Министерство образования и науки Российской Федерации
Ульяновский государственный университет

Белый Е.М., Романова И.Б.

МЕТОДЫ ФИНАНСОВЫХ И КОММЕРЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Учебное пособие

Ульяновск 2015

УДК 336.51 (075.8)

Белый Е.М., Романова И.Б. Методы финансовых и коммерческих расчетов. Учебное пособие. Ульяновск, УлГУ, 2015.- 91 с.

В учебном пособии изложены простейшие методы количественного анализа основных финансовых операций. Рассматриваются методы начисления процентов и дисконтирования разовых выплат и потоков платежей в различных условиях, которые могут предусматривать контракты.

Пособие снабжено большим количеством примеров решения задач, а также разделом типовых заданий для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для студентов экономических и управленческих направлений, изучающих дисциплины «Методы финансовых и коммерческих расчетов», «Финансовая математика». Оно может оказаться полезным при изучении дисциплин, связанных с финансовым анализом инвестиций и ценных бумаг.

Печатается по решению ученого совета Института экономики и бизнеса Ульяновского государственного университета.

Оглавление

Введение

Любая финансовая или коммерческая операция предполагает совокупность согласованных ее участниками условий. Большое количество таких условий, а также множественность влияющих в каждом случае факторов приводят к неочевидности конечного результата проводимой операции. В таких случаях необходим количественный анализ финансовых последствий операции, который обычно выходит за рамки обычных расчетов. Поэтому экономистам и менеджерам необходимы определенные знания в области финансовых и коммерческих расчетов.

Данное учебное пособие содержит чрезвычайно краткое изложение основных методов финансовых и коммерческих расчетов. В нем изложены методы наращения и дисконтирования платежей в случае простых и сложных процентов, принципы финансовой эквивалентности платежей.

Рассмотрены вопросы, относящиеся к количественному анализу потоков платежей, в частности – финансовых рент (аннуитетов). В учебном пособии изложены также достаточно конкретные практические вопросы, связанные с разработкой планов погашения кредитов и анализом доходности основных видов ценных бумаг (облигаций, акций, векселей, банковских сертификатов).

Теоретический материал в учебном пособии сочетается с разбором примеров решения задач. Заключительный раздел учебного пособия содержит задания на контрольную работу для студентов заочного факультета. Эти же задания можно использовать для формирования фонда оценочных средств по дисциплинам «Методы финансовых и коммерческих расчетов», «Финансовая математика».

Отдельные главы данного учебного пособия студенты могут использовать при изучении дисциплин «Инвестиционный анализ», «Экономическая оценка инвестиций», «Рынок ценных бумаг».

Глава 1. Простые проценты

1.1. Сущность процентов

Фактор времени играет огромную роль в финансовых расчетах и выражается в виде принципа неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Даже если отвлечься от инфляции, то 1000 рублей сейчас и через 5 лет не равноценны, так как любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход.

Учет фактора времени в финансовой сфере осуществляется с помощью начисления процентов.

Под ***процентами*** в финансовой математике понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме (выдача денежной ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка облигаций и т.д.).

Процентная ставка - отношение суммы процентов, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды.

Интервал, к которому приурочена процентная ставка, называется ***периодом начисления.***

Ставка измеряется в процентах либо в виде десятичной или натуральной дроби. В последних случаях она фиксируется в контрактах с точностью до 1/16 или даже 1/32.

Начисление процентов, как правило, производится ***дискретно*** (***дискретные*** проценты), причем в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а при долгосрочных операциях удобно применять ***непрерывные*** проценты.

Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют ***наращением*** суммы долга.

В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется и в более широком смысле как измеритель степени доходности (эффективности) финансовой или коммерческой операции.

Применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов.

Если ставка применяется к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды, то она называется ***простой***.

Ставка, применяемая к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами, называется ***сложной.***

1.2. Наращение по простым процентам

Под ***наращенной суммой*** ссуды понимается первоначальная ее сумма плюс начисленные проценты к концу срока. Наращенная сумма определяется умножением первоначальной суммы на ***множитель наращения***. Формула множителя наращения зависит от вида процентной ставки и условий наращения.

Обозначим:

I - проценты за весь срок;

P - первоначальная сумма;

S - наращенная сумма;

i - ставка процентов (десятичная дробь).

Начисленные проценты за один период равны Pi, а за n периодов Pni. Процесс изменения суммы долга по периодам определяется членами арифметической прогрессия, первый член которой P, разность Pi.

Последний член этой прогрессии есть наращенная сумма, т.е.

$$S = P + I = P(1 + ni), \qquad (1.1)$$

где $I = Pni.$

Формула (1.1) называется формулой простых процентов; $(1+ni)$ - множитель наращения простых процентов. Рост суммы долга по простым процентам легко представить графически (рис. 1.1):

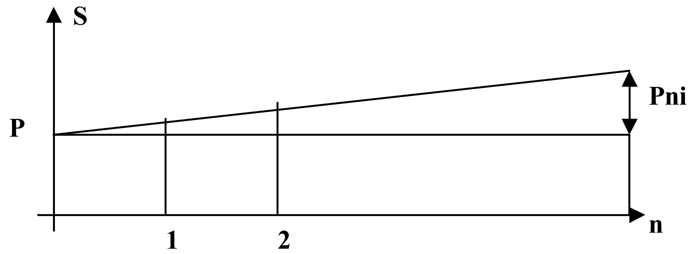


Рис. 1.1

Пример. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 70000 рублей, срок долга - 3 года при ставке простого процента 10% годовых.

Решение:

$I = 70000 \times 3 \times 0{,}1 = 21000\ p.$

$S = 70000 + 21000 = 91000\ p.$

За базу при начислении процентов по ставке i берется первоначальная сумма долга. Проценты по ставке i в банковской литературе называют ***антисипативными***. В практике распространен и другой подход, когда за базу (100%) принимается сумма погашения долга. В этом случае применяется ***учетная ставка d***, проценты по которой называют ***декурсивными***.

1.3. Практика расчета краткосрочных процентов

Ставка процента устанавливается обычно в расчете за год, поэтому необходимо выяснить какая часть процентов уплачивается кредитору при продолжительности ссуды менее года. Аналогичная проблема возникает и при любом другом периоде начисления, когда срок начисления процентов меньше этого периода.

Величину n выразим в виде дроби: $n = \frac{t}{k}$, где t - число дней займа; K – число дней в году (временная база). Здесь возможны несколько вариантов расчета. Если за базу берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней), то вычисляют ***обыкновенный*** или ***коммерческий*** процент.

Если за базу берут действительное число дней в году (365 или 366), то получают ***точный*** процент.

Определение числа дней пользования ссудой тоже может быть точным и приближенным. В первом случае подсчитывается точное число дней между датами; во втором - продолжительность ссуды определяется количеством месяцев и дней ссуды, месяц принимается за 30 дней. Для подсчета точного числа дней между датами используют специальные таблицы.

Таким образом, имеется 3 варианта расчета процентов:

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды - вариант дает самые точные результаты и используется, например, в Великобритании.
2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. Он дает несколько больший результат, чем применение точных процентов («французский вариант»).
3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней («германский вариант»). Величина t определяется количеством полных месяцев по 30 дней в каждом, начиная с момента выдачи ссуды и до момента ее погашения, и точным числом дней ссуды в неполном месяце; продолжительность года К=360 дней.

Пример. Банк выдал кредит 18 января в размере 500000 рублей. Срок возврата кредита 3 марта. Процентная ставка установлена 20% годовых. Год невисокосный.

Решение:

Наращенную сумму долга, подлежащую возврату, рассчитаем тремя методами.

Точное число дней ссуды определим по таблице 1 (Приложения):

$62 - 18 = 44$ *дня.*

Такой же результат мы получим, рассчитывая число дней по календарю:

С 18.01 - по 31.01 включительно - 14 дней

Февраль - 28 дней

Март - 3 дня

Итого - 45 дней

$t = 45 - 1 = 44$ *дня.*

Приближенное число дней ссуды (продолжительность каждого месяца принимается за 30 дней):

Январь - 13 дней

Февраль - 30 дней

Март - 3 дня

Всего - 46 дней

$t = 46 - 1 = 45$ *дней.*

Возможные варианты расчета наращенной суммы:

a) по точным процентам с точным числом дней ссуды:

$$S = 500\left(1 + \frac{44}{365}0{,}2\right) = 512{,}05 \text{ тыс.руб.};$$

b) по обыкновенным процентам с точным числом дней ссуды:

$$S = 500\left(1 + \frac{44}{360}0{,}2\right) = 512{,}22 \text{ тыс.руб.};$$

c) по обыкновенным процентам с приближенным числом дней ссуды:

$$S = 500\left(1 + \frac{45}{360}0{,}2\right) = 512{,}5 \text{ тыс.руб.}$$

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае наращенная сумма определяется по следующей формуле:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_k i_k), \qquad (1.2)$$

где n_t - продолжительность периода t;

i_t - ставка простых процентов в период t.

Пример. Депозит предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – 16%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Первоначальная сумма на депозите – 100000 рублей. Найти сумму на депозите через 2,5 года.

Решение:

$$S = 100000(1 + 1\times 0{,}16 + 0{,}5\times 0{,}17 + 0{,}5\times 0{,}18 + 0{,}5\times 0{,}19) = 100000\times 1{,}43 = 143000\ p.$$

1.4. Дисконтирование

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной нахождению наращенной суммы: по заданной сумме *S*, которую нужно заплатить через время *n*, определить размер полученной ссуды *P*. Эту операцию называют ***дисконтированием***.

В широком смысле дисконтирование - это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит величину *S*.

Величину *P*, найденную дисконтированием *S*, называют ***современной*** или ***приведенной*** величиной *S*.

Различают два вида дисконтирования - математическое дисконтирование и банковский учет.

Математическое дисконтирование. В этом случае задача формулируется так: какую первоначальную сумму нужно выдать в долг, чтобы при простой процентной ставке *i* к концу срока *n* получить наращенную сумму *S*.

Из уравнения (1.1):

$$P = S\times\frac{1}{1+ni}. \qquad (1.3)$$

Величина $\frac{1}{1+ni}$ называется дисконтирующим множителем.

Разность $S - P$ называют дисконтом и обозначают D_i.

Пример. Через 180 дней с момента выдачи кредита должник уплатит 1029,6 долл. Кредит представлен под 6% годовых. Определить размер кредита.

Решение:

При условии, что временная база 365 дней, находим:

$$P = \frac{1029{,}6}{1 + \frac{180}{365}0{,}06} = 1000 \text{ долл.}$$

Банковский учет (учет векселей). Суть операции заключается в том, что банк или какое-либо другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю либо другому платежному обязательству покупает его у владельца по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (или учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк таким образом реализует дисконт. При учете векселей проценты за пользование ссудой начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока ссуды. При этом применяется учетная ставка d.

По определению простая учетная ставка находится по формуле:

$$d = \frac{S - P}{Sn}, \qquad (1.4)$$

в то время как простая процентная ставка

$$i = \frac{S - P}{Pn}. \qquad (1.5)$$

Размер дисконта равен $D_d = Sdn$, отсюда

$$P = S - Sdn = S(1 - nd), \qquad (1.6)$$

где n - продолжительность срока в годах от момента учета до даты уплаты по векселю, $(1 - nd)$ - дисконтный множитель.

Дисконтирование по учетной ставке обычно производится при условии, что год равен 360 дням (К=360), а число дней в периоде обычно берется точным.

Пример. Переводной вексель выдан на 500000 рублей с уплатой 17.11. Владелец векселя учел его в банке 23.09. по учетной ставке 20%. Определим полученную владельцем сумму и дисконт.

Решение:

До погашения осталось $(321 - 266) = 55$ *дней.*

Поэтому $P = 500000\left(1 - \frac{55}{360}0{,}2\right) = 484722$ $р.$

$D_d = S - P = 500000 - 484722 = 15278$ $р.$

Использование учетной ставки d отражает фактор времени более жестко.

Из формулы (1.6) видно, что при $n \phi \frac{1}{d}$ величина P становится отрицательной. Иначе говоря, при относительном большом сроке уплаты по векселю и высокой учетной ставке дисконт может привести к отрицательной сумме P, что лишено смысла. Например, при $d = 0{,}2$ (20%) уже при пятилетнем сроке сторона, учитывающая вексель, ничего не получит по нему.

