторы нормали $\mathbf{n}_1(A_1, B_1)$ и $\mathbf{n}_2(A_2, B_2)$, т. е. $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$ при некотором $\lambda \in \mathbf{R}$. Записывая это равенство в координатной форме, получим

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2.$$

Чтобы исключить совпадение прямых надо к этим условиям добавить условие $C_1 \neq \lambda C_2$. Если $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, и $C_2 \neq 0$, то условие параллельности запишется так:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

3) Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то они пересекаются. Таким образом, *условием пересечения* прямых является условие $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$. Чтобы охватить случай $A_2 = 0$ или $B_2 = 0$, запишем это условие в виде $A_1B_2 \neq A_2B_1$. Заметим, в частности, что $l_1 \perp l_2 \iff \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$, т. е. $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = 0$. Отсюда получаем *условие перпендикулярности прямых*:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

В общем случае пересечения прямых определим угол между ними. Угол α между прямыми l_1 и l_2 равен углу между их векторами нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Основные термины

Общее уравнение прямой. Вектор нормали к прямой.
Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
Параметрические уравнения прямой.
Направляющий вектор прямой. Каноническое уравнение прямой.

Контрольные вопросы

1. Каков геометрический смысл коэффициентов A и B в общем уравнении прямой?
2. Любая ли прямая является линией первого порядка?
3. Любая ли линия первого порядка является прямой?
4. Любая ли прямая может быть задана уравнением с угловым коэффициентом в данной декартовой системе координат?
5. Каков геометрический смысл коэффициентов в каноническом уравнении прямой?
6. Любая ли прямая может быть задана каноническим (общим) уравнением?
7. Какова связь между знаком трехчлена $Ax + By + C$ и вектором нормали к прямой $Ax + By + C = 0$?

Тест

1. Какие из следующих прямых проходят через точку (1,2)?
а) $(x-2)+2(y+3)=0$; б) $x+2y-5=0$; в) $y=2x+5$;
г) $2(x+1)-3(y+2)=0$; д) $3(x+1)+2(y-2)=0$; е) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}$;
ж) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{4}$; з) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{1}$.
2. Какие из предыдущих прямых параллельны вектору (1,2)?
3. Какие из прямых п.1 перпендикулярны вектору (1,2)?
4. Выберите из уравнений прямых п.1 канонические.
5. Выберите из уравнений прямых п.1 уравнения с угловым коэффициентом.
6. Какие из прямых п.1 параллельны между собой?
7. Какие из прямых п.1 совпадают?
8. Выберите из прямых п.1 все пары взаимно перпендикулярных прямых.

2.4 Линии второго порядка

2.4.1 Эллипс

Определение 2.4.1 *Множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная и большая расстояния между фокусами, называется эллипсом.*

Обозначим фокусы эллипса F_1 и F_2, а расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Это расстояние называется *фокусным расстоянием*, а сам отрезок F_1F_2 – *фокальным отрезком.* В соответствие с определением, эллипс есть множество точек M, которые удовлетворяют равенству

$$F_1M + F_2M = 2a, \tag{2.8}$$

где a – некоторая константа, причем $a > c$.

Для того чтобы получить уравнение эллипса в наиболее простом виде, выберем декартову систему координат специальным (каноническим) образом: ось Ox совместим с прямой

F_1F_2, а начало координат поместим в середину отрезка F_1F_2. Такая система координат называется *канонической*. Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости. Тогда $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Точка M принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда выполняется равенство (2.8), т. е. мы получаем следующее уравнение эллипса:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{2.9}$$

Путем равносильных преобразований приведем это уравнение к более простому виду. Для этого перенесем второй радикал в правую часть и возведем обе части равенства в квадрат. После преобразований получим:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Еще раз возводя в квадрат, получаем после преобразований:

$$a^2(x^2 + c^2 + y^2) = a^4 + c^2x^2, \qquad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Введением обозначения $a^2 - c^2 = b^2$ и делением обеих частей на a^2b^2, последнее уравнение приводится к следующему:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.10}$$

которое называется *каноническим уравнением эллипса.*

Мы показали, что уравнение (2.10) является следствием уравнения (2.9). На самом же деле можно показать, что эти уравнения равносильны.

Анализируя уравнение (2.10), получаем следующие *свойства эллипса*:

1) Эллипс – кривая второго порядка.

2) Всякий эллипс имеет две взаимно ортогональные оси симметрии и один центр симметрии, совпадающий с точкой пересечения осей.

Оси симметрии кривой второго порядка называют *осями кривой*, а центр симметрии – *центром кривой.*

3) Для формулировки третьего свойства сначала дадим

Определение 2.4.2 *Точка пересечения кривой второго порядка с ее осью называется вершиной кривой.*

Эллипс имеет четыре вершины.

4) Все точки эллипса лежат внутри прямоугольника со сторонами длины $2a$ и $2b$, проходящими через его вершины. (Числа a и b называют *полуосями* эллипса).

Определение 2.4.3 *Эксцентриситетом эллипса называется число* $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.

Т. к. $c < a$, то $0 \leq \varepsilon < 1$. Эксцентриситет показывает степень вытянутости эллипса. Если $\varepsilon = 0$, то $F_1 \equiv F_2$, $a = b$ и мы получаем окружность. Следовательно, окружность – частный случай эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon = 0$. Если ε приближается к 1, то эллипс все больше вытягивается.

Определение 2.4.4 *Директрисой эллипса называется прямая, параллельная его малой оси и отстоящая от него на расстоянии, равном* $\dfrac{a}{\varepsilon}$.

У эллипса две директрисы. Их уравнения:

$$d_1 : \ x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2 : \ x = \frac{a}{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

5)*Директориальное свойство эллипса*: для каждой точки эллипса отношение расстояния ее до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная эксцентриситету эллипса.

2.4.2 Гипербола

Определение 2.4.5 *Множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная и меньшая расстояния между фокусами, называется гиперболой.*

Пусть F_1, F_2 – фокусы гиперболы, $F_1F_2 = 2c$. Тогда, по определению, гипербола – есть множество точек M, удовлетворяющих уравнению $|F_1M - F_2M| = 2a$, где a – некоторая константа, $a < c$.

Каноническая система координат для гиперболы выбирается так же, как и для эллипса.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.12}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Свойства гиперболы, вытекающие из уравнения (2.12).

1) Гипербола – кривая второго порядка.

2) Гипербола имеет две взаимно ортогональные оси симметрии и один центр симметрии, совпадающий с точкой пересечения осей.

3) Гипербола имеет две вершины.

4) Гипербола имеет две *асимптоты*, проходящие через ее центр. В канонической системе координат уравнения асимптот имеют вид $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Область изменения координат гиперболы: $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

5) Гипербола имеет две директрисы, которые задаются теми же уравнениями (2.11), что и в случае эллипса. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$. Гипербола обладает тем же директориальным свойством, что и эллипс.

Гипербола называется *равнобочной* или *равносторонней*, если $a = b$.

Рассмотрим *обратно пропорциональную зависимость*, задаваемую уравнением $y = \dfrac{k}{x}$ и изучаемую в школьном курсе математики. Графиком этой зависимости является равнобочная гипербола, а асимптотами – оси координат. Для приведения этого уравнения к каноническому виду следует повернуть систему координат на угол $\dfrac{\pi}{4}$. Можно показать, что в новой системе координат уравнение будет иметь вид (2.12). График дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ также является равнобочной гиперболой с асимптотами, параллельными осям координат. Это видно из следующих преобразований:

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left[\left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right]}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2\left(x + \frac{d}{c}\right)}.$$

Следовательно, этот график получается из графика $y = \dfrac{k}{x}$ при $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$ параллельным переносом на вектор с координатами $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$.

2.4.3 Парабола

Определение 2.4.6 *Параболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой прямой, не проходящей через фокус, называемой директрисой.*

Пусть F – фокус параболы, d – ее директриса, $\rho(F, d) = p$. Число p называют *фокальным параметром* параболы. Выберем систему координат таким образом, что ось Ox перпендикулярна директрисе, а начало координат находится в середине отрезка FA ($FA \perp d$).

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{2.13}$$

Свойства параболы.

1) Парабола – кривая второго порядка.

2) Парабола имеет одну ось симметрии и не имеет центра симметрии.

3) Парабола имеет единственную вершину.

График квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ является параболой с осью, параллельной оси Oy. Для приведения этого уравнения к каноническому (2.13) нужно осуществить поворот системы координат на угол $\frac{\pi}{2}$ и параллельный перенос.

Заметим, что эллипс, гипербола и парабола обладают общим директориальным свойством. Для параболы это свойство взято за ее определение. Гиперболу и эллипс (за исключением его частного случая – окружности) также можно определить при помощи директориального свойства. (Тогда их бывшие определения становятся теоремами). При таком общем определении вид кривой второго порядка определяется ее эксцентриситетом ε. Для эллипса $\varepsilon < 1$, для параболы $\varepsilon = 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Основные термины

Эллипс. Гипербола. Парабола.

Фокусы, фокусное расстояние, фокальный отрезок.

Каноническая система координат.

Оси, центр, вершины кривой второго порядка.

Эксцентриситет. Директрисы. Директориальное свойство.

Контрольные вопросы

1. Сколько осей симметрии имеет эллипс (гипербола, парабола)?
2. Сколько центров симметрии имеет эллипс (гипербола, парабола)?
3. Сколько вершин имеет эллипс (гипербола, парабола)?
4. Чему равен эксцентриситет окружности?

5. Имеет ли окружность директрисы?

6. Какая линия задается уравнением $xy = 1$? Чем вы объясните, что это уравнение не совпадает с каноническим?

7. Объясните, почему уравнение параболы $y = ax^2+bx+c$ не совпадает с каноническим.

8. Существенно ли в определении эллипса слово "большая"? Какое множество получится, если его заменить словом "равная"("меньшая")?

9. Существенно ли в определении гиперболы слово "меньшая"? Какое множество получится, если его заменить словом "равная"("большая")?

Тест

1. Из следующих уравнений выберите уравнения эллипса:
а) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{9} = 1$; б) $4y^2 - 9x^2 = 5$; в) $x^2 + 2xy + y^2 = 9$; г) $x^2 + 5y^2 = -1$;
д) $x^2y^2 = 1$; е) $x^2 - 5y^2 = -4$; ж) $x^2 + 2x + y = 1$; з) $x^2 + 2x + 2y^2 = 3$.

2. Из предыдущих уравнений выберите уравнения гиперболы.

3. Из уравнений п.1 выберите уравнения параболы.

4. Из уравнений п.1 выберите уравнения пары прямых.

5. Множество всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки этой плоскости вдвое больше расстояния до данной прямой этой плоскости, есть:
а) окружность; б) эллипс; в) гипербола; г) парабола; д) пара прямых.

2.5 Векторное и смешанное произведение векторов

2.5.1 Определители 2-го и 3-го порядков

Общее определение определителя n-го порядка будет дано позднее в разделе линейной алгебры. Здесь же нам потребуются его частные случаи для $n = 2$ и $n = 3$. Определитель второго порядка, составленный из чисел a_{ij} $(i, j = \overline{1, 2})$, обозначается $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка обозначается аналогично, а его вычисление сводится к вычислению определителей второго порядка по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2.14}$$

2.5.2 Векторное произведение векторов

Определение 2.5.1 *Тройка некомпланарных векторов* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *называется правой, если они расположены (в указанном порядке) как первые три пальца правой руки, т. е. если смотреть с конца вектора* $\mathbf{c}$, *то поворот от* $\mathbf{a}$ *к* $\mathbf{b}$ *осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки).*

Определение 2.5.2 *Векторным произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на вектор* $\mathbf{b}$ *называется вектор* $\mathbf{c}$*, удовлетворяющий условиям:*

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$*, где* α *– угол между векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*;*

2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$*,* $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$*;*

3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *– правая тройка векторов.*

Векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Заметим, что модуль векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Из этого определения вытекают следующие *свойства векторного произведения*:

1) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ (свойство *антикоммутативности*);

2) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\forall \alpha \in R$ $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$;

3) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ $[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}]+[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{b}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]+[\mathbf{c}, \mathbf{b}]$ (свойство *дистрибутивности*);

4) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0} \iff \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы.

Из определения 2.5.2 следует, что попарные векторные произведения ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ правой декартовой системы координат равны:

$[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = [\mathbf{j}, \mathbf{j}] = [\mathbf{k}, \mathbf{k}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$.

Пользуясь этими равенствами и свойствами векторного произведения, получаем выражение векторного произведения векторов $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ через их декартовы координаты:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \tag{2.15}$$

С учетом выражения (2.14) для определителя третьего порядка, последнее равенство можно записать в виде легко запоминающегося символического равенства

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

2.5.3 Смешанное произведение векторов

Пусть имеются три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ можно умножить на вектор $\mathbf{c}$ векторно: $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]$. Этот вектор называется *двойным векторным произведением.* При умножении вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ на вектор $\mathbf{c}$ скалярно получаем число $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c}$, которое называется *смешанным произведением трех векторов.*

Теорема 2.5.1 *Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.*

Доказательство. Из определения скалярного произведения векторов следует, что смешанное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c} = 0$ при выполнении одного из трех условий: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ или $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \mathbf{c}$. Первое условие означает (см. свойство 4) линейную зависимость векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а последнее – компланарность векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. В любом случае векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, линейно зависимы. Обратно, из линейной зависимости трех векторов следует их компланарность и, следовательно, равенство нулю смешанного произведения.

Теорема 2.5.2 *Смешанное произведение* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c}$ *равно объему параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*. (Объему приписывается знак* $+$*, если тройка* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *– правая и знак* $-$ *(минус), если – левая).*

Доказательство. Рассмотрим случай правой тройки векторов. Пусть OH – высота параллелепипеда. Обозначим $\mathbf{h}$ единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{OH}$, S – площадь основания, V – объем параллелепипеда, α – угол между векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{h}$. Тогда $V = S \cdot OH$, $OH = |\mathbf{c}| \cos\alpha = \mathbf{hc}$. Следовательно, $V = S(\mathbf{hc}) = (S\mathbf{h})\mathbf{c}$. Заметим, что $S\mathbf{h} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и поэтому $V = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c}$.

Из этой теоремы следует, что $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{a}$. Смешанное произведение записывается также $(\mathbf{abc})$. Используя выражение скалярного и векторного произведения векторов через их декартовы координаты, мы получим *выражение смешанного произведения через координаты векторов*:

$$(\mathbf{abc}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2.17}$$

Основные термины

Векторное произведение векторов.
Смешанное произведение векторов.
Определитель.

Контрольные вопросы

1. Каков геометрический смысл модуля векторного произведения?
2. Каков геометрический смысл смешанного произведения трех векторов?
3. Чему равно векторное произведение двух коллинеарных векторов?
4. Чему равно смешанное произведение трех компланарных векторов?

Тест

1. Выберите верные утверждения. Векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда:

а) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; б) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны; в) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны;
г) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ компланарны; д) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы; е) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно независимы.

2. Выберите верные утверждения. Смешанное произведение $(\mathbf{abc}) = 0$ тогда и только тогда, когда:

а) хотя бы один из векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ равен нулевому вектору;

б) векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ попарно ортогональны; в) векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны;
г) векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ линейно зависимы; д) векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ линейно независимы.

3. Какие из следующих утверждений верны для любых векторов **a, b, c**?
а) $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\mathbf{b},\mathbf{a}]$; б) $[\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{a},\mathbf{c}]$; в) $[\mathbf{a},\mathbf{a}] \geq 0$; г) $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\mathbf{c}=\mathbf{a}[\mathbf{b},\mathbf{c}]$.

2.6 Плоскость и прямая в пространстве

В этом параграфе многие выкладки и рассуждения аналогичны тем, которые применялись в 2.3, и поэтому здесь подробно не рассматриваются.

2.6.1 Общее уравнение плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и перпендикулярной вектору* $\mathbf{n}(A, B, C) \neq \mathbf{0}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.18}$$

Это уравнение приводится к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.19}$$

в котором $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Уравнение (2.19) называется *общим уравнением плоскости*, а вектор $\mathbf{n}(A, B, C)$ – *вектором нормали* к этой плоскости. Любое уравнение вида (2.19) при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ задает плоскость. Таким образом, плоскость является поверхностью первого порядка и, наоборот, любая поверхность первого порядка является плоскостью. Частные случаи общего уравнения плоскости:

1) Если $A = 0$ $(B = 0,\ C = 0)$, то плоскость параллельна оси Ox $(Oy,\ Oz)$.

2) Если $A = B = 0$ $(B = C = 0,\ A = C = 0)$, то плоскость параллельна плоскости xOy $(yOz,\ xOz)$.

3) Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

2.6.2 Задание плоскости точкой и двумя направляющими векторами

Получим уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум данным неколлинеарным векторам $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ (которые называются *направляющими векторами плоскости*). Рассмотрим произвольную точку пространства $M(x, y, z)$. Она принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{M_0M}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ компланарны, т. е. $\mathbf{M_0M} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ при некоторых $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Записывая это векторное уравнение в координатной форме, получим систему параметрических уравнений плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1, \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2, \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3. \end{cases} \tag{2.20}$$

Согласно теореме 2.5.1, векторы $\mathbf{M_0M}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Отсюда получаем искомое уравнение плоскости в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Как частный случай отсюда легко получить *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Для этого возьмем в качестве начальной точки M_0 точку M_1, а в качестве направляющих векторов – векторы $\mathbf{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\mathbf{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Тогда уравнение плоскости примет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.6.3 Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной общим уравнением (2.19), обозначим $\rho(M_0, \alpha)$. Это расстояние может быть определено по формуле

$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.6.4 Геометрический смысл знака многочлена $Ax + By + Cz + D$

В каждом из полупространств, на которые плоскость α разбивает все пространство, линейный многочлен $Ax + By + Cz + D$ сохраняет знак. При этом знак многочлена положителен в том полупространстве, на которое указывает вектор нормали $\mathbf{n}(A, B, C)$, и отрицателен в другом полупространстве.

2.6.5 Уравнение прямой в пространстве

Если прямая в пространстве задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, то так же, как и в случае прямой на плоскости, получаем параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1, \\ y = y_0 + \lambda a_2, \\ z = z_0 + \lambda a_3, \end{cases}$$

и канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{2.21}$$

Прямую в пространстве можно задать также пересечением двух плоскостей, заданных общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

2.6.6 Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть плоскость α задана общим уравнением (2.19), а прямая l – каноническим уравнением (2.21). Обозначим $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой l, $\mathbf{n}(A, B, C)$ – вектор нормали к плоскости α. Тогда $l \parallel \alpha$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, т. е. $\mathbf{an} = 0$. Записывая это скалярное произведение в координатной форме, получим *условие параллельности прямой и плоскости*:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0.$$

Если прямая l не параллельна плоскости α, то угол φ между ними дополняет до $\pi/2$ угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$. Поэтому

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

2.6.7 Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть имеются две плоскости α_1 и α_2, заданные общими уравнениями

$$\alpha_1 :\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \alpha_2 :\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Плоскости совпадают, если коэффициенты в их уравнениях пропорциональны:
$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \iff A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2,\ D_1 = \lambda D_2$ при некотором $\lambda \in \mathbf{R}$. Если $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, $D_2 \neq 0$, то это условие можно записать так:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Условие параллельности плоскостей запишется следующим образом:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Плоскости α_1 и α_2 пересекаются, если коэффициенты при x, y, z в их общих уравнениях не пропорциональны, т. е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. В случае пересечения плоскостей угол φ между ними можно определить как угол между их векторами нормали:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Основные термины

Общее уравнение плоскости. Вектор нормали к плоскости.
Направляющие векторы плоскости. Параметрические уравнения плоскости.

Контрольные вопросы

1. Каков геометрический смысл коэффициентов A, B, C в общем уравнении плоскости?

2. Любая ли плоскость является поверхностью первого порядка? А наоборот?

3. Любая ли плоскость может быть задана общим уравнением?

4. Какова связь между знаком многочлена $Ax + By + Cz + D$ и вектором нормали к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$?

Тест

1. Выберите из следущих уравнений уравнения прямых, проходящих через точку $(1, 2, 3)$:

а) $(x-2) + 2(y+3) + 3(z+1) = 0$; б) $x + 2y + 3z - 14 = 0$;

в) $2(x+1) - 3(y+2) + (z+3) = 0$; г) $3(x-1) + 2(y-2) + (z-3) = 0$;

д) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$; е) $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+3}{-3}$;

ж) $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$; з) $\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0, \\ 5x - y - z - 3 = 0. \end{cases}$

2. Выберите из предыдущих уравнений уравнения прямых, параллельных вектору $(1, 2, 3)$.

3. Выберите из уравнений п.1 уравнения плоскостей, перпендикулярных вектору $(1, 2, 3)$.

4. Выберите из уравнений п.1 уравнения параллельных плоскостей.

5. Выберите из уравнений п.1 уравнения прямых, перпендикулярных плоскости б).

6. Определите взаимное расположение плоскости $2x - 3y + 5z - 1 = 0$ и прямой $x - 1 = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-1}{2}$.

а) параллельны; б) перпендикулярны; в) пересекаются;

г) прямая принадлежит плоскости; д) скрещиваются.

7. Определите взаимное расположение плоскостей $2x - 3y + 5z - 1 = 0$ и $4x - 6y + 10z + 2 = 0$.

а) параллельны; б) перпендикулярны; в) пересекаются;

г) совпадают; д) скрещиваются.

Упражнения

1. Даны вершины $A(1;1)$, $B(-5;4)$, $C(4;5)$ треугольника. Найти:

1) длину стороны AB;

2) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,001;

3) уравнение высоты, проведенной через вершину C;

4) уравнение медианы, проведенной через вершину C;

5) точку пересечения высот треугольника;

6) длину высоты, опущенной из вершины C;

7) систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.

Сделать чертеж.

2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, где $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{2q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{3p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

3. Компланарны ли векторы $\mathbf{a} = (2;3;1), \mathbf{b} = (-1;0;-1), \mathbf{c} = (2;2;2)$?

4. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

5. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3;4;-7)$, $M_2(1;5;-4)$, $M_3(-5;-2;0)$.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;0;-2)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n}(-2;-2;-1)$.

7. Найти угол между плоскостями $x-3y+5=0$ и $2x-y+5z-16=0$.

8. Найти координаты точки A, лежащей на оси Oz и равноудаленной от точек $B(5;1;0)$ и $C(0;2;3)$.

9. Написать каноническое уравнение прямой, заданной пересечением двух плоскостей:

$$\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$$

10. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ и плоскости $x+2y+3z-14=0$.

11. Найти точку M', симметричную точке $M(0;-3;-2)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

12. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $F(-1;-2)$ и от прямой $x=-5$. Сделать чертеж.

13. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение ее расстояний до точки $F(7;0)$ и до прямой $x=3$ равно 2. Сделать чертеж.

14. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение ее расстояний до точки $F(2;0)$ и до прямой $y=4$ равно $\dfrac{1}{2}$. Сделать чертеж.

15. Дано уравнение $x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-5=0$. Требуется:

1) доказать, что оно является уравнением сферы;
2) найти координаты центра и радиуса сферы;
3) составить уравнение плоскости, проходящей через центр сферы и ось Oz;
4) составить уравнение прямой, проходящей через центр сферы и начало координат.

Глава 3

Элементы линейной алгебры

Исторически первым разделом линейной алгебры была теория *линейных уравнений*. В связи с решением линейных уравнений возникло понятие *определителя*. В 1750 г. было получено *правило Крамера* для решения систем линейных уравнений, в которых число уравнений равно числу неизвестных и определитель из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. В 1849 г. был предложен *метод Гаусса* для решения систем линейных уравнений.

В связи с изучением систем линейных уравнений и их определителей появилось понятие *матрицы*. Понятие *ранга матрицы*, предложенное Г. Фробениусом в 1877 г., позволило получить условия совместности и определенности систем линейных уравнений. Тем самым в конце 19 в. было завершено построение общей теории систем линейных уравнений.

Если в 18 и 19 вв. основное содержание линейной алгебры составляли системы линейных уравнений и теория определителей, то в 20 в. центральное положение занимают понятие *векторного пространства* и связанные с ним понятия *линейного оператора*, билинейной и полилинейной функции на векторном пространстве.

Линейная алгебра имеет многочисленные приложения во многих областях науки, в том числе и в экономике. Одним из наиболее известных таких приложений является математическая модель межотраслевого баланса, предложенная известным американским экономистом В. Леонтьевым в 1936 г.

3.1 Системы линейных уравнений

3.1.1 Основные понятия и определения

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

где a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ называются *коэффициентами* системы линейных уравнений, b_i $(i = \overline{1,m})$ – *свободными членами*, а x_j $(j = \overline{1,n})$ – *неизвестными*. Коэффициенты системы линейных уравнений и свободные члены предполагаются известными действительными числами, а неизвестные x_j требуется определить. *Решением* системы (3.1) называется упорядоченный набор n действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, при подстановке которых вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно, все уравнения системы (3.1) обращаются в верные числовые равенства.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае. Для любой системы линейных уравнений возможны только три случая:

а) система несовместна;

б) система имеет единственное решение (в этом случае она называется *определенной*);

в) система имеет бесконечное множество решений (в этом случае она называется *неопределенной*).

Промежуточный случай, когда решений конечное число, притом более одного, как будет показано ниже, невозможен.

Решить систему линейных уравнений – значит выяснить, какой из этих случаев имеет место и в случае (б) найти единственное решение, а в случае (в) описать множество всех решений.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают, т. е. каждое решение первой системы является решением второй и наоборот – каждое решение второй системы является решением первой.

3.1.2 Метод Гаусса

Среди известных методов решения систем линейных уравнений одним из наиболее удобных является *метод последовательного исключения неизвестных*, или *метод Гаусса*[1]. Суть метода Гаусса заключается в том, что при помощи элементарных преобразований система приводится к такому виду, из которого все ее решения усматриваются непосредственно. При этом под *элементарными преобразованиями* понимают следующие:

1) вычеркивание уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0; \tag{3.2}$$

2) перестановка местами уравнений системы;

3) умножение обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число;

4) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

При элементарных преобразованиях получается система, равносильная исходной.

Итак, рассмотрим метод Гаусса. Возможны два случая:

а) Среди уравнений системы есть уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b \neq 0. \tag{3.3}$$

Тогда, очевидно, система несовместна и задача решена.

б) Среди уравнений системы нет уравнений вида (3.3). Вычеркнем из системы все уравнения вида (3.2). Тогда в каждом уравнении системы хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Рассмотрим первое уравнение. Можно считать, что $a_{11} \neq 0$ (в противном случае можно временно перенумеровать неизвестные, а когда будет найдено решение – сделать обратную перенумерацию). Исключим теперь x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для исключения x_1 из i -го уравнения прибавим

[1]К. Гаусс (1755–1855) – великий немецкий математик, астроном, физик и геодезист.

к обеим частям i-го уравнения соответствующие части преобразованного первого уравнения, умноженные на $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ $(i = \overline{2, m})$. В результате этих преобразований система примет вид

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad \boxed{\begin{array}{l} a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a'_{m2}x_2 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{array}} \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Применим те же рассуждения к остаточной (обведенной) части системы (3.4). В результате мы или установим, что система несовместна, или сделаем следующий шаг, исключив переменную x_2 из всех уравнений, начиная с третьего и т. д. В конце концов мы придем к одному из двух случаев: либо система несовместна, либо система будет иметь вид

$$\left\{\begin{array}{llllll} b_{11}x_1+ & b_{12}x_2 & +...+ & b_{1r}x_r & +...+ & b_{1n}x_n = c_1, \\ & b_{22}x_2 & +...+ & b_{2r}x_r & +...+ & b_{2n}x_n = c_2, \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & b_{rr}x_r & +...+ & b_{rn}x_n = c_r, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

где $b_{ii} \neq 0$ $(i = \overline{1, r})$, $r \leq m$. Решить систему уравнений (3.5) уже нетрудно. Возможны опять два случая:

1) $r = n$. Тогда из последнего уравнения находим $x_n = \dfrac{c_n}{b_{nn}}$, подставляя найденное значение в предпоследнее уравнение , находим x_{n-1} и т.д.

2) $r < n$. Тогда систему (3.5) можно записать в виде

$$\left\{\begin{array}{llll} b_{11}x_1+ & b_{12}x_2 + ...+ & b_{1r}x_r = c_1 - b_{1r+1}x_{r+1} - ... - b_{1n}x_n, \\ & b_{22}x_2 + ...+ & b_{2r}x_r = c_2 - b_{2r+1}x_{r+1} - ... - b_{2n}x_n, \\ & . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & & b_{rr}x_r = c_r - b_{rr+1}x_{r+1} - ... - b_{rn}x_n \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Неизвестные $x_{r+1}, ..., x_n$, стоящие в правых частях уравнений системы (3.6), называются *свободными*. Их можно приравнять каким угодно действительным числам и затем так же, как и в предыдущем случае, найти $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$. Таким образом, в этом случае система имеет бесконечное множество решений.

Прежде чем рассмотреть примеры, заметим, что вместо преобразований над системой линейных уравнений можно производить аналогичные преобразования над соответствующей таблицей (матрицей):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

в которой записаны коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений (для удобства столбец свободных членов отделяем чертой). При этом будем использовать знак $\sim$, означающий равносильность соответствующих этим матрицам систем уравнений.

Примеры. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.

$$1)\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

Данной системе соответствует матрица

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Отметим, что во втором переходе к равносильной системе мы предварительно поменяли местами вторую и третью строки, а в третьем – третью строку с четвертой, которую поделили пополам. В конце мы вычеркнули строку, целиком состоящую из нулей. Окончательно получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \\ \quad\quad 2x_3 - x_4 = 1 \\ \quad\quad\quad x_4 = 1, \end{cases}$$

из которой последовательно (снизу вверх) находим значения неизвестных $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$. Итак, исходная система уравнений имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

$$2)\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Выпишем матрицу этой системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 15 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Система несовместна, т. к. последнее уравнение имеет вид
$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1$.

$$3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 2. \end{cases}$$

Выпишем матрицу этой системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя матрица получена из предыдущей перестановкой третьего и четвертого столбцов, т. е. изменением нумерации переменных x_3 и x_4. Из ее вида ясно, что свободными переменными будут x_3 и x_5. Перенося их в правую часть соответствующей системы уравнений, получим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 = x_3 - x_5 + 1, \\ -3x_2 + 3x_4 = -x_3 + x_5 - 2, \\ x_4 = 4x_5 + 1. \end{cases}$$

Положим $x_3 = \alpha,\ x_5 = \beta$, где α и β – произвольные действительные числа. Тогда ,

$$x_4 = 4\beta + 1, \quad 3x_2 = 3(4\beta + 1) + \alpha - \beta + 2 = \alpha + 11\beta + 5, \quad x_2 = \frac{\alpha + 11\beta + 5}{3},$$

$$x_1 = -3x_2 + x_4 + x_3 - x_5 + 1 = -\alpha - 11\beta - 5 + 4\beta + 1 + \alpha - \beta + 1 = -8\beta - 3.$$

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений вида:

$$x_1 = -8\beta - 3, \quad x_2 = \frac{\alpha + 11\beta + 5}{3}, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = 4\beta + 1, \quad x_5 = \beta,$$

где α и β – произвольные действительные числа.

Основные термины

Система линейных уравнений. Коэффициенты, свободные члены, неизвестные.
Решение системы линейных уравнений.
Совместные, несовместные, определенные, неопределенные системы.
Равносильные системы.
Элементарные преобразования системы линейных уравнений.
Свободные неизвестные.

Контрольные вопросы

1. Что значит решить систему линейных уравнений?

2. В чем суть метода последовательного исключения неизвестных?

3. Сколько решений имеет одно уравнение с двумя (тремя) неизвестными? Какова его геометрическая интерпретация?

4. Дайте геометрическую интерпретацию системы линейных уравнений с двумя (тремя) неизвестными.

5. Рассмотрите с точки зрения предыдущей интерпретации несовместную, определенную и неопределенную системы уравнений.

6. Объясните, используя геометрическую интерпретацию, почему система линейных уравнений не может иметь более одного, но конечное множество решений.

7. Каково множество решений уравнения $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$?

8. Каково множество решений уравнения $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$?

Тест

1. Система трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными может иметь количество решений, равное:

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) ∞.

2. Система четырех линейных уравнений с тремя неизвестными может иметь количество решений, равное:

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) ∞.

3. Система n линейных уравнений с n неизвестными всегда является:

а) совместной; б) несовместной; в) определенной; г) неопределенной.

4. Какие из следующих преобразований системы линейных уравнений приводят к равносильной системе?

а) Умножение обеих частей одного из уравнений системы на -1;

б) умножение обеих частей одного из уравнений системы на 0;

в) добавление (удаление) к системе уравнения $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$;

г) добавление (удаление) к системе уравнения $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 1$.

3.2 Матрицы

3.2.1 Определение матрицы. Операции над матрицами

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, составленная из чисел. Матрицы записывают в квадратных или круглых скобках. В общем виде матрица размера $m \times n$ записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где числа a_{ij} ($i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$) называются элементами матрицы. При этом первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент. Более компактное обозначение этой же матрицы имеет вид $(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$

или просто (a_{ij}). Часто матрицы обозначают одной буквой, например, матрица A. Если хотят указать размер матрицы, то пишут $A_{m\times n}$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), называется *квадратной*. При этом число ее строк (столбцов) называется *порядком* матрицы.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается буквой O.

Определим основные *операции над матрицами*: сложение матриц, умножение матрицы на число и умножение матриц.

Суммой матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т. е. $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$.
Например, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0,3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0,7 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
Отметим, что для матриц A и B с разными размерами операция сложения лишена смысла.

Произведением матрицы на число λ называется матрица, полученная из исходной путем умножения каждого ее элемента на число λ, т. е. $\lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij})$.
Например, $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 1 \\ 2/3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.
Из определений операций сложения матриц и умножения матриц на числа, очевидным образом следует, что для любых матриц A и B и любых чисел α, β выполняются следующие свойства:

1) $A + B = B + A$ (*коммутативность* сложения матриц);
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*ассоциативность* сложения матриц);
3) $A + O = A$;
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
5) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7) $1 \cdot A = A$;
8) $0 \cdot A = O$.

Заметим, что для любой матрицы A существует матрица, которая в сумме с данной дает нулевую матрицу. Такую матрицу называют *противоположной* к матрице A и обозначают $-A$. Очевидно, что матрица $-A$ имеет те же размеры, что и матрица A, а ее элементы противоположны элементам матрицы A. Очевидно также, что $(-1)A = -A$. Сумму $A + (-B)$ будем далее записывать как $A - B$ и называть *разностью матриц* A и B.

Произведение двух матриц определено только в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Если матрица A имеет размеры $m\times n$, а матрица B – размеры $n\times p$, то их произведение AB имеет размеры $m\times p$. Для того чтобы вычислить элемент матрицы AB, стоящий в i-й строке и j-м столбце, нужно умножить i-ю строку матрицы A на j-й столбец матрицы B. При этом под произведением строки на столбец понимается сумма попарных произведений их соответствующих элементов:

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Таким образом, произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ $(i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,p})$.

Примеры.

$$1)\quad (1\ 2\ 3)\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = (1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6) = (32),$$

$$2)\quad \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\cdot(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix}4\cdot1 & 4\cdot2 & 4\cdot3\\5\cdot1 & 5\cdot2 & 5\cdot3\\6\cdot1 & 6\cdot2 & 6\cdot3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\5 & 10 & 15\\6 & 12 & 18\end{pmatrix},$$

$$3)\quad \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 6\\5 & 3\end{pmatrix},$$

$$4)\quad \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 7 & -5\\6 & 3 & -3\\3 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$5)\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},$$

$$6)\quad \begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\-3 & -6 & -9\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Заметим, что, как следует из приведенных выше примеров, в общем случае $AB \neq BA$, т. е. *умножение матриц не коммутативно.* Более того, произведение матриц AB может быть определено, а произведение BA не иметь смысла. Примеры 5 и 6 показывают еще одно существенное отличие свойств операции умножения матриц от операции умножения действительных чисел: *произведение ненулевых матриц может быть равно нулевой матрице.* Более того, может быть $AB = O$, а $BA \neq O$. Если для некоторых матриц A, B $AB = BA$, то такие матрицы называются *перестановочными* или *коммутирующими.*

Квадратная матрица вида

$$L = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\0 & \lambda_2 & ... & 0\\0 & 0 & ... & \lambda_n\end{pmatrix}$$

называется *диагональной.* В частности, если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$, то такая матрица называется *скалярной.* Заметим, что умножение матрицы $A_{m\times n}$ на диагональную матрицу L справа соответствует умножению i-го столбца матрицы A на λ_i. Аналогично умножение матрицы $A_{n\times p}$ на матрицу L слева соответствует умножению i-й строки на число λ_i. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной.* Будем обозначать эту матрицу буквой E. Непосредственным вычислением проверяется, что для любой прямоугольной матрицы A результат ее умножения слева или справа на соответствующую по размеру единичную матрицу дает ту же матрицу A. В частности, для квадратной матрицы

$$AE = EA = A.$$

Таким образом, единичная матрица обладает свойством, аналогичным свойству числа 1 (отсюда и ее название).

Заметим, что скалярная матрица совпадает с матрицей λE и умножение на нее любой матрицы равносильно умножению матрицы на число λ, т. е. на скаляр.

Можно доказать, что для любых матриц A, B и C и любого числа α справедливы следующие равенства (при условии, что одна из частей равенства имеет смысл):

1)$A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность умножения матриц),

2)$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

3)$(A + B)C = AC + BC,\ C(A + B) = CA + CB$

(дистрибутивность умножения матриц относительно сложения).

Обратной к матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1}, обладающая свойством $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Условия существования и алгоритм вычисления обратной матрицы будут рассмотрены после изучения определителей. Пока же отметим, что обратная матрица существует не для любой матрицы (даже ненулевой). Матрица, для которой существует обратная, называется *обратимой*. Из определения ясно, что обратимыми могут быть только квадратные матрицы. Заметим, что операция деления матриц не определяется из-за некоммутативности операции умножения матриц. Вместо частного $\dfrac{A}{B}$ можно рассматривать два произведения AB^{-1} и $B^{-1}A$ (при условии обратимости матрицы B).

Теорема 3.2.1 *Если A и B – обратимые матрицы одного порядка, то их произведение также является обратимой матрицей и* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить два равенства:
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$ и $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$. Проверим, например, первое из них. Используя свойство ассоциативности умножения матриц, имеем
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(EB) = B^{-1}B = E$.

Если строки матрицы A записать в столбцы (при этом бывшие столбцы станут строками), то мы получим новую матрицу, которая называется *транспонированной* к матрице A и обозначается A' или A^T. Таким образом,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если матрица A совпадает со своей транспонированной ($A^T = A$), то она называется *симметричной*. Если же $A^T = -A$, то матрица A называется *кососимметричной*. Очевидно, что как симметричные, так и кососимметричные матрицы должны быть квадратными. Отметим следующие свойства операции транспонирования, справедливые для любых матриц A и B и любого числа α :

1) $(A^T)^T = A$, 2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,
3) $(A + B)^T = A^T + B^T$, 4) $(AB)^T = B^T A^T$,
5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Основные термины

Матрица. Порядок матрицы. Квадратная матрица.

Операции над матрицами (сумма матриц, произведение на число, произведение матриц).

Нулевая матрица. Противоположная матрица.

Перестановочные (коммутирующие) матрицы.

Диагональная, скалярная, единичная матрицы.

Обратная матрица. Обратимая матрица.

Транспонированная матрица. Симметричная и кососимметричная матрицы.

Контрольные вопросы

1. Для каких матриц определена операция сложения (умножения)?
2. Обладает ли сложение матриц свойством коммутативности (ассоциативности)? Запишите эти свойства.
3. Обладает ли умножение матриц свойством коммутативности (ассоциативности)? Запишите эти свойства.
4. Дистрибутивно ли умножение матриц относительно сложения? А сложение относительно умножения? Запишите эти свойства.
5. Любая ли матрица имеет противоположную (обратную)?
6. Почему не определяется операция деления матриц?
7. Докажите свойства операции транспонирования матриц.

Тест

1. Сумма матриц $A + B$ определена:

а) для любых матриц A и B; б) только для квадратных матриц A и B;

в) если число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B;

г) если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

д) если матрицы A и B имеют одинаковые размеры;

е) только для квадратных матриц A и B одного порядка.

2. Произведение матриц AB определено

(см. варианты ответов на вопрос 1).

3. Произведение строки длины m на столбец высоты n $(m \neq n)$:

а) есть строка длины m; б) есть столбец высоты n;

в) не определено; г) есть матрица размера $m \times n$;

д) есть матрица размера $n \times m$; е) есть матрица размера 1×1.