Простая учетная ставка может быть применена при расчете наращенной суммы. В этом возникает необходимость, в частности, при определении суммы, которую надо проставить в бланке векселя, если заданы текущая сумма долга, его срок и учетная ставка.

Наращенная сумма:

$$S = P\frac{1}{1 - nd}. \qquad (1.7)$$

При $n = \frac{1}{d}$ расчет по формуле (1.5) лишен смысла.

Ставка d дает более быстрый рост ссуды, чем аналогичная по величине ставка простых процентов.

Глава 2. Сложные проценты

2.1. Начисление сложных процентов

Если проценты не выплачиваются сразу после начисления, а присоединяются к сумме долга для наращения, то они называются сложными.

База для начисления сложных процентов в отличии от простых не остается постоянной - она увеличивается с каждым шагом во времени, и процесс роста первоначальной суммы происходит с ускорением.

Присоединение процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называют ***капитализацией процентов***.

В практических расчетах применяют дискретные проценты, т.е. начисляемые за фиксированные одинаковые интервалы времени (месяц, квартал, год).

Пусть проценты начисляются один раз в год.

Обозначения:

i - годовая процентная ставка;

P - первоначальный размер ссуды;

S - наращенная сумма;

n - число лет наращения.

К концу первого года проценты равны Pi, и наращенная сумма $S_1 = P + P_i = P(1+i)$.

К концу второго года:

$$S_2 = P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2 \text{ и т.д.}$$

В конце n года:

$$S = P(1+i)^n. \qquad (2.1)$$

Таким образом, рост по сложным процентам представляет собой процесс, развивающийся по геометрической профессии, первый член которой равен P, а знаменатель $(1+i)$.

Величину $(1+i)^n$ называют ***множителем наращения***. Значение множителя наращения для целых n можно найти в таблице сложных процентов (табл.2 Приложения).

Пример. В какую сумму обратится долг, равный 20 тыс. долл.; через 3 года при росте по сложной ставке 6% ?

Решение:

По таблице сложных процентов находим:

$$(1+0{,}06)^3 = 1{,}06^3 = 1{,}191016,$$

откуда $S = 20000 \times 1{,}191016 = 23820{,}3$ *долл.*

В ряде ситуаций при сложных процентах ставка фиксированно меняется в определенные моменты времени. В этом случае общий множитель наращения равен произведению частных множителей:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \times \ldots \times (1+i_k)^{n_k}, \qquad (2.2)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ - последовательные значения ставок процентов;

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ - периоды действия этих ставок.

Сравним скорость роста долга по простым и сложным процентам. Для этого следует сравнить множители наращения по простым и сложным годовым ставкам.

Это соотношение зависит от срока ссуды:

Для срока менее года $(n < 1)$:

$$(1+ni_n) > (1+i_c)^n.$$

Для срока более года $(n > 1)$:

$$(1+ni_n) < (1+i_c)^n,$$

где i_n - простая процентная ставка;

i_c - сложная процентная ставка.

Графически выглядит это так (рис. 2.1):

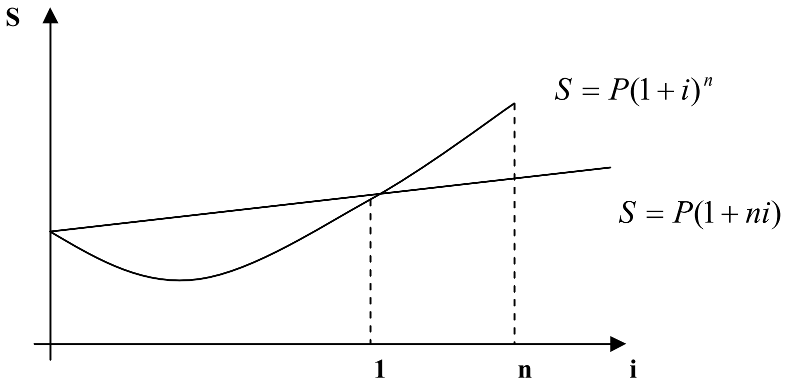


Рис. 2.1

Различия в последствиях применения простых и сложных процентов четко видны при определении времени для увеличения первоначальной суммы в N раз. Очевидно, что в этом случае множитель наращения равен N. Для простых процентов:

$$\left(1 + ni_n\right) = N,$$

откуда $$n = \frac{N-1}{i_n}.$$

Для сложных процентов:

$$\left(1 + i_c\right)^n = N,$$

откуда $$n \ln\left(1 + i_c\right) = \ln N,$$

$$n = \frac{\ln N}{\ln\left(1 + i_c\right)}.$$

Пример. Сколько лет необходимо для увеличения первоначального капитала в 5 раз, применяя сложные и простые проценты по ставке 5% ?

Решение:

Простые проценты $n = \dfrac{5-1}{0{,}05} = 80.$

Сложные проценты $n = \dfrac{\ln 5}{\ln 1{,}05} \approx 33.$

Наиболее популярны расчеты для $N=2$, в результате которых получаем ***формулы удвоения***:

Удвоение по простым процентам:

$$n = \frac{1}{i_n}; \qquad (2.3)$$

Удвоение по сложным процентам:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_c)}. \qquad (2.4)$$

В формуле (2.4): $\ln 2 \approx 0{,}7$ и $\ln(1+i) \approx i$, поэтому при прикидочных расчетах срока удвоения по сложным процентам можно использовать приближенную формулу:

$$n \approx \frac{0{,}7}{i_c}.$$

Когда n не является целым числом, т.е. состоит из целой и дробной части $n = a + b$ (a - целое число лет; b - дробная часть года), сложные проценты можно начислять двумя способами:

1. По формуле (2.1);
2. Смешанным способом, когда за целое число лет вычисляются сложные проценты, а за дробное - простые.

$$S = P(1+i)^a (1+bi). \qquad (2.5)$$

2.2. Номинальная и эффективная ставки процентов

В современных условиях проценты, как правило, капитализируются не один, а несколько раз в год: по полугодиям, кварталам и т.д.

В этом случае для наращения можно воспользоваться формулой (2.1), в которой n - число периодов роста, а i - процентная ставка за соответствующий период. На практике, однако, применяют другой метод расчета, так как обычно в контрактах фиксируется годовая ставка, а не ставка за период.

Если годовая ставка j, а число периодов начисления в году m, то каждый раз проценты начисляются но ставке $\frac{j}{m}$. Ставка j называется ***номинальной***.

Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}. \qquad (2.6)$$

Пример. Первоначальная сумма ссуды 10 тыс. долл., срок 2 года, проценты начисляются в конце каждого квартала, номинальная годовая ставка 20%. Определить наращенную сумму.

Решение:

$$S = 10000\left(1+\frac{0,20}{4}\right)^{4\times 2} = 10000(1,05)^{8} = 10000\times 1,477455 = 14774,55 \text{ } \textit{долл.}$$

Очевидно, что чем больше число периодов m, тем быстрее идет процесс наращения.

Эффективная ставка сложных процентов показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке $\frac{j}{m}$.

Обозначим эффективную ставку $i_{эф}$. Тогда по определению:

$$\left(1+i_{эф}\right)^{n} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn},$$

откуда

$$i_{эф} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1. \qquad (2.7)$$

Пример. Банк начисляет проценты на вклад исходя из номинальной ставки 60% годовых. Найти эффективные годовые ставки при ежемесячной и поквартальной капитализации процентов.

Решение:

При ежемесячной капитализации:

$$i_{эф} = \left(1+\frac{0,60}{12}\right)^{12} - 1 = 1,05^{12} - 1 \approx 0,79586, \textit{ т.е.} \approx 79,59\%.$$

При поквартальной капитализации:

$$i_{эф} = \left(1+\frac{0,60}{4}\right)^{4} - 1 = 0,74900, \textit{ т.е. } 74,9\%.$$

В финансовых договорах эквивалентны ставки: номинальная j при начислении процентов m раз в год и эффективная i , определяемая по формуле (2.7).

Например, ставка $j = 60\%$ при $m = 4$ эквивалентна ставке $i = 74{,}9\%$.

2.3. Дисконтирование по сложной процентной ставке

При изучении простых процентов рассмотрены два вида дисконтирования: математическое и банковский учет.

Математическое дисконтирование заключается в определении P по известному S при заданной процентной ставке.

В данном случае решим уравнение (2.1) относительно P:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n}$$

$$\text{или} \qquad P = Sv^n, \qquad (2.8)$$

где $v^n = (1+i)^{-n}$.

Величину v^n называют ***дисконтным множителем***. Значение этого множителя табулировано для целого числа лет (табл.3 Приложения).

Обобщим эту формулу для случая, когда проценты начисляются m раз в году (см. формулу (2.6)):

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = Sv^{mn}. \qquad (2.9)$$

Дисконтный множитель здесь равен

$$v^{mn} = \frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}.$$

Значение дисконтного множителя v^{mn}, если mn - целое число, можно найти в той же таблице, что и v^n, только в качестве i берется значение $\frac{j}{m}$, а вместо n общее количество периодов mn.

Напомним, что величину P, полученную дисконтированием S, называют

современной или ***приведенной*** величиной S.

Пример. Необходимо определить современную величину 100 тыс. долл., которые будут выплачены через 3 года при сложной ставке процентов 20% годовых. Начисление процентов производится поквартально.

Решение:

Используем формулу (2.9):

$$mn = 3 \times 4 = 12; \quad \frac{j}{m} = \frac{20\%}{4} = 5\%.$$

$$P = 100000 \times (1 + 0{,}05)^{-12} = 100000 \times 0{,}556837 = 55683{,}7 \text{ долл.}$$

Рассмотрим некоторые свойства современной величины платежа.

1. Чем выше ставка процента, тем сильнее дисконтирование, а следовательно, в большей степени уменьшается P при всех прочих равных условиях.
2. При увеличении срока платежа его современная величина P будет убывать; при $n \to \infty$:

$\lim\limits_{n\to\infty} P = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S}{(1+i)^n} = 0,$ таким образом, при очень больших сроках платежа его современная величина будет незначительна.

2.4. Операции со сложной учетной ставкой

Дисконтирование по простой учетной ставке происходит в соответствии с формулой (1.6).

При сложной учетной ставке процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как на каждом шаге во времени учетная ставка применяется не к первоначальной сумме, а к сумме, уменьшенной на дисконт, определенный на предыдущем шаге.

Дисконтирование по сложной учетной ставке определяется по формуле:

$$P = S(1 - d_c)^n, \qquad (2.10)$$

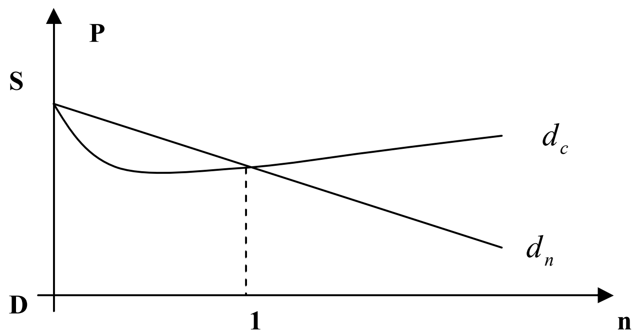
где d_c - сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D_i = S - S(1-d_c)^n = S\left(1-(1-d_c)^n\right). \qquad (2.11)$$

Дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем дисконтирование по простой учетной ставке, т.к. он получит при учете большую сумму.

Это легко показать графически (рис. 2.2):



При простой учетной ставке d_n - прямая.

При сложной учетной ставке d_c - экспонента.

Рис. 2.2

2.5. Непрерывные проценты

В практических финансово-кредитных операциях непрерывные процессы наращения денежных сумм, т.е. наращения за бесконечно малые промежутки времени, применяются редко. Однако важное значение непрерывное наращение имеет при количественном финансовом анализе сложных экономических явлений и процессов, например, при обосновании и выборе инвестиционных решений. Необходимость применения непрерывного наращения объясняется тем, что экономические явления, как правило, по своей природе непрерывны, а не дискретны.

При непрерывном наращении применяют особый вид процентной ставки ***силу роста.***

Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени.

Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Рассмотрим случай постоянной силы роста. Наращенная сумма при дискретных процентах находится по формуле (2.6):

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Чем больше значение *m*, тем меньше промежутки времени между моментами начисления. В пределе при $m \to \infty$ имеем:

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}\right)^{n}.$$

Известно, что $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} = e^{j}$,

получаем $S = Pe^{jn}$,

где e^{jn} - множитель наращения.