4. Произведение столбца высоты n на строку длины m $(m \neq n)$

(см. варианты ответов на вопрос 3).

5. Какие из условий необходимы для обратимости матрицы A?

а) Матрица A – квадратная; б) $|A| \neq 0$; в) $|A| = 0$; г) $A \neq 0$.

6. Какие из следующих равенств верны для любых матриц (при условии, что обе части равенства имеют смысл)?

а) $A+B = B+A$; б) $AB = BA$; в) $A(BC) = (AB)C$; г) $(A+B)C = AC+BC$;

д) $(A^{-1})^{-1} = A$; е) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

7. Какие из следующих равенств верны для любых матриц (при условии, что обе части равенства имеют смысл)?

а) $(A + B)^T = A^T + B^T$; б) $(AB)^T = A^T B^T$; в) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;

г) $A^T A = AA^T$; д) $(A^T)^n = (A^n)^T$.

3.3 Определители

3.3.1 Перестановки

Пусть даны n элементов $a_1, a_2, ..., a_n$ (например, это могут быть числа $1, 2, 3, ..., n$). *Перестановкой* этих элементов называется любое их расположение в определенном порядке. Как известно, всего из n элементов можно составить $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ перестановок. Перестановку будем в дальнейшем обозначать одной буквой (например, τ). Тогда $\tau(k)$ будет означать k-й элемент перестановки. Перестановка, соответствующая исходному порядку элементов, называется *тождественной*. Если какая-нибудь пара (a_i, a_k) элементов перестановки расположена в ней так, что элемент с большим номером стоит раньше элемента с меньшим номером, то говорят, что эти элементы образуют *инверсию*. Перестановки с четным числом инверсий называются *четными*, а перестановки с нечетным числом инверсий – *нечетными* перестановками. Например, перестановка $\tau = (4, 1, 3, 2)$ является четной, т. к. она имеет 4 инверсии: (4,1),(4,3),(4,2),(3,2). *Знак перестановки* τ (обозначается $sgn(\tau)$) определяется равенством

$$sgn(\tau) := (-1)^{\text{число инверсий } \tau}.$$

Таким образом, знаком четной перестановки называется число $+1$, а знаком нечетной – число -1.

3.3.2 Определение определителя

Определителем квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое обозначается $detA$ или $|A|$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$, равное

$\sum\limits_{\tau \in S_n} sgn(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{n\tau(n)}$,

где сумма берется по всем перестановкам τ из множества S_n всех перестановок из n элементов. Таким образом, в этой сумме $n!$ слагаемых, каждое из которых является, с точностью до знака, произведением n элементов матрицы A. Причем, в каждое произведение входит ровно по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца. Последовательность таких элементов называется *диагональю матрицы* A. Каждое из этих произведений входит в указанную сумму со знаком, определяемым знаком перестановки, составленной из вторых индексов (номеров столбцов) при условии, что первые индексы (номера строк) записаны в естественном порядке $(1, 2, 3, ..., n)$.

Рассмотрим вычисление определителей в случае матриц невысокого порядка непосредственно по определению. Для матрицы, состоящей из одного элемента (т. е. первого порядка), $A = (a)$, согласно определению, имеем $|A| = a$. Для определителей второго порядка получаем уже известную нам формулу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для определителей третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для определителей более высокого порядка в общем случае получается слишком большое число слагаемых (например, уже для определителя четвертого порядка имеем 24 слагаемых, а для определителя пятого порядка – 120 слагаемых). Поэтому для их вычисления обычно используются другие методы, которые будут рассмотрены ниже.

В некоторых частных случаях и для матриц высокого порядка определитель может быть легко вычислен исходя из определения. Например, определитель *треугольной матрицы* (матрицы, в которой все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю) равен произведению элементов главной диагонали, т. к. все остальные диагонали содержат хотя бы один нуль:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

Главной называется диагональ $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, соответствующая тождественной перестановке. Диагональ $(a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, ..., a_{n1})$, соответствующая перестановке $(n, n-1, n-2, ..., 1)$, называется *побочной.* Число инверсий в этой перестановке равно $(n-1)+(n-2)+...+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n-1} & 0 \\ . & . & . & . & \\ a_{n1} & 0 & ... & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}...a_{n1}.$$

3.3.3 Свойства определителей

Перечислим основные свойства определителей, которые следуют из его определения.

Свойство 1. При транспонировании определитель не меняется , т. е. $|A^T| = |A|$.

Из этого свойства следует, что все свойства, касающиеся строк, справедливы и для столбцов, и наоборот. Дальнейшие свойства будем формулировать для строк.

Свойство 2. При умножении всех элементов какой-либо строки определителя на некоторое число определитель умножается на это число.

Свойство 3. Определитель, содержащий нулевую строку, равен нулю.

Свойство 4. Перестановка двух строк определителя умножает его на (-1).

Свойство 5. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

Свойство 6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

Свойство 7. Если i-я строка определителя представлена в виде $(a_{i1}+b_{i1}, a_{i2}+b_{i2}, ..., a_{in}+b_{in})$, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых i-я строка имеет вид $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, а в другом – $(b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in})$. Остальные строки те же, что и в исходном определителе.

Свойство 8. Определитель не изменится, если к любой строке прибавить другую строку, умноженную на любое число.

При вычислении определителей методом Гаусса используются те же преобразования, что и при решении систем линейных уравнений этим методом для приведения матрицы к треугольному виду. При этом нужно учитывать, как меняется определитель при этих преобразованиях. Это следует из свойств определителя, которые были приведены выше.

Рассмотрим пример вычисления определителя методом Гаусса.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Прибавим к третьей строке первую, а к четвертой и пятой – первую, умноженную соответственно на (-1) и на (-2).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Переставим местами второй и последний столбцы.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

Переставим местами вторую и последнюю строки, а затем к третьей строке прибавим вторую (новую), умноженную на 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 27 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Переставим местами третий и четвертый столбцы и третью и пятую строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 27 & -11 \end{vmatrix} =$$

Прибавим к четвертой и пятой строкам третью, умноженную соответственно на (-2) и на (-5).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -1 \end{vmatrix} =$$

Прибавим к последней строке четвертую, умноженную на (-17).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 1.$$

3.3.4 Миноры и алгебраические дополнения

Определение 3.3.1 *Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка (или ее определителя) называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца (т. е. строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}). Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.*

Теорема 3.3.1 (о разложении определителя) *Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная квадратная матрица n-го порядка. Тогда имеют место следующие формулы:*

1) $|A| = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$ $(i = \overline{1,n})$
(разложение по элементам i-й строки),

2) $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$ $(j = \overline{1,n})$
(разложение по элементам j-го столбца),

т. е. определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Таким образом, эта теорема сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей $(n-1)$-го порядка. Обычно при вычислении определителей используют метод разложения по строке или столбцу и свойства определителей, перечисленные выше. Продемонстрируем это на примере вычисления того же определителя.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Прибавим ко второму столбцу четвертый, умноженный на 2, а к третьему – четвертый, умноженный на (-2), чтобы во второй строке все элементы, кроме одного, стали равными 0.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Разложим определитель по второй строке.

$$= (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

Прибавим к третьей строке первую, умноженную на (-1), а к четвертой – первую, умноженную на (-2), чтобы во втором столбце все элементы, кроме одного, стали равны 0.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Разложим определитель по второму столбцу.

$$= (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Разложим по первому столбцу.

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot (-1) - 3 \cdot 0) = 1.$$

Из теоремы (3.3.1) следует

Теорема 3.3.2 *Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, т. е.*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \text{ при } i \neq k, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0 \text{ при } j \neq k,$$

Теорема 3.3.3 (об умножении определителей) *Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Тогда определитель их произведения равен произведению их определителей:* $|AB| = |A||B|$.

Основные термины

Перестановка. Тождественная перестановка.
Инверсия. Знак перестановки. Четные и нечетные перестановки.
Определитель матрицы.
Диагональ квадратной матрицы. Главная и побочная диагонали.
Минор, алгебраическое дополнение.

Контрольные вопросы

1. Сколько существует перестановок из n элементов?
2. Сколько диагоналей имеет квадратная матрица n-го порядка?
3. Может ли определитель ненулевой матрицы равняться нулю?
4. Чему равен определитель единичной матрицы?
5. Вычислите устно определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Тест

1. Какие из следующих слагаемых имеются в формуле для вычисления определителя матрицы (a_{ij}) пятого порядка?

а) $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$; б) $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$; в) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$;
г) $a_{31}a_{13}a_{24}a_{42}a_{55}$; д) $a_{12}a_{23}a_{14}a_{25}a_{33}$.

2. Какие из следующих слагаемых имеются в формуле для вычисления определителя матрицы (a_{ij}) пятого порядка со знаком $+$?

а) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$; б) $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$; в) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$;
г) $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$; д) $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$.

3. Как изменится определитель, если в нем переставить две строки ?

а) Не изменится; б) изменит знак на противоположный;
в) это зависит от того, какие строки переставляются;
г) обратится в нуль; д) это зависит от порядка определителя.

4. Как изменится определитель, если в нем сделать циклическую перестановку столбцов (1-й столбец поставить на 2-е место, 2-й – на 3-е, ..., последний – на первое)?

См. ответы на вопрос 3.

5. Как изменится определитель, если первую строку умножить на 2 и прибавить к ней утроенную вторую?

а) Не изменится; б) увеличится в 2 раза; в) увеличится в 3 раза;
г) увеличится в 5 раз; д) увеличится в 6 раз.

6. Как изменится определитель, если удвоенный первый столбец прибавить ко второму, умноженному на 3?

См. ответы на вопрос 3.

7. Как изменится определитель n-го порядка, если все его элементы умножить на число λ?

а) Не изменится; б) изменит знак на противоположный;
в) умножится на λ; г) умножится на λ^2; д) умножится на λ^n.

8. Как изменится определитель 5-го порядка, если переставить его столбцы в обратном порядке?

а) Не изменится;
б) изменит знак на противоположный;
в) станет равным нулю.

9. Какие из следующих равенств верны для любых матриц A, B и чисел λ (при условии, что обе части равенства имеют смысл)?

а) $|A+B| = |A| + |B|$; б) $|AB| = |A||B|$; в) $|\lambda A| = |\lambda||A|$; г) $|A^n| = |A|^n$;
д) $|A^T| = |A|$; е) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$; ж) $|-A| = -|A|$.

3.4 Обращение матриц и решение систем

3.4.1 Вычисление обратной матрицы

Теорема 3.4.1 *Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$. Если $|A| \neq 0$, то обратная матрица вычисляется по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A $(i, j = \overline{1, n})$.

Доказательство. 1) Если $|A| = 0$, то матрица A необратима. Действительно, если предположить, что A обратима, то $AA^{-1} = E$ и по теореме об умножении определителей $|E| = |A||A^{-1}| = 0$. Но определитель единичной матрицы, очевидно, равен 1.

2) Если $|A| \neq 0$, то непосредственным вычислением легко проверить (используя теоремы 3.3.1 и 3.3.2), что для матрицы A^{-1}, определенной формулой (3.7) имеют место равенства $AA^{-1} = E$ и $A^{-1}A = E$.

Пример 3.4.1 Вычислить обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим сначала определитель матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 2 \cdot (-4) = -2.$$

При этом мы сначала из первой строки вычли третью, умноженную на 3, а затем разложили полученный определитель по элементам третьего столбца. Так как определитель матрицы отличен от нуля, то обратная к ней существует. Для ее вычисления подсчитаем все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & 6 \\ 2 & -6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2,5 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что с вычислительной точки зрения этот метод нахождения обратной матрицы является достаточно громоздким (приходится вычислять один определитель n-го порядка и n^2 определителей $(n-1)$-го порядка). Более простым является метод Гаусса. Рассмотрим его, чтобы не усложнять обозначений, на примере матриц третьего порядка.

Нахождение обратной матрицы A^{-1} означает решение матричного уравнения $AX = E$. Здесь A – данная матрица, X – неизвестная матрица A^{-1}, E – единичная матрица.

Запишем это матричное уравнение более подробно:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в левой части и приравнивая соответствующие элементы матриц в левой и правой частях, получим три системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0, \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0, \end{cases} \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1, \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = 0, \end{cases} \begin{cases} a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0, \\ a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} = 0, \\ a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} = 1. \end{cases}$$

Заметим, что все эти три системы имеют одну и ту же матрицу коэффициентов (матрицу A) и отличаются лишь обозначением неизвестных и столбцами свободных членов. Поэтому все эти три системы можно решать одновременно (методом Гаусса). Для этого выписывается матрица A, а за вертикальной чертой – матрица E. Затем с помощью элементарных преобразований матрица слева приводится к единичной матрице (при этом те же преобразования одновременно выполняются над матрицей справа). Тогда получившаяся справа матрица и будет обратной матрицей A^{-1}. Если же $detA = 0$, то это проявится в несовместности хотя бы одной из решаемых систем, т. е. некоторая строка в матрице слева будет нулевой, а в матрице справа – ненулевой.

Изложенный выше метод поясним на примерах.

Пример 3.4.2 Найдем методом Гаусса матрицу, обратную к рассмотренной в предыдущем примере.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Переставим третью и первую строки, затем прибавим удвоенную первую к остальным.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Теперь поменяем местами вторую и третью строки и из второй вычтем утроенную третью.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim$$

Теперь тем же методом, идя снизу вверх, будем получать нули выше главной диагонали. Прибавим ко второй строке третью, умноженную на 2, и к первой – третью.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim$$

Из первой строки вычтем вторую.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim$$

Поделим теперь первую и третью строки на (-1), а вторую – на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2,5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2,5 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример 3.4.3 Найти матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Проделаем преобразования, аналогичные предыдущему примеру:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя строка свидетельствует о том, что определитель матрицы A равен нулю (система несовместна). Следовательно, матрица A не обратима.

Заметим, что с помощью обратной матрицы можно решать матричные уравнения вида $AX = B$ или $XA = B$. Если матрица A обратима, то, умножая обе части первого из этих уравнений на матрицу A^{-1} слева, получим $X = A^{-1}B$ (если это произведение имеет смысл). Аналогично для второго уравнения имеем $X = BA^{-1}$.

Пример 3.4.4 Решить матричное уравнение $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица A обратима и $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2,5 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (см. пример 1). Следовательно,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2,5 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1,5 & 4,5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Проверку можно сделать путем умножения матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1,5 & 4,5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Заметим, что уравнение $XA = B$ в данном случае не имеет решений, т. к. произведение матриц XA должно иметь 3 столбца. Соответственно этому не имеет смысла произведение BA^{-1}.

Квадратная матрица A называется *вырожденной* (или *особенной*), если $|A| = 0$, и *невырожденной (неособенной)* в противном случае. Согласно теореме 3.4.1 матрица A обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная. Из теоремы 3.3.3 следует, что произведение невырожденных матриц одного порядка является невырожденной матрицей. Это видно также из теоремы 3.2.1.

3.4.2 Системы n линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{3.8}$$

Пусть A – основная матрица этой системы уравнений, x – столбец неизвестных, b – столбец свободных членов, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (3.8) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$Ax = b.$$

Если матрица A обратима, то, умножая обе части последнего уравнения на матрицу A^{-1} слева, получим $A^{-1}Ax = A^{-1}b$. Но $A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = Ex = x$, т. е. получаем решение $x = A^{-1}b$. Если учесть формулу (3.7) для вычисления обратной матрицы, то получим

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в соответствии с теоремой (3.3.1) $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + ... + A_{ni}b_n$ есть определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов b. Если обозначить этот определитель через Δ_i $(i = \overline{1,n})$, а определитель матрицы A через Δ, то получим

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ ... \\ \Delta_n \end{pmatrix}, \text{ т. е. } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \; (i = \overline{1,n}). \tag{3.9}$$

Эти формулы называются *формулами Крамера.*[2] Система n линейных уравнений с n неизвестными, в которой основная матрица невырождена, называется *системой Крамера.* Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.4.2 (Правило Крамера) *Система Крамера имеет единственное решение, которое находится по формулам (3.9).*

Пример 3.4.5 Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Сначала найдем определитель основной матрицы системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 52 \neq 0.$$

Следовательно, система определенная и можно применить формулы Крамера. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 52, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 52,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 52, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 52.$$

[2]Г. Крамер (1704-1752) – швейцарский математик.

Итак,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1,\ x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 1.$$

Основные термины

Вырожденная (особенная) и невырожденная (неособенная) матрицы.
Система Крамера. Формулы Крамера. Правило Крамера.

Контрольные вопросы

1. Как связана обратимость матрицы с ее определителем?
2. Может ли произведение необратимых матриц быть обратимой матрицей?
3. Будет ли произведение вырожденной матрицы на невырожденную вырожденной матрицей?
4. Какими методами можно решить матричное уравнение $AX = B$? Каковы условия применимости каждого из них?
5. Может ли система Крамера быть: а) несовместной? б) неопределенной?

Тест

1. Система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, несовместна:
а) всегда; б) когда основная матрица этой системы – невырожденная;
в) когда основная матрица этой системы – вырожденная; г) никогда.
2. Правило Крамера применимо к следующим системам линейных уравнений:
а) любым; б) любым с квадратной матрицей; в) с вырожденной матрицей;
г) с невырожденной матрицей.
3. Матричное уравнение $AX = B$ имеет решение только, если
а) матрица A – квадратная; б) обе матрицы A и B – квадратные;
в) матрица A – невырожденная;
г) число строк матрицы A равно числу строк матрицы B;
д) число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B.

3.5 Векторные пространства

3.5.1 Определение векторного пространства

Пусть имеется множество V элементов любой природы, для которых определены операции сложения элементов множества V и умножения элементов множества V на действительные числа. Тогда, если эти операции удовлетворяют следующим условиям (аксиомам векторного пространства):
1) $\forall a, b, c \in V \quad (a + b) + c = a + (b + c)$,
2) $\forall a, b \in V \quad a + b = b + a$,
3) $\exists \theta \in V$, такой, что $\forall a \in V \quad a + \theta = a$,
4) $\forall a \in V\ \exists a' \in V$ такой, что $a + a' = \theta$,
5) $\forall a \in V 1 \cdot a = a$,

6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ и $\forall a \in V$ $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$,

7) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ и $\forall a, b \in V$ $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$,

8) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ и $\forall a \in V$ $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$,

то множество V с введенными операциями сложения и умножения на числа называется действительным *векторным* (или *линейным*) *пространством.* При этом элементы множества V называются *векторами.*

В дальнейшем, чтобы отличать векторы от чисел, будем обозначать их жирным шрифтом. Элемент θ, о котором идет речь в аксиоме (3), будем называть *нулевым вектором* и обозначать $\mathbf{0}$. Элемент a', о котором идет речь в аксиоме (4), называется *противоположным* к $\mathbf{a}$ и обозначается $-\mathbf{a}$. Сумма $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ в дальнейшем обозначается $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ и называется *разностью* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Исходя из аксиом векторного пространства, легко доказываются следующие свойства (для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$):

$$\begin{array}{ll} 1)\quad 0\cdot\mathbf{a} = \mathbf{0}, & 2)\quad \lambda\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}, \\ 3)\quad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}, & 4)\quad \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}. \end{array}$$

3.5.2 Примеры векторных пространств и множеств, не являющихся векторными пространствами

Приведем сначала примеры векторных пространств.

1) Рассмотрим множество всех упорядоченных наборов (*кортежей*) n действительных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ $(\alpha_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1,n})$. Операции сложения и умножения на числа определим следующим образом:

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n),$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) := (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n).$$

Легко проверить, что при таких определениях все 8 аксиом векторного пространства выполняются. Это пространство называется *арифметическим n-мерным векторным пространством* и обозначается $\mathbf{R}^n$. Оно является наиболее важным примером векторного пространства.

2) Рассмотрим множество всех матриц размера $m \times n$ (с действительными элементами), которое обозначим $Mat(m, n; \mathbf{R})$, с введенными ранее операциями сложения матриц и умножения на числа. В этом случае также все аксиомы векторного пространства выполняются и, следовательно, $Mat(m, n; \mathbf{R})$ есть векторное пространство.

3) Пусть P – множество всех многочленов от одной переменной x (произвольной степени). Сумма многочленов и произведение многочлена на число определяются естественным образом:

если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$, (пусть $n \geq m$), то

$(f+g)(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$, где положено $b_n = b_{n-1} = ... = b_{m+1} = 0$,

$(\lambda f)(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$.

Легко видеть, что множество P также является векторным пространством.

4) Множество P_n всех многочленов степени не выше n (являющееся подмножеством множества P из предыдущего примера) также является векторным пространством.

5) Множество V_3 всех векторов пространства (которое мы рассматривали в аналитической геометрии) и его подмножества V_2 (всех векторов, параллельных фиксированной плоскости) и V_1 (всех векторов, параллельных фиксированной прямой) являются векторными пространствами.

Приведем теперь примеры множеств, не являющихся векторными пространствами.

1) Рассмотрим множество всех матриц (произвольного размера). На этом множестве не определена операция сложения матриц и, следовательно, не может идти речь о том, что это множество является векторным пространством.

2) Рассмотрим множество $\widetilde{P}_n$ всех многочленов степени n. На этом множестве также не определена операция сложения (точнее, операция сложения выводит за пределы этого множества). Например, складывая два многочлена n-й степени $f(x) = x^n + x, \quad g(x) = -x^n + 1$, получим многочлен $(f+g)(x) = x + 1$ первой степени, который не принадлежит множеству $\widetilde{P}_n$ (предполагаем, что $n \neq 1$). Следовательно, это множество не является векторным пространством.

3) Пусть $Mat(m, n; \mathbf{R}^+)$ – множество всех матриц фиксированного размера $m \times n$ с положительными элементами. На этом множестве определена операция сложения матриц, но не определена операция умножения на числа (умножение на отрицательное число выводит матрицу за пределы рассматриваемого множества), поэтому оно также не является векторным пространством.

3.5.3 Подпространства

Определение 3.5.1 *Пусть V – векторное пространство, U – подмножество множества V. Если множество U является векторным пространством относительно операций сложения и умножения на числа, которые определены в V, то U называется подпространством пространства V.*

Из приведенных в п.2 примеров следует, что пространство P_n является подпространством пространства P, а V_1 и V_2 являются подпространствами пространства V_3; подмножества $\widetilde{P}_n \subset P$ и $Mat(m, n, \mathbf{R}^+) \subset Mat(m, n, \mathbf{R})$ не являются подпространствами. Для того чтобы выяснить является ли некоторое подмножество U векторного пространства V подпространством, можно воспользоваться следующим предложением.

Предложение 3.5.1 (Критерий подпространства) *Подмножество $U \subset V$ векторного пространства V является подпространством в том и только в том случае, если выполняются два условия:*

1) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$,

2) $\forall \lambda \in \mathbf{R}\ \forall \mathbf{a} \in U \quad \lambda \mathbf{a} \in U$,

т. е. множество U устойчиво (замкнуто) относительно операций сложения и умножения на числа, определенных в V.

Доказательство. Необходимость условий (1) и (2) очевидна, т. к. операции сложения и умножения на числа должны быть определены на множестве U. Наоборот, пусть эти условия выполнены. Выполнимость аксиом 1,2 и 5-8 векторного пространства для любых элементов из U следует из их выполнимости для элементов множества $V \supset$. Выполнение аксиом 3 и 4 следует из условия (2), т. к. взяв произвольный вектор $\mathbf{a} \in U$, получим $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \in U$ и $(-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a} \in U$.

3.5.4 Линейная зависимость векторов

Определения линейной комбинации и линейной зависимости векторов произвольного векторного пространства совпадают с данными ранее определениями (см. п.2.1). Рассмотрим вопрос о том является ли заданная система векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_m}$ линейно зависимой. Для выяснения этого нужно решить векторное уравнение $\lambda_1\mathbf{a_1} + \lambda_2\mathbf{a_2} + ... + \lambda_m\mathbf{a_m} = \mathbf{0}$ относительно $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Если это уравнение имеет только нулевое решение, то система векторов линейно независима. В противном случае, т. е. если есть ненулевое решение, система линейно зависима.

Пример 3.5.1 Выяснить, является ли система векторов $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -2, -2)$ линейно зависимой.

Для подсчета линейной комбинации векторов удобно их записывать в виде столбцов.

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\-2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2\lambda_1\\\lambda_1\\\lambda_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\lambda_2\\2\lambda_2\\-\lambda_2\\2\lambda_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_3\\\lambda_3\\-2\lambda_3\\-2\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3\\\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3\\\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3\\ & & 2\lambda_2 & - & 2\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие координаты, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0,\\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0,\\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0,\\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0.\end{cases}$$

Заметим, что столбцами матрицы этой системы являются как раз векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Выпишем эту матрицу и применим метод Гаусса. Столбец свободных членов, состоящий из нулей, можно не выписывать, т. к. он не будет меняться при элементарных преобразованиях.

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & -1 & -2\\0 & -2 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & -2\\0 & -2 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -1 & -1\\0 & -3 & -3\\0 & -2 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0,\\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0.\end{cases}$$

Эта система имеет ненулевые решения. Например, возьмем $\lambda_3 = 1$, тогда $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = 1$. Следовательно, $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$, т. е. система векторов линейно зависима.

Пример 3.5.2 Является ли линейно зависимой система векторов
$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 1, -1, 0)$?

Можно сразу, не повторяя выкладок предыдущей задачи, записать матрицу соответствущей системы уравнений и применить к ней метод Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \quad - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \quad \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следовательно, система векторов линейно независима.

3.5.5 Базис и координаты

В п.2.2 гл.I было дано определение базиса системы векторов. Если в качестве системы векторов взять векторное пространство (бесконечное множество векторов), то мы получим определение *базиса векторного пространства.* Там же было доказано предложение о единственности разложения произвольного вектора по векторам базиса и дано определение координат вектора в данном базисе. Здесь же мы рассмотрим примеры базисов различных векторных пространств и координат векторов в этих базисах.

Примеры.

1) В пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим систему векторов $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$ (в векторе e_i i-я компонента равна 1, а остальные – 0). Легко проверить, что эта система векторов образует базис пространства $\mathbf{R}^n$. Этот базис называется *каноническим базисом пространства* $\mathbf{R}^n$. Заметим, что только в этом базисе компоненты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ вектора $\mathbf{a}$ совпадают с его координатами.

2) Обозначим E_{ij} матрицу размера $m \times n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а остальные элементы – нули. Множество матриц E_{ij} $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ образует базис в пространстве $Mat(m, n, \mathbf{R})$. Элементы произвольной матрицы являются ее координатами в этом базисе.

3) Многочлены $1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^n$ образуют базис в пространстве P_n. Этот базис называется *каноническим базисом в пространстве* P_n. Коэффициенты произвольного многочлена из пространства P_n являются его координатами в этом базисе.

4) Любой ненулевой вектор образует базис в пространстве V_1. Любые два неколлинеарных вектора образуют базис в пространстве V_2. Любые три некомпланарных вектора образуют базис пространства V_3.

3.5.6 Размерность векторного пространства

Определение 3.5.2 *Векторное пространство V называется конечномерным, если в нем существует базис, состоящий из конечного числа векторов. В противном случае пространство называется бесконечномерным.*

В линейной алгебре изучаются только конечномерные векторные пространства.

Теорема 3.5.1 *Если пространство V конечномерно, то все его базисы состоят из одинакового числа векторов.*

Определение 3.5.3 *Число векторов базиса конечномерного векторного пространства V называется его размерностью и обозначается* $\dim V$.

Примеры.

1) Из предыдущих определений и примеров базисов, приведенных в п. 4, следует, что пространства $\mathbf{R}^n$, $Mat(m,n,\mathbf{R})$, P_n, V_1, V_2, V_3 конечномерны и $\dim \mathbf{R}^n = n$, $\dim Mat(m,n,\mathbf{R}) = mn$, $\dim P_n = n+1$, $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_3 = 3$.

2) Пространство P всех многочленов бесконечномерно. Действительно, для любого n существует система многочленов $1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^n$, которая является линейно независимой. Следовательно, в этом пространстве не существует базиса, состоящего из конечного числа векторов.

Основные термины

Векторное(линейное) пространство, векторы. Аксиомы векторного пространства.

Нулевой вектор, противоположный вектор.

Арифметическое n-мерное векторное пространство.

Подпространство.

Базис векторного пространства. Канонический базис пространства $\mathbf{R}^n$.

Конечномерное и бесконечномерное пространство. Размерность векторного пространства.

Контрольные вопросы

1. Сколько векторов в n-мерном векторном пространстве?

2. Образует ли векторное пространство множество: а) всех диагональных матриц? б) всех диагональных матриц n-го порядка?

3. Сколько подпространств имеет n-мерное векторное пространство (в зависимости от n)?

4. Образует ли система векторов $\mathbf{a}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{a}_2 = (2,3,4)$, $\mathbf{a}_3 = (3,4,5)$ базис в пространстве $\mathbf{R}^3$? Объясните почему.

5. Образуют ли векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ (из предыдущего вопроса) базис в пространстве $\mathbf{R}^3$? Почему?

6. Сколько базисов существует в n-мерном векторном пространстве?

Тест

1. Какие из следующих множеств векторов на плоскости образуют подпространство?

а) Множество всех векторов, параллельных данной прямой;

б) множество всех векторов, параллельных одному из двух данных неколлинеарных векторов;

в) множество всех векторов, лежащих внутри заданного угла;

г) множество всех векторов с началом в данной точке, концы которых лежат на данной прямой, не проходящей через эту точку;

2. Какие из следующих множеств векторов пространства образуют подпространство?
а) Множество всех векторов, параллельных данной плоскости;
б) множество всех векторов, перпендикулярных данной плоскости;
в) множество всех векторов, параллельных одновременно двум плоскостям;
г) множество всех векторов заданной длины.

3. Какие из следующих множеств векторов пространства $\mathbf{R}^n$ образуют подпространство?
а) $\{(0, x_2, ..., x_n) | x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}\}$; б) $\{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 + x_2 = 0\}$;
в) $\{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 + x_2 = 1\}$; г) $\{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

4. Какие из следующих множеств матриц образуют векторное пространство?
а) Множество всех квадратных матриц (различных порядков);
б) множество всех квадратных матриц одного порядка;
в) множество всех квадратных матриц одного порядка с положительными элементами;
г) множество всех матриц размера $m \times n$.

5. Какие из следующих подмножеств образуют подпространство пространства всех квадратных матриц порядка n?
а) Множество всех невырожденных матриц;
б) множество всех вырожденных матриц;
в) множество всех симметричных матриц;
г) множество всех диагональных матриц.

6. Какие из следующих подмножеств образуют подпространство пространства всех многочленов степени не выше n?
а) Множество всех многочленов, у которых свободный член равен 0;
б) множество всех многочленов, имеющих данный корень x_0;
в) множество всех многочленов степени ниже n;
г) множество многочленов вида $x^n + a, \quad a \in \mathbf{R}$;
д) множество многочленов вида $ax^n + b, \quad a, b \in \mathbf{R}$.

3.6 Понятие ранга матрицы и его приложения

3.6.1 Определение ранга матрицы

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$, ... , $\mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$ – ее строки,

$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, ... , $\mathbf{b}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ – ее столбцы.

На строки матрицы можно смотреть как на векторы пространства $\mathbf{R}^n$, а на столбцы – как на векторы пространства $\mathbf{R}^m$.

Определение 3.6.1 *Строчным (столбцовым) рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк (столбцов).*

Определение 3.6.2 *Минорным рангом матрицы называется максимальный порядок ее отличных от нуля миноров.*

Теорема 3.6.1 (о ранге матрицы) *Строчный, столбцовый и минорный ранги матрицы совпадают.*

Эта теорема позволяет говорить просто о ранге матрицы. Ранг матрицы A будем обозначать $\operatorname{rang} A$.

Теорема 3.6.2 *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.*

Для практического вычисления ранга матрицы используется метод Гаусса, с помощью которого матрица приводится к ступенчатому виду. Как следует из последней теоремы, ранг матрицы при этом не меняется. Число ненулевых строк ступенчатой матрицы, как легко видеть, равно ее рангу.

3.6.2 Критерий совместности системы линейных уравнений

Пусть A – основная матрица системы линейных уравнений, $\widetilde{A}$ – матрица, полученная добавлением к матрице A столбца свободных членов. Матрицу $\widetilde{A}$ будем называть *расширенной матрицей* системы линейных уравнений. Очевидно, $\operatorname{rang} \widetilde{A} \geq \operatorname{rang} A$.

Теорема 3.6.3 ***(Кронекера[3]-Капелли[4])*** *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы:* $\operatorname{rang} \widetilde{A} = \operatorname{rang} A$.

Доказательство. Запишем систему линейных уравнений в виде одного векторного уравнения:

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + ... + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{b}, \tag{3.10}$$

где $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n \in \mathbf{R}^m$ – столбцы матрицы A, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ – столбец свободных членов.
Если система имеет решение, то при некоторых $x_1, x_2, ..., x_n$ имеет место равенство 3.10, из которого следует, что вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$. Следовательно, базис системы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$ является базисом и системы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n, \mathbf{b}$, т. е. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A}$.

Обратно, пусть $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = r$. Ранг матрицы A равен рангу системы векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_r$ – базис этой системы. Рассмотрим систему векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_r, \mathbf{b}$. Эта система линейно зависима, т. к. в противном случае ее ранг был бы равен $r + 1$, а значит, и $\operatorname{rang} \widetilde{A} > r$, что противоречит предположению. Следовательно, $\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + ... + \lambda_r\mathbf{b}_r$. Последнее означает, что $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r, 0, ..., 0)$ является решением исходной системы уравнений, т. е. она совместна.

[3] Л. Кронекер (1823–1891) – немецкий математик.
[4] А. Капелли (1858–1916) – итальянский математик.

3.6.3 Системы линейных однородных уравнений

Напомним, что система линейных уравнений называется однородной, если все ее свободные члены равны нулю.

Теорема 3.6.4 *Множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными образует подпространство пространства $\mathbf{R}^n$ размерности $n-r$, где r – ранг основной матрицы этой системы.*

Доказательство. Запишем однородную систему в виде матричного уравнения: $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Покажем, что множество $U=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n|A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$ решений однородной системы является подпространством.
Пусть $\mathbf{x},\mathbf{y}\in U$. Тогда $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $A\mathbf{y}=\mathbf{0}$, $A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A\mathbf{x}+A\mathbf{y}=\mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in U$;
$A(\lambda\mathbf{x})=\lambda A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$, т. е. $\lambda\mathbf{x}\in U$.
Согласно критерию подпространства (см. 3.5.1), U является подпространством пространства $\mathbf{R}^n$.

Покажем, что $\dim U=n-r$. После приведения к ступенчатому виду и, возможно, перенумерации неизвестных, система примет вид

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = 0, \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{2r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{rr+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где $x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$ – свободные неизвестные, которые могут принимать произвольные действительные значения. Придавая последовательно одному из этих неизвестных значение 1, а остальным – нули, получим $n-r$ векторов:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1r+1} \\ \alpha_{2r+1} \\ \vdots \\ \alpha_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{1r+2} \\ \alpha_{2r+2} \\ \vdots \\ \alpha_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

которые образуют базис подпространства U. Следовательно, $\dim U=n-r$.

Определение 3.6.3 *Базис пространства решений системы линейных однородных уравнений называется фундаментальной системой решений.*

Векторы (3.12) образуют фундаментальную систему решений.

Пример 3.6.1 Найти общее решение системы линейных однородных уравнений, определить размерность пространства решений и найти фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

Выпишем матрицу этой системы и приведем ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 7 & -14 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -10 & 1 & 5 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 20 & -48 \\ 0 & 0 & -4 & 20 & -48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы системы равен 2 и поэтому размерность пространства решений равна 5-2=3. Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_3 - 5x_4 + 12x_5 = 0. \end{cases}$$

В последнем уравнении 3 неизвестных. Одно из них, например, x_3, можно выразить через остальные (свободные): $x_3 = 5x_4 - 12x_5$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим: $x_1 - 2x_2 + 2x_4 - 5x_5 = 0$. В этом уравнении, кроме неизвестных x_4 и x_5, уже принятых за свободные, имеются еще два неизвестных. Поэтому одно из них также следует взять свободным, а другое выразить через свободные неизвестные. Например, возьмем в качестве свободного неизвестного x_2. Тогда общее решение системы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2\alpha - 2\beta + 5\gamma \\ \alpha \\ 5\beta - 12\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

где α, β, γ могут принимать произвольные действительные значения. Количество свободных неизвестных также говорит о том, что размерность пространства решений равна 3. Базис этого пространства (фундаментальную систему решений) образуют, например, следующие три вектора:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение можно представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha - 2\beta + 5\gamma \\ \alpha \\ 5\beta - 12\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.6.4 Структура множества решений системы линейных неоднородных уравнений

Теорема 3.6.5 *Общее решение неоднородной системы представимо в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.*

Доказательство. Пусть M – множество всех решений неоднородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_0 \in M$ – некоторое ее частное решение, U – множество всех решений однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Обозначим $\mathbf{x}_0 + U$ множество $\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{u} | \mathbf{u} \in U\}$. Докажем, что $M = \mathbf{x}_0 + U$. Произвольный элемент $\mathbf{y} \in \mathbf{x}_0 + U$ представим в виде $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in U$.
$A\mathbf{y} = A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$, т. е. $\mathbf{y} \in M$.

Наоборот, если $\mathbf{y} \in M$, то $A(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) = A\mathbf{y} - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{y} - \mathbf{x}_0 \in U$. Таким образом, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \in \mathbf{x}_0 + U$.

Пример 3.6.2 Рассмотрим систему линейных уравнений из примера 3 п.3.1. Ее общее решение можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} -8\beta - 3 \\ \frac{1}{3}(\alpha + 11\beta + 5) \\ \alpha \\ 4\beta + 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -8 \\ \frac{11}{3} \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где α и β – произвольные действительные числа. Здесь первое слагаемое представляет собой частное решение неоднородной системы, а остальная часть суммы – общее решение соответствующей однородной системы (линейную комбинацию фундаментальной системы решений).

Основные термины

Строчный, столбцовый, минорный ранги матрицы.
Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений.
Критерий совместности системы линейных уравнений.
Система линейных однородных уравнений.
Фундаментальная система решений.

Контрольные вопросы

1. Чему равен ранг единичной матрицы?
2. Может ли ранг матрицы быть больше, чем число ее строк (столбцов)?
3. Ранг основной матрицы системы линейных уравнений равен r. Какие значения может иметь ранг расширенной матрицы?
4. Может ли система линейных однородных уравнений быть: а) несовместной? б) неопределенной?
5. Верно ли, что все определенные системы линейных однородных уравнений равносильны? Почему?

6. Дайте геометрическую интерпретацию системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Рассмотрите возможные случаи взаимного расположения трех плоскостей в зависимости от ранга основной и расширенной матриц.

Тест

1. Система линейных однородных уравнений всегда является:

а) совместной; б) несовместной; в) определенной; г) неопределенной.

2. Выберите из следующих условий те, совокупность которых необходима и достаточна для совместности системы линейных уравнений (A – основная матрица системы, $\widetilde{A}$ – расширенная матрица, n – число неизвестных):

а) $\operatorname{rang}\widetilde{A} < \operatorname{rang} A$; б) $\operatorname{rang}\widetilde{A} = \operatorname{rang} A$; в) $\operatorname{rang} A < n$; г) $\operatorname{rang} A = n$;

д) $\operatorname{rang}\widetilde{A} \le \operatorname{rang} A$; е) $\operatorname{rang}\widetilde{A} > \operatorname{rang} A$; ж) $\operatorname{rang} A \le n$; з) $\operatorname{rang} A > n$.

3. Какие из предыдущих условий выполняются всегда (для любой системы линейных уравнений)?

4. Какие из условий вопроса 2 невозможны?

5. Выберите из условий вопроса 2 те, совокупность которых необходима и достаточна для определенности системы линейных уравнений.

6. Предыдущий вопрос для однородной системы.

7. Какие из условий вопроса 2 выполняются для любой системы линейных однородных уравнений?

3.7 Линейные операторы

3.7.1 Определение линейного оператора и его матрицы

Определение 3.7.1 *Функция f, отображающая векторное пространство U в векторное пространство V, называется линейной, если она обладает свойствами:*

1)$f(\lambda u) = \lambda f(u)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$ и $u \in U$;

2)$f(u+v) = f(u) + f(v)$ для всех $u, v \in U$.

Такую функцию называют также линейным оператором.

Пусть $\dim U = n$ и $u_1, u_2, ..., u_n$ – базис этого пространства, $\dim V = m$ и $v_1, v_2, ..., v_m$ – базис пространства V. Линейный оператор однозначно определяется заданием его значений на базисных векторах: $f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)$. Действительно, любой вектор $u \in U$ может быть представлен в виде $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$, поэтому из свойств линейности следует

$$f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + ... + \alpha_n f(u_n).$$

Т. к. векторы $f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n) \in V$, то их значения могут быть определены заданием их координат в базисе пространства V. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & a_{21}v_2 & + & ... & + & a_{m1}v_m, \\
f(u_2) & = & a_{12}v_1 & + & a_{22}v_2 & + & ... & + & a_{m2}v_m, \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
f(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & a_{2n}v_2 & + & ... & + & a_{mn}v_m.
\end{array}$$

Составим матрицу A, записав координаты вектора $f(u_k)$ в k-й столбец ($k = 1, 2, ..., n$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей оператора* f в выбранных базисах пространств U и V. Она полностью определяет оператор. Нетрудно убедиться в том, что если для произвольного вектора u взять столбец из его координат и умножить матрицу A на этот столбец, то получим координаты вектора $f(u)$. В частном случае, когда $V = U$, говорят о линейном операторе, действующем в пространстве U. Матрица такого оператора является квадратной и зависит от выбора базиса в пространстве U.

Пример 3.7.1 Рассмотрим пространство P_n многочленов степени не выше n. Пусть D – оператор дифференцирования в этом пространстве: $D(P) = P'$ для любого многочлена P. Этот оператор является линейным, т. к. :

1) $(\lambda P)' = \lambda P'$,

2) $(P + Q)' = P' + Q'$.

Найдем матрицу этого оператора в каноническом базисе $1, t, t^2, ..., t^n$.

$$1' = 0, \quad t' = 1, \quad (t^2)' = 2t, \quad , ..., \quad (t^n)' = nt^{n-1}.$$

Следовательно, матрица оператора D в этом базисе равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 2 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

3.7.2 Собственные векторы и собственные значения

Определение 3.7.2 *Вектор $x \neq 0$, удовлетворяющий соотношению $f(x) = \lambda x$, называется собственным вектором, а соответствующее число λ – собственным значением линейного оператора f.*

Для нахождениz собственных значений и собственных векторов выберем базис пространства: $e_1, e_2, ..., e_n$. Пусть A – матрица оператора в этом базисе, а $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ – столбец координат вектора x в этом базисе. Тогда $A\xi = \lambda\xi$, т. е.

$$(A - \lambda E)\xi = 0. \tag{3.13}$$

Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение только в том случае, когда ее матрица вырождена, т. е.

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{3.14}$$

Корни этого уравнения n-й степени являются собственными значениями оператора.

Подставляя найденные собственные значения в систему (3.13) и решая ее относительно ξ найдем координаты соответствующих собственных векторов.

Многочлен, стоящий в левой части уравнения (3.14), называется *характеристическим многочленом* или *характеристическим определителем* матрицы A, а само уравнение (3.14) называется *характеристическим уравнением* этой матрицы. Т. к. собственные значения оператора определены независимо от выбора базиса, то, следовательно, и корни характеристического многочлена также не зависят от выбора базиса. Среди линейных операторов в известном смысле простейшими являются те, которые имеют n линейно независимых собственных векторов. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – линейно независимые собственные векторы, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – соответствующие собственные значения, т. е. $f(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда матрица оператора f в базисе из собственных векторов является диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Можно доказать, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы. Поэтому, если характеристический многочлен матрицы A имеет n различных корней, то матрица может быть приведена к диагональному виду.

Пример 3.7.2 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Решая квадратное уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, находим собственные значения $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5$. Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 2$, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2x_1, \\ x_1 + 4x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

По сути дела это одно уравнение $x_1 + 2x_2 = 0$. Полагая $x_2 = \alpha$ свободной переменной, находим $x_1 = -2\alpha$ и, следовательно, первый собственный вектор имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Подстановка собственного значения $\lambda_2 = 5$ приводит к системе

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5x_1, \\ x_1 + 4x_2 = 5x_2, \end{cases}$$

т. е. $-x_1 + x_2 = 0$. Отсюда находим, что второй собственный вектор имеет вид $\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

Основные термины

Линейный оператор. Матрица линейного оператора.

Собственный вектор, собственное значение.

Характеристический определитель, характеристический многочлен, характеристическое уравнение.

Контрольные вопросы

1. Каковы собственные векторы и собственные значения: а) единичной матрицы? б) нулевой матрицы?

2. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – фиксированный вектор в пространстве $\mathbf{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Является ли f линейным оператором в $\mathbf{R}^3$? Если да, то найдите матрицу этого оператора в каноническом базисе, его собственные векторы и собственные значения.

3. Рассмотрим оператор умножения произвольного вектора пространства на фиксированное число α. Является ли он линейным оператором? Если да, то найдите матрицу этого оператора в каноническом базисе, его собственные векторы и собственные значения.

Тест

1. Какие из следующих операторов являются линейными? ($\mathbf{a}$ – фиксированный вектор, λ – фиксированное число).

а) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$; б) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$; в) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$; г) $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.

2. Какие из следующих операторов в пространстве всех многочленов являются линейными?

а) Оператор дифференцирования $D: \ P(x) \mapsto P'(x)$;

б) оператор интегрирования $I: \ P(x) \mapsto \int_0^x P(t)dt$;

в) оператор умножения на независимую переменную $P: \ P(x) \mapsto xP(x)$;

г) оператор сложения с независимой переменной $A: \ P(x) \mapsto x + P(x)$.

3. Линейный оператор в пространстве $\mathbf{R}^n$

а) всегда имеет n различных собственных значений;

б) может не иметь собственных значений;

в) всегда имеет хотя бы одно собственное значение;

г) может иметь любое количество собственных значений;

д) имеет не более n собственных значений.

4. Сумма собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению

а) является собственным вектором, отвечающим тому же собственному значению;

б) является собственным вектором, если она ненулевая;

в) не является собственным вектором;

г) является собственным вектором, отвечающим другому собственному значению.

5. Сумма двух собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям

а) является собственным вектором, отвечающим сумме этих собственных значений;

б) является собственным вектором, если она ненулевая;

в) не является собственным вектором;

г) является собственным вектором, отвечающим другому собственному значению.

3.8 Приложения линейной алгебры в экономике

3.8.1 Операции с векторами и матрицами

Рассмотрим типовые примеры экономических задач, которые приводят к операциям с векторами и матрицами.

Пример 3.8.1 В магазин привезли 300 л молока, 500 буханок хлеба, 600 кг сахара, 50 коробок конфет по цене 15 руб., 10 руб.,20 руб.,50 руб. за единицу продукции соответственно. Определить общую стоимость привезенных продуктов.

Пусть $\mathbf{x} = (300, 500, 600, 50)$ – вектор ассортимента привезенной продукции, $\mathbf{p} = (15, 10, 20, 50)$ – вектор цен. Тогда общая стоимость представляет собой скалярное произведение векторов:
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = 300 \cdot 15 + 500 \cdot 10 + 600 \cdot 20 + 50 \cdot 50 = 2400$ (руб.)

Пример 3.8.2 На заводе имеется 5 цехов. Планы производства этих цехов за прошедший месяц составили 5, 9, 8, 7, 3 млн. руб., а процент выполнения плана – 90%, 80%, 100%, 120%, 110% соотвественно. Определить стоимость продукции, произведенной заводом.

Обозначим $\mathbf{x} = (5; 9; 8; 7; 3)$ – вектор плана производства, $\mathbf{p} = (0,9; 0,8; 1; 1,2; 1,1)$ – вектор выполнения плана. Тогда искомая стоимость продукции будет также скалярным произведением векторов:
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = 5 \cdot 0,9 + 9 \cdot 0,8 + 7 \cdot 1,2 + 3 \cdot 1,1 = 23,4$ (млн. руб.)

Пример 3.8.3 Предприятие изготавливает 3 вида продукции с использованием 4-х видов ресурсов. Расходы ресурсов на изготовление продукции заданы матрицей $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – расход j-го ресурса на изготовление единица продукции i-го вида:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить расход ресурсов каждого вида при заданном плане выпуска по видам продукции: 50, 40, 80 ед. соответственно.

Решением задачи является вектор $\mathbf{r}$ расходов ресурсов каждого из четырех видов. Для его вычисления нужно вектор плана $\mathbf{p} = (50, 40, 80)$ умножить (как матрицу из одной строки) на матрицу A:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}A = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 & 680 & 890 & 510 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.8.4 Пусть расходы четырех видов ресурсов на производство трех видов продукции заданы матрицей A из предыдущей задачи. Цены на каждый из видов ресурсов известны и равны 3, 5, 1, 4 ден. ед. за ед. ресурса соответственно. Оперделить стоимость ресурсов, необходимых для производства каждого вида продукции.

Определим вектор цен $\mathbf{p}$ и представим его в виде столбца $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$. Для решения задачи необходимо матрицу A умножить на вектор-столбец $\mathbf{p}$. Решением будет вектор-столбец $\mathbf{b}$ стоимостей ресурсов, необходимых для производства продукции каждого вида:

$$\mathbf{b} = A\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 21 \\ 56 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.8.5 Предположим, что в предыдущей задаче цены на ресурсы меняются в зависимости от сезона и заданы матрицей $P = (p_{ij})$, где p_{ij} – цена j-го ресурса в i-м сезоне ($i = \overline{1,4}$; например, 1-й сезон – зима, 2-й – весна, 3-й – лето, 4-й – осень):

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Требуется определить стоимость ресурсов, необходимых для производства продукции каждого вида в каждом из сезонов.

Ответ дается матрицей $B = (b_{ij})$, где b_{ij} – стоимость ресурсов, необходимых для изготовления i-го вида продукции в j-м сезоне.

$$B = AP = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 34 & 50 & 55 \\ 21 & 17 & 26 & 28 \\ 56 & 44 & 65 & 71 \end{pmatrix}.$$

3.8.2 Системы линейных уравнений

Рассмотрим примеры задач, приводящих к системам линейных уравнений.

Пример 3.8.6 Предприятие производит три вида продукции из сырья трех видов. Расходы сырья на производство продукции заданы матрицей $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – расход j-го вида сырья на изготовление единица продукции i-го вида:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Запасы сырья 1-го, 2-го и 3-го видов равны соответственно 1700, 3300, 3100. Определить объем выпуска продукции каждого вида.

Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции x_1, x_2, x_3. Тогда запасы сырья будут полностью израсходованы, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1700, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3300, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3100. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим: $x_1 = 200, \quad x_2 = 300, \quad x_3 = 500.$

Пример 3.8.7 Ткацкая фабрика располагает двумя типами станков: 17 станков типа 1 и 25 станков типа 2. Станки могут производить два вида тканей, но сразной производительностью. Производительности станков заданы матрицей $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – количество метров ткани вида j, производимое в месяц станком типа i $(i, j = 1, 2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 100 \\ 300 & 400 \end{pmatrix}.$$

Согласно плану, фабрика должна производить в месяц 4500 м ткани 1-го вида и 3200 м ткани 2-го вида. Распределить загрузку станков так, чтобы план был выполнен и все станки загружены полностью.

Пусть x_{ij} – количество станков типа i, занятых производством ткани вида j $(i, j = 1, 2)$. Тогда по условиям задачи должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 17, \\ x_{21} + x_{22} = 25, \\ 200x_{11} + 300x_{21} = 5300, \\ 100x_{12} + 400x_{22} = 6300. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим $x_{11} = 10, \quad x_{12} = 7, \quad x_{21} = 11, \quad x_{22} = 14.$

3.8.3 Модель Леонтьева межотраслевого баланса

Предположим, что производственная сфера состоит из n отраслей промышленности. Часть продукции каждой отрасли идет на производственное потребление (данной отраслью и другими отраслями), а другая часть – на конечное потребление (личное и общественное).

Введем следующие обозначения:
x_i – объем выпуска i-й отрасли;
b_{ij} – объем товаров и услуг i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью;
y_i – конечный продукт i-й отрасли;
$a_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{x_j}$ – количество продукции i-й отрасли, которая расходуется при производстве единицы продукции j-й отрасли.

Замечание. Ввиду разнородности продукции в качестве общей единицы измерения выбирается стоимостное выражение количества продукции.

В. Леонтьев[5] при анализе межотраслевых связей экономики США установил, что в течение длительноговремени величины a_{ij} меняются очень незначительно и могут считаться постоянными. Объяснение этого факта состоит в том, что коэффициенты a_{ij} определяются технологией производства, которая длительное время остается неизменной. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *структурной матрицей экономики*, а ее элементы a_{ij} – *коэффициентами прямых затрат.* Матрица $B = (b_{ij})$ называется *матрицей межотраслевого баланса.*

Межотраслевой баланс представляет собой равенство объема выпуска каждой производящей отрасли суммарному объему ее продукции, потребляемой производственными отраслями и сектором конечного спроса:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + y_i, \qquad i = \overline{1, n}.$$

[5]В. Леонтьев – известный американский экономист, лауреат Нобелевской премии.

Подставляя в эти равенства $b_{ij} = a_{ij}x_j$, получим соотношения баланса, выраженные через коэффициенты прямых затрат:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{3.15}$$

Обозначая

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

соответственно вектор выпуска и вектор спроса (конечного продукта), запишем уравнения (3.15) в матричном виде:

$$x = Ax + y. \tag{3.16}$$

Это соотношение называют *уравнением межотраслевого баланса* или *моделью Леонтьева.*

Одна из основных задач межотраслевого баланса – найти при заданной структурной матрице экономики в условиях баланса совокупный выпуск, необходимый для удовлетворения заданного спроса. Решая уравнение (3.16) относительно x, находим:

$$x = (E - A)^{-1}y. \tag{3.17}$$

(матрица $E - A$ практически всегда обратима).

Матрица $D = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат.*

Очевидно, что экономический смысл имеют лишь векторы x и y с неотрицательными компонентами. Такие векторы будем называть неотрицательными и записывать $x \geq 0$ ($y \geq 0$). Вектор выпуска x, определяемый по формуле (3.17), будет неотрицательным при всех $y \geq 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы $D = (E - A)^{-1}$ неотрицательны. В этом случае матрица A называется *продуктивной.*

Пример 3.8.8 В таблице приведены данные по балансу за некоторый период между пятью отраслями промышленности.

N п/п	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	15	50
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	10	3	50	100

Требуется найти объем валового выпуска продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 30, 50, 20, 40, 80.

Из таблицы находим (в определенных выше обозначениях):

$$B=\begin{pmatrix} 15 & 12 & 24 & 23 & 16\\ 10 & 3 & 35 & 15 & 7\\ 10 & 5 & 10 & 10 & 10\\ 10 & 5 & 10 & 5 & 5\\ 7 & 15 & 15 & 10 & 3\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}10\\30\\5\\15\\50\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}100\\100\\50\\50\\100\end{pmatrix}.$$

Согласно формулам $a_{ij}=\dfrac{b_{ij}}{x_j}$, находим матрицу A:

$$A=\begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 0,48 & 0,46 & 0,16\\ 0,1 & 0,03 & 0,7 & 0,3 & 0,07\\ 0,1 & 0,05 & 0,2 & 0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,05\\ 0,07 & 0,15 & 0,3 & 0,2 & 0,03\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу полных затрат любым из известных методов: методом Гаусса, по формуле обратной матрицы (3.7) или с помощью компьютерных программ (Excel, Mathcad, Matlab и др.). Ввиду громоздкости вычислений последний вариант наиболее приемлем.

$$D=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,737 & 0,509 & 2,143 & 1,674 & 0,631\\ 0,593 & 1,350 & 2,043 & 1,312 & 0,473\\ 0,389 & 0,245 & 2,023 & 0,804 & 0,332\\ 0,335 & 0,206 & 0,872 & 1,599 & 0,242\\ 0,406 & 0,364 & 1,276 & 0,902 & 1,302\end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица A является продуктивной. Найдем валовой выпуск x_*, соответствующий увеличенному конечному потреблению $y_*=\begin{pmatrix}30 & 50 & 20 & 40 & 80\end{pmatrix}^T$:

$$x_*=Dy_*=\begin{pmatrix} 1,737 & 0,509 & 2,143 & 1,674 & 0,631\\ 0,593 & 1,350 & 2,043 & 1,312 & 0,473\\ 0,389 & 0,245 & 2,023 & 0,804 & 0,332\\ 0,335 & 0,206 & 0,872 & 1,599 & 0,242\\ 0,406 & 0,364 & 1,276 & 0,902 & 1,302\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\50\\20\\40\\80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}237,840\\216,501\\123,067\\121,145\\196,158\end{pmatrix}.$$

3.8.4 Модель международной торговли

Рассмотрим модель международной торговли, в которой участвуют n стран. Пусть
x_i – национальной доход i-й страны, $i=\overline{1,n}$;
a_{ij} – доля национального дохода j-й страны, которую она расходует на закупку товаров i-й страны;
p_i – общая выручка от внутренней и внешней торговли.
Будем полагать, что каждое государство расходует весь свой национальный доход на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран. Это означает, что
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}=1,\quad j=\overline{1,n}.$
Матрица $A=(a_{ij})$ называется *структурной матрицей торговли*. Сумма элементов каждого столбца этой матрицы равна 1.

Предположим, что в течение определенного фиксированного промежутка времени структура международной торговли не меняется, а национальные доходы торгующих стран могут измениться. Требуется определить какими могут быть эти национальные доходы, чтобы международная торговля осталась сбалансированной, т.е. чтобы сумма платежей всех государств была равна суммарной выручке от внешней и внутренней торговли.

Общая выручка p_i от внутренней и внешней торговли i-го государства вычисляется по формуле $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

В сбалансированной системе международной торговли не должно быть дефицита, т.е. у каждой страны выручка от торговли должна быть не меньше ее национального дохода: $p_i \geq x_i$, $i = \overline{1,n}$. Однако

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Следовательно, $p_i = x_i$ для всех $i = \overline{1,n}$, т.е. у всех торгующих стран выручка должна совпадать с национальным доходом. В матричной записи это означает:
$Ax = x$, где x – вектор национальных доходов.
Отсюда следует, что единица является собственным значением структурной матрицы торговли, а баланс в международной торговле будет достигнут, если вектор национальных доходов является собственным вектором, отвечающим этому собственному значению.

Пример 3.8.9 Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Найти национальные доходы этих стран при условии, что их сумма задана:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1975. \tag{3.18}$$

Вектор национальных доходов x является решением (ненулевым!) однородной системы $Ax = x$, т.е. $(A - E)x = 0$. Ранг матрицы этой системы равен 3. Добавляя к ней уравнение (3.18), получим систему ранга 4, которая будет иметь единственное решение:

$$x_1 = 558, \quad x_2 = 361, \quad x_3 = 533, \quad x_4 = 523.$$

Основные термины

Коэффициенты прямых затрат. Структурная матрица экономики.
Матрица межотраслевого баланса.
Уравнение межотраслевого баланса. Модель Леонтьева.
Матрица полных затрат. Продуктивная матрица.
Структурная матрица торговли.

Контрольные вопросы

1. Является ли постоянной (не зависящей от времени) матрица межотраслевого баланса?

2. Являются ли постоянными структурная матрица экономики, матрица полных затрат?

3. Какова основная задача межотраслевого баланса? Всегда ли эта задача имеет решение?

4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия на элементы структурной матрицы торговли.

5. Докажите, что любая структурная матрица торговли имеет собственное значение $\lambda = 1$.

Упражнения

1. Решить методом Гаусса следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

2. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

3. Найти координаты вектора x в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' = 2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \qquad x = (6, -1, 3).$$

4. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,

д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Решить следующие системы уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ 3x + 7y = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 4x - 5y = 10. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$

6. Вычислить произведения матриц AB и BA:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 6 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

8. Решить матричные уравнения $AX = B$ и $XA = B$. Результат проверить.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Глава 4

Введение в математический анализ

Математический анализ как единое и систематическое целое сложился в трудах И. Ньютона, Г. Лейбница, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и др. ученых 17–18 вв., а его база – теория пределов – была разработана О. Коши в начале 19 вв. Глубокий анализ исходных понятий математического анализа был связан с развитием в 19–20 вв. теории множеств, теории меры, теории функций действительного переменного и привел к разнообразным обобщениям.

4.1 Предел функции

4.1.1 Окрестности конечных и бесконечно удаленных точек

В дальнейшем слово "точка"будет означать либо действительное число, либо один из символов ∞, $-\infty$ или $+\infty$. Эти символы будем называть *бесконечно удаленными точками*, а действительные числа – *конечными точками.*

Окрестностью конечной точки будем называть любой интервал, содержащий эту точку. *ε-окрестностью* точки $a \in \mathbf{R}$ называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, симметричный относительно точки a, радиуса ε, где ε – некоторое положительное действительное число.

Например, для точки $a = 2$ следующие интервалы (-2, 90), (1,98; 3), $(-\infty, 5)$, $(1, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ являются ее окрестностями; (-1, 5) и (1,99; 2,01) – ε-окрестности этой же точки для $\varepsilon = 3$ и $\varepsilon = 0,01$ соответственно.

Очевидно, что любая окрестность точки $a \in \mathbf{R}$ содержит в себе некоторую ε-окрестность (при достаточно малом ε).

Левой (правой) окрестностью точки $a \in \mathbf{R}$ называется любой интервал с правым (левым) концом в точке a. *Левой (правой) ε-окрестностью* точки a называется интервал $(a-\varepsilon, a)$ (соответственно $(a, a+\varepsilon)$).

Проколотой окрестностью (ε-окрестностью) точки a называется окрестность (ε-окрестность) этой точки, из которой исключена сама точка a.

Если $U(a)$ ($U_\varepsilon(a)$) – окрестность (ε-окрестность) конечной точки a, то соответствующую проколотую окрестность будем обозначать $\overset{\circ}{U}(a)$ ($\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$). Учитывая, что для $x, a \in \mathbf{R}$ $|x-a|$ есть расстояние между точками x и a, заметим, что ε-окрестность $U_\varepsilon(a)$ есть множество точек x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \varepsilon$. Проколотая ε-окрестность $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ есть множество точек x, для которых $0 < |x-a| < \varepsilon$.

Окрестностью точки $-\infty$ называется произвольный интервал вида $(-\infty, a)$, где $a \in \mathbf{R}$ или $a = +\infty$. *Окрестностью точки* $+\infty$ называется интервал вида $(a, +\infty)$, где $a \in \mathbf{R}$ или $a = -\infty$. *Окрестностью точки* ∞ называется объединение окрестностей $-\infty$ и $+\infty$. M*-окрестностью* ∞ $(M > 0)$ называется объединение интервалов $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$. Заметим, что любая окрестность ∞ содержит некоторую M-окрестность при достаточно большом M. M-окрестность ∞ $U_M(\infty)$ есть множество точек $x \in \mathbf{R}$, для которых $|x| > M$. Проколотые окрестности бесконечно удаленных точек совпадают с самими этими окрестностями.

Замечание. Из приведенных определений следует, что пересечение двух произвольных окрестностей одной точки одинакового вида (проколотых, непроколотых, ε-окрестностей, левых или правых) является снова окрестностью этой точки того же вида.

4.1.2 Предельная точка множества. Определение предела

Определение 4.1.1 *Пусть $A \subset \mathbf{R}$. Точка a (конечная или бесконечная) называется предельной точкой множества A, если в любой проколотой окрестности этой точки найдутся точки множества A.*

Заметим, что из этого определения следует, что в любой окрестности точки a на самом деле содержится бесконечное число точек множества A (подумайте почему). Отметим также, что предельная точка множества может как принадлежать этому множеству, так и не принадлежать.

Пример 4.1.1 Каждая точка множества $A = [a, b)$ является для него предельной. Кроме того, точка $b \notin A$ также является предельной точкой этого множества.

Пример 4.1.2 Множество $\mathbf{Z}$ целых чисел имеет три предельных точки: $-\infty$, $+\infty$ и ∞. Конечных предельных точек это множество не имеет. В частности, ни одна из точек самого множества $\mathbf{Z}$ не является для него предельной.
Множество $\mathbf{N}$ имеет две предельных точки: ∞ и $+\infty$.

Пример 4.1.3 Для множества $\mathbf{Q}$ рациональных чисел множество его предельных точек совпадает со всем множеством $\mathbf{R}$. В самом деле, в любой окрестности действительного числа найдутся рациональные числа (например, его десятичные приближения).

Определение 4.1.2 *Пусть a – предельная точка множества $D(f)$ (области определения функции f). Точка A называется пределом функции f в точке a (записывается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$), если для любой окрестности $U(A)$ точки A найдется проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(a)$ точки a такая, что $f(\overset{\circ}{V}(a) \cap D(f)) \subset U(A)$, т. е. значения функции f во всех точках окрестности $\overset{\circ}{V}(a)$, в которых она определена, попадают в окрестность $U(A)$.*

Грубо говоря, равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ означает, что когда значения переменной x приближаются к точке a, значения функции $f(x)$ приближаются к точке A.

Замечание. Так как в определении предела фигурирует проколотая окрестность точки a, то значение функции в самой точке a никак не влияет на значение предела или его существование. Функция может быть вообще не определена в точке a.

Приведенное определение предела охватывает случай как конечных, так и бесконечных точек a и A. В случае, когда про точки a и A известно конечны они или бесконечны, можно конкретизировать это определение, учитывая, что каждая окрестность содержит некоторую ε-окрестность. Запишем соответствующее определение символически для случая, когда обе точки a и A конечны: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D(f)\ (0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon). \tag{4.1}$$

В случае конечного a и $A = \infty$ имеем: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если

$$\forall M > 0\ \exists\varepsilon > 0\ \forall x \in D(f)\ (0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > M). \tag{4.2}$$

Наоборот, в случае $a = \infty$ и конечного A имеем: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in D(f)\ (|x| > M) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon). \tag{4.3}$$

Наконец, в случае $a = \infty$ и $A = \infty$ имеем: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, если

$$\forall M > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in D(f)\ (|x| > N) \Longrightarrow |f(x)| < M). \tag{4.4}$$

Читателю рекомендуется в качестве упражнения самостоятельно записать определения предела для случая a или A, равного $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Из определения следует, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, то справедливо и равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Обратное, однако, неверно.

Пример 4.1.4 Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 1$. При приближении аргумента x к числу 2 значения функции приближаются к 5. Действительно, легко доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1) = 5$. В самом деле, $|f(x) - 5| = |x^2 + 1 - 5| = |x^2 - 4| = |x-2| \cdot |x+2|$. Следовательно, если $|x-2| < \delta < 1$, то $|f(x) - 5| < 5\delta$ (из условия $|x-2| < 1$ следует, что $-1 < x-2 < 1$, и потому $3 < x+2 < 5$, т. е. $|x+2| < 5$). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = min\left(\frac{\varepsilon}{5}, 1\right)$, и тогда из неравенства $|x-2| < \delta$ будет следовать, что $|f(x) - 5| < \varepsilon$, т. е. в соответствии с определением (4.1) это означает, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

Пример 4.1.5 Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$.
$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$ при $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, в соответствии с определением (4.3) утверждение доказано (достаточно взять $M = \frac{1}{\varepsilon}$).

Пример 4.1.6 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$,
т. к. $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$, и поэтому при $0 < |x| < \varepsilon$ имеем $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Отметим, что сама функция $x\sin\frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$.

Пример 4.1.7 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, т. к. $\left|\frac{1}{x}\right| > M$ при $|x| < \frac{1}{M}$ (см. определение (4.2), в котором следует взять $\varepsilon = \frac{1}{M}$).

Пример 4.1.8 Функция $\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$

(читается "сигнум икс"[1]) определена на всей числовой оси. Покажем, что у нее нет предела при x, стремящемся к 0. Предположим, что $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x = A$. В ε-окрестности точки A радиуса $\varepsilon < 1$ не могут содержаться одновременно точки -1 и 1. В то же время любая проколотая окрестность нуля содержит как положительные, так и отрицательные числа, и поэтому в этой окрестности функция принимает оба значения -1 и 1. Полученное противоречие говорит о том, что $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует.

Пример 4.1.9 $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не существует.

Доказательство аналогично предыдущему примеру, если учесть, что в любой M-окрестности бесконечности найдется промежуток длины π, на котором $\sin x$ принимает все значения от -1 до 1. В частности, при $n > \dfrac{M}{2\pi}$ имеем $2\pi n > M$ и $2\pi n + \dfrac{\pi}{2} > M$, но $\sin 2\pi n = 0$, $\sin(2\pi n + \dfrac{\pi}{2}) = 1$.

Определение предела последовательности также является частным случаем определения 4.1.2. Напомним, что последовательностью называется функция натурального аргумента. Если элементы последовательности – действительные числа, то это есть функция $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Значения функции f обычно обозначают некоторой буквой с индексом, например a_n, и называют членами последовательности. Саму последовательность записывают как $\{a_n\}$ или $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Так как $D(f) = \mathbf{N}$, то она имеет лишь две предельные точки: ∞ и $+\infty$ (см. пример 4.1.2). Следовательно, мы можем рассматривать только $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (или, что то же, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то говорят, что последовательность *сходится* к точке A. В соответствии с определением (4.2) для конечного A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ (n > N \Longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon). \tag{4.5}$$

Для случая $A = \infty$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, если

$$\forall M > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ (n > N \Longrightarrow |a_n| > M). \tag{4.6}$$

Читателю рекомендуется самостоятельно записать определения предела последовательности для случая, когда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$.

Последовательность, имеющую конечный предел, называют также *сходящейся.* Если же последовательность имеет бесконечный предел или вовсе не имеет предела, то она называется *расходящейся.*

Пример 4.1.10 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$,

т. к. $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. в качестве N в определении (4.5) можно взять $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, ($[x]$ – целая часть числа x).

[1]Signum (лат.) – знак.

Пример 4.1.11

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ при } |q| < 1, \\ 1 \text{ при } q = 1, \\ \infty \text{ при } |q| > 1 \end{cases}$$

и не существует при $q = -1$.
Рассмотрим сначала случай $|q| < 1$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и решим относительно n неравенство $|q^n| < \varepsilon$. Логарифмируя почленно и учитывая, что $|q^n| = |q|^n$, получим: $n \ln |q| < \ln \varepsilon$. Т. к. $|q| < 1$ и, следовательно, $\ln |q| < 0$, последнее неравенство равносильно следующему: $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$. Таким образом, для доказательства того, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, достаточно в (4.5) взять $N = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}\right]$.

Аналогичным образом при $|q| > 1$ следует в (4.6) взять $N = \left[\dfrac{\ln M}{\ln |q|}\right]$.

При $q = 1$ мы имеем постоянную последовательность, предел которой равен 1.

При $q = -1$ имеем последовательность $(-1)^n$, которая при сколь угодно больших значениях n принимает значения -1 и 1 и, следовательно, не может иметь предела.

Если в определении 4.1.2 проколотую окрестность $\overset{\circ}{V}(a)$ точки a заменить левой (правой) окрестностью точки a, то получим соответственно определение *предела функции в точке a слева (справа)*. Эти пределы обозначаются соответственно $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x\to a+} f(x)\right)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right)$ или $f(a-0)$ $(f(a+0))$. Здесь точка a предполагается конечной.

Левый и правый пределы называют *односторонними пределами*, а обычный предел называют также *двусторонним пределом*. Легко видеть, что для существования двустороннего предела необходимо и достаточно, чтобы существовали оба односторонних предела и их значения были равны.

Пример 4.1.12 Как мы видели в примере 4.1.8, функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет предела при $x \to 0$. Однако она имеет оба односторонних предела: $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$. Действительно, в любой левой окрестности нуля она принимает только значение, равное -1, а в любой правой окрестности – значение 1.

Пример 4.1.13 Функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ не имеет односторонних пределов в точке $x = 0$. Действительно, в любой правой (левой) окрестности нуля найдется отрезок, на котором функция $f(x)$ принимает все значения из промежутка $[-1, 1]$.

4.1.3 Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 4.1.3 *Функция f называется бесконечно малой в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, и бесконечно большой в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.*

Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой в точке ∞ и бесконечно большой в точке 0. Функция $f(x) = x$ наоборот является бесконечно малой в точке 0 и бесконечно большой в точке ∞. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ является бесконечно малой в точке 0 и бесконечно большой в точке $\dfrac{\pi}{2}$.

Напомним, что функция называется ограниченной, если $\exists M > 0$ такое, что $|f(x)| < M$ для всех $x \in D(f)$. Из определения 4.1.3 следует, что бесконечно большая является неограниченной функцией. Однако неограниченная функция не обязательно является бесконечно большой. Например, функция $f(x) = x \sin x$ является неограниченной (ее значения могут быть сколь угодно большими), но не является бесконечно большой, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin x$ не существует.

Следующее предложение устанавливает связь бесконечно малых величин с пределами функций.

Предложение 4.1.1 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *(*$A \in \mathbf{R}$*) тогда и только тогда, когда* $f(x) = A + \alpha(x)$*, где* α *– бесконечно малая в точке* a*.*

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Положим $f(x) - A =: \alpha(x)$. Тогда из (4.1) (для случая конечной точки a) или (4.3) (для бесконечной точки) следует, что $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, т. е. α – бесконечно малая в точке a.

2) Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где α – бесконечно малая в точке a. Записывая определение того, что $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и заменяя $\alpha(x)$ на $f(x) - A$, получим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами устанавливается следующим предложением.

Предложение 4.1.2 *Пусть функция* α *отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки* a*. Функция* α *является бесконечно малой в точке* a *тогда и только тогда, когда* $\dfrac{1}{\alpha}$ *является бесконечно большой в точке* a*.*

Следующие два предложения, доказательства которых мы опускаем, выражают свойства бесконечно малых.

Предложение 4.1.3 *Сумма конечного числа бесконечно малых в точке* a *является бесконечно малой в точке* a*.*

Предложение 4.1.4 *Произведение бесконечно малой в точке* a *на функцию, ограниченную в некоторой окрестности точки* a *(в том числе на постоянную и на бесконечно малую), является бесконечно малой в точке* a*.*

Пример 4.1.14 Функция $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ – бесконечно малая в точке 0, так как x – бесконечно малая, а $\sin \dfrac{1}{x}$ – ограниченная функция (ср. пример 4.1.6).

Пример 4.1.15 Функция $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ – бесконечно малая в точке ∞, как сумма бесконечно малых: $\dfrac{x+1}{x^2} = \dfrac{x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. При этом $\dfrac{1}{x}$ – бесконечно малая как обратная к бесконечно большой x (предложение 4.1.2), а $\dfrac{1}{x^2}$ – бесконечно малая как произведение двух бесконечно малых (предложение 4.1.4): $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Следующие два предложения выражают свойства бесконечно больших величин.

Предложение 4.1.5 *Произведение бесконечно большой в точке a на функцию, предел которой в точке a отличен от нуля, есть бесконечно большая в точке a.*

Предложение 4.1.6 *Сумма бесконечно большой в точке a и функции, ограниченной в некоторой окрестности точки a, есть бесконечно большая в точке a.*

Пример 4.1.16 Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos x$ является бесконечно большой в точке 0 согласно предложению 4.1.5, т. к. $\dfrac{1}{x}$ – бесконечно большая, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ (см. пример 4.1.29 ниже). Функция $g(x) = \dfrac{1}{x}\sin x$ не является бесконечно большой в точке 0 (в этом мы убедимся в п.5). Это не противоречит предложению 4.1.5, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ (пример 4.1.29).

Пример 4.1.17 $\operatorname{tg} x + \sin x$ – бесконечно большая в точке $\dfrac{\pi}{2}$ как сумма бесконечно большой $\operatorname{tg} x$ и ограниченной функции $\sin x$.

Во многих случаях представляет интерес сравнение бесконечно малых между собой по характеру их приближения к нулю. В основу сравнения двух бесконечно малых α и β кладется поведение их отношения. Будем далее предполагать, что функция, на которую делим, отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a.

Определение 4.1.4 *Пусть α и β – бесконечно малые в точке a и $\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Тогда:*

а) если γ – бесконечно малая в точке a, то записывают: $\alpha = o(\beta)$ при $x \to a$ (читается: "α есть о малое от β при $x \to a$") и говорят, что α есть бесконечно малая более высокого порядка, чем β;

б) если γ ограничена в некоторой окрестности точки a, то записывают $\alpha = O(\beta)$ при $x \to a$ (читается: "α есть О большое от β при $x \to a$");

в) если $\alpha = O(\beta)$ и $\beta = O(\alpha)$, то говорят, что α и β – бесконечно малые одного порядка при $x \to a$.

В частности, это имеет место, если $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x) = K$, где $0 \neq K \in \mathbf{R}$.

Если $K = 1$, то α и β называют эквивалентными бесконечно малыми и записывают так: $\alpha \sim \beta$ при $x \to a$.

Заметим, что если γ – бесконечно большая в точке a, то $\beta = o(\alpha)$ при $x \to a$.

Пример 4.1.18 1) Пусть $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x$. Тогда $\alpha = o(\beta)$ при $x \to 0$.

2) Если $\alpha(x) = 2x^2 + x^3$, $\beta(x) = x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2 + x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0}(2 + x) = 2,$$

т. е. α и β – бесконечно малые одного порядка.

3) Бесконечно малые $\alpha(x) = x^2 + x$ и $\beta(x) = x$ эквивалентны при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x + 1) = 1$.

Аналогичным образом сравниваются бесконечно большие. При этом, если γ – бесконечно малая в точке a, то записывают $\alpha = o(\beta)$ и говорят, что β – *бесконечно большая более высокого порядка*, чем α.

Пример 4.1.19 1) Пусть $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$, $\beta(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Тогда $\alpha = o(\beta)$ при $x \to 0$, т. е. $\dfrac{1}{x^2}$ есть бесконечно большая более высокого порядка, чем $\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$.

2) $x^2 + x \sim x^2$ при $x \to \infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \dfrac{1}{x}) = 1$.

4.1.4 Основные теоремы о пределах

Теорема 4.1.1 *Функция не может иметь более одного предела (за исключением случая двух бесконечных пределов: $+\infty$ и ∞ или $-\infty$ и ∞ – см. замечание 4.1.2).*

Доказательство следует из определения 4.1.2, если учесть, что для любых двух различных точек, кроме упомянутого исключительного случая, можно найти непересекающиеся окрестности.

Теорема 4.1.2 *Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем A и B конечны. Тогда в точке a существуют пределы суммы, разности и произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, а при условии $B \neq 0$ и их частного, причем имеют место равенства:*

$$1)\ \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B, \quad 2)\ \lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A-B,$$
$$3)\ \lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB, \qquad 4)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Докажем в качестве примера равенства 3) и 4). Согласно предложению 4.1.1 $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые в точке a. Следовательно,

$$f(x)g(x) = AB + \alpha(x)B + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x) = AB + \gamma(x),$$

где $\gamma(x) = \alpha(x)B + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)$ – бесконечно малая. Действительно, каждое слагаемое в последней сумме является, согласно предложению 4.1.4, бесконечно малой, а поэтому и $\gamma(x)$ – бесконечно малая по предложению 4.1.3. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

Для доказательства равенства 4) достаточно доказать, что при $B \neq 0$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$. Тогда нужное равенство будет следовать из равенства 3). Рассмотрим разность

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B+\beta(x)} - \frac{1}{B} = -\frac{\beta(x)}{B(B+\beta(x))}$$

и покажем, что она является бесконечно малой. Для этого, согласно предложению 4.1.2, достаточно доказать, что обратная величина

$$-\frac{B(B+\beta(x))}{\beta(x)} = -\frac{B^2}{\beta(x)} - B$$

является бесконечно большой. Действительно, $\dfrac{1}{\beta(x)}$ – бесконечно большая (предложение 4.1.2), а поэтому таковыми являются и $-\dfrac{B^2}{\beta(x)}$ (предложение 4.1.5), и $-\dfrac{B^2}{\beta(x)}-B$ (предложение 4.1.6).

Первые два равенства предлагаем доказать читателю самостоятельно.

Пример 4.1.20 Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-1}{x^3+2}$. На основании теоремы 4.1.2 можем записать

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-1}{x^3+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}3\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-\lim\limits_{x\to 2}1}{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3+2}=\frac{3\cdot 2^2-1}{2^3+2}=\frac{11}{10}=1,1.$$

Следующая теорема о пределе сложной функции легко следует из определения предела.

Теорема 4.1.3 *Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, функция g определена в некоторой проколотой окрестности точки b и $\lim\limits_{y\to b}g(y)=c$, то $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=c$.*

Непосредственно из определения предела следует

Теорема 4.1.4 *Если функция имеет конечный предел в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

В связи с теоремой 4.1.2 естественным образом возникает вопрос, во-первых, о вычислении предела частного в случае $B=0$, а, во-вторых, о вычислении пределов суммы, разности, произведения и частного в случае, когда один или оба предела A и B бесконечны. Перечислим те случаи, когда ответ может быть получен.