Чтобы отличить ставку непрерывных процентов от дискретных, обозначим ее δ, тогда

$$S = \mathrm{P}e^{\delta n}. \qquad (2.12)$$

Итак, при непрерывной капитализации процентов наращенная сумма зависит от срока наращения и номинальной ставки.

Из равенства множителей наращения:

$$(1+i)^{n} = e^{\delta n}, \quad \textit{следует}$$

$$\delta = \ln(1+i);$$

$$i = e^{\delta} - 1.$$

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок, т.е. нахождение современной величины будущего платежа, найдем из формулы (2.12):

$$P = \mathrm{S}e^{-\delta n}.$$

2.6. Определение срока платежа и процентных ставок при сложных процентах

В ряде случаев при разработке финансовых операций сталкиваются с необходимостью решения обратных задач – определения продолжительности ссуды, числа периодов наращения ставки процентов или учетной ставки. Решим уравнения, связывающие S и P, относительно интересующих нас величин.

Определение срока ссуды:

— наращение по сложной годовой ставке.

Из формулы (2.1):

$$n = \frac{\log \frac{S}{P}}{\log(1+i)}; \qquad (2.13)$$

— наращение по номинальной ставке m раз в год.

Из формулы (2.6):

$$n = \frac{\log \frac{S}{P}}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}; \qquad (2.14)$$

— при дисконтировании по сложной годовой учетной ставке.

Из формулы (2.10):

$$n = \frac{\log \frac{P}{S}}{\log(1-d_c)}; \qquad (2.15)$$

— при наращении по постоянной ставке непрерывных процентов.

Из формулы (2.12):

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\delta}. \qquad (2.16)$$

Пример. За какой срок в годах сумма, равная 75 тыс. долл., достигает 110 тыс. долл. при условии, что на нее начисляются проценты по ставке 7,5%: а) раз в году; b) поквартально.

Решение:

a) по формуле (2.13):

$$n = \frac{\log\frac{110}{75}}{\log 1{,}075} = 5{,}29 \textit{ года};$$

b) по формуле (2.14):

$$n = \frac{\log\frac{110}{75}}{\log\left(1 + \frac{0{,}075}{4}\right)^4} = 5{,}15 \textit{ года}.$$

Определение процентных ставок:

— наращение по сложной годовой ставке.

Из формулы (2.1):

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1; \qquad (2.17)$$

— наращение по номинальной ставке m раз в год.

Из формулы (2.6):

$$j = \left(\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{N}} - 1\right)m, \quad \textit{где} \quad N = mn; \qquad (2.18)$$

— дисконтирование по сложной годовой учетной ставке.

Из формулы (2.10):

$$d_c = -\left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{n}} + 1; \qquad (2.19)$$

— наращение по постоянной ставке непрерывных процентов.

Из формулы (2.12):

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{n}. \qquad (2.20)$$

Пример. Вкладчик, положив в банк 10000 долл., получил через два года 14400 долл. Найти величину сложной годовой процентной ставки.

Решение:

По формуле (2.17) при $n = 2$:

$$i = \left(\frac{14400}{10000}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{1{,}44} - 1 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2 \quad \text{или } 20\%.$$

2.7. Наращение в условиях инфляции

В рассмотренных до сих пор методах наращения процентов не учитывался такой важный момент как инфляция. Однако считаться с инфляцией необходимо при проведении любых финансовых операций.

Учет инфляции обязателен в двух случаях: при расчете наращенной суммы и определении действительной ставки процентов.

Падение покупательной способности за период характеризуется с помощью индекса J_n. Этот индекс равен обратной величине индекса цен J_p, т.е. $J_n = \frac{1}{J_p}$. Если наращенная за *n* лет сумма составляет S, а динамика цен характеризуется индексом J_p, то реальная наращенная сумма денег с учетом их покупательной способности: $C = \frac{S}{J_p}$.

Допустим за год цены выросли на 50%, тогда $J_p = 1{,}5$, соответственно выплата 1000 руб. в этот момент соответствует 1000/1,5 = 666,67 руб. в реальном измерении.

Пусть ожидаемый средний годовой темп инфляции (прирост цен) *h*. Тогда годовой индекс цен $J_p = 1 + h$. За n лет индекс цен будет равен $(1+h)^n$. В итоге наращения сумма через *n* лет будет равна:

$$C = P(1+i)^n (1+h)^{-n} = P\left(\frac{1+i}{1+h}\right)^n. \qquad (2.21)$$

Величина $\left(\frac{1+i}{1+h}\right)^n$ представляет множитель наращения с учетом инфляции.

Рассмотрим соотношения между h и i:

— при $h = i$ наращение поглощается инфляцией и роста реальной суммы не произойдет;

— при $h \phi i$ «проедание» капитала, реальная сумма меньше первоначальной;

— при $h \pi i$ - некоторый рост реальной суммы.

Это иллюстрируется графически (рис. 2.3):

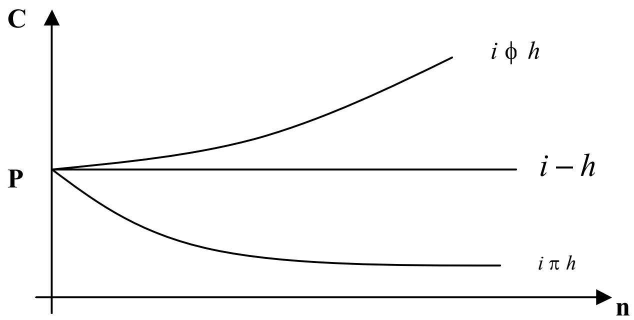


Рис.2.3

Для компенсации потерь от инфляции прибегают к двум методам:

1. ***Индексация ставки процентов***, т.е. увеличение ставки процентов на величину так называемой инфляционной премии. Ставку с поправкой на инфляцию называют брутто-ставкой и обозначают r.

   Должно выполнять условие:

$$1 + r = (1 + i)(1 + h), \quad т.е.$$

$$r = i + h + ih.$$

На практике при малых i и h брутто-ставку часто рассчитывают по формуле:

$$r = i + h.$$

2. ***Индексация первоначальной суммы платежа.*** Такой метод принят в Великобритании. В этом случае имеем:

$$C = PJ_p (1 + i)^n.$$

Глава 3. Эквивалентность процентных ставок

3.1. Системы эквивалентных ставок

Если разнородные процентные ставки приводят к одинаковым финансовым результатам, они называются ***эквивалентными.***

Принцип эквивалентности ставок лежит в основе многих методов количественного финансового анализа. Вывод формул эквивалентности ставок основывается на равенстве взятых попарно соответствующих множителей наращения.

Для простых процентных и учетных ставок:

$$1+ni_{\text{п}}=(1-nd)^{-1}, \quad \textit{откуда}$$

$$i_{\text{п}}=\frac{d}{1-nd};$$

$$d=\frac{i}{1+ni_{\text{п}}}.$$

Пример. Найти значение учетной ставки, эквивалентной простой ставке процентов, равной 10%.

Решение:

$$d=\frac{0{,}1}{1+0{,}1}=0{,}0909 \quad \textit{или } 9{,}09\% \ (\textit{при } n=1 \textit{ год.})$$

Для простых и сложных процентных ставок:

Из равенства множителей наращения следует:

$$1+ni_{\text{п}}=(1+i_c)^n, \quad \textit{откуда}$$

$$i_{\text{п}}=\frac{(1+i_c)^n-1}{n},$$

$$i_c=(1+ni_{\text{п}})^{\frac{1}{n}}-1.$$

Как следует из этих формул, эквивалентность ставок существенно зависит от срока начисления процентов.

Пример. Ссуда выдана под 20 сложных годовых процентов. Каков должен быть уровень простой ставки при сроке ссуды 10 лет?

Решение:

$$i_{\text{п}} = \frac{(1+0{,}2)^{10} - 1}{10} = 0{,}51917 \quad \textit{или } 51{,}917\%.$$

Для дискретных и непрерывных ставок:

Непрерывную процентную ставку (силу роста) можно сопоставить с любой дискретной ставкой (сложной или простой) и на основе равенства множителей наращения получить эквивалентную ставку.

Ранее были найдены зависимости между силой роста и ставкой сложных процентов:

$$\delta = \ln(i+1),$$

$$i = e^{\delta} - 1.$$

3.2. Средние процентные ставки

Если процентная ставка изменяется во времени, тогда эквивалентная ставка представляет собой ***среднюю ставку***, приносящую за определенный период тот же доход.

Искомую среднюю ставку найдем на основе равенства соответствующих множителей наращения: пусть за периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Тогда на основе равенства

$$1 + Ti_o = 1 + \sum n_t i_t,$$

$$\text{где } T = \sum n_t,$$

получим эквивалентную ставку

$$i_o = \frac{\sum n_t i_t}{T}. \qquad (3.1)$$

Найденная характеристика представляет собой среднюю взвешенную арифметическую величину с весами, соответствующими продолжительности отдельных интервалов. Ставка i_o дает такой же доход за время *T*, что и совокупность изменяющихся ставок за соответствующие периоды.

Пример. В контракте предусматривается начислить проценты в следующих размерах: 1-й год – 20%, затем 0,5 года – 30%, затем 0,5 года – 40%. Найти эквивалентную этим условиям ставку.

Решение:

№ периоды	i_t	n_t $(в\ годах)$	$i_t n_t$
1	0,2	1,0	0,20
2	0,3	0,5	0,15
3	0,4	0,5	0,20
Всего	-	2,0	0,55

$\sum i_t n_t = 0{,}55, \quad T = 2{,}0.$

По формуле (3.1): $i_o = \frac{0{,}55}{2} = 0{,}275\ (27{,}5\%).$

Перейдем к ставкам сложных процентов.

Если начисление процентов производится на основе последовательных фиксированных ставок сложных процентов $i_1, i_2, \ldots, i_k$, которые начисляются в интервалах $n_1, n_2, \ldots, n_k$ единиц времени, то из формулы (2.2) следует:

$$(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_k)^{n_k} = (1+i_o)^T,$$

где $T = \sum n_t$, *откуда*

$$i_o = \left((1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_k)^{n_k}\right)^{\frac{1}{T}} - 1. \qquad (3.2)$$

Полученное выражение представляет собой взвешенную геометрическую, в которой в качестве весов выступают продолжительности периодов начисления.

3.3. Финансовая эквивалентность обязательств

В практике часто возникают случаи, когда необходимо заменить одно финансовое обязательство другим (например, с более отдаленным сроком платежа), объединить несколько обязательств в одно (консолидировать платежи) и др.

Общепринятым принципом такой замены является ***финансовая эквивалентность***, которая предполагает безубыточность для сторон подобных изменений.

Эквивалентными считаются такие платежи, которые будучи приведенными по заданной процентной ставке к одному моменту времени оказываются равными.

По существу, принцип финансовой эквивалентности лежит в основе формул наращения и дисконтирования: сумма P в начале периода равнозначна платежу S в конце периода при принятых уровне процентной ставки и методе начисления процентов.

На принципе финансовой эквивалентности основывается сравнение разновременных платежей. Возьмем самый простой случай. Пусть имеются платежи S_1 и S_2 со сроками n_1 и n_2, начало отсчета приходится на один день. Эти платежи эквивалентны, если их современные величины, рассчитанные по одной и той же ставке, равны.

Принцип эквивалентности обязательств лежит в основе многих финансовых расчетов; он применяется при различного рода изменениях условий контрактов: их объединении, досрочном погашении, пролонгировании сроков платежей и др.

Общий метод решения подобных задач заключается в разработке уравнения эквивалентности, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнена сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

Для краткосрочных контрактов уравнение эквивалентности обычно разрабатывается на основе простых ставок, а для средне- и долгосрочных применяются сложные процентные ставки.

Глава 4. Постоянные финансовые ренты

4.1. Виды финансовых рент и их основные параметры

Контракты и сделки часто предусматривают не отдельные разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений. Например, погашение долгосрочного кредита, плата за аренду, денежные показатели инвестиционного процесса можно представить в виде последовательности (ряда) выплат и поступлений. В зарубежной финансовой литературе этот ряд называют ***потоком платежей***.

Члены потока могут быть положительными (поступления) и отрицательными (выплаты) величинами.

Поток платежей, все члены которого имеют одинаковый знак, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют ***финансовой рентой*** или ***аннуитетом.***

Например, рентой является ряд, состоящий из выплат процентов по облигациям, взносы по погашению кредита и т.д. В этих примерах некоторые суммы денег выплачиваются через равные интервалы времени.

Финансовая рента описывается следующими параметрами:

Член ренты - величина каждого платежа;

Период ренты - временной интервал между двумя платежами;

Срок ренты - время, измеренное от начала финансовой ренты до момента начисления последнего платежа;

Процентная ставка - ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента.

При характеристике отдельных видов финансовых платежей применяются ***дополнительные параметры***; число платежей в году, число начислений процентов и др.

В основу классификации ренты могут быть положены различные признаки.

В зависимости от периода ренты делят на ***годовые*** и ***р-срочные*** (*р* характеризует число выплат на протяжении года). Эти виды рент называют дискретными. В финансово-экономическом анализе встречаются и с последовательностями платежей, которые производятся так часто, что практически их можно рассматривать как непрерывные. Такие платежи описываются ***непрерывными рентами***.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением процентов один раз в году, m раз или непрерывно.

По величине членов различают ренты ***постоянные*** (с равными членами) и ***переменные.***

Члены переменных рент могут изменяться по какому-либо закону (например, арифметическая или геометрическая прогрессия) или несистематично.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов - ***ограниченные*** и ***бесконечные*** или ***вечные***. Вечная рента не является абстракцией, с ней встречаются, когда период функционирования какой-то экономической системы не ограничен.

По вероятности выплаты членов ренты делятся на ***верные*** и ***условные***. Верные ренты подлежат безусловной выплате (например, при погашении кредита). Выплата условной ренты ставится в зависимость от некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно (например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионеров).

Ренты делят по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляют в конце периода, такие ренты называются ***обычными*** или ***постумерандо***; если же выплата производится в начале каждого периода, то рента называется ***пренумерандо***. На практике чаще всего встречаются обычные ренты.

Финансовые ренты характеризуются одной из двух обобщающих характеристик - ***наращенной суммой*** или ***современной величиной***. Эти показатели учитывают поток платежей за весь срок.

Наращенная сумма - сумма всех членов ренты с начисленными на них процентами к концу ее срока.

Современная величина ренты - сумма всех ее членов, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом ренты или упреждающий его.

Конкретный смысл наращенной суммы и современной величины ренты определяется содержанием ее членов или их происхождением. Наращенная сумма может представлять общую сумму задолженности, итоговый объем инвестиций и др. Современная величина потока платежей характеризует, например, приведенные издержки, приведенную прибыль и т.д.

Далее рассматриваются ограниченные финансовые ренты, члены которых не изменяются во времени.

4.2. Наращенная сумма обычной ренты

Рассмотрим наиболее простой случай - годовую ренту. Пусть в конце каждого года в течение 4-х лет в банк вносится по 1000 долл., проценты начисляются в конце года; ставка - 5% годовых. Первый взнос обратится к концу срока в величину $1000 \times 1{,}05^3$ *долл.*, т.к. соответствующая сумма была на счете 3 года, второй взнос увеличится до $1000 \times 1{,}05^2$, последний взнос процентов не приносит.

Получаем ряд наращенных членов: $1000 \times 1{,}05^3$; $1000 \times 1{,}05^2$; $1000 \times 1{,}05$; 1000. Наращенная сумма будет равна сумме членов этого ряда.

Обозначим: S - наращенная сумма; R - размер члена ренты; i - ставка процента (десятичная дробь); n - срок ренты. Тогда наращенный ряд членов ренты запишется: $R(1+i)^{n-1}$; $R(1+i)^{n-2}; \ldots \; R(1+i); R.$.

Если этот ряд переписать в обратной последовательности, то получим геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = R$ и знаменателем $q = (1+i)$. Сумма членов геометрической прогрессии определяется по формуле:

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

В данном случае:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (4.1)$$

Обозначим:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{n;i}, \qquad (4.2)$$

$s_{n;i}$ называется коэффициентом наращения ренты. Он зависит от продолжительности ренты и процентной ставки (рис.4.1).

Тогда

$$S = Rs_{n;i}. \qquad (4.3)$$

Значения $s_{n;i}$ - табулированы (табл.4 Приложения)

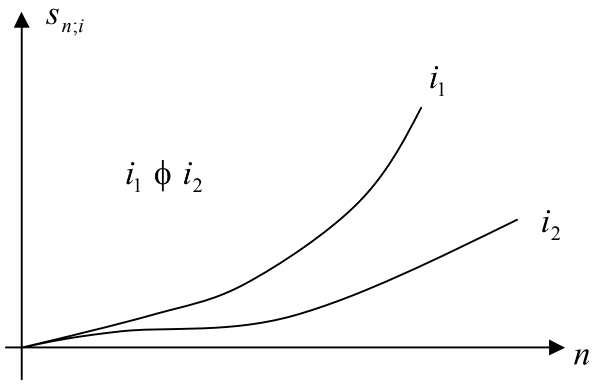


Рис.4.1

Пример. Предприятие ежегодно перечисляет в благотворительный фонд 10000 долл. в течение 6 лет. На эти средства начисляются проценты по ставке 8% годовых. Найти размер суммы на счете фонда к концу срока.

Решение:

$$S = 10000 \times s_{6;8} = 10000 \times 7{,}3359 = 73359 \text{ } \textit{долл.}$$

4.3. Современная величина обычной ренты

Современная величина потока платежей - важнейший показатель финансового количественного анализа.

Современная величина как показатель находит широкое применение в расчетах по погашению долгосрочных займов, эффективности инвестиций и др.

Рассмотрим годовую ренту - обычную, процентная ставка i, проценты начисляются в конце периода ренты, срок ренты - n лет. Рента ***немедленная***, т.е. момент оценки современной величины совпадает с началом ренты.

Пусть все члены ренты равны 1 ($R=1$).

Напомним формулы дисконтирования:

$$P = Sv^n;$$

$$v^n = (1+i)^{-n}.$$

Дисконтированная величина первого платежа равна $v(n=1)$, второго - v^2 и т.д. Таким образом, дисконтированные платежи, каждый из которых равен 1, образуют ряд $v; v^2; v^n$.

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом v, знаменателем v и числом членов n.

Сумму членов этой прогрессии обозначим $a_{n;i}$

$$a_{n;i} = \sum_{i=1}^{n} v^n = \frac{v(v^n - 1)}{v - 1}.$$

Но $v = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$. После преобразований получаем:

$$a_{n;i} = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \qquad (4.4)$$

Величину $a_{n;i}$ называют ***коэффициентом приведения ренты.*** $a_{n;i}$ зависит от процентной станки и числа членов ренты. Значения $a_{n;i}$ табулированы (табл.5 Приложения).

Естественно, что с увеличением n коэффициент $a_{n;i}$ возрастает, но

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i},$$

$$\left(при\ i = 5\%\ \frac{1}{i} = 20;\ при\ i = 10\%\ \frac{1}{i} = 10 \right).$$

Нетрудно показать, что с увеличением i значение $a_{n;i}$ уменьшается.

На рис. 4.2 показана зависимость $a_{n;i}$ от *n* при *i=5%* и *i=10%*.

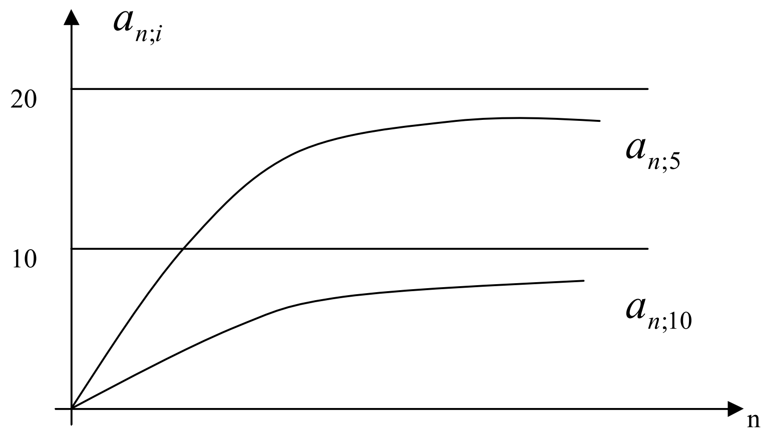


Рис.4.2

Так как $a_{n;i}$ характеризует современную величину ренты с членами, равными 1, то для ренты с членами *R*, современная величина *A* будет в *R* раз больше:

$$A = Ra_{n;i}. \qquad (4.5)$$

Пример. Предприятие ежегодно в течении 8 лет перечисляет в фонд по 1000 долл. Эта сумма находится на валютном счете при 6% годовых. Найти наращенную сумму и современную величину этих платежей.

Решение:

$$A = 1000 \times a_{8;6} = 1000 \times 6{,}2098 = 6209{,}8 \text{ долл.}$$

Современная величина ренты представляет собой ее оценку, приуроченную к определенному моменту времени (для немедленной ренты - к началу срока). Наращенная сумма приурочена к концу срока. Между этими величинами (*S* и *A*) должна существовать определенная зависимость, а именно: наращение процентов на сумму *A* за *n* периодов должно давать сумму *S*, т.е. $A(1+i)^n = S$.

4.4. Определение параметров финансовых рент

Постоянная обычная годовая рента описывается такими параметрами, как *R, n, i*. Этих характеристик достаточно для расчета наращенной сумму *S* и современной величины *A*. Однако в ряде задач финансового анализа могут возникнуть случаи, когда заданными является одна из двух обобщающих характеристик (*A* или *S*) и неполный набор параметров ренты. В таких случаях требуется найти недостающий параметр.

Определение члена ренты

Необходимо определить величину *R* по заданному значению наращенной суммы или современной величины при известном числе членов ренты *n* и ставке процентов *i*.

В этом случае из формулы (4.3):

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}.$$

Если задана современная величина *A*, то из формулы (4.5):

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}.$$

Пример. За 3 года предприятию необходимо создать фонд в 1 млн. долл. Определить величину разового взноса в конце каждого года при годовой ставке 6%.

Решение:

$n = 3; i = 6\%$;

$$R = \frac{S}{s_{n;i}} = \frac{1000000}{s_{3;6}} = \frac{1000000}{3{,}1836} = 314109{,}8 \text{ долл.}$$

Пример. Предприятие договорилось погасить текущую задолженность партнеру в 1 млн. долл. за 5 лет равными платежами в конце каждого года при процентной ставке 8% годовых. Определить сумму каждого платежа.

Решение:

$n = 5; i = 8\%$;

$$R = \frac{A}{a_{n;i}} = \frac{1000000}{a_{5;8}} = \frac{1000000}{3{,}99271} = 250456{,}46\ \text{долл}.$$

Определение срока ренты

Необходимость определения срока ренты и, соответственно, числа платежей возникает в ходе разработки условий контракта. Искомая величина может быть определена по всем остальным параметрам ренты и наращенной сумме или современной ее величине.

Из формулы (4.1):

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}.$$

Из формулы (4.4):

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}.$$

Заметим, что нахождение процентной ставки i по другим известным параметрам ренты должно осуществляться из условия:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},\ \text{или}$$

$$S = R\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}.$$

Однако прямого алгебраического решения эти уравнения не имеют, поэтому используются различные приближенные методы, которые здесь мы не рассматриваем.

4.5. Конверсии рент

В практике иногда сталкиваются со случаями, когда необходимо изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату аннуитетов. Иначе говоря, нужно ***конвертировать ренту***. В самом простом случае изменение условий ренты заключается в замене ренты единовременным платежом. В более сложных случаях рента с одним набором условий заменяется рентой с другими условиями. Наконец, несколько рент могут быть соединены в одну (например, при консолидировании долгов).

Конверсия ренты должна быть основана на принципе финансовой эквивалентности.

Рассмотрим некоторые виды конверсии рент.

Выкуп ренты

Иногда распределенные во времени платежи (взносы, отчисления и т.д.) требуется заменить единовременным платежом. Такая замена является, по существу, выкупом ренты. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что при подобного рода замене вместо ренты выплачивается современная (приведенная) ее величина. Естественно, что примененная процентная ставка должна удовлетворять обе стороны.

Рассрочка платежей

Частый случай конверсии - замена единовременного платежа аннуитетом. Например, при коммерческом кредите плата за отгруженную продукцию распределяется во времени. Для соблюдения принципа финансовой эквивалентности современную величину ренты нужно приравнять величине заменяемого платежа. Поскольку современная величина такой ренты задана, то задача сводится к нахождению члена ренты или числа ее членов (срока ренты). Эта задача рассмотрена в предыдущем параграфе.