Теорема 4.1.5 *Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$. Тогда:*

1) если $A\neq 0$, $B=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$;
2) если $A=\infty$, $B\in\mathbf{R}$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\infty$;
3) если $A=\infty$, $B\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\infty$;
4) если $A\in\mathbf{R}$, $B=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$;
5) если $A=\infty$, $B\in\mathbf{R}$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Доказательство. 1) $g(x)$ – бесконечно малая в точке a, поэтому $\dfrac{1}{g(x)}$ – бесконечно большая в точке a (предложение 4.1.2). Следовательно, по предложению 4.1.5,
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ является бесконечно большой в точке a.

2) Из теоремы 4.1.4 следует, что $g(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a. Теперь из предложения 4.1.6 следует требуемое утверждение.

3) Следует из предложения 4.1.5.

4) Так как $g(x)$ – бесконечно большая в точке a, то $\dfrac{1}{g(x)}$ – бесконечно малая в точке a. Поэтому утверждение следует из теоремы 4.1.4 и предложения 4.1.4.

5) Если $B \neq 0$, то, согласно теореме 4.1.2, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$. Если $B = 0$, то $g(x)$ – бесконечно малая, $\dfrac{1}{g(x)}$ – бесконечно большая в точке a. В любом случае $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} \neq 0$. Поэтому требуемое утверждение следует из предложения 4.1.5.

Таким образом, остались без ответа следующие случаи вычисления пределов:
1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x))$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x))$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

В этих случаях говорят, что имеет место неопределенность соответственно вида $\infty \pm \infty$, $\infty \cdot 0$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$. Слово "неопределенность"в данном случае означает, что ответ не может быть получен в случае произвольных функций f и g, т. е. он зависит от выбора конкретных функций f, g и точки a. В случае конкретных f, g и a ответ может быть получен и предел вычислен, либо доказано, что он не существует. В таком случае говорят, что неопределенность "раскрыта". Различные способы раскрытия неопределенностей будут рассмотрены позднее. Следующие примеры показывают зависимость предела в случае неопределенности от f, g и a.

Пример 4.1.21 а) Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.
Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = 1$.

б) Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{2}{x}$.
Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = \infty$.

Пример 4.1.22 а) Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = \infty$.

б) Пусть $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 1$.

в) Пусть $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

Примеры для неопределенностей вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $\dfrac{0}{0}$ см. в п.3 (сравнение бесконечно малых и бесконечно больших).

Замечание. Хотя в общем случае $\infty \pm \infty$ представляет собой неопределенность, в более конкретных случаях предел суммы или разности может быть вычислен. А именно, пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда

1) если $A = B = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$;

2) если $A = B = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$;

3) если $A = +\infty,\ B = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = +\infty$;

4) если $A = -\infty,\ B = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = -\infty$.

Рассмотрим еще несколько примеров вычисления пределов.

Пример 4.1.23 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+3x+1)$.
Воспользоваться здесь теоремой о пределе суммы мы не можем, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1) = \infty$, т. е. мы имеем неопределенность вида $\infty + \infty$. Однако после простых преобразований этот предел легко вычислить:

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2+3x+1) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right).$$

$\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ – бесконечно малые при $x\to\infty$ и поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 2.$$

Согласно теореме 4.1.5(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = \infty$.

Пример 4.1.24 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-2}{x^2-x+1}$.
Предел числителя и знаменателя этой дроби равны ∞ (см. предыдущий пример). Поэтому мы имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Преобразуем дробь следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-2}{x^2-x+1} = \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1-0+0} = 2.$$

Пример 4.1.25 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+3x^2-1}$.
Здесь мы также имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^3+3x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x+3-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{x+3-\frac{1}{x}} = 0,$$

т. к. числитель стремится к 2, а знаменатель – к ∞ (см. теорему 4.1.5(4)).

Пример 4.1.26 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \infty$$

(см. теорему 4.1.5(5)).

Пример 4.1.27 Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+2}{x-2}$.

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x+2)=2^2+3\cdot 2+2=12,\ \lim_{x\to 2}(x-2)=0.$$

Поэтому согласно теореме 4.1.5(1)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+2}{x-2}=\infty.$$

Пример 4.1.28 Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}$.

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)=2^2-3\cdot 2+2=0,\ \lim_{x\to 2}(x^3-8)=2^3-8=0,$$

т. е. мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Т. к. в точке $x=2$ оба многочлена x^2-3x+2 и x^3-8 обращаются в нуль, то они оба имеют в своем разложении множитель $x-2$. После сокращения на этот множитель неопределенность исчезает. (Заметим, что в проколотой окрестности точки 2 множитель $x-2\neq 0$).

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2+2x+4}==\frac{2-1}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{1}{12}.$$

Рассмотрим еще несколько теорем о пределах, связанных с неравенствами.

Теорема 4.1.6 *Если* $\lim\limits_{x\to a}f(x)>A$ $(<A)$, *где* A *– конечное, то в некоторой проколотой окрестности точки* a *имеет место неравенство* $f(x)>A$ $(<A)$.

Следствие 4.1.1 *Если функции* f *и* g *имеют одинаковую область определения и* $\lim\limits_{x\to a}f(x)>\lim\limits_{x\to a}g(x)$, *то в некоторой проколотой окрестности точки* a *имеет место неравенство* $f(x)>g(x)$.

Следствие 4.1.2 *Если функции* f *и* g *имеют одинаковую область определения и существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a}g(x)$, *то можно перейти к пределу в неравенстве*

$$f(x)\le g(x)\Longrightarrow \lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x).$$

В частности, если $f(x)\le A$, *то* $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le A$.

Замечание. Из строгих неравенств $f(x)<g(x)$ и $f(x)<A$ не следуют соответственно неравенства $\lim\limits_{x\to a}f(x)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)<A$, а следуют лишь нестрогие неравенства $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le A$.

Следующая теорема может быть использована для доказательства существования предела.

Теорема 4.1.7 *Если для функций* f,g,h *имеет место неравенство* $f(x)\le g(x)\le h(x)$ *при всех* $x\in D$ *и* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$, *то существует* $\lim\limits_{x\to a}g(x)$, *причем он также равен* A.

Пример 4.1.29 Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.
Воспользуемся при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ неравенством $0 < \sin x < x$, которое будет доказано позднее (см. (4.8)). При $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ имеем $\sin(-x) = -\sin x > -x$. Таким образом, при $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $-x < \sin x < x$. Т. к. $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$, то по теореме 4.1.7 имеем $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.
$\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}\right) = 1 - 2\cdot 0^2 = 1$.

Для важного частного случая – монотонных и ограниченных функций – можно сформулировать теорему о существовании предела. Напомним сначала соответствующие определения.

Определение 4.1.5 *Функция f, определенная на множестве D, называется*
возрастающей на D, если $\forall x_1, x_2 \in D \quad (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2))$;
неубывающей на D, если $\forall x_1, x_2 \in D \quad (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2))$;
убывающей на D, если $\forall x_1, x_2 \in D \quad (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2))$;
невозрастающей на D, если $\forall x_1, x_2 \in D \quad (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \ge f(x_2))$;
Все перечисленные выше типы функций называются монотонными на множестве D. Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными или монотонными в узком смысле. Неубывающие и невозрастающие функции называются также монотонными в широком смысле.

Определение 4.1.6 *Функция f называется ограниченной сверху (снизу) на множестве D, если $\exists M \in \mathbf{R}\ \forall x \in D \quad f(x) < M \quad (f(x) > M)$. Функция, ограниченная и сверху, и снизу, называется просто ограниченной.*

Теорема 4.1.8 *Пусть функция f не убывает на интервале (a, b) (a и b могут быть как конечны, так и бесконечны). Тогда, если она ограничена сверху, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$. В противном случае $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$. Если функция ограничена снизу, то $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ конечен, в противном случае $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$.*

Сформулируйте самостоятельно аналогичное утверждение для невозрастающей функции.

Пример 4.1.30 Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3})$.

Заметим, что $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+2} = +\infty$, т. к. функция $f(x) = \sqrt{x+2}$ монотонно возрастает на интервале $(-2, +\infty)$ и не ограничена сверху (см. теорему 4.1.8). Аналогично $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x-3} = +\infty$. Теперь из замечания 4.1.4 следует, что $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}) = +\infty$. Тот же результат можно получить непосредственным применением теоремы 4.1.8 к функции $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}$.

Пример 4.1.31 Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})$.

Т. к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-3} = +\infty$ (см. предыдущий пример), то мы имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Для раскрытия этой неопределенности умножим и разделим данное выражение на сопряженное к нему, т. е. на $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3})} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)-(x-3)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}} = 0,$$

т. к. знаменатель стремится к ∞.

4.1.5 Замечательные пределы

Теорема 4.1.9

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{4.7}$$

Доказательство. Рассмотрим окружность единичного радиуса. Пусть x – острый угол, т. е. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Геометрически очевидно, что площадь треугольника AOB меньше площади сектора AOB, которая, в свою очередь, меньше площади прямоугольного треугольника AOC (угол OAC – прямой):

$$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сект.AOB}} < S_{\Delta AOC}.$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin x = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\text{сект.AOB}} = \frac{1}{2}r^2x = \frac{1}{2}x, \quad S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}OA\cdot AC = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

После сокращения на $\dfrac{1}{2}$, получаем, что при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{4.8}$$

Разделив каждую из частей этого двойного неравенства на $\sin x$, получим $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{4.9}$$

Т. к. функции $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ четные, то неравенство (4.9) справедливо и при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ (см. пример 4.1.29), то из неравенства (4.9) и теоремы 4.1.7 следует равенство (4.7).

Предел (4.7) называется *первым замечательным пределом.*

Пример 4.1.32 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$. Действительно, функция $\dfrac{\sin 3x}{3x}$ является композицией функций $\dfrac{\sin y}{y}$ и $y=3x$. Т. к. $\lim\limits_{x\to 0}3x=0$ и $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$, то остается воспользоваться теоремой 4.1.3.

Пример 4.1.33

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\frac{1}{x}=\infty,$$

т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x^2}=1$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$. Здесь мы воспользовались теоремой 4.1.5(3).

Пример 4.1.34 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\operatorname{arctg}4x}$.
Сделаем замену $y=\operatorname{arctg}4x$, тогда $4x=\operatorname{tg}y$. Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}y=\operatorname{arctg}0=0$ (см. следующий параграф). Поэтому по теореме 4.1.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{arctg}4x}=\frac{3}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}y}{y}=\frac{3}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{\cos y}=\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{4}.$$

(т. к. $\lim\limits_{y\to 0}\cos y=1$).

Пример 4.1.35

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Пример 4.1.36 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{x^2}$.
Заметим, что здесь мы не имеем дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$, как это было в предыдущих примерах.

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=1+1=2,\quad \lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Поэтому на основании теоремы 4.1.5(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{x^2}=\infty.$$

Пример 4.1.37 Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$.
Здесь мы опять имеем дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$, но сразу воспользоваться первым

замечательным пределом не можем, т. к. $x \to \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому сделаем замену $y := x - \dfrac{\pi}{2}$, тогда $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} y = 0$, $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + y\right) = \cos y$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

(здесь мы воспользовались примером 4.1.35).

Теорема 4.1.10 *Последовательность* $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет конечный предел.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим. Отметим, однако, что можно показать, что эта последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху. После этого существование конечного предела следует из теоремы 4.1.8.

Определение 4.1.7 *Числом e (вторым замечательным пределом) называется предел числовой последовательности*

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.10}$$

Число e является иррациональным и имеет приближенное значение $e \approx 2,71828$.

Можно показать, что

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4.11}$$

Если сделать замену $y = \dfrac{1}{x}$, то при $x \to \infty$ $y \to 0$ и получаем еще одну запись числа e:

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}. \tag{4.12}$$

Пример 4.1.38 Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2.$$

Пример 4.1.39 Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x + 1}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x + 1}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{-\frac{1}{2x}} = \lim_{x \to 0} \left[(1 + x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Число e называют также *неперовым*[2] *числом*. Это число, а также показательная функция $y = e^x$, называемая *экспонентой*, играют очень важную роль в математике и ее приложениях. Важную роль играют также логарифмы по основанию e, называемые *натуральными* и обозначаемые ln: $\ln x := \log_e x$.

Рассмотрим в качестве примера *задачу о непрерывном начислении процентов*. Пусть процентная ставка по вкладам в банке составляет долю x (т.е. $100x\%$). Тогда за год вклад

[2]Дж. Непер (1550–1617) – шотландский математик, изобретатель логарифмов.

P увеличится в $1 + x$ раз: $P + Px = P(1 + x)$. Следовательно, через n лет размер вклада будет равен $P_n = P(1+x)^n$. Предположим теперь, что проценты начисляются не один раз в год, а m раз по ставке $\frac{x}{m}$. Тогда размер вклада через n лет будет $P_n = P\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{mn}$. При $m = 2$ проценты начисляются раз в полугодие, при $m = 4$ – ежеквартально, при $m = 12$ – ежемесячно, при $m = 365$ – ежедневно. Можно рассмотреть ежечасное, ежеминутное, ежесекундное начисление процентов. При $m \to \infty$ мы получим *непрерывное* начисление процентов. При таком начислении процентов размер вклада через n лет составит

$$P_n = \lim_{m\to\infty} P\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{mn} = P\left[\lim_{m\to\infty} P\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m}\right]^n = Pe^{xn}. \tag{4.13}$$

Заметим, что на практике непрерывное начисление процентов применяется очень редко. Однако оно играет важную роль при анализе сложных финансовых проблем, в частности, в инвестиционном проектировании.

Основные термины

Конечные и бесконечно удаленные точки.
Окрестности конечных и бесконечно удаленных точек.
Односторонние (левые, правые) окрестности.
Проколотая окрестность.
Предельная точка множества.
Предел функции в точке.
Последовательность, предел последовательности.
Сходящаяся (расходящаяся) последовательность.
Бесконечно малая, бесконечно большая.
Бесконечно малая (большая) более высокого порядка.
Бесконечно малые (большие) одного порядка.
Эквивалентные бесконечно малые (большие).
Монотонная функция. Монотонность в узком и в широком смысле.
Ограниченная функция. Ограниченность сверху (снизу).
Замечательные пределы.

Контрольные вопросы

1. Верно ли, что любые две различных точки имеют непересекающиеся окрестности?
2. Может ли предельная точка множества не принадлежать этому множеству?
3. Существуют ли множества, не имеющие предельных точек?
4. Может ли функция иметь два предела в одной точке?
5. Может ли функция не иметь предела в точке?
6. Может ли функция иметь различные пределы слева и справа в данной точке?
7. Может ли функция не иметь односторонних пределов в данной точке?
8. Является ли бесконечно малая ограниченной функцией?
9. Является ли произведение двух бесконечно малых бесконечно малой?
10. Является ли произведение двух бесконечно больших бесконечно большой?
11. Является ли сумма двух бесконечно больших бесконечно большой?

12. Является ли частное бесконечно малых (бесконечно больших) бесконечно малой (бесконечно большой)?

13. Является ли сумма бесконечно малой (бесконечно большой) и ограниченной функции бесконечно малой (бесконечно большой)?

14. Что означает слово "неопределенность"при вычислении пределов?

15. Является ли существование предела функции в точке необходимым (достаточным) условием ее ограниченности в некоторой окрестности этой точки?

16. Является ли ограниченность функции в окрестности точки необходимым (достаточным) условием существования предела в этой точке?

Тест

1. Какие из следующих функций являются бесконечно малыми в указанных точках?
а) $\dfrac{1}{x-1},\ x=1$; б) $\dfrac{x-1}{x+1},\ x=1$; в) $\dfrac{\cos x}{x}+\operatorname{tg} x,\ x=0$;
г) $\dfrac{x}{\cos x},\ x=0$; д) $\dfrac{\sin x}{x},\ x=\infty$.

2. Какие из предыдущих функций являются бесконечно большими в указанных точках?

3. Выберите верные утверждения:
а) $\sin(x^2-x)\sim x^2-x$ при $x\to 1$; б) $\sin(x^2-x)\sim x-1$ при $x\to 1$;
в) $\sin(x^2-x)=O(x-1)$ при $x\to 1$; г) $\sin(x^2-x)=o(x-1)$ при $x\to 1$;
д) $\sin(x^2-x)=o(x^2-x)$ при $x\to 1$;

4. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=$
а) $=+\infty$; б) $=0$; в) не существует; г) зависит от $f(x), g(x)$ и a;
д) не имеет смысла.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$
а) 1; б) 0; в) не существует; г) ∞; д) e.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{x^2}=$
а) 1; б) 0; в) не существует; г) ∞; д) e.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=$
а) 1; б) 2; в) не существует; г) ∞; д) $\dfrac{1}{2}$; е) 0.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=$
а) 1; б) e; в) 0; г) ∞; д) e^2; е) e^{-2}.

9. Пусть $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x}$. Тогда при $x\to 0$:
а) $f(x)=O(g(x))$; б) $f(x)=o(g(x))$; в) $f(x)\sim g(x)$; г) $g(x)=o(f(x))$;
д) $f(x)$ или $g(x)$ не является бесконечно малой.

10. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – эквивалентные бесконечно малые. Тогда $f(x)+g(x)$
а) $\sim f(x)$; б) $\sim g(x)$; в) $\sim 2f(x)$; г) $\sim 2g(x)$;
д) не является бесконечно малой; е) не обязательно является бесконечно малой.

4.2 Непрерывность функций

4.2.1 Непрерывность функции в точке

Определение 4.2.1 *Функция f называется непрерывной в точке x_0, если*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{4.14}$$

Равенство (4.14), естественно, предполагает существование обеих его частей, т. е.:

1) функция f определена в точке x_0 (и, следовательно, x_0 – конечная точка);
2) x_0 – предельная точка области определения $D(f)$;
3) предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и конечен.

Определение 4.2.2 *Функция f называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Пример 4.2.1 Постоянная функция непрерывна. Это утверждение очевидно, т. к. если $\forall x \in D(f)\ f(x) = c$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, и $f(x_0) = c$.

Пример 4.2.2 Функция $f(x) = x$ непрерывна на $\mathbf{R}$. Действительно, $\forall x_0 \in \mathbf{R}\ \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Пример 4.2.3 $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ (пример 4.1.29), следовательно, функция $\sin x$ непрерывна в 0, т. к. $\sin 0 = 0$. Покажем, что эта функция непрерывна на всем множестве $\mathbf{R}$, т. е.

$$\forall x_0 \in \mathbf{R} \quad \lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Воспользуемся формулой разности синусов:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}.$$

Т. к. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin\dfrac{x-x_0}{2} = 0$, а функция cos – ограничена, то из предложения 4.1.4 имеем: $\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x - \sin x_0) = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

Пример 4.2.4 Покажем, что функция $f(x) = \cos x$ также непрерывна на $\mathbf{R}$, т. е.

$$\forall x_0 \in \mathbf{R} \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Для доказательства , как и в предыдущем примере, рассмотрим разность

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2},$$

которая также стремится к нулю.

4.2.2 Локальные свойства непрерывных функций

Локальными называются свойства функций, которые определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки области определения.

Укажем основные локальные свойства непрерывных функций. Они легко следуют из определения непрерывности и соответствующих теорем о пределах. Так, из теоремы 4.1.4 следует

Теорема 4.2.1 *Если функция непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Из теоремы 4.1.2 получаем:

Теорема 4.2.2 *Если функции f и g определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в этой точке, то функции $f+g$, fg и $\dfrac{f}{g}$ (при условии $g(a)\neq 0$) также определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в этой точке.*

В этой теореме в пояснении нуждается лишь то, что функция $\dfrac{f}{g}$ определена в некоторой окрестности точки a. Т. к. $g(a)\neq 0$, то из теоремы 4.1.6 следует, что в некоторой окрестности точки a $g(x)\neq 0$ и поэтому частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ определено.

Из теоремы 4.1.3 получаем:

Теорема 4.2.3 *Если функция f непрерывна в точке a, а функция g непрерывна в точке $b=f(a)$, то функция $g\circ f$ непрерывна в точке a.*

Пример 4.2.5 Многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ является функцией непрерывной на $\mathbf{R}$, т. к. он может быть получен с помощью конечного числа операций сложения и умножения из функций $f(x)=x$ и констант, которые, как мы видели в примерах 4.2.1 и 4.2.2, непрерывны.

Пример 4.2.6 Рациональная функция $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – частное двух многочленов – непрерывна на всей своей области определения, т. е. в точках, в которых $Q(x)\neq 0$. Это следует из предыдущего примера и теоремы 4.2.2.

Пример 4.2.7 Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на своих областях определения. Это следует из примеров 4.2.3 и 4.2.4 и теоремы 4.2.2.

Можно показать, что все основные элементарные функции, а следовательно, согласно теоремам 4.2.2 и 4.2.3, и все *элементарные функции непрерывны на своих областях определения.*

С использованием непрерывности показательной и логарифмической функций может быть доказана следующая теорема, применяющаяся при вычислении пределов.

Теорема 4.2.4 *Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, причем $A>0$, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=A^B. \tag{4.15}$$

Замечание. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ (обозначим его C) может быть вычислен и в некоторых других случаях. А именно:

1) если $0 < A < 1$, $B = +\infty$, то $C = 0$;
2) если $0 < A < 1$, $B = -\infty$, то $C = +\infty$;
3) если $A > 1$, $B = -\infty$, то $C = 0$;
4) если $0 < A < 1$, $B = -\infty$, то $C = +\infty$;
5) если $A = +\infty$, $B > 0$, то $C = +\infty$;
6) если $A = +\infty$, $B < 0$, то $C = 0$;
7) если $A = 0$, $B > 0$, то $C = 0$;
8) если $A = 0$, $B < 0$, то $C = +\infty$.

В последних двух случаях предполагается, что в некоторой проколотой окрестности точки a $f(x) > 0$.

В случаях $A = 1, B = \infty$, $\quad A = 0, B = 0$, $\quad A = \infty, B = 0$ ответ в общем случае дать невозможно (он зависит от конкретных функций f и g) и говорят, что имеет место неопределенность вида 1^∞, 0^0 или ∞^0 соответственно.

Пример 4.2.8 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{\frac{x-1}{3x+2}}$.

Т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x+1} = 2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$, то по теореме 4.2.4

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{\frac{x-1}{3x+2}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Пример 4.2.9 Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{x}$.

Т. к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1} = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, то согласно замечанию 4.2.2
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{x} = +\infty$.
Заметим, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{x} = 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{x}$ не существует.

Пример 4.2.10 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{5x-1}$.

Здесь мы имеем неопределенность вида 1^∞, т. к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{4x-3} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}(5x-1) = \infty.$$

Поэтому используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{5x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{4x-3}\right)^{5x-1} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{4}}\right]^{\frac{4(5x-1)}{4x-3}}.$$

Теперь выражение в квадратных скобках стремится к e, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4(5x-1)}{4x-3} = 5$, поэтому по теореме 4.2.4 искомый предел равен e^5.

Пример 4.2.11 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.
Здесь также имеем неопределенность вида 1^∞ и используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e},$$

т. к. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ – здесь мы воспользовались первым замечательным пределом.

4.2.3 Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов

Определение 4.2.3 *Функция f называется непрерывной в точке x_0 слева (справа), если ее левый (правый) предел в этой точке совпадает со значением функции $f(x_0)$, т. е. $f(x_0-0) = f(x_0)$ (соответственно $f(x_0+0) = f(x_0)$). Очевидно, функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа, т. е.*

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0). \tag{4.16}$$

Если функция не является непрерывной в некоторой предельной точке x_0 своей области определения, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции f. Возможные случаи нарушения равенства (4.16) являются основой классификации точек разрыва.

Определение 4.2.4 *1) Если в точке x_0 оба односторонних предела функции f существуют, конечны и равны, но не равны значению функции (возможно функция не определена в этой точке), т. е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f.*

2) Если в точке x_0 оба односторонних предела существуют и конечны, но не равны, т. е. $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода для функции f.

3) Если в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Пример 4.2.12 Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ имеет оба односторонних предела в точке 0 (см. пример 4.1.12), но они различны: $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x = 1$.
Следовательно, 0 – точка разрыва первого рода.

Пример 4.2.13 Функция $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ не определена в точке 0, однако имеет предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (см. примеры 4.1.6 и 4.1.14). Поэтому 0 – точка устранимого разрыва. Если положить

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$$

то эта функция будет уже непрерывной.

Пример 4.2.14 Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ точка 0 является точкой разрыва второго рода, т. к. $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Пример 4.2.15 Для функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ точка 0 является точкой разрыва второго рода, т. к. $\lim\limits_{x\to 0-} \sin\dfrac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0+} \sin\dfrac{1}{x}$ не существуют.

4.2.4 Глобальные свойства непрерывных функций

Глобальным свойством функции называется свойство, связанное со всей областью определения функции.

Следующие теоремы, которые мы приводим без доказательств, выражают глобальные свойства непрерывных функций. В основном это теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.

Теорема 4.2.5 ***(Теорема Больцано[3]-Коши[4] о промежуточном значении)*** *Если функция, непрерывная на отрезке, принимает на его концах значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она обращается в нуль.*

Эта теорема имеет простой геометрический смысл: непрерывная кривая при переходе из нижней координатной полуплоскости в верхнюю (или наоборот) обязательно пересекает ось абсцисс.

Следствие 4.2.1 *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах различные значения, то она принимает на этом отрезке все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Теорема 4.2.6 ***(Теорема Вейерштрасса[5] о наибольшем и наименьшем значении)*** *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения.*

Заметим, что теорема неверна, если в ее формулировке отрезок заменить на интервал. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$ непрерывна, но не ограничена: $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Функция $f(x) = x$ на интервале $(0, 1)$ ограничена, но не имеет наибольшего и наименьшего значения.

Теорема 4.2.7 *(об обратной функции) Если функция $f : D \to \mathbf{R}$ строго монотонна на множестве D, то она имеет обратную функцию $f^{-1} : E \to \mathbf{R}$, где E – область значений функции f. Функция f^{-1} монотонна на E и имеет тот же вид монотонности, что и функция f.*

Если, кроме того, D есть отрезок $[a, b]$ и функция f непрерывна на нем, то E – есть отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$ и функция f^{-1} непрерывна на нем.

---

[3] Б. Больцано (1781–1848) – чешский математик, философ и богослов.

[4] О. Коши (1789–1857) – выдающийся французский математик, заложивший основы современной математики – математического анализа, теории функций, математической физики.

[5] К. Вейерштрасс (1815–1897) – немецкий математик.

Пример 4.2.16 Функция $f(x) = \sin x$ возрастает и непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому сужение этой функции на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет обратную функцию $f^{-1}(y) = \arcsin y$. Эта функция определена на отрезке $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\frac{\pi}{2}\right] = [-1, 1]$, является возрастающей и непрерывной.

Аналогично, сужение функции $y = \cos x$ на отрезок $[0, \pi]$ есть убывающая непрерывная функция и по теореме 4.2.7 имеет обратную $x = \arccos y$, которая определена на отрезке $[-1, 1]$, убывает и непрерывна.

Пример 4.2.17 Сужение функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ есть возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$ непрерывная функция. В силу теоремы 4.2.7 она имеет обратную, обозначаемую arctg, определенную на множестве $\mathbf{R}$ с множеством значений $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и также возрастающую. Непрерывность обратной функции в этом случае не следует из теоремы 4.2.7, однако может быть доказана.

Аналогично, сужение функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$ на интервал $(0, \pi)$ есть убывающая от $+\infty$ до $-\infty$ функция, и поэтому имеет обратную $\operatorname{arcctg} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$, которая также убывает и, как можно показать, непрерывна.

Пример 4.2.18 Функция $f(x) = a^x$ при $a > 1$ возрастает на всей действительной оси. Ее область значений – множество $\mathbf{R}^+$ положительных действительных чисел. В силу теоремы 4.2.7 она имеет обратную $\log_a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, которая также возрастает. Обе функции a^x и $\log_a x$ являются непрерывными.

Основные термины

Непрерывность функции в точке. Непрерывность на множестве.
Непрерывность слева (справа).
Точка разрыва. Устранимый разрыв. Разрыв 1-го рода. Разрыв 2-го рода.
Локальные и глобальные свойства непрерывных функций.

Контрольные вопросы

1. Является ли непрерывность функции в точке необходимым условием ее ограниченности в некоторой окрестности этой точки?
2. Является ли непрерывность функции в точке достаточным условием ее ограниченности в некоторой окрестности этой точки?
3. Всегда ли сумма (произведение) непрерывных функций непрерывна?
4. Всегда ли частное непрерывных функций непрерывно?
5. Может ли функция, непрерывная на отрезке, быть неограниченной на этом отрезке?
6. Может ли функция, непрерывная на интервале, быть неограниченной на этом интервале?
7. Всегда ли функция, непрерывная на промежутке, достигает на нем наибольшего и наименьшего значений?
8. Всегда ли функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем наибольшего и наименьшего значений?

9. Докажите, что уравнение $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ имеет корень в интервале $(0, 1)$.

Тест

1. Какие из следующих функций непрерывны на всей вещественной оси?
а) $\sqrt[3]{x}$; б) $\operatorname{tg} x$; в) $\dfrac{\sin x}{x}$; г) 2^x; д) $2^{\frac{1}{x}}$.
2. Какие из предыдущих функций непрерывны на всей своей области определения?
3. Какие из следующих функций имеют в точке $x = 0$ устранимый разрыв?
а) $\sin \dfrac{1}{x}$; б) $\dfrac{\sin x}{x}$; в) $x \sin \dfrac{1}{x}$; г) $\operatorname{tg} x$; д) $\operatorname{ctg} x$.
4. Какие из следующих функций имеют в точке $x = 0$ разрыв 1-го рода?
а) $\dfrac{x}{|x|}$; б) $\operatorname{ctg} x$; в) $2^{\frac{1}{x}}$; г) $\ln x$; д) $\ln |x|$.
5. Какие из предыдущих функций имеют в точке $x = 0$ разрыв 2-го рода?
6. Выберите верные из следующих утверждений.
Функция, непрерывная на промежутке:
а) ограничена на нем; б) неограничена на нем; в) обращается в нуль;
в) достигает на нем наибольшего значения; г) имеет экстремум; д) обратима.
7. Выберите верные утверждения.
Если функция непрерывна в точке x_0, то она:
а) определена в этой точке;
б) определена в некоторой окрестности этой точки;
в) имеет предел в этой точке;
г) ограничена в некоторой окрестности этой точки;
д) является бесконечно малой в этой точке.

Упражнения

1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2+x-2}$,

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$,

4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$,

5) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$,

6) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^4-3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$,

7) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{x}+2}$,

8) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{x}-2}$,

9) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$,

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-(1+x)}{x}$,

11) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x})$,

12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$,

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$,

14) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$,

15) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 3x}{3x^2-5x}$,

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$,

18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$,

$$19)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n+1}, \qquad 20)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2}\right)^{n^4},$$

$$21)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+3}\right)^{n+2}, \qquad 22)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}.$$

2. Найти точки разрыва следующих функций и определить их тип:

$$1)\ y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}, \qquad 2)\ y=\frac{x}{\sin x}, \qquad 3)\ y=\begin{cases} 2x+1, & x<0, \\ x^2-1, & x\geq 0, \end{cases} \qquad 4)\ y=2^{\operatorname{tg} x}.$$

Глава 5

Дифференциальное исчисление

В дифференциальном исчислении изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций. Развитие диффеференциального исчисления тесно связано с развитием интегрального исчисления. Неразрывно и их содержание. Вместе они составляют основу математического анализа, имеющего чрезвычайное значение для естествознания, техники и экономики. Основной предпосылкой для создания дифференциального исчисления явилось введение в математику переменных величин Р. Декартом. В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчислений было завершено в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница к концу 17 в. Создание дифференциального и интегрального исчислений явилось началом периода бурного развития математики и связанных с ней прикладных наук.

5.1 Производная и дифференциал

5.1.1 Задачи, приводящие к понятию производной

Рассмотрим задачу о скорости движения. Пусть точка движется вдоль прямой и известна зависимость $s = s(t)$ пройденного ей пути к моменту времени t.

Средняя скорость движения на интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ равна отношению пройденного за это время пути Δs к промежутку времени Δt: $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение. *Мгновенной скоростью* в момент времени t_0 называется предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Если учесть, что $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, то можно записать

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Рис. 5.1:

Рассмотрим *задачу о касательной* к кривой. Пусть на плоскости в декартовой системе координат задана кривая уравнением $y = f(x)$. Требуется определить угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой в точке $A(x_0, y_0)$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi_0$, где φ_0 – угол, образованный касательной и осью абсцисс. Рассмотрим некоторую близкую точку кривой $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Найдем угловой коэффициент секущей AB:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если устремить точку B (по кривой) к точке A, то угол φ будет стремиться к углу φ_0, а следовательно, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0$, т. к. функция tg непрерывна. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если учесть, что $y_0 = f(x_0)$ и $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, т. к. точки A и B лежат на кривой, т. е. $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

5.1.2 Определение производной

Рассматривая в предыдущем пункте различные по характеру задачи, мы пришли к пределу одного и того же вида. Этот предел играет очень важную роль в математическом анализе.

Определение 5.1.1 *Пусть функция f определена на промежутке X, $x_0 \in X$. Придадим значению x_0 некоторое приращение Δx, не выводящее за пределы промежутка X, т. е. $x_0 + \Delta x \in X$ (Δx может быть как больше так и меньше нуля). Тогда функция f получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует) называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, т. е.*

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{5.1}$$

Для обозначения производной используются также следующие обозначения: $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $Df(x_0)$. Если может возникнуть сомнение относительно переменной, по которой взята производная, то эта переменная указывается в виде значка снизу: $f'_x(x_0)$, $D_x f(x_0)$.

Производная в фиксированной точке x_0, если она существует, есть число; если же производная существует во всем промежутке X, т. е. $\forall x \in X$, то она является функцией от x и обозначается f' или f'_x (также Df, $D_x f$, $\dfrac{df}{dx}$). Вычисление производной функции называется ее *дифференцированием*.

Из задачи о касательной следует *геометрический смысл производной*: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, т. к. $k = \operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x_0)$. Следовательно, *уравнение касательной* имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ или } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Из задачи о скорости движения следует *механический смысл производной*: мгновенная скорость есть производная от пройденного пути по времени, т. е. $v(t_0) = s'(t_0)$.

Если слово "скорость"понимать в более общем смысле, то производную можно всегда трактовать как скорость, а именно как скорость изменения переменной $y = f(x)$ по сравнению с переменной x. Например, если $y = f(t)$ есть количество произведенной продукции за время t, то скорость его роста есть производительность труда, т. е. производительность труда есть производная от количества произведенной продукции по времени.

Рассмотрим примеры вычисления производной непосредственно по определению.

Пример 5.1.1 Пусть $f(x) = c$, где c – константа.

Тогда $f(x+\Delta x) = c$ и $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$. Поэтому и $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 0$. Итак, $c' = 0$.

Пример 5.1.2 Пусть $f(x) = x$.

Тогда $f(x+\Delta x) = x + \Delta x$, $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - x = \Delta x$. Следовательно, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Итак, $x' = 1$.

Пример 5.1.3 Пусть $f(x) = \sin x$. Найдем приращение функции

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x\cdot 1 = \cos x.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью $\cos x$ и первым замечательным пределом. Итак, $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогичным образом можно вычислить производные всех основных элементарных функций. Эти производные приведены в следующей *таблице производных*:

1.	$y = c$	$y' = 0$
2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$
4.	$y = a^x$	$y' = a^x lna$ $(a > 0)$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
5.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0)$
	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
6.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
7.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

5.1.3 Основные правила вычисления производных

Рассмотрим ряд простых правил, с помощью которых, зная производные основных элементарных функций, можно будет вычислить производную любой элементарной функции. Эти правила нетрудно доказать, исходя из определения производной и свойств предела.

Теорема 5.1.1 *Если функции f и g имеют конечные производные в точке x и c – произвольное действительное число, то функции cf, $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ также имеют конечные производные в точке x (последняя при условии $g(x) \neq 0$), которые вычисляются по формулам:*

$$1)(cf)' = cf', \qquad 2)(f \pm g)' = f' \pm g', \qquad 3)(fg)' = f'g + fg', \qquad 4)\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Для краткости аргумент x здесь всюду опущен.

Теорема 5.1.2 *(правило дифференцирования сложной функции). Если функция f имеет конечную производную в точке x, а функция g имеет конечную производную в точке $f(x)$, то композиция функций $g \circ f$ также имеет конечную производную в точке x и*

$$((g \circ f)(x))' = (g(f(x))' = g'(f(x))f'(x).$$

Если ввести обозначения $y = g(u)$, $u = f(x)$, то это правило может быть записано в следующем виде:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{5.2}$$

Пример 5.1.4 Вычислить производную функции $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$.

Функцию можно представить в виде $y = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$, где $u = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Поэтому

$$y' = (u^{\frac{1}{3}})'u' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}u' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{3(x^2+1)\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-1)^2}}.$$

Теорема 5.1.3 *Пусть функция f строго монотонна на промежутке X и имеет в точке $x_0 \in X$ конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда обратная функция $g(y)$ (существующая в силу теоремы 4.1.8) имеет производную $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. Если ввести обозначение $y = f(x)$ и $x = g(y)$, то имеем простую формулу*

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{5.3}$$

Пример 5.1.5 Рассмотрим функцию $y = \sin x$. На промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ она возрастает и обладает обратной $x = \arcsin y$. Т. к. $y' = \cos x \neq 0$ во всех точках интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\forall y \in (-1, 1)$ имеем

$$(\arcsin y)' = x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Рассмотрим производную функции $y = f(x)^{g(x)}$. Такая функция называется *степенно-показательной*. Найдем $\ln y = g(x)\ln f(x)$.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)(\ln f(x))' = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Умножая теперь обе части этого равенства на y и учитывая, что $y = f(x)^{g(x)}$, получим:

$$y' = f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x) + f(x)^{g(x)-1}g(x)f'(x). \tag{5.4}$$

Таким образом, чтобы найти производную степенно-показательной функции нужно сначала ее продифференцировать как степенную, затем как показательную, и результаты сложить.

Производная $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$ называется *логарифмической производной* или *темпом изменения функции*. Ее удобно использовать для нахождения производной в тех случаях, когда выражение значительно упрощается после логарифмирования.

Пример 5.1.6 Вычислить производную функции $y = x^x$.
По формуле (5.4) имеем $y' = x^x \ln x + x^{x-1}x = x^x(\ln x + 1)$.

Пример 5.1.7 Вычислить производную функции $y = \sqrt[5]{\left(\dfrac{1-5x}{1+5x}\right)^3}$.
Найдем $\ln y = \dfrac{3}{5}\left(\ln(1-5x) - \ln(1+5x)\right)$. Дифференцируя последнее равенство почленно, имеем:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{5}\left(\frac{(1-5x)'}{1-5x} - \frac{(1+5x)'}{(1+5x)}\right) = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{1-5x} - \frac{5}{1+5x}\right) =$$
$$= -3\left(\frac{1}{1-5x} + \frac{1}{1+5x}\right) = \frac{-6}{(1-5x)(1+5x)} = \frac{6}{25x^2-1}.$$

Следовательно, $y' = \sqrt[5]{\left(\dfrac{1-5x}{1+5x}\right)^3}\dfrac{6}{25x^2-1}$.

5.1.4 Дифференцируемость и дифференциал

Определение 5.1.2 *Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно представить в виде*

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{5.5}$$

где $A \in \mathbf{R}$, а $o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Теорема 5.1.4 *Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.*

Доказательство. 1) Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т. е. имеет место равенство (5.5). Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A + 0 = A.$$

2) Пусть теперь наоборот, функция имеет конечную производную $f'(x_0)$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ и, согласно предложению 4.1.1, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда имеем: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, откуда следует (5.5) при $A = f'(x_0)$, т. к. $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, из доказательства теоремы мы видим, что приращение дифференцируемой в точке x_0 функции имеет представление

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0. \tag{5.6}$$

В этом выражении первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ есть бесконечно малая одного порядка с Δx, а второе – бесконечно малая более высокого порядка. Поэтому говорят, что $f'(x_0)\Delta x$ есть *главная* часть приращения Δy.

Определение 5.1.3 *Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке: $f'(x_0)\Delta x$.*

Дифференциал обозначается dy или $df(x_0)$. Дифференциалом независимой переменной будем называть приращение этой переменной, т. е. $dx = \Delta x$. Таким образом, согласно определению

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Заметим, что теперь равенство $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$ или $f'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx}$ может восприниматься как отношение двух дифференциалов, а не только как единый символ.

Из определения дифференциала и правил вычисления производных (теорема 5.1.1) умножением обеих частей равенств на dx, получаем следующие правила вычисления дифференциала:

$$d(cf) = cdf, \quad d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(fg) = gdf + fdg, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}. \tag{5.7}$$

В этих формулах c – константа, df и dg – дифференциалы функций f и g в одной и той же точке x, в которой обе функции дифференцируемы, $g(x) \neq 0$.