Изменение продолжительности ренты

Пусть имеется годовая обычная рента. Она заменяется рентой с теми же условиями, однако, вместо срока n_1 у новой ренты срок n_2.

В этом случае должно выполняться условие:

$$R_1 a_{n_1;i} = R_2 a_{n_2;i} ,$$

следовательно $$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}}.$$

Но по формуле (4.4):

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \ \textit{поэтому}$$

$$R_2 = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}.$$

Объединение рент

При объединении (консолидации) рент из принципа финансовой эквивалентности следует:

$$A = \sum_{q=1}^{m} A_q,$$

где A – современная величина заменяющей ренты;

A_q - современная величина q-й ренты.

Формула записана для условия, что начала рент совпадают. Если моменты начала рент не совпадают во времени, то, дисконтируя их современные величины на начало самой ранней ренты, получим необходимые для объединения рент значения современных величин.

Член заменяющей ренты находим так:

$$R = \frac{\sum A_q}{a_{n;i}}.$$

Глава 5. Кредитные расчеты

Одна из задач количественного финансового анализа долгосрочной задолженности (далее для краткости любой вид долгосрочного долга будем называть кредитом) - разработка плана погашения кредита, адекватного условиям финансового соглашения.

Разработка плана погашения кредита заключается в составлении графика (расписания) периодических платежей должника. Такие расходы должника обычно называют расходами по обслуживанию долга или, более кратко, срочными уплатами, расходами по кредиту.

Расходы по обслуживанию долга включают две составляющие: 1) текущие процентные платежи; 2) средства, предназначенные для погашения основного долга.

Будем использовать следующие обозначения:

D — сумма задолженности (основной долг);

i — ставка процента по кредиту;

n — общий срок кредита;

Y — срочная уплата.

Обычно на практике используют несколько схем погашения долга.

5.1. Погашение кредита одним платежом

Один из способов погашения долга - одним платежом в конце срока в виде разового платежа.

Пусть D - кредит, выданный на n лет под i сложных годовых процентов. К концу n-го года наращенная его величина составит $D(1+i)^n$. Если предполагается отдать долг одним платежом в конце срока, то это и будет размер данного платежа. Таким образом, размер срочной уплаты будет:

$$Y = D(1+i)^n. \qquad (5.1)$$

Пример. Кредит в сумме 100 тыс. руб. выдан на срок 5 лет. За кредит выплачиваются проценты по ставке 10 % годовых. Определить размер срочных уплат и составить график погашения кредита для различных схем погашения.

Решение:

В случае погашения кредита разовым платежом в конце срока размер срочной уплаты будет:

$$Y = 100(1+0{,}5)^5 = 161{,}051 \text{ тыс.руб.}$$

Эта сумма включает основной долг 100 тыс. руб. и проценты за его использование в течение пяти лет 61,051 тыс.руб.

Возможна другая схема погашения кредита, когда в конце срока выплачивается основной долг, а ежегодно уплачиваются проценты.

Проценты за первый год составят $I = Di$. Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере D. Таким образом, размер срочной уплаты составит:

$$Y_1 = \text{K} = Y_{n-1} = Di;$$

В конце n-го года величина выплаты будет:

$$Y_n = D + Di.$$

Эта сумма включает процентные деньги за последний год и основной долг.

Для рассматриваемого примера размер срочных уплат составит:

$$Y_1 = \text{K} = Y_4 = 100 \times 0{,}1 = 10 \text{ тыс.руб.}$$
$$Y_5 = 100 + 100 \times 0{,}1 = 110 \text{ тыс.руб.}$$

5.2. Погашение основного долга равными выплатами

В практической финансовой деятельности, особенно при значительных размерах задолженности, долг обычно погашается в рассрочку, частями. Такой метод погашения часто называют амортизацией долга. Он осуществляется различными способами. Рассмотрим способ, по которому основной долг погашается равными годовыми выплатами.

Пусть долг в сумме D погашается в течение n лет. В этом случае сумма, ежегодно идущая на его погашение, составит $d = \dfrac{D}{n}$.

Размер долга последовательно сокращается: $D, D-d, D-2d$ и т.д. Соответствующим образом уменьшаются и выплачиваемые проценты, так как они начисляются на остаток долга. Если проценты выплачиваются один раз в конце года по ставке *i*, то процентные платежи за первый и последующие годы равны $Di, (D-d)i, (D-2d)i$ и т.д. Процентные платежи, как видим, образуют убывающую арифметическую прогрессию с первым членом Di и разностью di.

Срочная уплата в конце первого года находится так:

$$Y_1 = D_0 i + d,$$

где $D_0 = D$ — сумма основного долга.

Для конца года *t* получим

$$Y_t = D_{t-1} i + d,\ t = 1, \ldots, n,$$

где D_{t-1} — остаток долга на конец года *t*.

Остаток долга можно определять последовательно:

$$D_t = D_{t-1} \frac{n-1}{n}. \qquad (5.2)$$

Пример. Кредит в сумме 100 тыс. руб. выдан на срок 5 лет. За кредит выплачиваются проценты по ставке 10 % годовых. Кредит погашается в рассрочку - основной долг погашается равными ежегодными выплатами. Составить график погашения кредита.

Решение:

Сумма, ежегодно идущая на погашение основного долга будет:

$$d = \frac{D}{n} = \frac{100}{5} = 20 \text{ } \textit{тыс.руб.}$$

План погашения представлен в следующей таблице.

Год	**Остаток основного долга на начало года**	**Расходы по кредиту (срочные уплаты)**	**Погашение основного долга**	**Проценты (процентные платежи)**
1	100 000	30 000	20 000	10 000
2	80 000	28 000	20 000	8 000
3	60 000	26 000	20 000	6 000

4	40 000	24 000	20 000	4 000
5	20 000	22 000	20 000	2 000

Как видим, со временем уменьшаются не только суммы расходов по кредиту, но и соотношения процентов и сумм погашения основного долга.

5.3. Погашение кредита равными срочными уплатами

В соответствии с этим методом расходы должника по обслуживанию долга постоянны на протяжении всего срока его погашения. Из общей суммы расходов должника часть выделяется на уплату процентов, остаток идет на погашение основного долга. Так же как и в предыдущем методе, величина долга здесь последовательно сокращается, в связи с этим уменьшаются процентные платежи и увеличиваются платежи по погашению основного долга.

План погашения обычно разрабатывается при условии, что задается срок погашения долга. Первый этап разработки плана погашения — определение размера срочной уплаты. Далее полученная величина разбивается на процентные платежи и сумму, идущую на погашение основного долга. После чего легко найти остаток задолженности.

Периодическая выплата постоянной суммы Y равнозначна ренте с заданными параметрами. Приравняв сумму долга к современной величине этой ренты, находим:

$$D = Ya_{n;i} \Rightarrow Y = \frac{D}{a_{n;i}}, \qquad (5.3)$$

где $a_{n;i}$ — коэффициент приведения годовой ренты со ставкой i и сроком n.

Все величины, необходимые для разработки плана, можно рассчитать на основе величины Y и данных финансового контракта. Найдем сумму первого погасительного платежа (платежа на обслуживание основного долга).

$$d_1 = Y - Di.$$

Сумма второго платежа:

$$d_2 = Y - (D - d_1)i = (d_1 + Di) - (D - d_1)i = d_1(1 + i).$$

Сумма платежа после года *t*:

$$d_t = d_{t-1}(1+i).$$

Суммы, идущие на погашение долга, увеличиваются во времени, в связи с этим рассматриваемый метод погашения называют прогрессивным.

Пример. Условия погашения кредита те же, что и в предыдущем примере. Однако погашение производится равными срочными уплатами, т.е. рентой постнумерандо с параметрами: Y (неизвестная величина), $n = 5, i = 10\%$. Составить график погашения кредита.

Решение:

Находим размер срочной уплаты:

$$Y = \frac{100000}{3{,}790787} = 26379{,}75 \ \textit{руб.}$$

Далее определим сумму первого погасительного платежа:

$$d_1 = 26379{,}75 - 100000 \times 0{,}1 = 16379{,}75 \ \textit{руб.}$$

Остаток долга после первого погашения:

$$D_1 = 100000 - 16379{,}75 = 83620{,}25 \ \textit{руб. и т.д.} \ (\textit{см. таблицу}).$$

Разница 0,01 руб. между остатком основного долга (см. колонку «Остаток основного долга на начало года») и суммой в уплату основного долга (см. колонку «Погашение основного долга») обусловлена точностью вычислений. Для исключения разницы необходимо последний платеж (см. колонку «Расходы по кредиту») уменьшить на эту величину.

Год	Остаток основного долга на начало года	Расходы по кредиту (срочные уплаты)	Погашение основного долга	Проценты (процентные платежи)
1	100000	26379,75	$26379{,}75 - 10000 = 16379{,}75$	10000
2	$100000 - 16379{,}75 = 83620{,}25$	26379,75	$26379{,}75 - 8362{,}03 = 18017{,}72$	8362,03
3	$83620{,}25 - 18017{,}72 = 65602{,}53$	26379,75	$26379{,}75 - 6560{,}25 = 19819{,}50$	6560,25
4	$65602{,}53 - 19819{,}50 = 45783{,}03$	26379,75	$26379{,}75 - 4578{,}30 = 21801{,}45$	4578,30
5	$45783{,}03 - 21801{,}45 = 23981{,}58$	26379,75	$26379{,}75 - 2398{,}16 = 23981{,}59$	2398,16

Переменные расходы по кредиту. Далеко не всегда оказывается удобным условие *Y=const.* Например, погашение долга может быть связано с поступлением средств из каких-либо источников, и зависеть от ряда обстоятельств. Срочные уплаты в этом случае образуют ряд, члены которого либо задаются заранее (график погашения), либо следуют какому-либо формальному закону (прогрессии, заданной функции).

В ряде случаев размеры срочной уплаты связываются с ожидаемыми поступлениями средств и задаются заранее в виде графика погашения. Размер последней срочной уплаты не задается. Она определяется как сумма остатка долга на начало последнего периода.

Пример. Кредит на сумму 100 тыс.руб. погашается по специальному графику. Суммы расходов по погашению кредита по годам 30, 20, 30 и 20 тыс. руб. Остаток выплачивается в конце пятого года. Ставка процента по долгу установлена на уровне 10 % годовых. Составить график погашения кредита.

Решение:

План погашения имеет следующий вид (см. таблицу).

Год	**Остаток основного долга на начало года**	**Расходы по кредиту (срочные уплаты)**	**Погашение основного долга**	**Проценты (процентные платежи)**
1	100000	30000	20000	10000
2	80000	20000	12000	8000
3	68000	30000	23200	6800
4	44800	20000	15520	4480
5	29280	32208	29280	2928

Размер последней срочной уплаты определяется как сумма остатка основного долга на начало последнего года $(29280\ руб.)$ и процентных платежей, начисленных на эту сумму $(29280 \times 0{,}1 = 2928\ руб.)$.

Глава 6. Доходность ценных бумаг

6.1. Доходность облигаций

Облигация - это долговое обязательство, в соответствии с которым заемщик гарантирует кредитору выплату определенной суммы по истечении определенного срока и дохода в виде фиксированного или плавающего процента. Облигации имеют ***номинальную, выкупную*** и ***рыночную*** цену.

Номинальная цена напечатана на самой облигации и служит в качестве базы при начислении процентов. По ***выкупной*** цене, которая может совпадать, а может не совпадать с номинальной, что зависит от условий займа, эмитент выкупает облигацию по истечении срока займа. ***Рыночная (курсовая)*** цена определяется ситуацией, сложившейся в момент реализации облигации на фондовом рынке.

Значение рыночной цены облигации, выраженное в процентах к ее номиналу, называется ***курсом облигации***:

$$P_k = \frac{P}{N}100, \qquad (6.1)$$

где P_k - курс облигации;

P - рыночная цена;

N - номинальная цена облигации.

Облигации могут выпускаться государством, местными органами управления, хозяйствующими субъектами.

В зависимости от метода выплаты доходов и способов погашения займа различают следующие виды облигаций:

1. Облигации, по которым производится только выплата процентов, а капитал не возвращается - так называемые «вечные» облигации;
2. Облигации, по которым не выплачиваются проценты. Их называют бескупонными или облигациями с нулевым купоном;
3. Облигации, процент по которым выплачивается в момент погашения;

4. Облигации, по которым их владельцам периодически выплачивается фиксированный доход и выкупная сумма при погашении.

Периодическая выплата доходов в виде процентов производится по купонам. Купон представляет собой вырезной талон с напечатанным на нем значением купонной ставки. Факт выплаты дохода отмечается изъятием купона. В зависимости от условий займа купонный доход может начисляться по кварталам, полугодиям или один раз в год. Чем чаще начисляется доход, тем выше с учетом возможности реинвестирования его реальная сумма при той же годовой ставке и больше рыночная цена облигации.

При выпуске бескупонных облигаций цена первичного размещения устанавливается ниже номинальной стоимости. Эмитент, как правило, погашает облигацию по номинальной стоимости, следовательно, образуется разница между выкупной ценой и ценой приобретения. Эта разница (дисконт) и образует доход инвестора. В отличие от купонных облигаций, в этом случае держатель облигации может получить доход только при погашении ее эмитентом.

Таким образом, общий доход от облигации складывается из двух элементов:

— периодически выплачиваемого купонного дохода или начисления процентов;

— изменения стоимости ценной бумаги (приближения ее к выкупной цене) за соответствующий период времени.

Эффективность облигации с периодическими выплатами процентов можно измерить с помощью ***текущей доходности***. Этот показатель характеризует текущие поступления за год относительно сделанных инвестиций: он не учитывает изменения цены облигации за срок ее хранения.

Показатель ***полной (конечной) доходности*** учитывает оба источника дохода. Полную доходность часто называют ***ставкой помещения***. Этот показатель характеризует реальную финансовую эффективность облигации для инвестора с учетом всех видов дохода от нее. На рынке ценных бумаг ставка помещения не выступает непосредственно - это производная расчетная величина.

При расчете текущей и полной доходностей облигации используется понятие ее «рыночной цены». Последняя обычно включает кроме, действительно, рыночной цены, выражаемой через курс облигации, сумму процентов, причитающуюся владельцу за период после последней выплаты до момента продажи. В дальнейших расчетах используется «чистая» рыночная цена, из которой эта сумма процентов исключена.

Рассмотрим далее расчет доходности для основных видов облигаций.

а) <u>Бескупонные облигации.</u>

Данный вид облигаций обеспечивает инвестору один вид дохода – разность между выкупной ценой облигации (обычно номиналом) и ценой приобретения. Полную доходность (ставку помещения) Y найдем из условия равенства дисконтированной по процентной ставке Y величины номинала (100%) цене облигации:

$$P_k = \frac{100}{(1+Y)^n},$$

откуда
$$Y = \left(\frac{100}{P_k}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \qquad (6.2)$$

где n – срок от момента приобретения до момента погашения облигации;

P_k - курс покупки облигации (в данном случае $P_k \pi 100$).

С учетом формулы (6.1) для курса облигации:

$$Y = \left(\frac{N}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (6.3)$$

В формулах (6.2), (6.3) и в дальнейшем доходность выражается в долях единицы.

В случае, когда облигация эмитируется на срок менее года, примем:

$$n = \frac{t}{K},$$

где K – временная база (число дней в году);

t – количество дней от момента приобретения до момента погашения облигации.

Тогда доходность будет равна:

$$Y = \left(\frac{100}{P_k}\right)^{\frac{K}{t}} - 1. \qquad (6.4)$$

Если дисконтирование производится по простой процентной ставке, то полная доходность находится из условия:

$$P_k = \frac{100}{(1 + nY)}.$$

При сроке владения облигацией более года $(n \phi 1)$:

$$Y = \frac{(100 - P_k)}{nP_k} = \frac{D}{nP_k}; \qquad (6.5)$$

при $(n \pi 1)$:

$$Y = \frac{100 - P_k}{P_k} \times \frac{K}{t} = \frac{D \times K}{P_k \times t}, \qquad (6.6)$$

где $D = 100 - P_k$ - величина дисконта (в процентах).

б) <u>Облигации с выплатой процентов в конце срока.</u>

При погашении такой облигации ее владелец получает номинал с начисленными на него процентами по ставке *g*. За *n* лет владения облигацией это составит сумму $N(1+g)^n$. Приравниваем дисконтированное по ставке *Y* значение этой суммы рыночной цене приобретения облигации:

$$P = N(1+g)^n (1+Y)^{-n}.$$

Из последнего соотношения находим полную доходность *Y*:

$$Y = \left(\frac{N}{P}\right)^{\frac{1}{n}} (1+g) - 1. \qquad (6.7)$$

С учетом формулы (6.1):

$$Y = \left(\frac{100}{P_k}\right)^{\frac{1}{n}}(1+g)-1. \qquad (6.8)$$

Очевидно, что при курсе $P_k \,\pi\, 100\%$ полная доходность $Y \,\phi\, g$; при $P_k \,\phi\, 100\%$ (облигация куплена с премией) $Y \,\pi\, g$.

в) <u>Облигации с купонной выплатой дохода и погашением в конце срока.</u>

В общем случае доход по облигации данного вида складывается из двух элементов: процентных выплат, реализуемых с помощью купонов, и дохода, получаемого при погашении облигации. Поэтому для этого типа облигаций имеет смысл определять как текущую, так и полную доходность.

Текущая доходность определяется соотношением:

$$Y_T = \frac{Ng}{P} = \frac{100g}{P_k}. \qquad (6.9)$$

где g - годовая купонная ставка (в долях единицы);

P_k - курс облигации в момент приобретения (в процентах);

P - рыночная цена облигации;

N - ее номинальная цена.

Если выплаты по купонам производятся m раз в год каждый раз по ставке $\frac{g}{m}$, то для расчета текущей доходности также используют формулу (6.9). В этом случае она дает несколько заниженный результат, так как не учитывает возможности реинвестирования процентных средств, подученных по купонам.

Для определения полной доходности (ставки помещения) вновь используем равенство суммы дисконтированных доходов от облигации ее рыночной цене приобретения. Если срок владения облигацией n, а погашается она по номиналу, то дисконтированная по ставке Y величина суммы погашения составит $N(1+Y)^{-n}$.

Купонные выплаты можно рассматривать как ренту с постоянным членом Ng сроком n. Ее современная величина при процентной ставке Y будет равна:

$$A = Nga_{n;Y} \quad ,$$

где $a_{n;Y}$ - коэффициент приведения ренты.

Таким образом, получаем уравнение для определения Y:

$$P = N(1+Y)^{-n} + Nga_{n;Y}. \qquad (6.10)$$

С учетом (6.1) запишем:

$$P_k = \left((1+Y)^{-n} + ga_{n;Y}\right) \times 100. \qquad (6.11)$$

Если выплаты по купонам производятся m раз в год, то член ренты будет равен $\frac{Ng}{m}$, число периодов – mn, а процентная ставка $\frac{Y}{m}$.

Для нахождения Y из уравнений (6.10) или (6.11) напомним, что коэффициент приведения ренты определяется соотношением:

$$a_{n;Y} = \frac{1-(1+Y)^{-n}}{Y}.$$

С учетом последнего соотношения или используя таблицу значений коэффициента приведения ренты, уравнения (6.10) и (6.11) решают методом интерполяции. Для этого находят интервал изоляции корня (Y', Y''), внутри которого должно находиться действительное значение корня. Значение Y находят из выражения:

$$Y = Y' + \frac{P(Y') - P_k(Y'' - Y')}{P(Y') - P(Y'')}.$$

Отметим, что значения Y' и Y'' выбираются с учетом того, что при $P_k \pi 100$ полная доходность больше годовой купонной ставки $(Y \phi g)$.

В упрощенных расчетах полную доходность определяют как простую ставку помещения:

$$Y = \frac{Ng + \left(\frac{N-P}{n}\right)}{P} \qquad (6.12)$$

или

$$Y = \frac{100g + \left(\frac{100 - P_k}{n}\right)}{P_k}, \qquad (6.13)$$

где g и Y – в долях единицы; P_k - в процентах.

6.2. Доходность акций

Акция - это ценная бумага, удостоверяющая право ее держателя (акционера) на получение части прибыли акционерного общества (АО) в виде дивидендов, на участие в управлении делами АО и на часть имущества при ликвидации АО. Право на выпуск акций имеют только акционерные общества.

Акции могут быть ***простыми*** и ***привилегированными***. Отличия привилегированных акций от простых состоят в следующем:

— привилегированные акции не дают права голоса на собрании акционеров;

— дивиденд по привилегированным акциям обычно является фиксированным;

— держатель привилегированной акции имеет преимущественное право на долю имущества АО при его ликвидации.

Одной из характеристик акции является ее ***номинал***, выражаемый обычно в денежной форме. На основе номинала установленный процент дивидендов переводится в денежную сумму, выплачиваемую акционеру.

Основной характеристикой акции является ее ***курсовая стоимость (курс акции)*** - цена, по которой акция продается на фондовом рынке. Курс акции складывается в результате соотношения спроса и предложения и зависит от ряда факторов, отражающих общую конъюнктуру, финансовое положение отрасли и данной фирмы. К этим факторам относятся существующий уровень ссудного процента, возможности альтернативного вложения капитала и степень риска для этих вложений, ожидаемая чистая прибыль АО, прогнозируемые дивиденды, стоимость активов и др.

Так как срок действия акции не ограничен, то цену акции можно рассматривать как современную величину будущих дивидендов, получаемых по ней. В такой постановке теоретическая цена акции будет равна современной величине вечной ренты:

$$S = \sum_{t=1}^{\infty} d_t (1+i)^{-t}.$$

где d_t - дивиденд, выплачиваемый в году t;

i - ставка процента, учитываемая при оценке (обычно ставка доходности по альтернативному вложению с таким же уровнем риска).

При допущении, что дивиденды постоянны $(d_t = const)$, цена акции:

$$S = \frac{d}{i}, \qquad (6.14)$$

т.е. цена акции равна отношению дивиденда (в рублях) к уровню ставки помещения (в долях единицы).

Можно показать, что если ежегодный прирост дивиденда равен h, то ориентировочная цена акции будет равна:

$$S = \frac{d}{(i-h)}. \qquad (6.15)$$

В отличие от ценных бумаг с фиксированным доходом эффективность операций с акциями может быть лишь условно прогнозируема. В общем случае существует два источника дохода при владении акцией: дивидендные выплаты и возможная разница цен в моменты покупки и продажи акции.

Первый источник учитывается в показателе текущей доходности:

$$Y_T = \frac{d_T}{S_0}, \qquad (6.16)$$

где d_T - дивиденд текущего года;

S_0 - цена покупки акции.

Доходность за весь холдинг-период, в течение которого акция находилась у инвестора, от момента покупки до продажи равна:

$$Y_h = \frac{(S_1 - S_0) + \sum d_T}{S_0}, \qquad (6.17)$$

где $\sum d_T$ - сумма дивидендов, полученных за весь период;

S_1 - цена продажи акции.

Полная доходность Y находится путем деления величины Y_h на продолжительность холдинг-периода n, т.е.

$$Y = \frac{Y_h}{n} = \frac{(S_1 - S_0) + \sum d_T}{S_0 n}. \qquad (6.18)$$

Сумма всех доходов по акциям может быть дисконтирована, например, к моменту покупки акции по процентной ставке i. Если годовой дивиденд постоянен и равен d, то дивидендные выплаты можно рассматривать как обычную постоянную ренту с членом d, сроком n и процентной ставкой i. В этом случае расчетная формула для Y_h примет вид:

$$Y_h = \frac{S_1(1+i)^{-n} - S_0 + d a_{n;i}}{S_0}. \qquad (6.19)$$

6.3. Доходность банковских сертификатов

Банковский сертификат - это ценная бумага, выпускаемая банком и удостоверяющая право вкладчика получить через определенное время внесенную им сумму плюс начисленные на нее проценты. Сертификат может быть депозитным, т.е. выпущенным для юридических лиц, и сберегательным, предназначенным для физических лиц.

Банковский сертификат реализует в принципе тот же механизм, что и депозитный (сберегательный) вклад, но, будучи ценной бумагой, может быть передан одним владельцем другому. Сертификаты бывают именные и на предъявителя. Более удобными для инвесторов представляются депозитные сертификаты на предъявителя, свободно обращающиеся на вторичном рынке. При этом вместо начисления процентов может быть использована продажа со скидкой (дисконтом).

Сертификаты должны быть срочными. Срок обращения по депозитным сертификатам - это период с даты выдачи сертификата до даты, когда его владелец получает право востребования депозита или вклада по сертификату.