Теорема 5.1.5 *Если функция дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если в определении (4.14) непрерывной функции положить $x - x_0 = \Delta x$, то оно запишется следующим образом: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Последнее равенство очевидным образом следует из равенства (5.5). Отметим, что обратное утверждение неверно, т. е. функция может быть непрерывна в точке x_0, но не дифференцируема.

Пример 5.1.8 Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$, непрерывную на всей действительной оси. Ее производная $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Таким образом, производная $f'(0)$ не может быть вычислена по общей формуле. Вычислим ее непосредственно по определению.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty,$$

т. е. производная этой функции в нуле бесконечна и, следовательно, функция не дифференцируема в нуле. В соответствии с геометрическим смыслом производной равенство ее бесконечности означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке вертикальна. В данном случае касательная совпадает с осью Oy (см. рис. 5.2).

Пример 5.1.9 Функция $f(x) = |x|$, также непрерывна на всей оси, не дифференцируема в нуле, т. к. $f'(0)$ не существует. Действительно,

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \Delta x > 0, \\ -1 & \text{при} \quad \Delta x < 0, \end{cases}$$

и поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не существует.

Рис. 5.2:

Определение 5.1.4 *Правой (левой) производной функции f в точке x_0 называется правый (левый) предел отношения (5.1) при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует. Односторонние производные обозначаются $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$. Таким образом,*

$$f'_\pm(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{5.8}$$

Очевидно, существование производной в точке x_0 равносильно существованию обеих односторонних производных и их равенству. В примере 5.1.9 мы видели, что для функции $f(x) = |x|$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$ и поэтому $f'(0)$ не существует.

Пример 5.1.10 Рассмотрим непрерывную функцию (см. пример 4.2.13)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Найдем производную $f'_+(0)$ по определению:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Последний предел, как мы знаем (пример 4.1.13), не существует. Таким образом, рассматриваемая непрерывная функция не имеет в точке 0 даже односторонних производных.

Возвращаясь к задаче о касательной, мы получаем геометрический смысл дифференциала. На рис. 5.1 из ΔACD имеем : $CD = AC \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 = \Delta x \cdot f'(x_0) = df(x_0)$, т. е. *дифференциал функции f в точке x_0 есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, когда независимая переменная получает приращение Δx.*

Из определения дифференциала и равенства (5.6) следует равенство $\Delta y = dy + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, которое при малых Δx можно записать в виде приближенного равенства: $\Delta y \approx dy$ или в развернутом виде:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{5.9}$$

Формула (8) оказывается полезной в приближенных вычислениях.

Пример 5.1.11 Вычислить приближенно $\operatorname{tg} 46°$.
Положим $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 45°$, $\Delta x = 1° = \dfrac{\pi}{180}$.
Тогда $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{\cos^2 45°} = 2$ и из (5.9) получаем:

$$\operatorname{tg} 46° \approx \operatorname{tg} 45° + 2 \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + \frac{\pi}{90} \approx 1,035.$$

Рассмотрим дифференциал сложной функции. Пусть $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, т. е. $y = f(\varphi(t))$. Тогда, согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$dy = (f(\varphi(t)))'\, dt = f'(\varphi(t))\, \varphi'(t) dt = f'(x) dx.$$

В последнем равенстве мы учли, что $\varphi(t) = x$, и поэтому $dx = \varphi'(t)dt$. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ может быть записан в виде $dy = f'(x)dx$ независимо от того, является ли x независимой переменной, или зависит от другой переменной. Это свойство называется *инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала*. Отметим, что дифференциалы высших порядков, которые будут рассмотрены в следующем пункте, этим свойством не обладают.

Используем дифференциал для нахождения производной функции, заданной параметрически. Пусть x и y заданы как функции одной переменной t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

причем φ и ψ определены и дифференцируемы на одном и том же промежутке T. Если предположить, что для функции $x = \varphi(t)$ существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, то y оказывается функцией от x: $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. Если $\varphi'(t) \neq 0$, то производная функции $y = f(x)$ может быть вычислена следующим образом:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

5.1.5 Производные и дифференциалы высших порядков

Если производная функции $y = f(x)$ существует в каждой точке промежутка X, то она является функцией от x, и по отношению к ней можно ставить вопрос о вычислении производной. Производная от функции $f'(x)$ называется *второй производной* или *производной второго порядка* и обозначается y'' или $f''(x)$. Аналогично определяется третья, четвертая и т. д. производные, которые обозначаются y''', $y^{(4)}$, ..., $y^{(n)}$, ... или $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ... Применяются также обозначения $D^n y$, $D^n f(x)$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$. Производная n-го порядка определяется, таким образом, как производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} := (y^{(n-1)})'$.

Пример 5.1.12 Пусть $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.
Тогда $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, ..., $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{(\alpha-n)}$.
Если $\alpha = m \in \mathbf{N}$, то $y^{(m)} = m!$, $y^{(n)} = 0$ при $n > m$.

Пример 5.1.13 Для функции $y = a^x$
$y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x (\ln a)^2$, ..., $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

Пример 5.1.14 Пусть $y = \sin x$.
Тогда $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$, ... Таким образом,

$$y^{(n)} = \begin{cases} \sin x & \text{при} \quad n = 4k, \\ \cos x & \text{при} \quad n = 4k+1, \\ -\sin x & \text{при} \quad n = 4k+2, \\ -\cos x & \text{при} \quad n = 4k+3, \end{cases} \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 5.1.15 Пусть $y = \ln(1+x)$. Тогда

$$y' = \frac{1}{1+x},\ y'' = -\frac{1}{(1+x)^2},\ y''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\ y^{(4)} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},\ ...,\ y^{(n)} = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Если предполагать приращение dx независимой переменной постоянным, то дифференциал $dy = f'(x)dx$ является функцией от x, которая также может иметь дифференциал. *Дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* d^2y $(d^2f(x))$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от первого дифференциала dy: $d^2y := d(dy)$. Аналогично дифференциалом n-го порядка d^ny называется дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала:

$$d^ny := d(d^{n-1}y).$$

Учитывая, что $dx = \text{const}$, имеем:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx(f'(x))'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично $d^3y = f'''(x)(dx)^3$, ...,

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n. \tag{5.10}$$

Из формулы (5.10) получаем:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{5.11}$$

Отметим еще раз, что формулы (5.10) и (5.11) справедливы только для случая, когда x – независимая переменная.

5.1.6 Использование понятия производной в экономике

Будем рассматривать издержки производства y как функцию количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx – прирост продукции, Δy – приращение издержек производства и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Тогда производная $y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает *предельные издержки производства* и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции. Аналогичным образом могут быть определены *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность* и другие предельные величины.

Пример 5.1.16 Зависимость между издержками производства C и объемом выпускаемой продукции Q выражается функцией $C(Q) = 50Q - 0,04Q^3$ (ден.ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

Функция средних издержек определяется по формуле $\bar{C} = \dfrac{C}{Q}$, т. е. в данном случае

$$\bar{C} = 50 - 0,04Q^2, \qquad \bar{C}(10) = 50 - 0,04 \cdot 100 = 46 \text{ ден.ед.}$$

Функция предельных издержек выражается производной $C'(Q) = 50 - 0,12Q^2$. При $Q = 10$ получаем $C'(10) = 38$ ден.ед.

Как было сказано выше, производная y'_x характеризует скорость изменения функции с изменением аргумента. Однако в экономике этот показатель неудобен тем, что он зависит от выбора единиц измерения. Поэтому для измерения чувствительности изменения функции к изменению аргумента в экономике изучают связь не абсолютных изменений переменных, а их относительных изменений.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительных изменений переменных y и x. Если обозначить $E_x(y)$ эластичность изменения y по x, то

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' = x \frac{y'}{y} = x(\ln y)' = \frac{d \ln y}{d \ln x}. \tag{5.12}$$

Таким образом, эластичность функции равна произведению независимой переменной на темп изменения функции.

Отметим свойства эластичности функции.

1. Эластичность – безразмерная величина.

2. Эластичности взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

3. Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \qquad E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Например, эластичность спроса y относительно цены x – коэффициент, показывающий приближенно, на сколько процентов изменится спрос при изменении цены на 1%. Если $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают эластичным, если $|E_x(y)| = 1$ – нейтральным, если $|E_x(y)| < 1$ – неэластичным. Если спрос эластичен, то с повышением цены выручка от продажи снижается. При нейтральном спросе выручка практически не зависит от цены. При неэластичном спросе выручка увеличивается с ростом цены.

Пример 5.1.17 Функция спроса имеет вид $Q = \dfrac{100}{P^2 + 4}$. Определите при каких P спрос эластичен, нейтрален, неэластичен.

По формуле (5.12) находим $E_p(Q) = \dfrac{Q'P}{Q} = -\dfrac{100 \cdot 2P}{(P^2+4)^2} \cdot \dfrac{P^2+4}{100} \cdot P = -\dfrac{2P^2}{P^2+4}$,

$|E_p(Q)| > 1 \Leftrightarrow 2P^2 > P^2 + 4$, т.е. $P > 2$.

Следовательно, спрос эластичен при $P > 2$, нейтрален при $P = 2$ и неэластичен при $P < 2$.

Пример 5.1.18 Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом Q ее производства выражается формулой $C = 90 - 0,6Q$. Определить эластичность себестоимости при выпуске продукции 50 ден.ед.

По формуле (5.12) находим

$$E(C) = \frac{-0,6Q}{90 - 0,6Q} = \frac{Q}{Q - 150}.$$

При $Q = 50$ искомая эластичность составит $-0,5$, т. е. при данном объеме выпуска продукции его увеличение на 1% приведет к снижению себестоимости на $0,5\%$.

Используем формулу дифференциала произведения двух функций (5.7) для оценки изменения выручки от продажи товара в зависимости от изменения цены. Пусть P – цена, $Q = Q(P)$ – спрос на товар при данной цене, $R = PQ$ – выручка.

$$dR = d(PQ) = QdP + PdQ,$$

следовательно,

$$\frac{dR}{R} = \frac{dP}{P} + \frac{dQ}{Q} = \frac{dP}{P}\left(1 + E_p(Q)\right), \tag{5.13}$$

где $E_p(Q)$ – эластичность спроса на товар.

Пример 5.1.19 Эластичность спроса на товар составляет 0,4. Определить как изменится выручка, если цену на товар увеличить на 5%.

При малых ΔP из (5.13) следует приближенное равенство
$\dfrac{\Delta R}{R} \approx \dfrac{\Delta P}{P}\left(1 + E_p(Q)\right)$.

Т.к. $\Delta P/P = 0,05$, то имеем $\Delta R/R \approx 0,05 \cdot 1,4 = 0,07$.

Следовательно, выручка увеличится примерно на 7%.

Понятие производной находит применение и в финансовых расчетах. Пусть $P(x)$ – функция, определяющая зависимость цены облигации от ее доходности x. Темп изменения этой функции, т.е. $\dfrac{P'}{P}$ называется *модифицированной дюрацией* и используется специалистами рынка облигаций как индикатор процентного риска облигаций. Модифицированная дюрация может быть интерпретирована как приблизительное процентное изменение цены облигации при изменении ее доходности на 1%.

Основные термины

Производная. Дифференцирование.
Механический смысл производной. Геометрический смысл производной.
Логарифмическая производная. Темп изменения функции.
Дифференциал. Главная часть приращения. Геометрический смысл дифференциала.
Односторонняя (левая, правая) производная.
Инвариантность формы первого дифференциала.
Производная n-го порядка. Дифференциал n-го порядка.
Предельные величины в экономике.
Эластичность функции.

Контрольные вопросы

1. Является ли существование производной необходимым условием дифференцируемости функции? Достаточным условием?

2. Сформулируйте необходимое и досточное условие дифференцируемости функции.

3. Является ли непрерывность функции необходимым условием ее дифференцируемости? Достаточным условием?

4. В любой ли точке непрерывная функция имеет касательную?

5. Сформулируйте достаточное условие существования касательной к графику функции в заданной точке.

6. Может ли функция иметь касательную в данной точке, но быть в ней недифференцируемой?

7. Обладает ли второй дифференциал свойством инвариантности формы?

8. В чем состоит преимущество использования в экономике понятия эластичности функции по сравнению с понятием производной?

9. Докажите свойства эластичности функции.

10. Докажите, что при эластичном спросе выручка с повышением цены падает, а при неэластичном – растет.

Тест

1. Из следующих функций выберите дифференцируемые в точке $x = 0$.
а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt[3]{x}$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $\arcsin x$; д) $\ln(1 + x)$.

2. Какие из следующих функций дифференцируемы на всей вещественной оси?
а) x^2; б) $\sqrt[3]{x}$; в) $\sin x$; г) $\arcsin x$; д) e^x.

3. Выберите верные утверждения.
Если функция дифференцируема в точке x_0, то она:
а) непрерывна в этой точке;
б) определена в этой точке;
в) определена в некоторой окрестности этой точки;
г) ограничена в некоторой окрестности этой точки;
д) имеет предел в этой точке.

4. Выберите верные утверждения.
Дифференциал функции в точке x_0 есть:
а) линейная функция приращения Δx;
б) бесконечно малая функция приращения;
в) бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx;
г) бесконечно малая, эквивалентная Δx;
д) $o(\Delta x)$;
е) $O(\Delta x)$.

5. Эластичность спроса на товар при данной цене составляет -1,6. Если цену на товар увеличить на 2%, то выручка изменится приблизительно следующим образом:
а) увеличится на 1,2%; б) увеличится на 3,2%; в) увеличится на 0,4%;
г) уменьшится на 1,2%; д) уменьшится на 3,2%.

5.2 Основные теоремы дифференциального исчисления

5.2.1 Теорема Ферма

Пусть функция f определена на некотором промежутке X и во внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда если в точке x_0 существует производная этой функции, то она равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай наибольшего значения функции в точке x_0 (для наименьшего значения доказательство аналогично). Тогда для любой точки $x_0 + \Delta x \in X$ $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$, т. е. приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$. Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ при $\Delta x < 0$. Поэтому $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$, а $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Т. к. в точке x_0 существует двусторонняя производная, то $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.

Рис. 5.3:

Теорема Ферма[1] имеет следующий геометрический смысл (см. рис. 5.3): если во внутренней точке промежутка функция принимает наибольшее (наименьшее) значение и в этой точке существует касательная, то эта касательная параллельна оси Ox.

В доказательстве существенно использовалось, что точка x_0 – внутренняя, т. к. мы рассматриваем точки слева и справа от x_0. Действительно, если наибольшее (наименьшее) значение достигается функцией на границе промежутка, то производная в этой точке может быть не равна нулю. На том же рис. 5.3 наименьшее значение функции достигается в точке a. Однако касательная в этой точке не параллельна оси Ox, т. е. $f'(a) \neq 0$.

Теорема Ферма имеет важные приложения в экономической теории. Ряд экономических законов можно получить как следствие этой теоремы. Например, один из основных законов теории производства утверждает, что оптимальный уровень производства определяется равенством предельных издержек и предельного дохода. Обозначим $C(x)$ и $I(x)$ соответственно функции издержек и дохода в зависимости от уровня выпуска x. Тогда прибыль $P(x) = I(x) - C(x)$. Оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна. Если обозначить его x_0, то $P'(x_0) = 0$, т.е. $I'(x_0) = C'(x_0)$, что и означает равенство предельных издержек и предельного дохода.

Другой закон утверждает, что уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек. Производство будет наиболее эконо-

[1] П. Ферма (1601–1665) – французский математик, один из основоположников математического анализа.

мичным, если средние издержки $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ будут минимальны. Если x_0 – наиболее экономичный уровень производства, то по теореме Ферма $A'(x_0) = 0$.
$A'(x) = \dfrac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$, следовательно, $C'(x_0)x_0 = C(x_0)$, т.е. $C'(x_0) = \dfrac{C(x_0)}{x_0}$, что и утверждает сформулированный закон.

5.2.2 Теорема Ролля

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает на концах отрезка равные значения: $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство. Т. к. функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она принимает на нем свое наименьшее m и наибольшее M значения. Рассмотрим два возможных случая:

1) $m = M$. Тогда $f(x) = \text{const}$ и поэтому $f'(x) = 0$ в каждой точке отрезка.

2) $m < M$. Тогда хотя бы одно из значений m или M принимается во внутренней точке c отрезка (т. к. $f(a) = f(b)$). По теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Рис. 5.4:

Теорема Ролля[2] имеет следующий геометрический смысл (см. рис. 5.4): на графике функции, удовлетворяющей условиям теоремы, найдется точка, в которой касательная параллельна оси Ox. Рассмотрим примеры, показывающие существенность всех трех условий теоремы Ролля.

Рис. 5.5:

Пример 5.2.1 Функция $f(x) = \{x\}$ (дробная часть x), график которой изображен на рис. 5.5, удовлетворяет на отрезке [0,1] всем условиям теоремы Ролля, кроме непрерывности в точке $x = 1$. Ее производная $f'(x) = 1$ при всех $x \in (0, 1)$.

[2] М. Ролль (1652–1719) – французский математик.

Пример 5.2.2 Функция $f(x) = |x|$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и принимает на его концах равные значения. Однако производная этой функции в точке 0 не существует. Производная $f'(x)$ нигде на интервале $(-1, 1)$ в нуль не обращается.

Пример 5.2.3 Функция $f(x) = x$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, но на его концах принимает различные значения. Ее производная $f'(x) = 1$ всюду на отрезке $[0, 1]$.

Рассмотрим одно из применений теоремы Ролля в экономической теории. Функцией Лаффера $L(x)$ называется сумма налоговых поступлений за определенный длительный период времени, где x – ставка налоговых сборов, $0 \leq x \leq 1$. При $x = 0$ налоги вообще не собираются и, следовательно, $L(0) = 0$. При $x = 1$ производство отсутствует, т.к. отсутствуют стимулы, значит, отсутствуют и налоги, т.е. $L(1) = 0$. Естественно считать, что функция $L(x)$ дифференцируема и, следовательно, учитывая ее неотрицательность, достигает максимума в некоторой точке интервала $(0, 1)$.

5.2.3 Теорема Лагранжа

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b). Тогда найдется точка $c \in (a, b)$, в которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.14}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - kx$, где k подберем так. чтобы выполнялось условие $g(a) = g(b)$, т. е. $f(a) - ka = f(b) - kb$, откуда находим $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Функция g удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, следовательно, найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $g'(c) = 0$. Но $g'(x) = f'(x) - k$. Поэтому $f'(c) - k = 0$, т. е. $f'(c) = k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Рис. 5.6:

Теорема Лагранжа[3] имеет следующий геометрический смысл (см. рис. 5.6): на графике дифференцируемой функции найдется точка, в которой касательная параллельна хорде

[3]Ж. Лагранж (1736–1813) – выдающийся французский математик и механик.

AB. Действительно, $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной, $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\varphi$ – угловой коэффициент хорды AB.

Отметим, что теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа (при $f(a) = f(b)$). В то же время теорема Ролля использовалась при доказательстве теоремы Лагранжа. Иэ теоремы Лагранжа следует формула

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \tag{5.15}$$

которая так же, как и формула (5.14), называется *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений.*

5.2.4 Теорема Коши

Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$, для которой

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{5.16}$$

Доказательство. Т. к. $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то $g(a) \neq g(b)$. Действительно, в противном случае для функции g выполнялись бы все условия теоремы Ролля и тогда для некоторой точки $c \in (a, b)$ $g'(c) = 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $h(x) = f(x) - kg(x)$, где k выберем так, чтобы выполнялось условие $h(a) = h(b)$, т. е. $f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$, откуда находим $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Функция h удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, следовательно, найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $h'(c) = 0$. Но $h'(c) = f'(c) - kg'(c)$, поэтому $k = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, т. е. имеет место равенство (5.16).

Формула (5.16) называется *формулой Коши.*

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$. Геометрический смысл теоремы Коши тот же, что и теоремы Лагранжа. Чтобы это пояснить рассмотрим кривую заданную параметрически: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in (a, b)$. Тогда левая часть формулы (5.16) – угловой коэффициент касательной, проведенной в некоторой внутренней точке дуги, отвечающей $t = c$, а правая часть – угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $A\,(f(a), g(a))$ и $B\,(f(b), g(b))$.

5.2.5 Правило Лопиталя

Правило Лопиталя[4] применяется для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов.

Теорема Лопиталя. *Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки a (конечной или бесконечной) и*

[4] Г. Лопиталь (1661–1704) – французский математик.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (∞), *причем* $g'(x) \neq 0$ *в указанной окрестности. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Доопределим функции f и g в точке a: $f(a) = g(a) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точке a. Применяя теорему Коши, получим:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где c – промежуточная точка между a и x. При $x \to a$, очевидно, и $c \to a$. Поэтому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A.$$

Эту теорему обычно называют *правилом Лопиталя.*

Замечание. Правило Лопиталя можно применять повторно, если функции f' и g' удовлетворяют тем же требованиям, что и исходные функции f и g.

Пример 5.2.4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}$
(ср. пример 4.1.35).

Пример 5.2.5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos 0}{\cos^2 0} = 2.$$

Пример 5.2.6 При $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Для раскрытия неопределенностей вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ их можно привести к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и затем применить правило Лопиталя.

Пример 5.2.7 При $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

Пример 5.2.8 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.
Здесь мы имеем неопределенность вида $\infty - \infty$.

$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{x}\sin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos x - \frac{1}{x}\sin x\right)'}{(\sin x)'} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - \frac{1}{x}\cos x + \frac{1}{x^2}\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x}\cos x + \frac{1}{x^2}\sin x\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2} = 0.$$

Для раскрытия неопределенностей вида 1^∞, 0^0 и ∞^0 рекомендуется предварительно прологарифмировать соответствующие выражения.

Пример 5.2.9 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.
Здесь мы имеем неопределенность вида 0^0. Прологарифмируем функцию $y = x^x$: $\ln y = x\ln x$. $\lim\limits_{x\to 0+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$ (см. пример 5.2.7). Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$.

Пример 5.2.10 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.
Здесь мы имеем неопределенность вида 1^∞. Пусть $y = (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$, тогда $\ln y = \operatorname{ctg} x \ln\cos x$.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{ctg} x \ln\cos x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln\cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}(-\sin x\cos x) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x} = e^0 = 1$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, то отсюда не следует делать ошибочный вывод о том, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также не существует. Это говорит лишь о том, что правило Лопиталя в данной ситуации неприменимо.

Пример 5.2.11 Применение правила Лопиталя к пределу $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$ приводит к пределу $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$, который не существует. В то же время искомый предел существует:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Предостережем также от невнимательного применения правила Лопиталя к тем случаям, когда неопределенность отсутствует.

Пример 5.2.12 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{x^2}$.
Неверное применение правила Лопиталя дает нам

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

В то же время предел числителя равен 2, а знаменателя – 0, поэтому искомый предел равен ∞.

5.2.6 Формула Тейлора

Рассмотрим многочлен

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \tag{5.17}$$

и вычислим его производные:

$$\begin{aligned}
&p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1},\\
&p''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + \ldots + (n-1)n a_n x^{n-2},\\
&p'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + \ldots + (n-2)(n-1)n a_n x^{n-3},\\
&.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\\
&p^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot a_n.
\end{aligned}$$

Полагая во всех этих формулах $x = 0$, выразим коэффициенты многочлена через значения многочлена и его производных в нуле:

$$a_0 = p(0),\ a_1 = \frac{p'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{p''(0)}{2!},\ a_3 = \frac{p'''(0)}{3!},\ ...,\ a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в (5.17), получим:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{5.18}$$

Тот же многочлен $p(x)$ можно разложить по степеням $x - x_0$, где $x_0 \in \mathbf{R}$ – фиксированная точка:

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

или

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{5.19}$$

Формула (5.19), так же как ее частный (при $x_0 = 0$) случай (5.18), называется *формулой Тейлора*[5] *для многочленов.*

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$ и предположим, что она имеет в точке x_0 конечные производные до n-го порядка включительно. Тогда многочлен

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{5.20}$$

называется *многочленом Тейлора n-го порядка функции f в точке* x_0. Заметим,что

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, 2, ..., n. \tag{5.21}$$

Рассмотрим функцию $r(x) = f(x) - T_n(x)$. Для нее согласно (5.21) имеем:

$$r^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 0, 1, 2, ..., n. \tag{5.22}$$

Покажем, что из равенств (5.22) следует,что $r(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = ... = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(x_0) = 0.$$

Следовательно, $f(x) = T_n(x) + r(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Принимая во внимание равенство (5.20), имеем при $x \to x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \tag{5.23}$$

[5]Б. Тейлор (1685–1731) – английский математик и философ.

или

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

Формула (5.23) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*[6].

Вводя обозначения $\Delta x = x - x_0$ для приращения аргумента и $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ для приращения функции, формулу (5.23) можно записать в виде

$$\Delta f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+o(\Delta x^n)$$

при $\Delta x \to 0$.
Учитывая, что $f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$, $f''(x_0)\Delta x^2 = d^2f(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^nf(x_0)$, получаем еще один вид формулы Тейлора:

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+o(\Delta x^n)\text{ при }\Delta x\to 0.$$

Формула (5.23) имеет наиболее простой вид при $x_0 = 0$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n) \tag{5.24}$$

и называется *формулой Маклорена*[7].

Рассмотрим примеры конкретных разложений по этой формуле элементарных функций.

1) Пусть $f(x) = e^x$.
Тогда $f^{(k)}(x) = e^x$ при всех $k \in \mathbf{N}$. Поэтому $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ и по формуле (5.24) имеем:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n). \tag{5.25}$$

2) Пусть $f(x) = \sin x$.
Тогда (см. пример 5.1.14) при четных n $f^{(n)}(0) = 0$, а при нечетных $n = 2m + 1$ $f^{(n)}(0) = (-1)^m$. Следовательно, положив в формуле (5.24) $n = 2m$, получим:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m}). \tag{5.26}$$

3) Для функции $f(x) = \cos x$ аналогично предыдущему примеру имеем:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1}). \tag{5.27}$$

4) Пусть $f(x) = (1 + x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbf{R}$.
Тогда $f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}$, ...,
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}$, так что

$$f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),\ ...,\ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1).$$

[6]Д. Пеано (1858–1932) – итальянский математик.
[7]К. Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.

Поэтому разложение по формуле Тейлора имеет вид

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n). \tag{5.28}$$

5) Для функции $f(x)=\ln(1+x)$ (см. пример 5.1.15)

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k(k-1)!}{(1+x)^k},\ k\in\mathbf{N},$$

поэтому $f^{(k)}(0)=(-1)^k(k-1)!$. Следовательно,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n). \tag{5.29}$$

Все разложения (5.25 – 5.29) имеют место при $x\to 0$.

Формула Тейлора может быть использована при вычислении пределов.

Пример 5.2.13 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^4}$.

Воспользуемся формулой $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)$ (см. формулу (5.26) при $m=2$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)-x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=-\frac{1}{6}.$$

Пример 5.2.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{2}.$

Если предположить, что функция f $(n+1)$-кратно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 (возможно односторонней), то для значений x из этой окрестности имеет место равенство

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...++\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{5.30}$$

где c – некоторая промежуточная точка между x и x_0. Равенство (5.30) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Основные термины

Формула конечных приращений.

Правила Лопиталя.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Формула Маклорена.

Остаточный член в форме Пеано и в форме Лагранжа.

Контрольные вопросы

1. Верны ли следующие утверждения? Проиллюстрируйте ответ графически.

а) Если функция f достигает в точке x_0 наибольшего значения, то $f'(x_0) = 0$.

б) Функция может достигать наибольшего или наименьшего значения на отрезке в точке, в которой она не дифференцируема.

в) Функция не может достигать наименьшего значения на отрезке $[a, b]$ в точке b.

г) Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = f(b)$, то в некоторой точке $c \in (a, b)$ $f'(c) = 0$.

д) Если функция f дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то в некоторой точке c $f'(c) = 0$.

2. Для раскрытия каких неопределенностей могут быть применены правила Лопиталя?

3. Можно ли использовать правила Лопиталя для вычисления $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$? Чему равен этот предел?

4. Что нужно сделать, чтобы можно было применить правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида:

а) $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$?

б) 1^∞, 0^0, ∞^0?

5. При каком условии функция имеет многочлен Тейлора n-го порядка в точке x_0?

6. Совпадает ли функция со своим многочленом Тейлора?

7. Как называется разность между самой функцией и ее многочленом Тейлора?

Тест

1. Многочлен $P(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - ... + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$ является многочленом Тейлора в точке $x = 0$ для функции:

а) e^x; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $\ln(1 + x)$; д) $\sqrt{1 + x}$.

2. Выберите верные утверждения:

а) $e^x \sim 1$ при $x \to 0$; б) $e^x \sim 1 + x$ при $x \to 0$;

в) $e^x = 1 + x + O(x^2)$ при $x \to 0$; г) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$;

д) $e^x = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$; е) $e^x \sim 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

3. Выберите верные утверждения. $\sin x - x =$

а) $O(x^3)$; б) $o(x^3)$; в) $x^2 + o(x^3)$; г) $x^3 + o(x^4)$.

5.3 Исследование функций

5.3.1 Условия постоянства и монотонности функции

Теорема 5.3.1 *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и дифференцируема внутри этого промежутка. Для того чтобы f была постоянной на X, необходимо и достаточно , чтобы $f'(x) = 0$ внутри X.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, т. к. если $f(x) = \text{const}$, то $f'(x) = 0$. Докажем его достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ внутри X. Рассмотрим произвольные точки

$x_1, x_2 \in X$, пусть $x_1 < x_2$. Функция f на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \tag{5.31}$$

где $c \in (x_1, x_2)$. Т. к. $f'(c) = 0$, то $f(x_2) = f(x_1)$. Т. к. x_1 и x_2 – произвольные точки, то $f(x) = \mathrm{const}$.

Следствие 5.3.1 *Если две функции f и g непрерывны на промежутке X, дифференцируемы внутри этого промежутка и имеют на нем равные производные: $f'(x) = g'(x)$, то эти функции на промежутке X отличаются лишь на постоянную: $f(x) = g(x) + C$ ($C = \mathrm{const}$).*

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие монотонности функции в широком смысле.

Теорема 5.3.2 *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и дифференцируема внутри него. Тогда функция f является монотонно неубывающей (невозрастающей) на промежутке X тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) внутри X.*

Доказательство. Пусть функция f – монотонно неубывающая на X. Возьмем произвольную внутреннюю точку $x \in X$ и приращение $\Delta x > 0$ такое, что $x + \Delta x \in X$. Тогда $f(x + \Delta x) \geq f(x)$, $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$ и, переходя к пределу, получаем $f'(x) \geq 0$.

Наоборот, пусть $f'(x) \geq 0$ внутри X. Возьмем две произвольные точки $x_1, x_2 \in X$, пусть $x_1 < x_2$. Применим к функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ формулу Лагранжа (5.31). Т. к. $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$ и, следовательно, функция f является неубывающей. Для невозрастающей функции доказательство аналогично.

Следующая теорема дает *достаточное условие строгой монотонности* функции на промежутке.

Теорема 5.3.3 *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и дифференцируема внутри его. Если внутри промежутка X $f'(x) > 0$ (< 0), то функция f монотонно возрастает (убывает) на этом промежутке.*

Доказательство аналогично предыдущей теореме и следует из формулы Лагранжа (5.31), если учесть, что $f'(c) > 0$.

Пример 5.3.1 Для функции $f(x) = x^3 - 3x$ имеем: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Производная f' положительна на множестве $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и отрицательна на интервале $(-1, 1)$. Следовательно, на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ функция строго возрастает, на промежутке $[-1, 1]$ строго убывает.

Замечание. Условие положительности (отрицательности) первой производной не является необходимым для возрастания (убывания) функции. Например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей действительной оси, но ее производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в нуль в точке $x = 0$.

5.3.2 Экстремумы функции

Определение 5.3.1 *Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции f, если существует окрестность этой точки, содержащаяся в области определения функции f такая, что для всех ее точек x выполняется неравенство*

$$f(x) \leq f(x_0) \ (f(x) \geq f(x_0)) \tag{5.32}$$

При этом значение $f(x_0)$ называется максимумом (минимумом) функции f. Если вместо неравенств (5.32) при $x \neq x_0$ имеют место строгие неравенства: $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, то точка x_0 называется точкой строгого максимума (минимума).

Для обозначения максимума или минимума существует объединяющий их термин – *экстремум.*

Замечание. Из определения 5.3.1 следует, что точка экстремума является внутренней точкой области определения функции. Так что, если функции f определена на промежутке X, то концы промежутка не называются точками экстремума, даже если в этих точках функция f принимает наибольшее или наименьшее значение.

Определенные выше точки максимума (минимума) называют также точками *локального максимума (минимума)* в отличие от точек *глобального максимума (минимума)* – наибольшего (наименьшего) значения функции на всем промежутке.

Теорема Ферма (п.5.1) дает *необходимое условие экстремума дифференцируемой функции*: если x_0 – точка экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$.

Теорему Ферма можно сформулировать также следующим образом: если функция имеет в точке x_0 экстремум, то либо производная функции в этой точке равна нулю, либо у функции нет производной в данной точке.

Определение 5.3.2 *Точка x_0 называется стационарной точкой функции f, если $f'(x_0) = 0$.*

Определение 5.3.3 *Точка x_0 называется критической точкой функции f, если $f'(x_0) = 0$, либо функция не имеет производной в этой точке.*

Пример 5.3.2 Функция $f(x) = x^2$ имеет в точке $x_0 = 0$ минимум, равный 0. При этом $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$, так что 0 – критическая точка данной функции. Касательная к графику функции в точке $(0, 0)$ совпадает с осью абсцисс.

Пример 5.3.3 Пусть $f(x) = x^3$. Тогда $f'(x) = 3x^2$ и $f'(0) = 0$. У данной функции одна единственная стационарная точка $x_0 = 0$. Однако в этой точке функция f не имеет экстремума, ибо функция f является возрастающей на всей числовой прямой. Касательной к графику функции в точке $(0, 0)$ является ось абсцисс.

Как показывает последний пример, стационарная точка функции f не всегда является ее точкой экстремума. Таким образом, равенство $f'(x_0) = 0$, будучи необходимым условием экстремума дифференцируемой функции f, не является достаточным условием экстремума.

Пример 5.3.4 Функция $f(x) = |x|$ имеет в точке $x_0 = 0$ минимум, равный 0. Точка $x_0 = 0$ является критической точкой данной функции, производная функции в этой точке не существует.

Пример 5.3.5 Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ имеет в точке $x_0 = 0$ минимум, равный нулю. 0 – критическая точка данной функции, производная функции в этой точке не существует (см. рис. 5.7) : $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$.

Рис. 5.7:

Сформулируем теперь *достаточное условие строгого экстремума* дифференцируемой функции.

Теорема 5.3.4 *Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в ее проколотой окрестности. Если при переходе через точку x_0 производная f' меняет знак, то точка x_0 – точка строгого экстремума функции f. При этом если производная меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 – точка строгого максимума, а если она меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 – точка строгого минимума.*

Доказательство. Пусть производная при переходе через точку x_0 меняет знак с $+$ на $-$, т. е. в некоторой левой окрестности точки x_0 она положительна, а в некоторой правой окрестности – отрицательна. Тогда по теореме 5.3.3 в левой окрестности функция возрастает, а в правой – убывает. Следовательно, x_0 – точка строгого максимума. Аналогично рассматривается случай строгого минимума.

Отметим, что дифференцируемости функции f в самой точке x_0 в теореме не предполагается, т. е. x_0 – произвольная критическая точка функции f.

Замечание. Если функция f непрерывна в точке x_0, дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и производная f' сохраняет в этой проколотой окрестности постоянный знак, то в силу теоремы 5.3.3 функция f строго монотонна в окрестности точки x_0 и, следовательно, x_0 не является точкой экстремума.

Теорема 5.3.5 *(Достаточное условие строгого экстремума в терминах второй производной). Пусть функция f обладает в стационарной точке x_0 производной второго порядка $f''(x_0) \neq 0$. Тогда f имеет в точке x_0 строгий экстремум, а именно максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f''(x_0) < 0$. Тогда в точке x_0 f' убывает и так как $f'(x_0) = 0$, то при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с $+$ на $-$. Следовательно, в силу теоремы 5.3.4 функция f имеет в точке x_0 строгий максимум. Для случая, когда $f''(x_0) > 0$, доказательство аналогично.

Замечание. Для того чтобы функция f имела в стационарной точке x_0 экстремум, достаточно, чтобы в проколотой окрестности этой точки функция f обладала второй производной, сохраняющей постоянный знак. Если в проколотой окрестности $f''(x) < 0$, то f имеет в точке x_0 строгий максимум, если же $f''(x) > 0$, то f имеет в точке x_0 строгий минимум. Доказательство такое же, как в случае теоремы 5.3.5.

5.3.3 Нахождение наибольших и наименьших значений функции

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на нем за возможным исключением конечного числа точек. По теореме Вейерштрасса она принимает в некоторых точках отрезка $[a, b]$ свое наибольшее и наименьшее значения. Если эти точки лежат в интервале (a, b), то они являются точками экстремума. Функция может также принимать наибольшее или наименьшее значения в одном из концов отрезка.

Поэтому для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f на отрезке $[a, b]$ рекомендуется следующий алгоритм:

1) Найти производную $f'(x)$.

2) Найти критические точки функции, т. е. точки, в которых $f'(x) = 0$, либо не существует.

3) Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее $f_{\text{наиб.}}$ и наименьшее $f_{\text{наим.}}$.

Пример 5.3.6 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = |x^2 - 4|$ на отрезке $[-1, 3]$.
Т. к. при $|x| \geq 2$ $x^2 - 4 \geq 0$, а при $|x| < 2$ $x^2 - 4 < 0$, то по определению модуля имеем:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 \text{ при } x \in [-1, 2), \\ x^2 - 4 \text{ при } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Находим производную этой функции:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x \text{ при } x \in [-1, 2), \\ 2x \text{ при } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

В точке $x = 2$ производная $f'(2)$ не существует, т. к. $f'_-(2) = -4$, $f'_+(2) = 4$.
$f'(x) = 0$ при $x = 0$. Таким образом, имеем две критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Значения функции в критических точках $f(0) = 4$, $f(2) = 0$ и на концах отрезка $f(-1) = 3$, $f(3) = 5$. Следовательно, $f_{\text{наиб.}} = f(3) = 5$, $f_{\text{наим.}} = f(2) = 0$.

5.3.4 Выпуклые и вогнутые функции. Точки перегиба

Определение 5.3.4 *Функция f называется выпуклой (вогнутой) на промежутке X, если $\forall x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right). \tag{5.33}$$

Если в неравенствах (5.33) имеет место знак строгого неравенства ($<$ или $>$), то функция f называется строго выпуклой (вогнутой).

Геометрический смысл этого определения состоит в том, что отрезок, соединяющий любые две точки графика выпуклой (вогнутой) функции, лежит над (под) графиком (см. рис. 5.8 и 5.9, на которых изображены соответственно графики выпуклой и вогнутой функций). Выпуклую функцию называют также *выпуклой вниз*, а вогнутую – *выпуклой вверх*.

Следующая теорема дает другую геометрическую характеристику выпуклости (вогнутости) функции.

Теорема 5.3.6 *Пусть функции f дифференцируема на промежутке X. Тогда для ее выпуклости (вогнутости) необходимо и достаточно, чтобы ее график на промежутке X всеми точками лежал выше (ниже) любой своей касательной или на ней.*

Следующая теорема дает критерий выпуклости (вогнутости) дифференцируемой функции.

Теорема 5.3.7 *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X. Тогда для ее выпуклости (вогнутости) необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' не убывала (не возрастала) на промежутке X.*

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что угол наклона касательных к графику выпуклой (вогнутой) функции возрастает (убывает). Это показано на рис. 5.10 и 5.11.

Применяя к функции f' критерий монотонности (теорема 5.3.2), получаем из теоремы 5.3.7 следующий критерий выпуклости (вогнутости) функции.

Теорема 5.3.8 *Пусть функция f дифференцируема на промежутке X и дважды дифференцируема внутри него. Тогда для выпуклости (вогнутости) функции f необходимо и достаточно, чтобы внутри X было $f''(x) \geq 0$ (≤ 0).*

Понятие выпуклости функции также находит свое применение в экономике. Например, закон убывающей эффективности производства утверждает, что с ростом производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса, с некоторого момента убывает. Если y – выпуск продукции, а x – затраты ресурса, то этот закон утверждает, что $y'_x \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ с некоторого момента убывает, т.е. $y'(x) < 0$ и функция $y(x)$ вогнута.

Определение 5.3.5 *Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Если x_0 разделяет интервалы выпуклости и вогнутости функции f, то она называется точкой перегиба графика этой функции.*

График функции в точке перегиба обладает следующим свойством: он переходит с одной стороны касательной, проведенной к графику в этой точке, на другую, т. е. касательная и график взаимно пересекаются (см. рис. 5.12).

Рис. 5.12:

Из теоремы 5.3.7 следует, что для дифференцируемой функции f точки перегиба есть точки экстремума ее производной f'. Применяя к функции f' теорему Ферма (необходимое условие экстремума) и теоремы 5.3.4 и 5.3.5 (достаточные условия экстремума), получаем следующие теоремы.

Теорема 5.3.9 *(Необходимое условие перегиба). Если функция дважды дифференцируема в точке перегиба x_0, то $f''(x_0) = 0$.*

Теорема 5.3.10 *(Достаточное условие перегиба в терминах второй производной). Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в ее проколотой окрестности. Если при переходе через точку x_0 вторая производная f'' меняет знак, то x_0 – точка перегиба.*

Теорема 5.3.11 *(Достаточное условие перегиба в терминах третьей производной). Пусть функция f трижды дифференцируема в точке x_0 и $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 – точка перегиба функции f.*

Пример 5.3.7 Пусть $f(x) = x^3$. Тогда $f''(x) = 6x$. При переходе через точку $x = 0$ $f''(x)$ меняет знак с $-$ на $+$. Следовательно, согласно теореме 5.3.10 $x = 0$ – точка перегиба. Можно было воспользоваться и теоремой 5.3.11: $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$.

5.3.5 Асимптоты

При построении графиков функций полезно выделить случаи, когда график неограниченно приближается к некоторой прямой. Такие прямые называются *асимптотами*. Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Определение 5.3.6 *Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ существует и равен $+\infty$ или $-\infty$.*

Очевидно, что прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке a, т. к. в этом случае $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Поэтому вертикальные асимптоты $x = a$ следует искать в точках разрыва (второго рода) функции $f(x)$ или на границе ее области определения.

Определение 5.3.7 *Пусть функция f определена в окрестности $+\infty$ или в окрестности $-\infty$. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0 \tag{5.34}$$

(соответственно $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$).

При $k = 0$ асимптота (имеющая уравнение $y = b$) называется *горизонтальной*, а при $k \neq 0$ – *наклонной*.

Теорема 5.3.12 *Прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда*

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx). \tag{5.35}$$

Аналогичное предложение справедливо для асимптоты при $x \to -\infty$.

Доказательство. Равенство (5.34) эквивалентно второму из равенств (5.35). Заметим теперь, что из равенства (5.34) следует равенство:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - (kx + b)}{x} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k + \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x} = k.$$

Следствие 5.3.2 *График функции f имеет не более одной асимптоты при $x \to +\infty$ и не более одной асимптоты при $x \to -\infty$.*

Отметим, что асимптоты графика функции f при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ могут оказаться различными прямыми.

Следствие 5.3.3 *График функции f обладает горизонтальной асимптотой $y = b$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \qquad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = b).$$

Пример 5.3.8 Найдем асимптоты графика дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$.
Функция непрерывна всюду, кроме точки $x = -\dfrac{d}{c}$ (в которой знаменатель обращается в нуль). При $x \to -\dfrac{d}{c}$ знаменатель стремится к нулю, а числитель – к $\dfrac{-ad+bc}{c} \neq 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}\pm} \dfrac{ax+b}{cx+d} = \pm\infty$ и прямая $x = -\dfrac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой. График обладает одной и той же горизонтальной асимптотой $y = \dfrac{a}{c}$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c}$.

Пример 5.3.9 График функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот. Ими являются прямые $x = \pi n + \dfrac{\pi}{2}$ при любом $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 5.3.10 График функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет при $x \to +\infty$ горизонтальную асимптоту $y = \dfrac{\pi}{2}$, а при $x \to -\infty$ горизонтальную асимптоту $y = -\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 5.3.11 Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x-3}$.
Точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода, причем $\lim\limits_{x\to3+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to3-} f(x) = -\infty$.
Поэтому $x = 3$ – вертикальная асимптота. Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-3x} = 2,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-1}{x-3} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1-2x^2+6x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x-1}{x-3} = 6.$$

Таким образом, при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ график имеет одну и ту же наклонную асимптоту $y = 2x + 6$.

5.3.6 Общая схема исследования функции

Для наглядного описания функции часто используют ее графическое представление. Такое представление обычно бывает полезно для обсуждения качественных вопросов поведения функции. В связи с этим важно не столько точное построение графика, сколько построение эскиза, правильно отражающего основные элементы его поведения. Для построения графика функции предварительно проводится ее исследование. Укажем примерный порядок исследования функции.

1) Найти область определения функции.

2) Отметить специфические особенности функции, если они очевидны (например, четность, нечетность, периодичность, совпадение с точностью до простейших преобразований координат с графиками уже известных функций).

3) Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва и определить характер разрывов.

4) Найти промежутки монотонности функции и указать ее локальные экстремумы.

5) Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции и указать точки перегиба.

6) Найти асимптоты графика функции, если они существуют.

7) Найти характерные точки графика, в частности точки пересечения с осями координат, если таковые имеются и доступны вычислению.

Пример 5.3.12 Исследовать функцию $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

1) Областью определения функции является все множество действительных чисел, кроме точки $x = -1$.

2) Функция непрерывна на всей своей области определения. $x = -1$ – точка разрыва второго рода, т. к. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$.

3) Для нахождения промежутков монотонности вычислим производную функции

$$y' = ((x-1)^3(x+1)^{-2})' = 3(x-1)^2(x+1)^{-2} - 2(x-1)^3(x+1)^{-3} =$$
$$= (x-1)^2(x+1)^{-3}\left[3(x+1) - 2(x-1)\right] = (x-1)^2(x+1)^{-3}(x+5) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}.$$

Отметим точки, в которых числитель и знаменатель этой дроби обращаются в нуль и определим знак производной в каждом из интервалов:

На основании теоремы 5.3.3 по знаку производной определяем возрастание или убывание функции (они показаны соответствующими стрелками). Таким образом, функция возрастает на интервалах $(-\infty, -5)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ и убывает на интервале $(-5, -1)$. Следовательно, $x = -5$ – точка максимума. Точка $x = -1$ не является точкой минимума, т. к. она не принадлежит области определения функции.

4) Для определения промежутков выпуклости и вогнутости функции вычислим ее вторую производную:

$$y'' = ((x-1)^2(x+1)^{-3}(x+5))' = 2(x-1)(x+1)^{-3}(x+5) - 3(x-1)^2(x+1)^{-4}(x+5)+$$
$$+(x-1)^2(x+1)^{-3} = (x-1)(x+1)^{-4}\left[2(x+1)(x+5) - 3(x-1)(x+5) + (x-1)(x+1)\right] =$$
$$= (x-1)(x+1)^{-4}\Big[2(x^2+6x+5) - 3(x^2+4x-5) + (x^2-1)\Big] = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

Очевидно, что $y'' < 0$ при $x < 1$ и $y'' > 0$ при $x > 1$. Следовательно, функция вогнута на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 1)$ и выпукла на интервале $(1, +\infty)$. Точка $x = 1$ является точкой перегиба.

Рис. 5.13:

5) $x = -1$ – точка разрыва второго рода. Следовательно, $x = -1$ – вертикальная асимптота.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1$, то график функции имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ с угловым коэффициентом $k = 1$. Определим коэффициент b:

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3 - x(x+1)^2}{(x+1)^2} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -5.$$

Следовательно, $y = x - 5$ – наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$. Легко видеть,что эта же прямая будет асимптотой и при $x \to -\infty$.

6) Легко находятся точки пересечения графика с осями координат: $(0, -1)$, $(1, 0)$.

На основании проведенного исследования функции строим ее график (см. рис. 5.13).

Основные термины

Точка экстремума (максимума, минимума) функции.
Экстремум (максимум, минимум) функции. Строгий экстремум.
Локальный экстремум. Глобальный экстремум.
Стационарная точка. Критическая точка.
Выпуклая и вогнутая функции. Точка перегиба.
Асимптоты (вертикальная, горизонтальная, наклонная).

Контрольные вопросы

1. Каково множество функций, у которых производная тождественно равна нулю?

2. Функция дифференцируема на промежутке и монотонна. Что можно сказать о ее производной?

3. Функция имеет на отрезке положительную производную. Что можно сказать о ее монотонности?

4. Функция строго монотонна на отрезке. Может ли ее производная на этом отрезке обращаться в нуль?

5. Функция определена на отрезке $[a, b]$. Может ли точка a быть для нее точкой:

а) локального экстремума? б) глобального экстремума?

6. Является ли любая стационарная точка критической?

7. Является ли любая критическая точка стационарной?

8. Является ли любая точка экстремума функции ее:

а) стационарной точкой? б) критической точкой?

9. Пусть $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) = 0$. Следует ли отсюда, что x_0 – точка экстремума функции f?

10. Сформулируйте теорему Ферма, используя понятие критической точки.

11. Может ли функция в точке экстремума быть:

а) недифференцируемой? б) разрывной?

12. Пусть x_0 – точка перегиба графика функции f. Может ли функция f в точке x_0 быть:

а) недифференцируемой? б) разрывной?

13. Пусть $f''(x_0) = 0$. Следует ли отсюда, что x_0 – точка перегиба графика функции f?

14. Любой ли график имеет асимптоты?

15. Может ли график иметь несколько асимптот? Бесконечное множество асимптот?

16. Сколько горизонтальных асимптот может иметь график?

17. Сколько наклонных асимптот может иметь график?

18. Сколько горизонтальных и наклонных асимптот (вместе) может иметь график?

19. Сколько вертикальных асимптот может иметь график?

Тест

1. Из следующих функций выберите строго монотонные на всей вещественной оси:

а) x^2; б) x^5; в) $\sqrt[3]{x}$; г) $\operatorname{tg} x$; д) $\arcsin x$.

2. Из предыдущих функций выберите выпуклые на всей вещественной оси.

3. Из функций вопроса 1 выберите имеющие ровно одну точку перегиба.

4. Разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = x^3 - 12|x| + 2$ на отрезке $[-3; 3]$ равна:

а) 16; б) 63; в) 54; г) 32; д) 68.

5. Выберите верные утверждения.
Функция не может быть строго монотонной на промежутке, если она имеет внутри него:

а) экстремум; б) точку разрыва; в) точку разрыва 1-го рода;

г) точку разрыва 2-го рода; д) стационарную точку.

6. Имеются четыре точки: стационарная, критическая, точка экстремума, точка перегиба. Какое максимальное количество из них может совпадать?

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4.

7. Сколько точек перегиба имеет график, изображенный на следующем рисунке?

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5; ж) 6.

8. Выберите верные утверждения:

а) если $f'(x_0) = 0$, то x_0 – точка экстремума функции f;

б) если x_0 – точка экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$;

в) если $f''(x_0) = 0$, то x_0 – точка перегиба графика функции f;

г) если x_0 – точка перегиба графика функции f, то $f''(x_0) = 0$;

д) если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка экстремума функции f;

е) если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.

9. У каких из следующих функций количество точек разрыва совпадает с количеством асимптот?

а) $\sqrt[3]{x}$; б) $\dfrac{1}{x}$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $x + \dfrac{1}{x}$; д) $\operatorname{arctg} x$.

10. У каких из предыдущих функций асимптот больше, чем точек перегиба?

5.4 Функции нескольких переменных

5.4.1 Определение функции n переменных

До сих пор мы рассматривали числовые функции $y = f(x)$, для которых значение функции определяется заданием одного числа x из области определения функции. Однако многие величины, представляющие интерес, зависят не от одного, а от многих факторов. В этом случае мы имеем дело с зависимостью, при которой упорядоченному набору чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ставится в соответствие значение $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ исследуемой величины. Например, объем выпуска продукции y является функцией от затрат капитала x_1 и трудовых ресурсов x_2. Эта зависимость (функция Кобба-Дугласа) имеет вид $y = Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, где $A > 0$, $0 < \alpha < 1$ – константы. Упорядоченный набор чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ может рассматриваться как вектор из арифметического n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$.

Определение 5.4.1 *Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$. Тогда функцию $f : D \to \mathbf{R}$ будем называть функцией n переменных. Если y – значение функции, то будем записывать $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $y = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$.*

Определим на множестве $\mathbf{R}^n$ расстояние между точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ по формуле

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}. \tag{5.36}$$

Функция $d(x, y)$ обладает следующими свойствами:

a) $d(x, y) \geq 0$;

b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

c) $d(x, y) = d(y, x)$;

d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Функцию, обладающую этими свойствами, называют *метрикой* или *расстоянием*. Множество с определенной в нем метрикой называют *метрическим пространством*. Таким образом, пространство $\mathbf{R}^n$ с определенной по формуле (5.36) метрикой является *метрическим пространством*. Заметим, что при $n = 2$ и $n = 3$ формула (5.36) следует из теоремы Пифагора.

Окрестностью точки $a \in \mathbf{R}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ (или, короче, *ε-окрестностью точки a*) называется множество

$$O_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbf{R}^n |\ d(a, x) < \varepsilon\}.$$

Это множество называется также *шаром* с центром a радиуса ε. *M-окрестностью бесконечности* будем называть множество

$$O_M(\infty) := \{x \in \mathbf{R}^n |\ d(0, x) > M\}.$$

5.4.2 Предел и непрерывность

Определения предела функции $f(x)$ при $x \to a$ и непрерывности функции f в точке $a \in \mathbf{R}^n$ формально совпадают с данными выше определениями 4.1.2 и 4.2.1 соответственно. При этом окрестность точки a следует понимать в смысле определений, данных в предыдущем пункте.

Задача нахождения предела функции нескольких переменных является более сложной, чем для функции одной переменной.

Пример 5.4.1 Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Положим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, тогда $\rho \to 0$ при $x \to 0$ и $y \to 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\ln(1 + \rho^2)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho}{(1 + \rho^2)} = 0.$$

Не следует думать, что предел функции нескольких переменных можно найти, вычисляя последовательно пределы по каждой из переменных.

Пример 5.4.2 Пусть $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$.

Тогда $f(0, y) = f(x, 0) = 0$, а $f(x, x) = \dfrac{1}{2}$ при $x \neq 0$. Таким образом, эта функция не имеет предела при $(x, y) \to (0, 0)$, хотя

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = \lim_{y\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Для функций нескольких переменных остаются справедливыми локальные свойства непрерывных функций, сформулированные в теоремах 4.2.1-4.2.3. Отсюда следует, что все элементарные функции нескольких переменных непрерывны на своих областях определения. В частности, непрерывны все многочлены, а рациональные функции непрерывны во всех точках, в которых их знаменатель не обращается в нуль.

5.4.3 Частные производные и дифференциал

Для упрощения обозначений будем рассматривать далее функцию трех переменных $f(x, y, z)$. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Зафиксируем значения переменных y и z: $y = y_0,\ z = z_0$. Тогда $f(x, y_0, z_0)$ является функцией одной переменной x. Производная этой функции в точке x_0 называется *частной производной* функции f по переменной x в точке M_0. Аналогично, если зафиксировать значения переменных x, z или x, y получим соответственно определения частных производных по y и по z. Частные производные обозначают $f'_x,\ f'_y,\ f'_z$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial z}$. Когда требуется указать точку M_0, в которой вычислена частная производная, то используют обозначения вида $f'_x(x_0, y_0, z_0)$ и $\dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$.

Пример 5.4.3 Найти частные производные функции $f(x, y, z) = x \ln y + \dfrac{y}{z} + z^x$.
Для нахождения частной производной по x считаем y и z постоянными:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y + z^x \ln z.$$

Аналогично находим частные производные по y и по z:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} + \frac{1}{z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + xz^{x-1}.$$

Определение 5.4.2 *Функция $f(x, y, z)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если ее полное приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x, y, z)$ в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho), \tag{5.37}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $A, B, C \in \mathbf{R}$.
Выражение $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$, представляющее собой главную линейную часть приращения функции, называется в этом случае дифференциалом функции f в точке M_0 и обозначается $df(M_0)$ или $df(x_0, y_0, z_0)$.

Из этого определения следует

Теорема 5.4.1 *Если функция f дифференцируема в точке M_0, то она непрерывна в этой точке.*

Приведем теперь *необходимые условия дифференцируемости* функции.

Теорема 5.4.2 *Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то она имеет в этой точке частные производные по всем аргументам, причем $\dfrac{\partial f}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = B$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = C$, где A, B, C определяются из условия (5.37).*

Если дифференциалы независимых переменных положить равными приращениям этих переменных: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, то выражение для дифференциала функции f принимает вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{5.38}$$

Из существования частных производных не следует дифференцируемость функции. *Достаточные условия дифференцируемости* функции нескольких переменных даются следующей теоремой.

Теорема 5.4.3 *Если функция f имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности точки M_0, причем эти производные непрерывны в точке M_0, то данная функция дифференцируема в точке M_0.*

Рассмотрим *геометрический смысл дифференциала* для случая функции двух переменных $z = f(x, y)$. Графиком такой функции является некоторая поверхность. Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то эта поверхность в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ обладает касательной плоскостью. Полное приращение функции Δz представляет геометрически приращение аппликаты поверхности $z = f(x, y)$, а *дифференциал функции dz есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности в точке M_0, когда переменные x и y получают приращения dx и dy.*

Уравнение самой касательной плоскости имеет при этом следующий вид:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{5.39}$$

Вектор $\mathbf{n} = \left(\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1\right)$, перпендикулярный этой плоскости, называется *вектором нормали к поверхности* в точке M_0.

Для функции нескольких переменных так же, как и для функции одной переменной, имеет место свойство *инвариантности формы первого дифференциала*. Оно означает, что выражение (5.38) для дифференциала сохраняется и для того случая, когда x, y, z являются зависимыми переменными, т. е. сами являются функциями от некоторых других переменных.

Определение 5.4.3 *Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенная при неотрицательных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется* однородной функцией *степени p, если $\forall t > 0$ и $\forall x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ выполняется равенство*

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^p f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Для однородных непрерывно дифференцируемых функций степени p справедлива *формула Эйлера*:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n = pf(x_1, x_2, ..., x_n),$$

которая существенно используется в микроэкономическом анализе.

Определение 5.4.4 *Градиентом функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в данной точке называется вектор, координаты которого равны соответственно частным производным функции f в этой точке:*

$$grad\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \tag{5.40}$$

Градиент функции характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в точке.

Пример 5.4.4 Найти градиент функции $f(x, y) = x^2y + y - z^3$ в точке $M(1, 2, -1)$. По формуле (5.40) имеем

$$grad\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2xy, x^2 + 1, -3z^2).$$

Подставляя в это выражение координаты точки M, получаем

$$grad\, f \Big|_{(1,2,-1)} = (4, 2, -3).$$

Частные производные функции нескольких переменных также представляют собой функции нескольких переменных и у них также могут существовать частные производные, называемые *частными производными второго порядка*. Например, для функции двух переменных $f(x, y)$ возможны четыре вида частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Вообще, частной производной n-го порядка называется частная производная от частной производной $(n-1)$-го порядка. Аналогичным образом определяется дифференциал n-го порядка для функции нескольких переменных. Частные производные, в которых дифференцирование производится по разным переменным, называются *смешанными производными*. Следует отметить, что в общем случае смешанные производные зависят от порядка дифференцирования, т. е., например, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Однако, если предполагать непрерывность всех частных производных, то порядок дифференцирования становится несущественным.

Пример 5.4.5 Найти частные производные второго порядка функции $f(x, y) = \sin x \ln y$. По правилам дифференцирования произведения имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \ln y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \ln y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\cos x}{y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\cos x}{y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\sin x}{y^2}.$$

5.4.4 Экстремумы функции нескольких переменных

Определение экстремума для функции нескольких переменных совпадает с данным ранее определением для функции одной переменной. Следующая теорема дает *необходимые условия экстремума.*

Теорема 5.4.4 *Если функция f имеет в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ экстремум и частные производные по всем аргументам, то все эти частные производные равны нулю в точке M_0:*

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 0. \tag{5.41}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x, y_0, z_0)$, являющуюся функцией одной переменной x. Из определения экстремума ясно, что x_0 является для нее точкой экстремума. Следовательно, по теореме Ферма производная этой функции равна нулю, т. е. $\dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = 0$. Аналогично получается равенство нулю остальных частных производных в точке M_0.

Точки, в которых выполняются условия (5.41), называются *точками возможного экстремума* или *стационарными точками.*

Заметим, что условия (5.41) можно записать также в следующей эквивалентной форме:

$$df(M_0) = 0.$$

Пример 5.4.6 Найти точки возможного экстремума функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y.$$

Согласно (5.41) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, откуда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 2y + x - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x = 1,\ y = 2$. Следовательно, точка $(1, 2)$ является стационарной для данной функции.

Достаточное условие экстремума для функции двух переменных $f(x, y)$ дается нижеследующей теоремой 5.4.5, в которой через a_{11}, a_{12}, a_{22} обозначены соответственно вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ в некоторой точке M_0.

Теорема 5.4.5 *Пусть в стационарной точке M_0 функции $f(x, y)$ и в некоторой ее окрестности все вторые частные производные этой функции непрерывны. Тогда, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум: минимум при $a_{11} > 0$ и максимум при $a_{11} < 0$. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то функция $f(x, y)$ не имеет в точке M_0 локального экстремума. (В случае $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ для решения вопроса приходится привлекать производные более высокого порядка).*

Пример 5.4.7 Выясним, является ли стационарная точка, найденная в предыдущем примере, точкой экстремума.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Следовательно, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$ (в любой точке), и поэтому найденная стационарная точка $(1, 2)$ является точкой минимума.

5.4.5 Приложения к задачам экономики

Понятие эластичности функции одной переменной, введенное в п.5.1.6, обобщается на функции нескольких переменных. *Частная эластичность* $E_x(y)$ функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_i определяется равенством

$$E_{x_i}(y) := \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(\frac{\Delta_{x_i} y}{y} : \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_i}. \tag{5.42}$$

Здесь $\Delta_{x_i} y$ обозначено приращение функции y при изменении значения переменной x_i на Δx_i и неизменных значениях остальных переменных.

Например, если $Q = f(P, I)$ – функция спроса на товар в зависимости от его цены P и доходов потребителей I, то можно рассматривать (частные) эластичности спроса по цене $E_p(Q)$ и по доходам $E_I(Q)$. Они показывают на сколько процентов приблизительно изменится спрос при изменении цены (соответственно, доходов) на 1%.

Рассмотрим некоторые задачи на экстремум функций нескольких переменных, возникающие в экономике.

Прибыль от производства разных видов товара

Пусть P_i, x_i – соответственно цена и количество производимого товара вида i $(i = 1, 2, ..., n)$, $C(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функция издержек. Тогда функция прибыли имеет вид

$$P = P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n - C(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Определим, при каких значениях x_i прибыль будет максимальна. Запишем необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

из которых получим систему уравнений

$$P_i = \frac{\partial C}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

соответствующую известному правилу экономики: цена товара равна предельным издержкам на производство этого товара.

Пример 5.4.8 Цены на два вида товаров равны соответственно 32 и 24 д.е. Определить количество продаж x и y этих товаров, при которых прибыль будет максимальна, если функция издержек $C(x, y) = 1,5x^2 + 2xy + y^2$.

Условия локального экстремума функции прибыли $P(x, y) = 32x+24y-1,5x^2-2xy-y^2$ приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 32, \\ 2x + 2y = 24, \end{cases}$$

решая которую, находим $x = 8,\ y = 4$. Т. к.

$$a_{11} = -3 < 0, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (-3)(-2) - (-2)^2 = 2 > 0,$$

то найденная точка определяет максимум функции прибыли, который равен $P_{max} = P(8,\ 4) = 176$.

Максимизация прибыли от производства продукции.

Функция прибыли вычисляется по формуле

$$P(x_1, x_2) = p_0 F(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2,$$

где $F(x_1, x_2)$ – производственная функция, p_0 – цена продукции, p_1 и p_2 – соответственно цены первого и второго ресурсов (факторов производства). Требуется найти максимум функции прибыли и оптимальный план (т.е. значения x_1 и x_2, при которых функция прибыли принимает максимальное значение).

Необходимые условия локального экстремума приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{p_1}{p_0}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \dfrac{p_2}{p_0}. \end{cases} \tag{5.43}$$

Пример 5.4.9 Найти максимум функции прибыли для производственной функции $F(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$ при ценах ресурсов $p_1 = 2, p_2 = 3$ и цене продукции $p_0 = 6$.

Запишем систему 5.43 для данных задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{3} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_1 = \dfrac{2}{3}, \quad x_2 = \dfrac{4}{9}$. Подсчитывая вторые частные производные функции прибыли в этой точке, находим

$$a_{11} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = p_0 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 6 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) x_1^{-\frac{5}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} \Big|_{\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)} = -2,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} = p_0 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 6 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{5}{3}} \Big|_{\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)} = -\frac{9}{2},$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = p_0 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 6 \cdot \frac{1}{9} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} \Big|_{\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)} = \frac{3}{2}.$$

Поскольку

$$a_{11} < 0, \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} > 0,$$

найденная точка является точкой локального максимума функции прибыли. Так как других критических точек функция прибыли не имеет, то эта точка является и точкой глобального максимума, т. е. оптимальным планом.

Основные термины

Метрика. Расстояние. Метрическое пространство.

Частные производные. Дифференциал.

Необходимые условия дифференцируемости.

Достаточные условия дифференцируемости.

Геометрический смысл дифференциала.
Инвариантность формы первого дифференциала.
Градиент.
Частные производные n-го порядка.
Необходимое условие экстремума.
Стационарная точка.
Достаточное условие экстремума.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой ε-окрестность точки $a \in \mathbf{R}^2$?
2. Что представляет собой M-окрестность ∞ в пространстве $\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)$?
3. Является ли непрерывность функции нескольких переменных необходимым (достаточным) условием ее дифференцируемости?
4. Следует ли из дифференцируемости функции существование ее частных производных? А наоборот?
5. В любой ли точке поверхности существует касательная плоскость к ней?
6. В любой ли точке поверхности существует вектор нормали к ней?
7. Каков геометрический смысл градиента функции нескольких переменных?
8. Обязательно ли точка экстремума является стационарной точкой?
9. Любая ли стационарная точка является точкой экстремума?

Тест

1. Рассматриваются ε-окрестности точек в пространстве $\mathbf{R}^3$. Какие из следующих утверждений верны?

а) Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности;
б) любые две различные точки имеют пересекающиеся окрестности;
в) любые две окрестности одной точки пересекаются;
г) для любой точки существуют две ее непересекающиеся окрестности;
д) любая окрестность содержит бесконечное множество точек.

2. Какие из следующих функций непрерывны в точке $(0,0)$?

а) $\sin(x^2 - y^2)$; б) $\ln(1 + x^2 + y^2)$; в) $\dfrac{1}{x^2 - xy}$; г) $\dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$; д) $\dfrac{2x + 3y}{3x + 2y}$.

3. Какие из предыдущих функций дифференцируемы в точке $(1,1)$?

4. Выберите верные утверждения. Для функции $f(x,y) = xy$ точка $(0,0)$ является:

а) точкой непрерывности; б) точкой разрыва; в) стационарной точкой;
г) точкой максимума; д) точкой минимума; е) точкой экстремума.

5. Выберите верные утверждения:

а) существование частных производных является необходимым условием дифференцируемости функции;
б) существование частных производных является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции;
в) существование частных производных является достаточным условием дифференцируемости функции;
г) непрерывность частных производных является необходимым условием дифференцируемости функции;

д) непрерывность частных производных является достаточным условием дифференцируемости функции.

6. Пусть $E_p(Q)$ и $E_I(Q)$ –эластичность спроса на товар по цене и по доходам потребителей соответственно. Что можно сказать об их знаках?

а) $E_p(Q) > 0$, $E_I(Q) > 0$; б) $E_p(Q) > 0$, $E_I(Q) < 0$;
в) $E_p(Q) < 0$, $E_I(Q) > 0$; г) $E_p(Q) < 0$, $E_I(Q) < 0$.

Упражнения

1. Найти производные следующих функций:

$$1)\ y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \qquad 2)\ y = \sin\sqrt{3} + \frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}, \qquad 3)\ y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{2}\ln\operatorname{arctg} x}.$$

2. Найти пределы.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}, \qquad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-7x)}{\cos(\pi(x+7))},$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\ln(1+2x)}, \qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}, \qquad 6)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-1}{\ln x}.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

$$1)\quad y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad [1,4]; \qquad 2)\quad y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, \quad [1,4];$$

$$3)\quad y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1, \quad [0,6]; \qquad 4)\quad y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}, \quad [-3,3].$$

4. Провести полное исследование функции и построить ее график.

$$1)\quad y = \frac{x^2}{(x-1)^2}, \qquad 2)\quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2, \qquad 3)\quad y = \frac{-8x}{x^2+4}, \qquad 4)\quad y = \frac{3x^4+1}{x^3}.$$

5. Найти полный дифференциал функции $z = f(x,y)$.

$$1)\quad f(x,y) = \frac{\ln(x+y)^2}{xy} + \frac{x}{y}, \qquad 2)\quad f(x,y) = \frac{\sin(xy^2)}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{2}.$$

6. Найти градиент функции $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ в точке $M(0,1)$.

7. Найти частные производные второго порядка от функций:

$$1)\ z = \sin xe^y, \qquad 2)\ z = \cos(x^2+y^2), \qquad 3)\ z = x^2\cos\sqrt{y}.$$

8. Найти экстремумы функций.

$$1)\ f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 6y, \qquad 2)\ f(x,y) = e^x(x+y^2).$$

Глава 6

Интегральное исчисление

В интегральном исчислении изучаются понятия интеграла, его свойства и методы вычисления. Истоки интегрального исчисления относятся к античному периоду развития математики и связаны с *методом исчерпывания*, разработанным математиками Древней Греции. Этот метод возник при решении задач на вычисление площадей плоских фигур и поверхностей, объемов тел, некоторых задач статики и гидродинамики. Он основан на аппроксимации рассматриваемых объектов ступенчатыми фигурами или телами, составленными из простейших фигур или пространственных тел (прямоугольников, параллелепипедов, цилиндров и т.п.). В этом смысле метод исчерпывания можно рассматривать как античный интегральный метод. Наибольшее развитие метод исчерпывания в древнюю эпоху получил в работах Евдокса (4 в. до н. э.) и особенно Архимеда (3 в. до н. э.). Дальнейшее его применение и совершенствование связано с именами многих ученых 15–17 вв.

Основные понятия, теория и приложения интегрального исчисления были разработаны И. Ньютоном и Г. Лейбницем в конце 17 в. Существенную роль в создании интегрального исчисления в 18 в. сыграли работы Л. Эйлера, Я. и И. Бернулли, Ж. Лагранжа. В 19 в. в связи с появлением понятия предела интегральное исчисление приобрело логически завершенную форму в работах О. Коши, Б. Римана и др. Разработка теории и методов интегрального исчисления происходила и в конце 19 в. и в 20 в.

6.1 Неопределенный интеграл

6.1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 6.1.1 *Функция $F(x)$называется первообразной функции $f(x)$ на данном промежутке G, если $\forall x \in G \quad F'(x) = f(x)$.*

Согласно следствию 5.3.1, любая первообразная представима в виде $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная. Это выражение, дающее общий вид всех первообразных, называется *неопределенным интегралом.*

Например, $(x^3)' = 3x^2$, следовательно, $\int 3x^2dx = x^3 + C$.

Как видим, задача нахождения неопределенного интеграла (называемая *интегрированием*) является обратной к нахождению производной. Таким образом, из таблицы производных основных элементарных функций можно получить *таблицу основных интегралов*:

1. $\displaystyle\int 0dx = C.$

2. $\int 1dx = \int dx = x + C.$

3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1).$

4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ в частности, $\int e^x dx = e^x.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

Сделаем пояснение по поводу формулы 4.

$\ln x$ определен при $x > 0$. Из формулы $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ следует, что

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x > 0).$$

Пусть теперь $x < 0$. $(\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Объединяя обе эти формулы в одну, получаем формулу 4.

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие свойства:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$, т. е. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$, т. е. $\int df(x) = f(x) + C.$

Отметим простейшие правила интегрирования, которые также вытекают из этого определения:

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ (a – постоянная).

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$ (a,b– постоянные).

Использование этих правил и таблицы основных интегралов уже позволяет в ряде случаев вычислять неопределенные интегралы.

Пример 6.1.1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \frac{1}{a}\cdot a\cdot \arcsin\frac{x}{a} + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(здесь мы воспользовались правилами 1 и 3).

Пример 6.1.2

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x+a}\right) =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Здесь мы сначала представили дробь в виде разности дробей, затем применили правило 2, а затем правило 3.

Пример 6.1.3

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a^2}\cdot a\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Пример 6.1.4

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x+a}\right) =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Пример 6.1.5

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

6.1.2 Методы интегрирования

Два основных метода интегрирования – интегрирование по частям и метод подстановки получаются из соответствующих формул дифференцирования.

Рассмотрим формулу дифференцирования произведения:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Из определения неопределенного интеграла следует, что

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x) + C. \tag{6.1}$$

Отсюда получаем

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(здесь константа C включена в интеграл, стоящий в правой части).

Учитывая, что $g'(x)dx = dg(x)$, $\quad f'(x)dx = df(x)$, последнюю формулу записывают обычно в виде

$$\int fdg = fg - \int gdf$$

и называют *формулой интегрирования по частям.*

Пример 6.1.6

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Пример 6.1.7

$$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 6.1.8

$$\int x^2\cos x dx = \int x^2 d\sin x = x^2\sin x - \int \sin x dx^2 = x^2\sin x - \int \sin x\cdot 2xdx =$$
$$= x^2\sin x + 2\int x d\cos x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int cosxdx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Здесь нам пришлось применить интегрирование по частям дважды.

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Рассмотрим формулу дифференцирования сложной функции:

$$[F(\varphi(t))]'_t = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t). \tag{6.2}$$

Следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Эта формула интегрирования называется *формулой замены переменной*, а соответствующий метод интегрирования – *методом подстановки* или *методом замены переменной.* Формально применение этого метода состоит в том, что делается подстановка $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$, вычисляется $\int f(x)dx$, в котором затем x опять заменяется на $\varphi(t)$.

Пример 6.1.9

$$\int \sin^4 x\cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Пример 6.1.10

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример 6.1.11

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

Основные термины

Первообразная. Неопределенный интеграл. Интегрирование.

Интегрирование по частям. Метод подстановки (замены переменной).

Контрольные вопросы

1. Может ли функция иметь различные первообразные?

2. Могут ли различные функции иметь одну и ту же первообразную?

3. В чем отличие первообразной от неопределенного интеграла?

4. Из какой формулы дифференцирования следует формула интегрирования по частям (замены переменной)?

5. Найдите первообразные от функции, тождественно равной нулю (константе).

6. В каком смысле операции нахождения производной и первообразной являются взаимно обратными?

Тест

1. Если $f'(x) = g(x)$, то:
а) $f(x)$ является первообразной для $g(x)$;
б) $g(x)$ является первообразной для $f(x)$;
в) $f(x) + 1$ является первообразной для $g(x)$;
г) $g(x) + 1$ является первообразной для $f(x)$.

2. $\int df(x) =$
а) $f(x)$; б) $f(x) + C$; в) $f(x)dx$; г) $f(x)dx + C$; д) $f'(x)dx$.

3. $\int f'(g(x))g'(x)dx =$
а) $f'(g(x))$; б) $f'(g(x)) + C$; в) $f(g(x))$; г) $f(g(x)) + C$; д) $f(g(x))g(x)$;
е) $f(g(x))g(x) + C$.

4. $\int f'(x)g(x)dx =$
а) $f(x)\int g(x)dx$; б) $f(x)\int g(x)dx + g(x)\int f(x)dx$;
в) $f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$; г) $f'(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$;
д) $\int f(x)dg(x) + \int g(x)df(x)$.

5. Из следующих равенств выберите верные:
а) $\int f'(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'$; б) $d\int f(x)dx = \int df(x)$;
в) $\int f'(x)dx = \int df(x)$; г) $d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'$.

6.2 Определенный интеграл

6.2.1 Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$. Рассмотрим задачу нахождения площади *криволинейной трапеции*, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, сверху – графиком функции $y = f(x)$ и снизу – осью x.

Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Выберем на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ точку ξ_i и рассмотрим прямоугольник с высотой $f(\xi_i)$. Его площадь будет равна $f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма площадей всех прямоугольников $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой*. Она равна площади ступенчатой фигуры (см. рис. 6.1 при $n = 5$), которая является приближением площади криволинейной трапеции. Обозначим $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$.

Рис. 6.1:

Определение 6.2.1 *Пусть предел* $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ *существует, конечен и не зависит от выбора точек* $x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n$. *Тогда этот предел называется определенным интегралом (или интегралом Римана*[1]*) от функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a, b]$*, обозначается* $\int_a^b f(x)dx$*, а сама функция* $f(x)$ *называется интегрируемой (по Риману) на отрезке* $[a, b]$*, т. е.*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При этом числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением.*

Т. к. при уменьшении Δx_i площадь ступенчатой фигуры на рис.6.1 приближается к площади криволинейной трапеции, то за ее площадь следует принять предел интегральных сумм, т. е.

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Из определения очевидным образом следует, что $\int_a^b dx = b - a$.

Отметим без доказательства, что если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема. Интегрируемыми будут и ограниченные функции, имеющие на $[a, b]$ конечное число разрывов. Неограниченные функции неинтегрируемы.

[1] Б. Риман (1826–1866) – выдающийся немецкий математик, основатель ряда областей современной геометрии и математического анализа.

6.2.2 Основные свойства определенного интеграла

1) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Из этого равенства, в частности, следует, что $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$

2) Если функция f интегрируема на наибольшем из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то она интегрируема и на двух остальных и имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Это свойство называется *свойством аддитивности*.

3) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad k = const.$

4) $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

5) Если $a < b$ и $f(x) \geq 0$, то $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

6) Если $a < b$ и $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx,$$

т. е. неравенства можно почленно интегрировать. Это свойство следует из предыдущего, если его применить к функции $f(x) - g(x)$, а затем использовать свойство 4).

7) Если $a < b$ и $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Это свойство следует из предыдущего, если учесть, что $\displaystyle\int_a^b dx = b - a.$

8) Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется $c \in [a, b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Это свойство называется *теоремой о среднем* и следует из предыдущего свойства и следствия 4.2.1.

6.2.3 Определенный интеграл как функция верхнего предела

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Для любого $x \in [a, b]$ положим по определению

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Эта функция называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема 6.2.1 *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция Φ дифференцируема на этом отрезке и $\Phi'(x) = f(x)$.*

Доказательство. Из свойства аддитивности следует, что

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Теперь воспользуемся свойством 8:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x, \quad \text{где} \quad c\in[x,x+\Delta x].$$

Следовательно,

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x),$$

т. к. f – непрерывная функция.

Из этой теоремы легко следует формула

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \tag{6.3}$$

где $F(x)$ – любая первообразная функции f на $[a,b]$.

Действительно, т. к. $\Phi(x)$ тоже первообразная функции f, то $F(x)=\Phi(x)+C$. Следовательно, $F(a)=\Phi(a)+C=c$, т. к. $\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0$.

$$F(b)=\Phi(b)+C=\Phi(b)+F(a)\Longrightarrow\Phi(b)=\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

Формула (6.3) называется *основной формулой интегрального исчисления* или *формулой Ньютона*[2]*-Лейбница*[3]. Разность, стоящую в правой части этой формулы часто обозначают $F(x)\big|_a^b$ и называют *двойной подстановкой*, а формулу Ньютона-Лейбница записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b.$$

Пример 6.2.1

$$\int_0^1 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}.$$

Замечание. Формула Ньютона-Лейбница получена в предположении непрерывности функции f. Ее применение к случаю, когда функция f не ограничена на отрезке $[a,b]$ может привести к ошибкам. Рассмотрим соответствующий пример неверного использования этой формулы.

Пример 6.2.2

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}=-\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^1=-1-1=-2.$$

Получили, что интеграл от положительной функции отрицателен. В действительности же функция не интегрируема на отрезке [-1, 1], т. к. она не ограничена в окрестности точки 0.

[2]И. Ньютон (1643–1727) – великий английский математик, физик, механик, астроном. Основоположник современной механики и математического анализа.

[3]Г. Лейбниц (1646–1716) – выдающийся немецкий математик, физик, философ, изобретатель, юрист, языковед. Основоположник математического анализа.

6.2.4 Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Для определенных интегралов имеет место формула интегрирования по частям, аналогичная той, что была получена для определенных интегралов.