Доходность сертификатов в годовом исчислении обычно рассчитывают по формуле, полученной на основе метода простых процентов:

$$Y = \frac{S_1 - S_0}{S_0} \times \frac{K}{t}, \qquad (6.20)$$

где S_0 - цена покупки сертификата;

S_1 - сумма, полученная при погашении (продаже) сертификата;

t - количество дней владения сертификатом;

K - количество дней в году - принимается равным 365 (366) или 360.

Доход по сертификату начисляется по способу простых процентов. Поэтому стоимость продажи (погашения) сертификата определяется по формулам:

— при покупке сертификата по номиналу N стоимость на момент погашения будет равна:

$$S_1 = N(1 + g_c), \qquad (6.21)$$

где g_c - объявленная ставка по сертификату, в долях единицы;

— промежуточная стоимость сертификата (без учета возможных штрафных санкций за преждевременную продажу):

$$S_1 = N\left(\frac{1 + g_c(L - t_2)}{L}\right), \qquad (6.22)$$

где L - срок обращения сертификата в днях;

t_2 - количество дней до погашения.

При продаже сертификата с дисконтом его начальная цена определяется по формуле:

$$S_0 = \frac{N}{(1 + g_c)}. \qquad (6.23)$$

Очевидно, что если сертификат находится у инвестора от момента выпуска до момента погашения; то его доходность в годовом исчислении составит:

$$Y = \frac{g_c K}{L}. \qquad (6.24)$$

6.4. Доходность векселей

Вексель - это ценная бумага, представляющая собой долговое обязательство. Существует две разновидности векселей - простые и переводные.

Прослой вексель - это безусловное обязательство выплатить указанную сумму при наступлении определенного срока владельцу векселя (векселедержателю). Векселедателем в этом случае является должник.

Переводной вексель, или ***тратта*** выписывается кредитором (трассантом) и является безусловным приказом должнику (трассату) уплатить определенную сумму в установленный срок. Платеж производится трассанту или третьему лицу (ремитенту).

Вексель может иметь депозитную или расчетную природу, поскольку является долговой бумагой и одновременно может быть средством платежа.

Различают векселя казначейские, банковские, коммерческие.

Казначейский вексель может выпускаться государством для покрытия своих расходов и представляет собой краткосрочное обязательство государства со сроком погашения 3, 6 и 12 месяцев.

Банковский вексель - это, как правило, краткосрочное долговое обязательство, дающее право его владельцу подучить указанную на векселе сумму (номинальную стоимость) в период погашения. Доход владельца обеспечивается за счет дисконта, т.е. разницы между ценой погашения, равной номиналу и ценой продажи.

Очевидно, что доходность банковского векселя рассчитывается аналогично тому, как она определялась для краткосрочных бескупонных облигаций.

В случае использования простой процентной ставки на основании формулы (6.6):

$$Y = \frac{D}{S_0} \times \frac{K}{t}, \qquad (6.25)$$

где D - дисконт;

S_0 - цена приобретения векселя.

Если же применена сложная процентная ставка, то доходность в соответствии с (6.4) будет равна:

$$Y = \left(\frac{N}{S_0}\right)^{\frac{K}{t}} - 1, \qquad (6.26)$$

где N – сумма, получаемая при погашении векселя.

6.5. Примеры расчета

Пример 1. Бескупонная облигация со сроком погашения через 3 года приобретена по курсу 55%.

Доходность такой облигации найдем по формуле (6.3):

$$Y = \left(\frac{100}{55}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}221, \quad т.е.\ 22{,}1\%.$$

В случае использования простой процентной ставки доходность равна (формула 6.5):

$$Y = \frac{100 - 55}{55 \times 3} = 0{,}273\ или\ 27{,}3\%.$$

Пример 2. Облигация номиналом 10000 рублей с погашением через 5 лет куплена за 9100 рублей. Годовая процентная ставка по облигации – 12%; выплата процентов производится один раз в год.

Рыночный курс облигации при покупке:

$$P_k = \frac{9100 \times 100\%}{10000} = 91\%.$$

Текущую доходность находим по формуле:

$$Y_T = \frac{100g}{P_k};$$

$$P_k = 91;\ g = 0{,}12, \quad \textit{следовательно} \quad Y_T = \frac{100 \times 0{,}12}{91} = 0{,}132, \quad \textit{т.е.}\ 13{,}2\%.$$

Полную доходность найдем путем решения уравнения (6.11) методом интерполяции:

$$\left((1+Y)^{-5} + 0{,}12a_{5;Y}\right) \times 100 = 91.$$

Поскольку $P_k \ \pi\ 100$, то $Y \ \phi\ Y_T$, т. е. $Y \ \phi\ 0{,}132$.

В качестве границ интервала изоляции выберем точки: $Y' = 0{,}145\ (14{,}5\%)$ и $Y'' = 0{,}150\ (15\%)$. Коэффициенты приведения ренты $a_{5;14,5}$ и $a_{5;15}$ найдем по таблице (8, 9):

$$a_{5;14,5} = 3{,}392225211; \quad a_{5;15} = 3{,}352155098.$$

$$P(Y') = \left((1+0{,}145)^{-5} + 0{,}12a_{5;14,5}\right) \times 100 = 91{,}51;$$

$$P(Y'') = \left((1+0{,}150)^{-5} + 0{,}12a_{5;15}\right) \times 100 = 89{,}94.$$

Тогда:

$$Y = 14{,}5 + \frac{(91{,}51 - 91) \times (15{,}0 - 14{,}5)}{91{,}51 - 89{,}94} = 14{,}66\%.$$

С целью проверки рассчитаем курс облигации при ставке помещения 14,66%. Коэффициент приведения ренты:

$$a_{5;14,66} = \frac{1 - (1+0{,}1466)^{-5}}{0{,}1466} = 3{,}3793.$$

$P_k = \left((1+0{,}1466)^{-5} + 0{,}12 \times 3{,}3793\right) \times 100 = 91{,}0108,$ т.е. рассчитанный курс весьма близок к реальному курсу облигации.

Определим также полную доходность как простую ставку помещения по формуле (6.13):

$$Y = \frac{100 \times 0{,}12 + \left(\frac{100 - 91}{5}\right)}{91} = 0{,}1516, \quad \textit{т.е.}\ 15{,}16\%.$$

Пример 3. Привилегированная акция номиналом 100 долл. с фиксированным дивидендом 16% годовых приобретена за 180 долл. и продана через три года за 150 долл.

Ежегодный дивиденд по акции $d_T = 100 \times 0{,}16 = 16\,\text{долл.}$. Ее текущая доходность может быть найдена по формуле (6.16):

$$Y_T = \frac{16}{180} = 0{,}089 \text{ или } 8{,}9\%.$$

В соответствии с (6.18) полная доходность равна:

$$Y = \frac{(S_1 - S_0)}{S_0 n} + \frac{d_T}{S_0} = \frac{(150 - 180)}{180 \times 3} + \frac{16}{180} = 0{,}033 \text{ или } 3{,}3\%.$$

Пример 4. Инвестор приобрел вексель финансовой корпорации номиналом 1 миллион рублей с дисконтом 220 тыс. руб.; срок платежа по векселю наступает через 120 дней. Спустя 50 дней после покупки инвестор учел вексель в банке по простой учетной ставке 80%.

Доходность векселя к погашению составляет:

$$Y = \frac{D}{N - D} \times \frac{K}{t} = \frac{220}{1000 - 220} \times \frac{365}{120} = 0{,}858 \text{ или } 85{,}8\%.$$

Сумма, выплаченная банком инвестору при учете векселя, находится по формуле:

$$S = N\left(1 - j \times \frac{t_1}{K}\right),$$

где j – годовая учетная ставка банка (в долях единицы);

t_1 - количество дней от момента учета до момента погашения векселя.

В данном примере: $t_1 = 120 - 50 = 70\,\text{дней}; \; j = 0{,}8.$

$$S = 1000\left(1 - \frac{70}{365} \times 0{,}8\right) = 846{,}6 \text{ тыс.руб.}$$

Реальная доходность данной операции для инвестора составила:

$$Y_1 = \frac{846{,}6 - 780}{780} \times \frac{365}{50} = 0{,}623 \text{ или } 62{,}3\%.$$

Таким образом, преждевременный учет векселя привел к снижению доходности данной финансовой операции.

Глава 7. Анализ эффективности инвестиционных проектов

7.1. Показатели для оценки эффективности инвестиционных проектов

Для оценки экономической эффективности инвестиционных проектов используется система показателей и критериев. Некоторые из этих показателей являются общепринятыми, другие введены специально для решения данной задачи. Одним из таких специфических показателей выступает ***поток реальных денежных поступлений*** от проекта R(t), который характеризует весь объем генерируемых проектом свободных денежных средств.

Если из притока денежных средств П(t) исключить источники финансирования, а из оттока O(t) — инвестиционные затраты, то разность «очищенных» таким образом притока и оттока денежных средств будет представлять собой поток реальных денежных поступлений.

Если из потока реальных денег за период вычесть инвестиционные затраты, произведенные в этом периоде, то получим ***чистый доход*** F(t), или ***«чистый поток денежных средств»*** (net cash flow, NCF), т. е.

$$F(t) = R(t) - K(t),$$

где K(t) — инвестиционные затраты.

Таким образом, чистый доход формируется за счет чистой прибыли и амортизационных отчислений за вычетом инвестиционных затрат. Очевидно, что F(t) может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Все методы анализа эффективности инвестиционных проектов можно разбить на две группы: статические и динамические. Основное отличие этих групп заключается в том, что динамические методы рассматривают все потоки денежных средств с учетом временного фактора, используя принцип неравноценности денежных сумм, относящихся к разным моментам времени. Поэтому, чтобы ценность поступлений и выплат будущих периодов соответствовала текущему моменту времени, все платежи приводятся к одной дате (как правило, к дате начала проекта) посредством дисконтирования.

Статические методы не учитывают всю продолжительность срока жизни проекта, а также неравнозначность денежных потоков, относящихся к различным моментам времени. Однако в силу своей простоты и оперативности они находят достаточно широкое применение, особенно на предварительных стадиях проектного анализа и при экспресс-оценке различных вариантов проектных решений.

Статические методы определения целесообразности помещения капитала в инвестиционный проект чаще всего сводятся к расчету двух показателей — срока окупаемости проекта и простой нормы прибыли или их модификаций.

Срок окупаемости (payback period) характеризует продолжительность периода, в течение которого проект будет работать «на себя». Срок окупаемости $T_{ок}$ отражает связь между размером инвестиции K и потоком реальных денежных поступлений R. Если последний постоянен по интервалам планирования, то срок окупаемости определяется как

$$T_{ок} = \frac{K}{R}. \qquad (7.1)$$

Если же значение R переменное, т. е. изменяется по периодам, то срок окупаемости определяется последовательным суммированием поступлений и подсчетом времени до тех пор, пока сумма денежных поступлений не окажется равной сумме инвестиций. В результате расчета определяется количество периодов, необходимых для того, чтобы возместить первоначально вложенный капитал.

Срок окупаемости является широко распространенным показателем для оценки возможности возмещения первоначальных инвестиций в течение жизненного цикла инвестиционного проекта. Существенным недостатком данного показателя следует признать то, что он не учитывает деятельность проекта за пределами срока окупаемости. Особенно наглядно этот недостаток проявляется, когда отдача от вложений капитала неравномерная. Скорость, с которой происходит окупаемость первоначальных инвестиций, не является достаточным критерием оценки эффективности инвестиций. Поэтому рассматриваемый показатель не может применяться при сопоставлении вариантов, различающихся по продолжительности реализации. В ряде западных изданий высказывается мнение, что срок окупаемости должен служить не критерием выбора, а лишь использоваться в виде ограничения при принятии решения, т. е. если срок окупаемости инвестиционного проекта больше, чем принятое ограничение, то проект отвергается.

Второй показатель — ***простая норма прибыли*** ПНП (simple rate of return) отражает эффективность инвестиций и определяется как отношение чистой прибыли ЧП за период (обычно за год) к общему объему инвестиционных затрат ИЗ, т. е.

$$ПНП = ЧП / ИЗ$$

Сравнивая расчетную величину ПНП с минимальным или средним уровнем доходности, можно сделать вывод о целесообразности дальнейшего анализа данного инвестиционного проекта. Для более объективной оценки эффективности инвестиций с помощью этого показателя рекомендуется выбирать наиболее характерный («нормальный») интервал планирования или использовать среднее значение показателя ЧП.