Если функции f и g непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то из равенства (6.1) и формулы Ньютона-Лейбница следует

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)|_a^b,$$

откуда получаем:

$$\int_a^b f dg = fg|_a^b - \int_a^b g df.$$

Пример 6.2.3

$$\int_0^\pi x\cos x dx = \int_0^\pi x d\sin x = x\sin x|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x|_0^\pi = \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

Рассмотрим определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, а функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$;

2) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$.

Тогда имеет место следующая *формула замены переменной:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{6.4}$$

Действительно, пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{6.5}$$

Из формулы (6.2) и формулы Ньютона-Лейбница следует, что

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \tag{6.6}$$

Из сравнения (6.5) и (6.6) вытекает формула (6.4).

Пример 6.2.4 Вычислить интеграл $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Сделаем подстановку $x = a\sin t$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

6.2.5 Несобственные интегралы

В определении интеграла предполагалось, что числа a и b конечны, а функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ (в противном случае можно показать, что она не интегрируема). Теперь мы обобщим понятия определенного интеграла на тот случай, когда пределы интегрирования могут быть бесконечными, а функция f – неограниченной. Такие интегралы называются *несобственными.* В первом случае интегралы называются *интегралами с бесконечными пределами*, во втором – *интегралами от неограниченных функций.*

По определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если предел в правой части этого равенства существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится.* В противном случае говорят, что он *расходится.* Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если для некоторого числа a несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся, то по определению полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \tag{6.7}$$

и называют интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *сходящимся.* Если хотя бы один из интегралов в правой части равенства (6.7) расходится, то несобственный интеграл называется *расходящимся.* (Можно доказать, что введенное определение не зависит от выбора a).

Пример 6.2.5

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Пример 6.2.6

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}(b^{1-\alpha}-1) = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Геометрическая интерпретация этого факта состоит в том, что площадь бесконечной фигуры, ограниченной слева прямой $x = 1$, снизу – осью x, сверху – графиком $y = \dfrac{1}{x^\alpha}$ и неограниченной справа, оказывается конечной при $\alpha > 1$ и бесконечной при $\alpha \le 1$.

Рис. 6.2:

Пример 6.2.7

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \sin b.$$

Т. к. последний предел не существует, то этот интеграл расходится.

В теории вероятностей встречается несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ называемый *интегралом Пуассона*[4]. Можно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Рассмотрим теперь несобственные интегралы от неограниченных функций. Пусть функция f ограничена и интегрируема в любом промежутке $[a, b-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b-a)$, но неограничена в каждом промежутке $[b-\varepsilon, b]$. Тогда по определению

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то говорят, что *интеграл сходится*, в противном случае – *расходится.* Аналогично, если функция f ограничена и интегрируема в каждом промежутке $[a+\varepsilon, b]$, но неограничена в каждом промежутке $[a, a+\varepsilon]$, то

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Точки b (в первом случае) и a (во втором случае) называются *особыми точками.* Если отрезок $[a, b]$ содержит несколько особых точек, то несобственный интеграл по этому отрезку понимается как сумма интегралов по каждому из отрезков, на которые разбивается данный отрезок особыми точками. При этом интеграл $\int_a^b f(x)dx$ считается сходящимся, если сходится каждый из этих интегралов.

[4]С. Пуассон (1781–1840) – выдающийся французский математик, механик и физик, один из основоположников математической физики.

Пример 6.2.8

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln x\big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\ln\varepsilon) = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Пример 6.2.9

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0+}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \alpha > 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Пример 6.2.10

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

и, следовательно, расходится (сравни с примером 6.2.2).

Несобственный интеграл может быть одновременно интегралом с бесконечными пределами и от неограниченной функции. В этом случае он понимается как сумма соответствующих интегралов. Например,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

и, следовательно, расходится при всех α.

6.2.6 Приложения определенного интеграла в экономике

Выше мы отмечали, что производительность труда есть производная от количества произведенной продукции по времени. Пусть $Q(t)$ – количество произведенной продукции к моменту времени t, тогда $f(t) = Q'(t)$ – производительность труда. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_0^T f(t)dt = Q(T) - Q(0) = Q(T)$$

(считаем, что $t = 0$ соответствует началу производства, поэтому $Q(0) = 0$).

Таким образом, количество произведенной продукции за время T равно определенному интегралу от производительности труда по отрезку $[0, T]$.

Пример 6.2.11 Найти дневную выработку Q за 8-часовой рабочий день, если производительность труда изменяется в течение дня по формуле

$$f(t) = -t^2 + 8t + 5,$$

где t – время(ч), $f(t)$ – численное значение производительности труда (ед. продукции/ч).

$$Q = \int_0^8 (-t^2 + 8t + 5)dt = \left(-\frac{t^3}{3} + 4t^2 + 5t\right)\bigg|_0^8 = 125\frac{1}{3} \text{ (ед. продукции).}$$

Рассмотрим теперь применение определенного интеграла в финансовых расчетах. Пусть на счет, по которому происходит непрерывное начисление процентов (см. п.4.1.5) по ставке δ, непрерывно поступает доход. Предположим, что непрерывное поступление дохода описывается функцией $p(t)$ – скоростью поступления дохода в момент времени t. Требуется определить сумму на счете к моменту времени T.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на промежутки времени точками $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$. Аппроксимируем непрерывное поступление доходов его поступлением в моменты
$\tau_i \in (t_{i-1}, t_i), i = \overline{1, n}$ в размере $p(\tau_i) \cdot \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. На каждую из этих денежных сумм будут начислены непрерывные проценты за промежуток времени $T - \tau_i$ и наращенная сумма к моменту T будет составлять, согласно формуле (4.13), $p(\tau_i)\Delta t_i e^{\delta(T-\tau_i)}$. Следовательно, общая сумма на счете к моменту T составит $\sum\limits_{i=1}^{n} p(\tau_i)e^{\delta(T-\tau_i)}\Delta t_i$. Если предположить, что функция $p(t)$ интегрируема (например, непрерывна), то при стремлении $\max\limits_i \Delta t_i$ к нулю, эти суммы приближаются к интегралу $\int_0^T p(t)e^{\delta(T-t)}dt$, который и дает сумму на счете к моменту T.

Пример 6.2.12 Определите сумму на счете через 5 лет при непрерывном начислении процентов по ставке 10% годовых, если скорость поступления денег на счет задается линейной функцией $p(t) = 2 + 3t$ (д.е./год), где t – время (в годах).

Искомая сумма S может быть найдена по формуле

$$S = \int_0^T p(t)e^{\delta(T-t)}dt,$$

где $T = 5$, $\delta = 0,1$.

$$S = \int_0^5 (2+3t)e^{0,1(5-t)}dt = \left| \begin{array}{ll} x = 0,1(5-t) & t = 5-10x \\ dx = -0,1dt & dt = -10dx \end{array} \right| = -10\int_{0,5}^{0}(17-30x)e^x dx =$$

$$= 10\int_0^{0,5}(17-30x)de^x = 10e^x(17-30x)\Big|_0^{0,5} - 10\int_0^{0,5} e^x d(17-30x) = 10e^{0,5}\cdot 2 - 170 +$$

$$+300e^x|_0^{0,5} = 20e^{0,5} - 170 + 300e^{0,5} - 300 = 320e^{0,5} - 470 \approx 57,6(\text{д.е.})$$

Основные термины

Криволинейная трапеция.
Интегральная сумма. Интегрируемая функция.
Определенный интеграл. Пределы интегрирования.
Подынтегральная функция. Подынтегральное выражение.
Свойство аддитивности.
Теорема о среднем.
Интеграл с переменным верхним пределом.
Формула Ньютона-Лейбница. Двойная подстановка.
Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами.
Интеграл Пуассона.
Интегралы от неограниченных функций. Особые точки.
Сходимость (расходимость) несобственного интеграла.

Контрольные вопросы

1. Каков геометрический смысл определенного интеграла?

2. Что такое интегральная сумма? Каков ее геометрический смысл? От каких аргументов она зависит?

3. Любая ли непрерывная функция интегрируема?

4. Любая ли интегрируемая функция непрерывна?

5. Известно ли Вам необходимое (достаточное, необходимое и достаточное) условие интегрируемости функции на отрезке?

6. Может ли определенный интеграл от положительной функции быть отрицательным?

7. Любая ли непрерывная функция имеет первообразную?

8. Приведите пример неправильного применения формулы Ньютона-Лейбница. Объясните причину ошибки.

9. Что такое несобственный интеграл? Каковы два вида несобственных интегралов?

10. Покажите, что теорема о среднем является следствием формулы Ньютона-Лейбница и формулы Лагранжа.

Тест

1. $\int_a^b f'(x)dx =$

а) $f(b)-f(a)$; б) $f'(b)-f'(a)$; в) $f'(a)-f'(b)$; г) $f(a)-f(b)$; д) 0.

2. $\left(\int_a^b f(x)dx\right)' =$

а) $f(b)-f(a)$; б) $f'(b)-f'(a)$; в) $f'(a)-f'(b)$; г) $f(a)-f(b)$; д) 0.

3. $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx =$

а) $\int_a^b f(x)dx$; б) $\int_a^b f(y)dy+C$; в) $\int_{f(a)}^{f(b)} f(y)dg(y)$; г) $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$;

д) $\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy+C$; е) $f(g(b))-f(g(a))$; ж) $\int_a^b f'(y)dy$.

4. $\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx =$

См. варианты п.3.

5. Какие из следующих интегралов являются несобственными?

а) $\int_0^{+\infty} x\sin x dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$; в) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x+1}$; г) $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$; д) $\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

6. Какие из следующих несобственных интегралов сходятся?

а) $\int_0^{+\infty} \sin x dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$.

7. Какие из следующих несобственных интегралов расходятся?

а) $\int_0^{+\infty} \cos x dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; в) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2-4}$.

8. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при:

а) всех $\alpha \in \mathbf{R}$; б) $\alpha > 0$; в) $0 < \alpha < 1$; г) $0 < \alpha \le 1$; д) $\alpha > 1$.

9. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится при:

а) всех $\alpha \in \mathbf{R}$; б) $\alpha > 0$; в) $0 < \alpha < 1$; г) $0 < \alpha \le 1$; д) $\alpha > 1$.

10. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится при:
а) всех $\alpha \in \mathbf{R}$; б) $\alpha > 0$; в) $0 < \alpha < 1$; г) $0 < \alpha \leq 1$; д) $\alpha > 1$.

Упражнения

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1)\ \int \left(x^3 + \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx, \qquad 2)\ \int \frac{2x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + 1} dx, \qquad 3)\ \int \frac{2\operatorname{tg}^2 x + 3}{\sin^2 x} dx.$$

2. Вычислить неопределенные интегралы методом подстановки.

$$1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x}}, \qquad 2)\ \int \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx, \qquad 3)\ \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

3. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

$$1)\ \int x^3 \ln x dx, \qquad 2)\ \int x^2 \cos x dx, \qquad 3)\ \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

4. Вычислить определенные интегралы.

$$1)\ \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}, \qquad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx, \qquad 3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx, \qquad 4)\ \int_1^e x \ln x dx.$$

5. Найти площади фигур, ограниченных следующими линиями:

1) $y = x^2 - 2x + 2,\ y = 2x - 1$; 2) $x^2 - y^2 = 1,\ x = 2$;
3) $y = |x^2 - 1|,\ y = 0,\ x = -2,\ x = 2$; 4) $y = x^3,\ y = \sqrt{x}$.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x + 3$ и касательными к ней в точках $A(0; -3)$, $B(3; 0)$.

7. Вычислить несобственные интегралы.

$$1)\ \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx, \qquad 3)\ \int_1^{+\infty} x^{-2} \ln x dx,$$

$$4)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad 5)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \qquad 6)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Глава 7

Ряды

К понятию бесконечных сумм подошли еще ученые Древней Греции. Как самостоятельное понятие ряд вошел в математику в 17 в. И. Ньютон и Г. Лейбниц использовали ряды для решения как алгебраических, так и дифференциальных уравнений. Формальная теория рядов усиленно развивалась в 18–19 вв. в работах Я. и И. Бернулли, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа и др. В этот период использовались как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, хотя и не было полной ясности в вопросе о законности действий над ними. Точная теория рядов была создана в 19 в. на основе понятия предела в трудах К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коши, П. Дирихле, Н. Абеля, К. Вейерштрасса, Б. Римана и др.

7.1 Числовые ряды

7.1.1 Определение ряда и его сходимость

В теории рядов понятие суммы обобщается на некоторые случаи бесконечного числа слагаемых. С такими суммами сталкиваются при решении ряда математических задач, в том числе и в приложениях математики в экономике.

Определение 7.1.1 *Пусть задана бесконечная числовая последовательность $u_1, u_2, ..., u_n, ...$. Формально написанная сумма*

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \tag{7.1}$$

или, что то же, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, называется рядом, а число u_n – его общим или n-м членом.

Ряд считается заданным, если известен его общий член , т. е. задана функция натурального аргумента $u_n = f(n)$, $n = 1, 2, ...$. Например, ряд с общим членом $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ имеет вид

$$-\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{(-1)^n}{n(n+1)} + ... \quad .$$

Определение 7.1.2 *Конечная сумма*

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n,$$

слагаемыми которой являются первые n членов ряда (7.1), называется n-й частичной суммой данного ряда, а ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k} + ...,$$

членами которого являются члены ряда (7.1), начиная с $(n+1)$-го, написанные в том же порядке, что и данный ряд, называется n-м остатком ряда (7.1).

Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную числовую последовательность $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, ..., S_n, ... \tag{7.2}$$

Определение 7.1.3 *Будем говорить, что ряд (7.1) сходится и его сумма равна S, если существует конечный предел последовательности частичных сумм (7.2), равный S, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. В этом случае пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Если ряд не сходится, то говорят, что он расходится.*

Пример 7.1.1 Для числового ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

установить сходимость и найти его сумму.

Решение. Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда частичные суммы S_n можно записать в виде

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, т. е. данный ряд сходится и его сумма равна 1.

Пример 7.1.2 Исследовать на сходимость ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n + ... \quad .$$

Решение. Последовательность его частичных сумм $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, ..., $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$, ... не имеет предела, значит, ряд расходится.

Пример 7.1.3 Исследовать сходимость ряда

$$1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

и, в случае сходимости, найти его сумму.

Решение. Данный ряд представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получим (при $q \neq 1$) выражение для частичных сумм ряда:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, т. е. ряд сходится. При $|q| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty$, а потому и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд расходится. При $q = -1$ мы получаем ряд из примера (7.1.2), который, как мы убедились, расходится. Наконец, при $q = 1$, имеем $S_n = n + 1 \to \infty$ при $n \to \infty$, т. е. ряд также расходится.

Итак, данный ряд сходится при $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии) и расходится при остальных q.

7.1.2 Свойства сходящихся рядов

Рассмотрим некоторые свойства сходящихся рядов, которые будут использоваться при решении задач и изложении теоретического материала.

1. Пусть c – действительное число. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$, называемый произведением данного ряда на число c, также сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Это свойство означает, что числовой множитель "можно выносить за скобку"и в случае бесконечного числа слагаемых.

2. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$, называемые суммой (разностью) данных рядов, также сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Это свойство означает, что сходящиеся ряды "можно складывать (вычитать) почленно".

3. Если ряд сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда сходится, то и сам ряд также сходится.

Из этого свойства следует, что отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

4. ***(Необходимое условие сходимости ряда)***.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{7.3}$$

Заметим, что условие (7.3) не является достаточным условием сходимости ряда. Например, так называемый *гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (это будет установлено ниже), хотя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Из необходимого условия сходимости следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

Пример 7.1.4 Рассмотрим следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}.$$

Оба этих ряда расходятся. В первом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\neq 0$. Во втором случае $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$ не существует.

7.1.3 Сходимость положительных рядов

Вопрос о сходимости или расходимости рядов проще всего решается для рядов, члены которых неотрицательны. Для краткости будем называть такие ряды *положительными*.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ – положительный ряд, т. е. $u_n\geq 0$ $(n=1,2,...)$, то последовательность его частичных сумм является неубывающей. Из теоремы о пределе монотонной последовательности следует

Предложение 7.1.1 *Если частичные суммы положительного ряда ограничены сверху, то ряд сходится. В противном случае ряд расходится.*

Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, для которого этот вопрос уже решен. В основе этого сравнения лежит следующая теорема, очевидным образом следующая из последнего предложения.

Теорема 7.1.1 *Пусть даны два положительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\qquad (U)\qquad \text{и}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}v_n\qquad (V).$$

Если для всех n, начиная с некоторого номера имеет место неравенство $u_n\leq v_n$, то из сходимости ряда (V) следует сходимость ряда (U) или, что то же, из расходимости ряда (U) следует расходимость ряда (V).

Пример 7.1.5 Рассмотрим ряд "обратных квадратов" $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (см. пример 7.1.1). Из теоремы 7.1.1 и неравенства $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n+1)}$ следует сходимость ряда "обратных квадратов".

Иногда более удобной для применения на практике является следующая теорема, вытекающая из предыдущей.

Теорема 7.1.2 *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=K \qquad (0\le K\le +\infty),$$

то из сходимости ряда (V)*, при* $K<+\infty$*, следует сходимость ряда* (U)*, а из расходимости ряда* (U)*, при* $K>0$*, следует расходимость ряда* (V)*. Таким образом, при* $0<K<+\infty$*, оба ряда сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 7.1.6 Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{2n^2+n-1}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
Выбор такого ряда для сравнения основан на том, что

$$\frac{3n+5}{2n^2+n-1}\sim\frac{3}{2n} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{2n^2+n-1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n}{2n^2+n-1}=\frac{3}{2}\ne 0.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Приведем еще одну теорему сравнения, также являющуюся следствием первой.

Теорема 7.1.3 *Если для всех* n*, начиная с некоторого номера выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n},$$

то из сходимости ряда (V) *следует сходимость ряда* (U) *или, что то же, из расходимости ряда* (U) *следует расходимость ряда* (V)*.*

Чаще всего в качестве "эталонных"рядов, с которыми производят сравнение, выбирают следующие ряды:

1) *геометрический ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ (см. пример 7.1.3) – сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\ge 1$;

2) *гармонический ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится;

3) *обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ – сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$ (см. пример 7.1.10 ниже).

Сравнивая данный ряд с геометрическим рядом с помощью теоремы 7.1.3, получаем следующую теорему.

Теорема 7.1.4 ***(Признак Даламбера***[1]***)*** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда этот ряд сходится при $l < 1$ *и расходится при* $l > 1$.

Замечание. При $l = 1$ необходимо дополнительное исследование ряда с применением других признаков, т. к. в этом случае исследуемый ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 7.1.7 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n, \quad a > 0.$

Применим к этому ряду признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = a.$$

Если $a > 1$, то данный ряд расходится, а если $a < 1$ – ряд сходится. При $a = \pm 1$ сходимость или расходимость ряда нельзя определить с помощью признака Даламбера. Однако, очевидно, что при этих значениях a ряд расходится, т. к. его общий член не стремится к нулю.

Пример 7.1.8 Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Для этого ряда $u_n = \dfrac{1}{n!}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
Поэтому, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

В ряде случаев удобным оказывается следующий признак сходимости.

Теорема 7.1.5 (Признак Коши) *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится при* $l < 1$ *и расходится при* $l > 1$. *Если* $l = 1$, *то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.*

Пример 7.1.9 Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то по признаку Коши данный ряд сходится.

Признаки Даламбера и Коши являются очень простыми и удобными для применения, но достаточно грубыми (в случае, когда соответствующий предел $l = 1$, эти признаки не дают ответа на вопрос о сходимости ряда). Значительно более чувствительным (но и более сложным для применения) является следующий признак.

[1]Ж. Даламбер (1717–1783) – выдающийся французский математик, механик, философ.

Теорема 7.1.6 (Интегральный признак сходимости) *Если функция $f(x)$, определенная при всех $x \geq 1$, неотрицательная и монотонно убывает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.*

Эта теорема существенно облегчает исследование сходимости рядов. Если для данного ряда удается подобрать соответствующую функцию $f(x)$, то вопрос о сходимости ряда сводится к вопросу о сходимости интеграла.

Пример 7.1.10 Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ в зависимости от значения α.

Функция f подбирается в данном случае легко: $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\quad x \geq 1$. Так как $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$, то и данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. В частности, отсюда следует расходимость гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Пример 7.1.11 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Здесь функция $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$; первообразная для нее

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x + C$$

и $F(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, значит, данный ряд расходится.

7.1.4 Сходимость знакопеременных рядов

В этом пункте рассматриваются ряды, знаки которых, вообще говоря, изменяются при изменении номера члена ряда. Такие ряды называются *знакопеременными.*

Прежде всего рассмотрим числовые ряды, члены которых поочередно то положительны, то отрицательны – так называемые *знакочередующиеся* ряды. Полагая первый член положительным, знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - ... + (-1)^{n+1} u_n + ... \quad . \tag{7.4}$$

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема 7.1.7 (Признак Лейбница) *Если модули членов знакочередующегося ряда образуют монотонно невозрастающую последовательность, стремящуюся к нулю, т. е. если*

$$u_n \geq u_{n+1}, \quad n = 1, 2, ..., \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

то знакочередующийся ряд (7.4) сходится.

Пример 7.1.12 Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ... \quad .$$

Применим к этому ряду признак Лейбница. Члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине $\left(\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}\right)$ и стремятся к нулю $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$, значит, ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость ряда.

Определение 7.1.4 *Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.*

Теорема 7.1.8 *Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Определение 7.1.5 *Сходящийся числовой ряд называется условно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, расходится.*

Пример 7.1.13 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}$ абсолютно сходится, т. к. $\left|\frac{1}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}\right| \le \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится.

Пример 7.1.14 Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \tag{7.5}$$

как было показано ранее, сходится, но не абсолютно. Ряд, составленный из модулей его членов, т. е. гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится. Таким образом, данный ряд – условно сходящийся.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов существенно отличаются. С абсолютно сходящимися рядами можно обращаться как с обычными конечными суммами: их можно складывать, перемножать, переставлять местами слагаемые. Условно сходящиеся ряды такими свойствами не обладают.

Пример 7.1.15 Вновь рассмотрим ряд (7.5). Переставим члены ряда местами и сгруппируем их следующим образом:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + ... \quad .$$

Перепишем ряд в виде:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + ... = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...\right),$$

т. е. от перестановки членов ряда сумма его уменьшилась в два раза.

Итак, сумма ряда зависит от порядка слагаемых, т. е. коммутативный закон сложения не имеет места для условно сходящихся рядов. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1.9 (Теорема Римана) *Пусть знакопеременный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится условно. Тогда, каково бы ни было число* S*, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна* S*.*

Основные термины

Числовой ряд. Общий член ряда. Частичная сумма ряда. Остаток ряда.
Сходимость и расходимость ряда. Сумма ряда.
Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд.
Положительный, знакопеременный, знакочередующийся ряд.
Абсолютная и условная сходимость ряда.

Контрольные вопросы

1. Повлияет ли на сходимость ряда изменение конечного числа его членов? Повлияет ли это на сумму ряда?

2. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда. Можно ли его назвать признаком сходимости? Почему?

3. Какой ряд называется гармоническим (обобщенным гармоническим)? Что Вам известно о сходимости этих рядов?

4. Является ли необходимое условие сходимости ряда достаточным? Почему? Приведите пример.

5. Какие Вам известны достаточные условия сходимости числового ряда?

6. Следует ли из абсолютной сходимости ряда его обычная сходимость? А наоборот?

7. Приведите пример условно сходящегося числового ряда.

8. Зависит ли сумма абсолютно (условно) сходящегося числового ряда от порядка его членов?

9. Будет ли справедлив признак Даламбера, если в его формулировке не требовать положительности ряда? Объясните почему.

10. Справедливо ли следующее обобщение признака Даламбера:
"Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$.
Тогда этот ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$."

Тест

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

а) сходится; б) расходится; в) абсолютно сходится; г) условно сходится;
д) может как сходиться, так и расходиться;
е) сходится, только если он знакопеременный;
ж) сходится только в том случае, если все его члены положительны.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

См. варианты п.1.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

См. варианты п.1.

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

См. варианты п.1.

5. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

а) $= 0$; б) конечен, но не равен нулю; в) $= \infty$; г) не существует.

6. Какие из следующих рядов сходятся?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

7. Какие из предыдущих рядов сходятся абсолютно?

8. Какие из рядов п.6 сходятся условно?

9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n \ln n}$:

а) сходится; б) расходится; в) абсолютно сходится; г) условно сходится;
д) может как сходиться, так и расходиться.

10. Какие из следующих утверждений верны?

а) Если общий член ряда стремится к нулю, то ряд сходится;
б) если ряд расходится, то его общий член не стремится к нулю;
в) если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю;
г) если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится;
д) если общий член ряда стремится к 1, то ряд расходится.

7.2 Степенные ряды

7.2.1 Понятие функционального ряда

Определение 7.2.1 *Пусть задана последовательность функций $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ от одной и той же переменной x. Формальная сумма*

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{7.6}$$

называется функциональным рядом относительно переменной x, а функция $u_n(x)$ – его общим или n-м членом.

В частности, каждый из членов ряда (7.6) может быть и постоянной. Таким образом, числовой ряд является частным случаем функционального.

Придавая в выражении (7.6) переменной x различные значения, будем получать различные числовые ряды. Поэтому, в зависимости от значения, принимаемого переменной x, числовой ряд может оказаться сходящимся или расходящимся.

Определение 7.2.2 *Совокупность всех значений переменной x, для которых ряд (7.6) сходится, называется областью сходимости этого функционального ряда.*

Если значение x_0 переменной x принадлежит области сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то можно говорить о сумме функционального ряда в точке x_0:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = s(x_0).$$

Определение 7.2.3 *Функция, ставящая в соответствие каждой точке области сходимости функционального ряда, значение его суммы в этой точке, называется суммой данного функционального ряда.*

Рассмотрим примеры функциональных рядов и их областей сходимости.

Пример 7.2.1 Определим области сходимости функционального ряда

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + ... + \frac{1}{n^2+x^2} + ... \quad .$$

Для этого применим теорему сравнения. При любом x члены ряда не превосходят соответствующих членов числового ряда "обратных квадратов"

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} + ... \quad .$$

Так как последний ряд сходится (см. примеры 7.1.5 и 7.1.10), то сходится и исследуемый ряд при любом x. Таким образом, областью сходимости данного ряда является множество всех действительных чисел.

Пример 7.2.2 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$ при каждом x представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{x}{2}$. Необходимое и достаточное условие сходимости этого ряда состоит в том, что $|q| < 1$, т. е. $|x| < 2$. Следовательно, областью сходимости ряда является интервал $(-2, 2)$.

Пример 7.2.3 Область сходимости функционального ряда может оказаться и пустой. В качестве такого примера рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2+\sin x} + \frac{1}{3+\sin x} + ... + \frac{1}{n+1+\sin x} + ... \quad .$$

Так как $\sin x \leq 1$, члены этого ряда не меньше соответствующих членов гармонического ряда, начиная с третьего:

$$\frac{1}{2+\sin x} \geq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3+\sin x} \geq \frac{1}{4}, \quad ,..., \quad \frac{1}{n+1+\sin x} \geq \frac{1}{n+2}, \quad ,... \quad .$$

Из расходимости гармонического ряда и теоремы сравнения следует расходимость рассматриваемого ряда при всех значениях x.

Частным случаем функционального ряда является степенной ряд.

Определение 7.2.4 *Функциональный ряд вида*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{7.7}$$

где $a_n \quad (n = 1, 2, ...)$ *– постоянные, называется степенным относительно переменной* x, *причем* a_n *называются коэффициентами этого ряда.*

7.2.2 Область сходимости степенного ряда

Области сходимости степенных рядов описываются следующей теоремой.

Теорема 7.2.1 ***(Теорема Абеля***[2]***)*** *Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при некотором* $x = x_0$, *то он сходится абсолютно при всех* x, *для которых* $|x| < |x_0|$. *И наоборот, если ряд расходится при* $x = x_1$, *то он расходится и при* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что для любого степенного ряда (7.7) существует такое неотрицательное число R, что при $|x| > R$ ряд (7.7) расходится, а при $|x| < R$ – сходится. Вопрос о сходимости ряда при $x = \pm R$ подлежит дальнейшему исследованию, т. к. при этих значениях переменной может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда.

Число R называется радиусом сходимости , а интервал $(-R, R)$ – интервалом сходимости степенного ряда. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является один из следующих промежутков: $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$.

Замечание. При $x = 0$ сходится, очевидно, всякий степенной ряд. У некоторых рядов область сходимости вырождается в точку ($R = 0$), у других – совпадает со всей действительной осью ($R = \infty$).

Наряду со степенными рядами относительно переменной x, т. е. рядами вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, рассматривают также ряды, степенные относительно переменной $(x - x_0)$, т. е. ряды вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \tag{7.8}$$

Ясно, что подстановкой $y = x - x_0$ ряд (7.8) приводится к ряду (7.7). Поэтому интервал сходимости ряда (7.8) имеет вид $(x_0 - R, x_0 + R)$.

На использовании признака Даламбера сходимости положительных рядов основана следующая теорема, дающая формулу вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

Теорема 7.2.2 *Радиус сходимости степенного ряда (7.7) или (7.8) находится по формуле*

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{7.9}$$

при условии существования указанного предела (конечного или бесконечного).

[2]Н. Абель (1802–1829) – выдающийся норвежский математик.

Пример 7.2.4 Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. Для него $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Следовательно, этот ряд сходится при всех действительных значениях x.

Если предел (7.9) не существует, то для вычисления радиуса сходимости можно попытаться непосредственно применить признак Даламбера.

Пример 7.2.5 Найдем область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-5)^{3n}}{3n+8}$.
Для него последовательность $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ не определена, т. к. все коэффициенты данного ряда с номером, не кратным трем, равны нулю, и поэтому соответствующие отношения $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ не имеют смысла. Применим к данному ряду признак Даламбера. n-й член данного ряда $u_n(x) = \dfrac{(x-5)^{3n}}{3n+8}$. Следовательно, $u_{n+1}(x) = \dfrac{(x-5)^{3n+3}}{3n+11}$ и $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \dfrac{(3n+8)(x-5)^3}{3n+11}$.
Отсюда находим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |(x-5)^3|\lim_{n\to\infty}\frac{3n+8}{3n+11} = |(x-5)^3|.$$

Следовательно, ряд сходится при $|(x-5)^3| < 1$. Решая это неравенство, получаем интервал сходимости $(4,6)$. Исследуем теперь сходимость ряда на концах этого интервала. При $x=4$, учитывая, что $(-1)^{3n} = (-1)^n$, получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+8}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x=6$ получаем расходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3n+8}$ (сравните этот ряд с гармоническим с помощью теоремы 7.1.2). Таким образом, область сходимости данного степенного ряда есть промежуток $[4,6)$.

В ряде случаев вместо признака Даламбера более удобным оказывается применение признака Коши. Соответствующая формула для радиуса сходимости дается следующей теоремой.

Теорема 7.2.3 *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l,$$

то радиус сходимости степенного ряда (7.7) или (7.8) находится по формуле $R = \dfrac{1}{l}$. *При этом* $R=0$, *если* $l=\infty$ *и* $R=\infty$, *если* $l=0$.

7.2.3 Разложение функций в степенные ряды

Сумма степенного ряда, как и любого функционального ряда, является функцией от переменной x:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{7.10}$$

Если интервал сходимости этого ряда $(-R, R)$, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R, R)$. Для получения разложений функций в степенные ряды часто используются следующие теоремы.

Теорема 7.2.4 *Степенной ряд можно дифференцировать почленно на его интервале сходимости, т. е. если имеет место разложение (7.10), то для всех* $x \in (-R, R)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{7.11}$$

При этом радиусы сходимости рядов (7.10) и (7.11) совпадают.

Следствие 7.2.1 *Сумма степенного ряда является бесконечно дифференцируемой функцией.*

Теорема 7.2.5 *Степенной ряд можно интегрировать почленно на его интервале сходимости, т. е. для любых* $a, x \in (-R, R)$ *из равенства (7.10) следует равенство*

$$\int_a^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

В частности, при $a = 0$ *имеем равенство:*

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{7.12}$$

Радиусы сходимости рядов (7.10) и (7.12) совпадают.

Замечание. Вопрос о сходимости степенного ряда в концах интервала сходимости после дифференцирования или интегрирования решается индивидуально.

Применяя теорему 7.2.4 к разложению (7.10), получаем следующую теорему.

Теорема 7.2.6 *Если функция разлагается в степенной ряд (7.10) в интервале* $(-R, R)$, *то это разложение единственно, а его коэффициенты находятся по формулам:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Таким образом, разложение (7.10) функции $f(x)$ в степенной ряд принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{7.13}$$

Ряд (7.13) называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$. Заметим, что ряд Маклорена можно написать для любой бесконечно дифференцируемой функции. Однако равенство (7.13) имеет место лишь для значений x из промежутка сходимости этого ряда. В частности, существуют бесконечно дифференцируемые функции, ряд Маклорена которых расходится всюду, кроме точки $x = 0$ (т. е. радиус сходимости $R = 0$).

Для любой $(n+1)$ раз дифференцируемой функции справедлива формула Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член.

Связь между формулой Маклорена и рядом Маклорена дается следующей теоремой.

Теорема 7.2.7 *Для того чтобы для бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ имело место разложение в ряд Маклорена на интервале $(-R, R)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале при $n \to \infty$:*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Все сказанное выше о разложении функций в степенные ряды относительно переменной x, переносится на степенные ряды относительно переменной $(x - x_0)$. При этом интервалом сходимости является интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$, а равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

называется разложением функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки x_0. При этом разложение (7.10) называется разложением в окрестности нуля. Коэффициенты этого ряда находятся по формулам:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

а разложение в ряд имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{7.14}$$

Ряд (7.14) называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.

1. $f(x) = e^x$.

Т. к. $f^{(n)}(x) = e^x, \quad n = 0, 1, 2, ...,$

то $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ и ряд Маклорена принимает вид $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Определим радиус сходимости этого степенного ряда по теореме 7.2.2.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

т. е. ряд сходится на всей действительной оси. Следовательно, для всех $x \in \mathbf{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. $f(x) = \sin x$.

Вычисляя последовательно производные n-го порядка этой функции, замечаем их повторяемость:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Следовательно,

$$f^{(4k)}(x) = \sin x, \quad f^{(4k+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4k+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$$

Отсюда находим, что $f^{(4k)}(0) = f^{(4k+2)}(0) = 0$, т. е. все четные коэффициенты степенного ряда равны 0; $f^{(4k+1)}(0) = 1, \quad f^{(4k+3)}(0) = -1$. Таким образом, получаем разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Применяя признак Даламбера, легко убедиться, что и в этом случае разложение имеет место на всей числовой оси.

3. $f(x) = \cos x$.

Разложение этой функции в степенной ряд можно получить, повторяя выкладки, аналогичные предыдущему примеру. Но быстрее получить это разложение, дифференцируя почленно предыдущий степенной ряд. Тогда получим разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

которое также имеет место для всех действительных x.

4. $f(x) = \ln(1 + x)$.

Проще всего получить разложение этой функции в степенной ряд, если заметить, что $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, а последняя дробь при $|x| < 1$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Интегрируя теперь этот ряд по промежутку $[0, x]$, получим:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

При $x = 1$ этот ряд является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница. При $x = -1$ он совпадает с гармоническим рядом и, следовательно, расходится. Таким образом, область сходимости этого ряда $(-1, 1]$.

5. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Заметим, что $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, и разложим эту дробь в степенной ряд:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Интегрируя этот ряд почленно по промежутку $[0, x]$, получим:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

При $x = \pm 1$ этот ряд является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница. Следовательно, его областью сходимости является промежуток $[-1, 1]$.

Основные термины

Функциональный ряд. Степенной ряд.
Область сходимости. Радиус сходимости.
Ряд Тейлора. Ряд Маклорена.

Контрольные вопросы

1. Что известно об области сходимости произвольного функционального ряда?
2. Что известно об области сходимости произвольного степенного ряда?
3. Может ли степенной ряд всюду сходиться (всюду расходиться)?
4. Изменяется ли радиус сходимости степенного ряда при его почленном дифференцировании (интегрировании)?
5. Можно ли утверждать, что для любого степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ его радиус сходимости вычисляется по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$?

Тест

1. Выберите верные утверждения.

а) Степенной ряд всегда сходится хотя бы в одной точке;
б) степенной ряд всегда расходится хотя бы в одной точке;
в) степенной ряд может всюду расходиться;
г) степенной ряд может всюду сходиться;
д) степенной ряд может расходиться при всех положительных x и сходиться при отрицательных.

2. Известно, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = 2$. Выберите верные утверждения для данного степенного ряда:

а) он сходится при $x = 1$;
б) он расходится при $x = 3$;
в) он расходится при $x = -1$;
г) о его сходимости при $x = -3$ ничего сказать нельзя.

3. Известно, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = 2$. Выберите верные утверждения для данного степенного ряда.

См. варианты ответов п.2.

4. Известно, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ сходится при $x = 3$. Пусть R – его радиус сходимости. Тогда:

а) $R = 2$; б) $R = 4$; в) $R \geq 2$; г) $R \leq 4$; д)$R \geq 4$.

5. Известно, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ расходится при $x = 3$. Пусть R – его радиус сходимости. Тогда:

а)$R = 2$; б) $R = 4$; в) $R \geq 2$; г) $R \leq 4$; д)$R \geq 4$.

6. Область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(x+1)^n$ есть промежуток:

а) $[-1;1]$; б) $[0;2]$; в) $[-2;0]$; г) $(-2;0)$; д) $(0;2)$; е) $(-1;1)$.

7. Какие из следующих утверждений верны? Если степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

а) сходится при $x = x_1 > 0$, то он сходится и при $x > x_1$;
б) сходится при $x = x_1 > 0$, то он расходится при $x > x_1$;
в) сходится при $x = x_1 > 0$, то он сходится и при $0 < x < x_1$;
г) расходится при $x = x_1 > 0$, то он сходится при $0 < x < x_1$;
д) расходится при $x = x_1 > 0$, то он расходится и при $x > x_1$.

8. Какие из следующих утверждений верны? Если степенной ряд:
а) сходится при $x = x_1$ и $x = x_2$ $(x_1 < x_2)$, то он сходится и при всех $x \in (x_1, x_2)$;
б) сходится при $x = x_1$ и $x = x_2$ $(x_1 < x_2)$, то он расходится при $x > x_2$ и $x < x_1$;
в) расходится при $x = x_1$ и $x = x_2$ $(x_1 < x_2)$, то он расходится при $x > x_2$ и $x < x_1$;
г) расходится при $x = x_1$ и $x = x_2$ $(x_1 < x_2)$, то он расходится и при всех $x \in (x_1, x_2)$.

9. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{3^n}$ равен:

а) 0; б) $\sqrt{3}$; в) 3; г) 9; д) ∞.

10. При дифференцировании степенного ряда:
а) его область сходимости не меняется;
б) его радиус сходимости не меняется;
в) его радиус сходимости увеличивается;
г) его радиус сходимости уменьшается.

Упражнения

1. Исследовать сходимость рядов, используя признаки сравнения и необходимое условие сходимости рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n-5}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+5}}; \qquad 3)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; \qquad 5)\ \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{2n+3}.$$

2. Исследовать сходимость рядов с помощью признаков Коши или Даламбера:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{2^n}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}; \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n; \qquad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}.$$

3. Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака:

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}; \qquad 2)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}; \qquad 3)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}.$$

4. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Лейбница:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};\qquad 3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt[3]{n}};\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}.$$

5. Для следующих рядов выяснить, сходятся ли они абсолютно, условно или расходятся:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n^3+2}};\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+1};\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{2^n}.$$

6. Найти области сходимости следующих степенных рядов:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n};\qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}n!x^n;\qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n};\qquad 4)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^{2n+1}}{4^n}.$$

7. Разложить следующие функции в ряд Маклорена:

$$1)\ \sin^2 x;\qquad 2)\ e^{-x^2};\qquad 3)\ x\ln(1+x^2);\qquad 4)\ \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}.$$

Глава 8

Комплексные числа

Операция извлечения квадратного корня определена не для всех действительных чисел, а лишь для неотрицательных. По этой причине не любое квадратное уравнение имеет решение. Это, а также ряд вопросов, возникших при решении уравнений 3-й и 4-й степеней, привел математиков к необходимости расширить множество действительных чисел, присоединив к нему новое число i, такое, что $i^2 = -1$. Это число было названо *мнимой единицей.* Включение числа i потребовало дальнейшего расширения множества чисел – рассмотрения чисел вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbf{R}$. Такие числа были названы *компле́ксными.* Впоследствии комплексные числа нашли многочисленные серьезные приложения во многих областях чистой и прикладной математики, и современная математика уже немыслима без понятия комплексного числа.

8.1 Определение комплексных чисел

Строгое формальное определение комплексных чисел может быть дано следующим образом:

Определение 8.1.1 *Множеством комплексных чисел называют множество всех упорядоченных пар (a,b) действительных чисел, на котором определены операции сложения и умножения следующим образом:*

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d), \\ (a,b)\cdot(c,d) &:= (ac-bd, ad+bc). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Множество комплексных чисел обозначают $\mathbf{C}$*.*

Если $z = (a, b)$ – комплексное число, то a называют его *действительной частью*, а b – *мнимой частью* и записывают это так: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Числа (a, b), для которых $b \neq 0$, называют *мнимыми числами*, а числа вида $(0, b)$, $b \neq 0$, – *чисто мнимыми числами.* Из равенств (8.1) следует, что

$$\begin{gathered} (a,0) + (c,0) = (a+c, 0), \\ (a,0)\cdot(c,0) = (ac, 0), \end{gathered} \tag{8.2}$$

и поэтому пару $(a, 0)$ можно обозначить просто a (действия с такими парами ничем не отличаются от действий с действительными числами). Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}(b,0)\cdot(0,1)&=(0,b),\\(0,1)\cdot(0,1)&=(-1,0).\end{aligned}\tag{8.3}$$

Следовательно, если обозначить пару $(0,1)$ через i, то равенства (8.3) примут вид:

$$bi=(0,b),\quad i^2=-1.$$

Таким образом, любое комплексное число $z=(a,b)$ представимо в виде

$$z=(a,0)+(0,b)=a+bi.$$

Такое представление называется *алгебраической формой комплексного числа.* В алгебраической форме определения (8.1) запишутся так:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di)&:=(a+c)+(b+d)i,\\(a+bi)(c+di)&:=(ac-bd)+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

Легко проверить, что операции сложения и умножения обладают теми же свойствами, что и для действительных чисел. Естественным образом определяются операции вычитания и деления:

$$(a+bi)-(c+di):=(a-c)+(b-d)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Определение 8.1.2 *Сопряженным к числу $z=a+bi$ называется число $\bar z:=a-bi$.*

Очевидно, что сопряженным к $\bar z$ является z, т. е. $\bar{\bar z}=z$. Поэтому числа z и $\bar z$ называют *взаимно сопряженными.* Отметим следующие легко проверяемые тождества:

$$\overline{z+w}=\bar z+\bar w,\quad \overline{zw}=\bar z\bar w,\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar z}{\bar w},\quad \overline{z^n}=\bar z^n.$$

Если $a,b\in\mathbf{R}$, то $\bar a=a$, $\overline{bi}=-bi$. Если $z=a+bi$, то $z+\bar z=2a$, $z-\bar z=2bi$, $z\bar z=a^2+b^2$.

Из любого комплексного числа можно извлечь квадратный корень. Действительно, пусть $z=a+bi$. Найдем число $w=x+yi$, такое, что $w^2=z$.
$w^2=x^2-y^2+2xyi$, поэтому равенство $w^2=z$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}x^2-y^2=a,\\ 2xy=b.\end{cases}$$

Решая эту систему, при любых a и b получим два противоположных решения.

Пример 8.1.1 Вычислить $\sqrt{3-4i}$.
Пусть $w=x+yi$, $w^2=3-4i$, тогда

$$\begin{cases}x^2-y^2=3,\\ 2xy=-4.\end{cases}$$

Из второго уравнения находим $y=-\dfrac{2}{x}$ и, подставляя в первое уравнение, получаем

$$x^2-\frac{4}{x^2}=3,\quad\text{т. е.}\quad x^4-3x^2-4=0.$$

Решая последнее биквадратное уравнение, находим $x^2=4$, т. е. $x=\pm2$. Следовательно, $y=\mp1$. Поэтому $\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$.

Т. к. из комплексного числа можно всегда извлечь квадратный корень, то любое квадратное уравнение (в том числе и с комплексными коэффициентами) имеет два комплексных корня (возможно, совпадающих). Легко проверить, что в случае, когда коэффициенты квадратного уравнения являются действительными числами, его корни сопряжены друг с другом.

8.2 Тригонометрическая форма комплексных чисел

Из определения комплексных чисел следует, что они могут изображаться точками на плоскости в декартовой системе координат. При этом числу $z = x + yi$ будет соответствовать точка с координатами (x, y) или вектор, проведенный из начала координат в эту точку.

Рис. 8.1:

Если обозначить через r расстояние точки $M(x, y)$ от начала координат, а φ – угол, образуемый вектором $\overline{OM}$ с осью Ox, то $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Подставляя выражения для x и y в алгебраическую форму комплексного числа z, получим $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись называется *тригонометрической формой комплексного числа*. При этом r называется *модулем комплексного числа* z, а φ – аргументом и обозначается $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Модуль комплексного числа есть неотрицательное действительное число, равное нулю лишь при $z = 0$. Аргумент числа z имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на слагаемые, кратные 2π.

Пример 8.2.1 Найти тригонометрическую форму комплексных чисел:
а)$\sqrt{3} - i$, б)-6, в) $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Решение.
а) $r = \sqrt{3+1} = 2$; $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{6}$. Значит,

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

б) $r = 6$, $\varphi = \pi$. Поэтому $-6 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$.
в) Запись $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой, т. к. множитель

$-2 < 0$ и перед i стоит знак минус. Если изобразить это число на плоскости, то очевидно, что $r = 2$, $\varphi = \dfrac{4\pi}{5}$, поэтому

$$-2\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right).$$

Это равенство следует и из формул приведения.

Если интерпретировать комплексное число $z = x+yi$ как вектор с координатами (x, y), то сумме (разности) комплексных чисел будет соответствовать сумма (разность) векторов. Поэтому (см. рис. 8.2) модуль разности комплексных чисел есть расстояние между точками на плоскости, изображающими эти числа.

Рис. 8.2:

Пример 8.2.2 Найти множество точек z, для которых
а) $|z - 4 + i| = 5$; б) $|z - 4 + i| \leq 5$.
Решение.
а) Данное множество является окружностью радиуса 5 с центром в точке $A(4; -1)$.
б) Это множество является кругом радиуса 5 с центром в точке $A(4; -1)$.

В то время как сложение и вычитание комплексных чисел удобнее выполнять в алгебраической форме, умножение и деление их удобнее выполнять в тригонометрической форме. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

Используя формулы косинуса и синуса суммы двух аргументов, получаем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{8.4}$$

т. е. при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2.$$

Поскольку деление – действие, обратное умножению, то при $z_2 \neq 0$ имеем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \tag{8.5}$$

т. е. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.
Из формулы (8.4) следует *формула Муавра*[1]:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \tag{8.6}$$

т. е. $|z^n| = |z|^n$, $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$.

Пример 8.2.3 Вычислить значение выражения

$$A = \frac{(1+i)^5(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1-i)^4(1-i\sqrt{3})^{11}}.$$

Представим сначала числа, входящие в это выражение, в тригонометрической форме.

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \quad 1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Следовательно,

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^5\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{10}}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^4\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{11}} =$$
$$= 2^{\frac{5}{2}+10-2-11}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{10\pi}{6} - 4\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 11\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + \right.$$
$$\left. +i\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{10\pi}{6} - 4\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 11\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) =$$
$$= 2^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(7\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(7\frac{7}{12}\pi\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Рассмотрим операцию извлечения корня n-й степени из комплексного числа. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, будем искать $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ такое, что $w^n = z$.
Тогда $w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$, т. е. должны выполняться равенства:
$\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т. к. $\rho \geq 0$, то $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Выясним, при каких значениях k_1 и k_2 получаются значения ψ, отличающиеся друг от друга на кратное 2π (т. е. дающие одинаковые значения w). Для этого разность

$$\frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} = \frac{2\pi(k_1 - k_2)}{n}$$

должна быть кратна 2π, т. е. $k_1 - k_2$ кратно n. Следовательно, различные значения w получаются при n последовательных значениях k (например, $k = 0, 1, ..., n-1$), а затем начинается их повторение. Итак, имеет место

Теорема 8.2.1 *Для любого натурального числа n и любого отличного от нуля комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ существуют n различных значений корня n-й степени из этого числа. Они вычисляются по формуле*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

[1]А. Муавр (1667–1754) – английский математик.

Заметим, что все точки w_k лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат, а аргументы соседних точек отличаются на $\dfrac{2\pi}{n}$. В частности, при $n = 2$ аргументы отличаются на π, т. е. мы получаем два противоположных комплексных числа. При $n > 2$ эти точки являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в указанную окружность.

8.3 Показательная форма комплексного числа

Понятие числового ряда легко обобщается на случай комплексных чисел. Используя известное разложение функции e^x в степенной ряд, можно определить функцию e^z при комплексных z как сумму степенного ряда:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Можно доказать, что этот степенной ряд сходится при всех комплексных значениях z, и для функции e^z при таком определении выполняется основное свойство экспоненты: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
Рассмотрим значение этой функции при $z = i\varphi$, где $\varphi \in \mathbf{R}$.

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + ... = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + ...\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - ...\right) = \\ = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

т. к. в скобках мы получили разложение в степенной ряд соответственно функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Итак имеет место знаменитая *формула Эйлера*[2]:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{8.7}$$

Следовательно, любое комплексное число, не равное нулю, может быть представлено в виде $z = re^{i\varphi}$, где $r > 0$, который называется *показательной формой комплексного числа.* Как следует из формул (8.4-8.6), имеют место равенства:

$$r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \qquad (re^{i\varphi})^n = r^ne^{in\varphi},$$

которые соответствуют известным свойством показательной функции.

Основные термины

Мнимая единица. Комплексное число.
Действительная и мнимая части числа. Действительные и чисто мнимые числа.
Алгебраическая форма комплексного числа. Сопряженное число.
Модуль комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.
Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера.

[2]Л. Эйлер (1707–1783) – выдающийся математик, механик, физик и астроном, швейцарец, большую часть жизни проживший в России.

Контрольные вопросы

1. Чем вызвана необходимость введения комплексных чисел?

2. Какова геометрическая интерпретация комплексного числа?

3. Какова геометрическая интерпретация суммы (разности) комплексных чисел?

4. Какова геометрическая интерпретация модуля комплексного числа, модуля разности комплексных чисел, сопряженного комплексного числа?

5. Из любого ли комплексного числа можно извлечь квадратный корень? Сколько таких корней существует? Как их найти?

6. Любое ли комплексное число можно представить в тригонометрической форме? Однозначно ли такое представление?

7. Что происходит с модулями и аргументами комплексных чисел при их умножении (делении)?

8. Что происходит с модулем и аргументом комплексного числа при его возведении в натуральную степень?

9. Сколько различных значений имеет корень n-й степени из комплексного числа? Существуют ли исключения из этого правила?

10. Какова геометрическая интерпретация корней n-й степени из комплексного числа, равного по модулю единице?

Тест

1. Два комплексных числа равны, если:
а) равны их модули; б) равны их модули и аргументы;
в) равны их действительные и мнимые части;
г) равны их модули и действительные части.

2. Из следующих чисел выберите те, которые представлены в тригонометрической форме:
а) $\sqrt{3}+i$; б) $-3\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$; в) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{12}$;
д) $2\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right)$; е) $2\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$.

3. Выберите из предыдущих чисел равные.

4. Множество точек, для которых $|z-4|\le|z+2i|$ есть:
а) прямая; б) окружность; в) круг; г) полуплоскость;
д) внешность круга; е) пустое множество.

5. Равенство $|z-1+i|=|iz-1-i|$ верно:
а) для всех z; б) только для $z=0$; в) только для $z=1-i$; г) ни для каких z.

Упражнения

1. Выполните действия над комплексными числами:

$$1)\ (\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i);\qquad 2)\ (2+5i)^2(3-i);\qquad 3)\ \frac{3+2i}{7-2i};\qquad 4)\ i^{127}.$$

2. Вычислите квадратные корни:

$$1)\ \sqrt{-9};\qquad 2)\ \sqrt{-5};\qquad 3)\ \sqrt{7+24i};\qquad 4)\ \sqrt{24-70i}.$$

3. Решите квадратные уравнения:

1) $z^2+3=0$; 2) $z^2-2z+2=0$; 3) $z^2-(2+i)z+2i=0$; 4) $z^2-(5+2i)z+5+5i=0$.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

$$1)\ 2-2i; \qquad 2)\ 1-i\sqrt{3}; \qquad 3)\ 3+4i; \qquad 4)\ 3\cos\frac{\pi}{6}-3i\sin\frac{\pi}{6}.$$

5. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

1) $\operatorname{Re} z < 2$; 2) $\operatorname{Im} z < -1$; 3) $|z-1+2i| = 3$; 4) $|z+3-4i| \geq 5$;
5) $|z-2| = |z-4i|$; 6) $|z+2i-1| > |z+1-2i|$.

6. Вычислите значения выражений:

$$1)\ \frac{(1+i)^7(-\sqrt{3}-i)^{12}}{(1+i)^{15}}; \qquad 2)\ \frac{(1+i)^{124}}{(1-i)^{98}-i(1+i)^{98}}.$$

7. Вычислите значения: $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[3]{2-2i}$, $\sqrt[4]{-1}$.

Глава 9

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение – это уравнение, содержащее искомые функции, их производные (или дифференциалы) различных порядков и независимые переменные.

Этот термин был предложен Г.Лейбницем. Первые исследования дифференциальных уравнений были проведены в конце 17в. в связи с изучением проблем механики и некоторых геометрических задач. Дифференциальные уравнения имеют большое прикладное значение, являясь мощным орудием исследования многих задач естествознания, техники и экономики.

Если в дифференциальном уравнении неизвестные функции являются функциями одной переменной, то уравнение называется *обыкновенным*. В противном случае оно называется *уравнением в частных производных*. Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения, причем содержащие производные только одной искомой функции.

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется семейство функций, зависящее от n произвольных постоянных, которое при произвольном наборе значений этих постоянных дает решение данного уравнения. Каждое из таких решений называется *частным решением*.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

9.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

9.1.1 Геометрическая интерпретация

Произвольное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \tag{9.1}$$

Если это уравнение может быть разрешено относительно y', то получается одно или несколько уравнений вида

$$y' = f(x, y). \tag{9.2}$$

Простейший пример такого уравнения $y' = f(x)$ рассматривается в интегральном исчислении. В этом случае искомая функция y есть произвольная первообразная от функции $f(x)$, а общее решение есть неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Произвольная постоянная может быть определена, если известно значение $y(x_0) = y_0$, тогда

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Можно доказать, что при некоторых ограничениях на функцию $f(x, y)$ уравнение (9.2) также имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение уравнения (9.2) или (9.1) в неявном виде, называется *общим интегралом* уравнения.

Дифференциальное уравнение (9.2) устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной y' к графику решения в этой же точке. Зная x и y, можно вычислить y'. Таким образом, дифференциальное уравнение вида (9.2) определяет *поле направлений*, и задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, называемые *интегральными кривыми*, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Рис. 9.1:

На рис. 9.1 представлены интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Легко проверить, что общее решение данного уравнения есть семейство кубических парабол $y = (x - C)^3$.

Таким образом, из геометрической интерпретации дифференциального уравнения понятно, что через каждую внутреннюю точку области определения непрерывной функции $f(x, y)$, задающей непрерывное поле направлений, можно провести одну вполне определенную интегральную кривую.

Задача отыскания для уравнения (9.2) решения, удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0,$$

называется *задачей Коши* (x_0 и y_0 – заданные числа).

Пример 9.1.1 Найти решение уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 8$.

Общее решение данного уравнения – семейство кубических парабол $y = (x - C)^3$. В силу начального условия имеем: $8 = (1-C)^3$, $C = 1$. Следовательно, $y = (x-1)^3$ – решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения.

9.1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y)y' = 0$$

или, что то же самое, вида

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0, \tag{9.3}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными.*
Уравнение вида (9.3) всегда может быть приведено к уравнению вида

$$f(y)dy = g(x)dx, \tag{9.4}$$

которое называется *уравнением с разделенными переменными.*
Чтобы решить уравнение (9.4), достаточно его почленно проинтегрировать, что дает

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C. \tag{9.5}$$

Это уравнение является общим интегралом уравнения (9.4). Заметим, что даже если интегралы $\int f(y)dy$ и $\int g(x)dx$ нельзя выразить в элементарных функциях, исходное уравнение считается проинтегрированным.

Пример 9.1.2 $xdx + ydy = 0$.
Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим $\int xdx + \int ydy = C$ или $x^2 + y^2 = C_1^2$ – семейство окружностей с центром в начале координат.

Пример 9.1.3 $y' = \dfrac{y}{x}$.
Записывая y' как $\dfrac{dy}{dx}$, видим, что это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

Потенцируя, получим: $|y| = e^{C_1}|x| = C_2|x|$, где $C_2 > 0$. Следовательно, $y = \pm C_2 x$. Добавляя решение $y \equiv 0$, потерянное в результате деления на y (при разделении переменных), получим общее решение в виде $y = Cx$, где C – любое действительное число.

Пример 9.1.4 Найти решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = kx \tag{9.6}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$.
Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dx}{x} = kdt, \quad \ln|x| = kt + C_1, \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

Потенцируя, аналогично предыдущему примеру, найдем общее решение:

$$x = Ce^{kt}$$

Это решение удовлетворяет начальному условию, если $x_0 = Ce^{kt_0}$, т.е. $C = x_0 e^{-kt_0}$. Подставляя найденное значение C в общее решение, получим

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Заметим, что уравнение (9.6) описывает модели многих естественных процессов: рост народонаселения, радиоактивный распад, рост производства, рост цен при постоянной инфляции и т.д.

Пример 9.1.5 Решить задачу Коши:

$$\frac{dy}{dt} = ky(b-y), \qquad y(0) = a. \tag{9.7}$$

(a, b, k – константы).

После разделения переменных имеем:

$$\frac{dy}{y(b-y)} = kdt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right) dy = kb \int dt \Rightarrow \ln|y| - \ln|b-y| = kbt + C_1.$$

Пусть $kb = \beta$. Тогда $\ln\left|\dfrac{y}{b-y}\right| = \beta t + C_1$, откуда находим
$\left|\dfrac{y}{b-y}\right| = e^{\beta t + C_1} = e^{C_1} e^{\beta t} = C_2 e^{\beta t}, \quad C_2 > 0$, т. е. $\dfrac{y}{b-y} = \pm C_2 e^{\beta t}$. Добавляя решение $y \equiv 0$, которое мы потеряли при делении на y, получаем общий интеграл уравнения (9.7) в виде $\dfrac{y}{b-y} = Ce^{\beta t}$, где C – произвольная константа. При $t = 0$ получаем $C = \dfrac{a}{b-a}$. Отсюда $\dfrac{(b-a)y}{a(b-y)} = e^{\beta t}$.
Решая последнее уравнение относительно y, получаем:

$$y = \frac{ab}{a + (b-a)e^{-\beta t}}. \tag{9.8}$$

Уравнение (9.7) также часто встречается в приложениях и называется *логистическим уравнением*, а его решение (9.8) – *логистической функцией*. Примерный график этой функции (при $k > 0$, $0 < a < b$) представлен на рис. 9.2. Логистическое уравнение описывает процессы стабилизации (производства, народонаселения, насыщения товарами и т.д.).

Рис. 9.2:

9.1.3 Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{9.9}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (9.9) называется *линейным однородным.* В линейном однородном уравнении переменные разделяются:

$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

и, интегрируя, получаем

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{9.10}$$

где $C \neq 0$. При делении на y мы потеряли решение $y \equiv 0$, однако оно может быть включено в найденное семейство решений (9.10), если считать, что C может принимать и значение 0.

Для решения неоднородного линейного уравнения (9.9) может быть применен так называемый *метод вариации постоянной.* При его применении сначала интегрируем соответствующее однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$, общее решение которого имеет вид (9.10). Заменяя теперь в (9.10) C функцией $C(x)$, ищем такую функцию $C(x)$, при которой это выражение даст решение уравнения (9.9). Для этого вычисляем производную

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

и, подставляя значения y и y' в исходное неоднородное уравнение (9.9), получаем:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

или

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx},$$

откуда, интегрируя, находим

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$

а следовательно,

$$y = C_1e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx. \tag{9.11}$$

Итак, общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $C_1e^{-\int p(x)dx}$ и частного решения неоднородного уравнения $e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$, получающегося из (9.11) при $C_1 = 0$.

Заметим, что в конкретных примерах нецелесообразно пользоваться громоздкой и трудно запоминающейся формулой (9.11), значительно легче каждый раз повторять все приведенные выше вычисления.

Пример 9.1.6 Решить дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = x^2.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad y = Cx.$$

Считаем C функцией от x, тогда $y = C(x)\cdot x$, $y' = C'(x)\cdot x + C(x)$, и, подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$C'(x)x = x^2, \quad C'(x) = x, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = c_1x + \frac{x^3}{2}.$$

Основные термины

Обыкновенное дифференциальное уравнение. Уравнение в частных производных.
Порядок дифференциального уравнения.
Решение дифференциального уравнения. Общее решение, общий интеграл.
Частное решение. Задача Коши.
Интегрирование дифференциального уравнения.
Поле направлений. Интегральные кривые.
Уравнение с разделенными (разделяющимися) переменными.
Линейное дифференциальное уравнение. Линейное однородное уравнение.
Метод вариации постоянной.

Контрольные вопросы

1. Сколько решений, как правило, имеет дифференциальное уравнение?
2. Сколько решений, как правило, имеет задача Коши?
3. Как найти решение задачи Коши, зная общее решение дифференциального уравнения?
4. Можно ли сказать, что неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ есть общее решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$? Чем является первообразная функции $f(x)$ для этого уравнения?
5. Является ли линейное уравнение первого порядка уравнением с разделяющимися переменными? Тот же вопрос для однородного уравнения.

9.2 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

9.2.1 Структура общего решения

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных и, следовательно, имеющее вид

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{9.12}$$

Если $a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$, то, разделив на $a_n(x)$ обе части уравнения (9.12), приведем его на этом интервале к виду

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x). \tag{9.13}$$

Функции $p_i(x)$ при $i = 0, 1, ..., n-1$ будем в дальнейшем предполагать непрерывными в интервале (a,b).

Задача Коши для уравнения (9.13) формулируется следующим образом: требуется найти решение уравнения (9.13), удовлетворяющее начальным условиям в точке $x_0 \in (a,b)$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Можно доказать, что при условии непрерывности функций $p_i(x)$ задача Коши всегда имеет единственное решение.

Запишем уравнение (9.13) кратко в виде $L(y) = f$, где

$$L(y) = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + ... + p_1y' + p_0y.$$

L есть линейный оператор (см.п.3.7.1), определенный на векторном пространстве n-кратно дифференцируемых функций. Свойства линейности

$$L(\lambda y) = \lambda L(y), \qquad L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

здесь легко проверяются непосредственной подстановкой. Оператор L называется *линейным дифференциальным оператором.*

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (9.13) называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным.* Для однородных уравнений имеет место следующая

Теорема 9.2.1 *Если y_1, y_2 – решения однородного уравнения*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \tag{9.14}$$

то для любых $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ функция $y = C_1y_1 + C_2y_2$ также является решением этого уравнения.

Доказательство. Запишем уравнение (9.14) в виде $L(y) = 0$. Тогда по условию $L(y_1) = 0$, $L(y_2) = 0$. Используя линейность оператора L, имеем:

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

т. е. $C_1y_1 + C_2y_2$ также является решением уравнения (9.14).

Эта теорема означает, что множество решений уравнения (9.14) образует векторное пространство (подпространство векторного пространства, на котором определен оператор L). Можно доказать, что размерность пространства решений равна n, т. е. порядку уравнения. Следовательно, если известны n линейно независимых решений $y_1, y_2, ..., y_n$ уравнения (9.14), то общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные. Множество из n линейно независимых решений уравнения (9.14) называется его *фундаментальной системой решений.*

Таким образом, решение уравнения (9.14) сводится к нахождению его фундаментальной системы решений. Однако даже для уравнений второго порядка ($n = 2$) не существует общего метода нахождения таких решений в аналитическом виде. Ниже мы рассмотрим нахождение фундаментальной системы решений в простейшем случае, когда коэффициенты уравнения (9.14) постоянны.

Для неоднородного уравнения имеет место следующая теорема о структуре множества его решений.

Теорема 9.2.2 *Общее решение линейного неоднородного уравнения (9.13) представимо в виде суммы некоторого его частного решения y_0 и общего решения соответствующего однородного уравнения (9.14), т. е. имеет вид*

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i + y_0, \tag{9.15}$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство. Легко проверить, что функция вида (9.15) является решением уравнения (9.13). Действительно,

$$L(y) = L(\sum_{i=1}^{n} C_iy_i + y_0) = L(\sum_{i=1}^{n} C_iy_i) + L(y_0) = 0 + f = f.$$

Наоборот, если y – произвольное решение уравнения (9.13), то $L(y) = f$. Следовательно, $L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = f - f = 0$, т. е. $y - y_0$ является решением однородного уравнения (9.14), поэтому $y - y_0 = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i$, откуда и следует (9.15).

Эта теорема сводит задачу нахождения общего решения уравнения (9.13) к двум более простым задачам: нахождению общего решения соответствующего однородного уравнения (9.14) и нахождению частного решения неоднородного уравнения (9.13).

Если известно общее решение соответствующего однородного уравнения, то частное (и общее) решение уравнения (9.13) может быть найдено методом вариации постоянных, рассмотренным нами для уравнения первого порядка и допускающим обобщение на уравнения n-го порядка.

9.2.2 Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + ... + p_1y' + p_0y = 0. \tag{9.16}$$

Будем искать решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$. Подставим это выражение в уравнение (9.16). Учитывая, что $(e^{kx})^{(m)} = k^m e^{kx}$, получим

$$(k^n + p_{n-1}k^{n-1} + ... + p_1k + p_0)e^{kx} = 0,$$

откуда следует, что e^{k_0x} будет решением уравнения (9.16) при условии, что k_0 будет корнем уравнения

$$k^n + p_{n-1}k^{n-1} + ... + p_1k + p_0 = 0. \tag{9.17}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (9.17).

Уравнение (9.17) имеет n корней (вещественных или комплексных, среди которых могут быть и равные). Рассмотрим различные возможные случаи.

1) Если все корни $k_1, k_2, ..., k_n$ действительны и различны, то решения $e^{k_1x}, e^{k_2x}, ..., e^{k_nx}$ являются линейно независимыми и, следовательно, общее решение уравнения (9.16) имеет вид

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + ... + C_ne^{k_nx}.$$

2) Если k – действительный корень характеристического уравнения кратности m, то этому корню соответствуют m частных решений

$$e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{m-1}e^{kx}.$$

3) Если среди корней характеристического уравнения есть комплексные сопряженные $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то им соответствуют два линейно независимых решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ (действительная и мнимая части решения $e^{(\alpha+\beta i)x}$, см. формулу Эйлера (8.7)). Если же эти корни имеют кратность m, то им соответствуют $2m$ линейно независимых решений:

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & ..., & x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & ..., & x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{array}$$

Пример 9.2.1 Найти общее решение уравнения $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$.
Характеристическое уравнение имеет вид $k^4 - 13k^2 + 36 = 0$, его корни $k_{1,2} = \pm 3$, $k_{3,4} = \pm 2$, им соответствуют линейно независимые решения e^{3x}, e^{-3x}, e^{2x} и e^{-2x}. Следовательно, общее решение $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$.

Пример 9.2.2 Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + y' = 0$.
Характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 + k = 0$, его корни $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 1$. Здесь мы имеем двукратный корень 1, поэтому линейно независимыми решениями будут 1, e^x, xe^x. Общее решение $y = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x$.

Пример 9.2.3 Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.
Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$, его корни $k = 2 \pm 3i$. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, поэтому им соответствуют линейно независимые решения $e^{2x}\cos 3x$ и $e^{2x}\sin 3x$. Следовательно, общее решение $y = e^{2x}(\cos 3x + i\sin 3x)$.

9.2.3 Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + ... + p_1y' + p_0y = f(x). \tag{9.18}$$

Если функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $P_l(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены от x соответственно l-й и m-й степени, то для нахождения частного решения уравнения (9.18) применим метод подбора (*метод неопределенных коэффициентов*). Частное решение уравнения (9.18) ищется в виде

$$y = x^r e^{\alpha x}(R_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x),$$

где r – кратность корня $\alpha + \beta i$ в характеристическом уравнении (9.17) (если характеристическое уравнение такого корня не имеет, то $r = 0$), $R_p(x)$ и $S_p(x)$ – многочлены от x степени p с неопределенными коэффициентами, причем $p = \max(l, m)$:

$$R_p(x) = A_px^p + A_{p-1}x^{p-1} + ... + A_0, \quad S_p(x) = B_px^p + B_{p-1}x^{p-1} + ... + B_0.$$

Пример 9.2.4 Найти решение уравнения $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
Характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$. Поэтому общее решение однородного уравнения $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = A\cos x + B\sin x$$

(в данном случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta i = i$; поскольку i не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$; $m = n = 0$, следовательно, $l = 0$).
Вычисляем производные

$$y' = -A\sin x + B\cos x, \quad y'' = -A\cos x - B\sin x$$

и подставляем в исходное уравнение

$$y'' + y' - 2y = (B - 3A)\cos x + (-3B - A)\sin x = \cos x - 3\sin x.$$

Получаем систему
$$\begin{cases} B - 3A = 1, \\ 3B + A = 3, \end{cases}$$
решая которую, находим $A = 0$, $B = 1$. Следовательно, общее решение данного уравнения $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x$. Найдем C_1 и C_2, используя начальные условия:
$$\begin{cases} C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + \sin 0 = 1, \\ -2C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + \cos 0 = 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -2C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$
Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, т. е. $y = e^x + \sin x$.

Основные термины

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка (однородное и неоднородное).
Линейный дифференциальный оператор.
Фундаментальная система решений.
Характеристическое уравнение.
Метод неопределенных коэффициентов.

Контрольные вопросы

1. Будет ли сумма двух решений линейного однородного дифференциального уравнения являться его решением? Тот же вопрос для неоднородного уравнения.

2. Какова структура множества решений линейного однородного дифференциального уравнения? Тот же вопрос для неоднородного уравнения.

3. Сколько линейно независимых решений имеет линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка?

4. В зависимости от дискриминанта характеристического уравнения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка рассмотрите 3 возможных случая и запишите для каждого из них общее решение однородного уравнения.

Тест

1. Сумма любых двух решений дифференциального уравнения является его решением для:
а) любого дифференциального уравнения;
б) линейного дифференциального уравнения;
в) линейного однородного дифференциального уравнения;
г) линейного неоднородного дифференциального уравнения;
д) любого дифференциального уравнения первого порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ имеет вид:
а) $y = C_1 e^x + C_2 e^x$; б) $y = C_1 + C_2 e^x$; в) $y = C_1 x + C_2 e^x$;
г) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$; д) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

3. Метод вариации постоянной применяется для решения
См. варианты ответов п.1.

4. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = e^x$ имеет вид:
а) $y = C_1 e^x + C_2 e^x$; б) $y = e^x(1 + C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; в) $y = C_1 x + C_2 e^x$;

г) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$; д) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

5. Уравнение $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ является:

а) линейным; б) однородным; в) неоднородным;

г) уравнением первого порядка; д) уравнением второго порядка.

6. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет:

а) ровно n линейно независимых решений;

б) не более n линейно независимых решений;

в) не менее n линейно независимых решений;

г) n решений;

д) бесконечное множество решений.

7. Уравнение $y'' + xy' + x^2 y = e^x$:

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений;

г) имеет два линейно независимых решения;

д) имеет три линейно независимых решения.

8. Порядком дифференциального уравнения называется:

а) максимальный порядок входящих в него производных;

б) максимальная степень переменных, входящих в это уравнение;

в) максимальная степень производных, входящих в это уравнение;

г) степень многочлена в правой части этого уравнения.

9. Какие из следующих функций являются частными решениями линейного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2 = 0$?

а) $y = x$; б) $y = x + 5$; в) $y = x + e^{2x}$;

г) $y = 2 + x + 3e^{2x}$; д) $y = e^x(1 + 2\cos x + 3\sin x)$.

10. Восстановить линейное дифференциальное уравнение по его общему решению $e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

а) $y'' + y = 0$; б) $y'' - y' + y = 0$; в) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

г) $y'' - y = 0$; д) $y' + y = 0$.

Упражнения

1. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

1) $x^2 y' + y^2 = 0$; 2) $x(1+y) + y'(1+x) = 0$; 3) $xyy' + y = 1$; 4) $e^y(1+x^2)y' = 2x(1+e^y)$.

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$1)\ xy' + y = y^2,\quad y(0) = 1; \qquad 2)\ xydx + (x+1)dy = 0,\quad y(1) = 2.$$

3. Проинтегрировать линейные уравнения первого порядка методом вариации постоянной:

$$1)\ y' + xy = x^2; \qquad 2)\ y' - y\operatorname{tg} x = \sin x; \qquad 3)\ y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

4. Найти общие решения линейных однородных уравнений второго порядка

$$1)\ y'' - 3y' + 2y = 0; \qquad 2)\ y'' + 2y' + 2y = 0; \qquad 3)\ y'' - 4y' + 4y = 0.$$

5. Найти частные решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1) $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$

2) $y'' + y' = 1 + \cos x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1;$

3) $y'' + y = e^x + \sin x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1;$

4) $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$

9.3 Приложения дифференциальных уравнений в экономике

9.3.1 Модель естественного роста выпуска

Пусть производство характеризуется функцией выпуска $Q(t)$ – количеством продукции, произведенной к моменту времени t. Предположим, что продукция продается по фиксированной цене P и определенная доля α $(0 < \alpha < 1)$ полученного дохода инвестируется в производство:

$$I(t) = \alpha PQ(t). \tag{9.19}$$

Естественно предположить, что скорость выпуска продукции $Q'(t)$ пропорциональна инвестициям:

$$Q' = \beta I, \tag{9.20}$$

где $\beta > 0$ – коэффициент пропорциональности. Подставляя (9.19) в (9.20) и обозначая $\gamma = \beta\alpha P$, получим уравнение:

$$Q' = \gamma Q. \tag{9.21}$$

Решение этого уравнения с начальным условием $Q(0) = Q_0$, как уже известно (см. пример 9.1.4), имеет вид:

$$Q(t) = Q_0e^{\gamma t}.$$

9.3.2 Простейшая нелинейная модель выпуска

Уравнение (9.21) означает, что темп прироста продукции, который определяется логарифмической производной $\dfrac{Q'}{Q}$ (см. п. 5.1.3), является величиной постоянной. На самом деле это обычно не так – по мере роста производства дальнейшие возможности его наращивания снижаются.Данное утверждение следует из закона убывающей эффективности производства: предельный продукт капитала при фиксированных остальных факторах снижается (вторая производная производственной функции отрицательна, см. п.5.3.4), следовательно, должен сокращаться и темп роста выпуска при увеличении размеров производства.

Простейшим предположением о темпе роста выпуска является гипотеза о линейной зависимости его от объема производства, т.е. в уравнении (9.21)

$$\gamma = \gamma(t) = \lambda\left(1 - \frac{Q(t)}{Q^*}\right), \tag{9.22}$$

где $\lambda > 0$, Q^* – предельный выпуск. При достижении предельного выпуска темп прироста становится равным нулю, а при попытке его превышения – отрицательным, т.е. производство снижается. Подставляя (9.23) в (9.21), получаем следующую модель динамики производства:

$$Q' = \lambda Q \left(1 - \frac{Q}{Q^*}\right). \tag{9.23}$$

Это уже известное нам логистическое уравнение (пример 9.1.5). Решение этого уравнения с начальным условием $Q(0) = Q_0$ имеет вид:

$$Q(t) = \frac{Q^*}{1 + \left(\frac{Q^*}{Q_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}.$$

9.3.3 Модель макроэкономической динамики

Рассмотрим модель закрытой экономики, в которой отсутствуют экспорт и импорт, а государственные расходы не выделяются. Тогда доход $Y(t)$ представляется в виде суммы потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{9.24}$$

Будем предполагать, что скорость роста дохода пропорциональна инвестициям:

$$Y'(t) = \alpha I(t), \tag{9.25}$$

где $\alpha > 0$ называется коэффициентом капиталоотдачи.
Выражая $I(t)$ из уравнения (9.24) и подставляя в (9.25), получим уравнение динамики дохода:

$$Y'(t) - \alpha Y(t) = -\alpha C(t). \tag{9.26}$$

Это линейное уравнение первого порядка. Рассмотрим его решения при разных функциях $C(t)$.

1) Потребление отсутствует (нереалистичный случай): $C(t) = 0$.
В этом случае уравнение однородное и его решение имеет вид $Y(t) = Y_0 e^{\alpha t}$, где $Y_0 = Y(0)$, т.е. доход растет экспоненциально.

2) Постоянное потребление: $C(t) = C$.
В этом случае $Y(t) = C$ является частным решением уравнения (9.26) и, складывая его с общим решением однородного уравнения $Ae^{\alpha t}$, получаем общее решение уравнения (9.26) $Y(t) = Ae^{\alpha t} + C$. Подставив $t = 0$, получим $A = Y_0 - C$, т.е. $Y(t) = (Y_0 - C)e^{\alpha t} + C$.

3) Потребление растет с постоянным темпом β: $C(t) = C_0 e^{\beta t}$.
При $\beta \neq \alpha$ общее решение имеет вид:

$$Y(t) = Ce^{\alpha t} - \frac{\alpha}{\beta - \alpha} C_0 e^{\beta t}.$$

Учитывая начальное условие, находим $C = \dfrac{\alpha C_0}{\beta - \alpha} + Y_0$, т.е.

$$Y(t) = \left(\frac{\alpha C_0}{\beta - \alpha} + Y_0\right) e^{\alpha t} - \frac{\alpha C_0}{\beta - \alpha} e^{\beta t}. \tag{9.27}$$

Из формулы (9.27) видно, что при $\beta > \alpha \quad Y(t)$ становится отрицательным при больших t. Это ясно и из экономических соображений: если темп роста потребления больше максимально возможного темпа роста дохода, то потребление будет занимать все большую долю дохода, и в итоге сведет к нулю инвестиции, а затем и доход. При $\beta = \alpha$ решение уравнения (9.26) с начальным условием $Y(0) = Y_0$ имеет вид $Y(t) = (Y_0 - \alpha C_0 t)e^{\alpha t}$ и также становится отрицательным при $t > \dfrac{Y_0}{\alpha C_0}$. Поэтому должно быть $\beta < \alpha$.

Если $\dfrac{\alpha C_0}{\beta - \alpha} + Y_0 < 0$, т.е. $\alpha\left(1 - \dfrac{C_0}{Y_0}\right) < \beta < \alpha$, то $Y(t)$ также становится отрицательным при достаточно больших t. Это означает, что такой темп роста потребления слишком высок для экономики.

Если $\beta < \alpha\left(1 - \dfrac{C_0}{Y_0}\right)$, то оба слагаемых в формуле (9.27) положительны и доход экспоненциально растет.

Если же $\beta = \alpha\left(1 - \dfrac{C_0}{Y_0}\right)$, то решение (9.27) приобретает вид $Y(t) = Y_0 e^{\beta t}$, т.е. темп роста дохода равен темпу роста потребления.

Библиографический список

Основная литература

1. Красс М. С. Математика для экономических специальностей / М. С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1998.

2. Красс М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании/ М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М.: Дело, 2000.

3. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.

4. Кузнецов Б. Т. Математика/ Б. Т. Кузнецов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

Дополнительная литература

1. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1988.

2. Бугров Я. С. Высшая математика. Задачник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1982.

3. Замков О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков, Ю. А. Черемных, А. В. Толстопятенко. – М.: Дело и сервис, 1999.

4. Карасев А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. 1,2 части / А. И. Карасев, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – М.,: Высшая школа, 1982.

5. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1991.

6. Маркович Э. С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики / Э. С. Маркович. – М.: Высшая школа, 1972.

7. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М.: Наука, 1980.

8. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

Интернет-ресурсы

1. http://www.exponenta.ru/educat/class/class.asp – Internet-класс по высшей математике: Вся математика, от пределов и производных до методов оптимизации, уравнений математической физики и проверки статистических гипотез в среде самых популярных математических пакетов.

2. http://kvant.mccme.ru/ – архив журнала "Квант"

3. http://www.mccme.ru/ – сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования.

4. http://madihighmath.narod.ru/index.htm – Высшая математика – курс лекций для экономического факультета МАДИ (ГТУ), собрание расчетных работ, примеры решений задач к расчетным работам, материалы к экзаменам.

5. http://mathem.h1.ru – Сайт "Математика on-line".

6. http://shpora-zon.narod.ru/shpora-matematikav.htm – дополнительные материалы по математике