Динамические методы могут быть отнесены к стандартному аппарату анализа инвестиционных проектов. В международной практике наибольшее распространение получили методики, предполагающие расчет следующих показателей:

чистой привиденной стоимости проекта;

срока окупаемости проекта;

внутренней нормы доходности проекта;

индекса доходности.

Чистая приведенная стоимость проекта (net present value, NPV) представляет собой разность интегральных дисконтированных потоков реальных денежных поступлений и инвестиционных затрат. Данный показатель характеризует эффект от реализации проекта, привиденный к начальному моменту времени с помощью дисконтирования.

Здесь лишь отметим, что дисконтирование осуществляется на основе формулы сложных процентов путем умножения соответствующей стоимостной величины на дисконтный множитель

$$v^t = (1+r)^{-t},$$

где r — процентная ставка, принятая для дисконтирования;

t — период дисконтирования.

Величина чистой приведенной стоимости W может быть рассчитана по формуле:

$$W = \sum_{t=0}^{n} (R_t - K_t) v^t, \qquad (7.2)$$

где R_t — поток денежных поступлений в период t;

K_t — инвестиционные затраты в этот период;

n — число периодов, входящих в жизненный цикл инвестиционного проекта (период начала осуществления проекта обычно принимают за нулевой, т. е. ему соответствует t = 0).

Используя понятие чистого дохода, формулу (7.2) можно переписать в виде:

$$W = \sum_{t=0}^{n} F_t (1+r)^{-t}. \qquad (7.3)$$

Необходимым условием эффективности проекта является выполнение соотношения W ф 0. Положительное значение показателя свидетельствует, что в течение жизненного цикла инвестиций реальные денежные поступления превысят общую сумму капиталовложений. Наоборот, отрицательное значение W показывает, что проект не обеспечит получения нормативной прибыли и, следовательно, приводит к потенциальным убыткам.

Чистая приведенная стоимость относится к категории абсолютных показателей. Он показывает, насколько возрастает стоимость активов компании от реализации данного инвестиционного проекта.

Значительное влияние на результат расчета NPV оказывает выбор процентной ставки (ставки сравнения), используемой при дисконтировании.

Ставка сравнения должна отражать стоимость капитала при его альтернативном использовании. В литературе рекомендуют применять так называемую минимально привлекательную ставку доходности, однако практически выбирают конкретные ориентиры. Например, при наличии свободных финансовых ресурсов такой величиной может быть депозитная банковская ставка; для действующего предприятия — существующий уровень рентабельности активов; для кредитных учреждений — средняя ставка по выдаваемым на сопоставимый срок кредитам.

Наиболее распространенный метод обоснования ставки дисконтирования — определение средневзвешенной цены капитала предприятия $\bar{r}$ по формуле:

$$\bar{r} = h_{ЗК} r_{ЗК} + h_{СК} r_{СК},$$

где $h_{ЗК}, h_{СК}$ — соответственно доли заемных и собственных средств предприятия в валюте баланса;

$r_{ЗК}$ — цена заемного капитала;

$r_{СК}$ — цена собственного капитала предприятия.

Стоимость индивидуальных источников финансирования выводится на основе соотношения текущей рыночной стоимости источника с ожидаемыми будущими поступлениями от его использования. Так, традиционно цена собственного капитала предприятия рассчитывается как отношение дивидендов к текущей цене акции плюс предполагаемый годовой темп роста дивидендов. Средняя цена заемных средств находится путем деления суммы начисленных и выплаченных процентных издержек по кредиторской задолженности на величину внешних обязательств предприятия.

Необходимо заметить, что некоторые компоненты инвестиционного проекта могут иметь определенную стоимость и после окончания срока жизни проекта. Это относится, прежде всего, к остаточной стоимости основных средств и оборотному капиталу. Поэтому, если ликвидационная стоимость проекта имеет сравнительно существенную величину, то ее дисконтированное значение должно учитываться при расчете NPV.

Срок окупаемости проекта (payback period, PP) рассматривался выше при обсуждении статических методов оценки эффективности инвестиций. Однако с финансовых позиций более обоснованным является расчет этого показателя с учетом временной стоимости денег. В этом случае под сроком окупаемости понимают продолжительность периода, в течение которого сумма потоков реальных денежных поступлений, дисконтированных на момент завершения инвестиций, достигнет суммы инвестиций.

Таким образом, для расчета срока окупаемости проекта с учетом временной стоимости денег необходимо: с помощью методов наращения и дисконтирования по ставке сравнения r найти сумму капиталовложений, приведенную к концу периода инвестирования;

определить срок окупаемости инвестиционного проекта путем суммирования последовательных членов ряда доходов, дисконтированных по ставке сравнения r, до тех пор, пока не будет получена сумма, равная объему инвестиций.

Недостатки этого показателя отмечались при рассмотрении статических методов.

Внутренняя норма доходности проекта (internal rate of return, IRR) — это ставка сравнения, используемая при дисконтировании, при которой чистая приведенная стоимость проекта становится равной нулю. Другими словами, это процентная ставка, при которой интегральный дисконтированный поток реальных денежных поступлений равен дисконтированному потоку инвестиционных затрат за весь жизненный цикл проекта. При расчете этого показателя предполагается полная капитализация получаемых чистых доходов, т. е. все полученные денежные средства должны быть реинвестированы. Если на сумму инвестиций начислять сложные проценты по ставке, равной внутренней норме доходности $r_в$, то обеспечивается получение распределенного во времени дохода, равного доходу по данному инвестиционному проекту. При неблагоприятных условиях величина IRR может оказаться нулевой или отрицательной.

Методика определения внутренней нормы доходности зависит от распределения во времени инвестиций и доходов от них. Можно пока лишь заметить, что IRR находится путем решения каким-либо итерационным методом уравнения:

$$\sum_{t=0}^{n} \left(R_t - K_t\right) v^t = 0$$

$$\textit{или} \qquad \sum_{t=0}^{n} F_t v^t = 0 \qquad (7.4)$$

относительно дисконтного множителя v^t.

IRR характеризует максимальную стоимость финансовых ресурсов, которые могут быть использованы при реализации проекта. Если инвестиция осуществляется за счет привлеченных средств, причем стоимость ресурсов определяется процентной ставкой *i*, то разность $\left(r_B - i\right)$ показывает эффект инвестиционной (предпринимательской) деятельности; при $r_B \pi i$ инвестиционный проект убыточен.

С другой стороны, значение IRR может рассматриваться как гарантированный уровень прибыльности инвестиционных затрат. Если оно превышает среднюю стоимость капитала в данном секторе инвестиционной деятельности, то инвестиционный проект может быть рекомендован к реализации.

Достоинством IRR как показателя эффективности инвестиций является его максимальная объективность, так как во всех остальных показателях присутствует ставка сравнения, являющаяся результатом субъективного выбора.

К недостаткам IRR следует отнести:

— трудоемкость расчета этого показателя;

— одно уравнение для нахождения $r_в$ может иметь несколько корней, что затрудняет интерпретацию результатов;

— при расчете IRR предполагается, что все промежуточные денежные поступления будут реинвестированы по ставке $r_в$, что на практике обычно не наблюдается: часть средств может быть направлена на выплату дивидендов, часть - на покупку различных финансовых инструментов с определенной степенью риска и определенным уровнем доходности.

Индекс доходности (profitability index, PI) - это отношение дисконтированных реальных денежных поступлений к приведенным на ту же дату инвестиционным затратам.

Если инвестиции *K* осуществляются разовой выплатой, то индекс доходности *U* равен:

$$U = \frac{\sum\limits_t R_t v^t}{K}. \qquad (7.5)$$

Если инвестиции распределены во времени:

$$U = \frac{\sum\limits_t R_t v^t}{\sum\limits_t K_t v^t}. \qquad (7.6)$$

Этот показатель тесно переплетается с показателем NPV. Их различие состоит в том, что индекс доходности является относительным показателем, а NPV - абсолютным. Если индекс доходности $U \phi 1$, то это означает, что сумма дисконтированных потоков реальных денежных средств больше суммы инвестиций. Поэтому и чистая приведенная стоимость будет положительной $(W \phi 0)$.

Если *PI* равен 1, то доходность инвестиций точно соответствует нормативу рентабельности *r*.

Таким образом, необходимым условием эффективности проекта является выполнение соотношения: $U \phi 1$.

7.2. Практика расчета показателей эффективности

Рассмотрим пример расчета

Пример. Рассмотрим процедуру расчета основных показателей эффективности инвестиционных проектов - чистой приведенной стоимости проекта, срока его окупаемости, внутренней нормы доходности и индекса доходности - для трех проектных вариантов.

Инвестиционный проект X характеризуется следующими потоками платежей:

№ интервала планирования	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Поток реальных денежных поступлений	0	400	500	400	350
Инвестиционные затраты	1200	0	0	0	0
Чистый поток ден. средств	-1200	400	500	400	350

Для определения чистой приведенной стоимости воспользуемся формулой (7.3), в которой примем ставку сравнения r равной 10%.

$$W = -1200 + \frac{400}{1{,}1} + \frac{500}{1{,}1^2} + \frac{400}{1{,}1^3} + \frac{350}{1{,}1^4} = 116{,}1.$$

Если аналогичные вычисления проделать, приняв $r = 15\%$, то получим $W = -10{,}2$. Таким образом, уже при 15%-й ставке сравнения инвестиционный проект является убыточным.

Срок окупаемости инвестиционного проекта определим дважды: сначала упрощенным способом без учета временной стоимости денег, затем с использованием методов дисконтирования.

Срок окупаемости обычно равен сумме некоторого целого числа периодов отдачи от инвестиций (интервалов планирования) и доли периода, определяемой величиной невозвращенного остатка. В данном примере при упрощенном подсчете срок окупаемости равен:

$$T_{OK} = 2 + \left(\frac{1200 - 900}{400}\right) = 2{,}75 \text{ } \textit{периода}.$$

Рассчитаем тот же показатель на основе потока реальных денежных средств, дисконтированного на момент завершения инвестиций. При $r = 10\%$ дисконтированный поток составит последовательность:

$$\frac{400}{1{,}1};\quad \frac{500}{1{,}1^2};\quad \frac{400}{1{,}1^3};\quad \frac{350}{1{,}1^4}\quad \textit{или}\quad 363{,}3;\quad 413{,}2;\quad 300{,}5;\quad 239{,}1.$$

Срок окупаемости T'_{OK} равен:

$$T'_{OK} = 3 + \left(\frac{1200 - (363{,}3 + 413{,}2 + 300{,}5)}{239{,}1}\right) = 3 + \left(\frac{123}{239{,}1}\right) = 3{,}5\ \textit{периода}.$$

Внутреннюю норму доходности $r_{в}$ найдем из уравнения (7.4). Для рассматриваемого примера это уравнение примет вид:

$$-1200 + \frac{400}{(1 + r_B)} + \frac{500}{(1 + r_B)^2} + \frac{400}{(1 + r_B)^3} + \frac{350}{(1 + r_B)^4} = 0.$$

Обозначим: $1 + r_B = y$, тогда

$$-1200 + \frac{400}{y} + \frac{500}{y^2} + \frac{400}{y^3} + \frac{350}{y^4} = 0$$

$$\textit{или}\quad f(y) = 120y^4 - 40y^3 - 50y^2 - 40y - 35 = 0.$$

Найдем приближенное решение этого уравнения. Если *f(y)* - непрерывная функция и имеет противоположные знаки в точках *a* и *b*, т. е. *f(a)* и *f(b)* разных знаков, то между *a* и *b* лежит по крайней мере один корень уравнения $f(y) = 0$. Давая *a* и *b* различные значения, всегда можно получить достаточно узкий интервал, в котором будет лежать только один корень рассматриваемого уравнения. В этом случае интервал (*a, b*) называется интервалом изоляции корня.

Воспользовавшись методом линейной интерполяции, в качестве приближенного значения корня можно взять величину

$$y = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

В нашем примере примем в качестве исходных оценок $a = 1{,}14$ и $b = 1{,}15$. Подставляя эти значения в *f(y)*, получаем:

$$f(1{,}14) = -2{,}167;\quad f(1{,}15) = 1{,}91.$$

$$\textit{Тогда}\qquad y = 1{,}14 + 2{,}167\left(\frac{1{,}15 - 1{,}14}{1{,}91 + 2{,}167}\right) = 1{,}1453.$$

Так как $y = 1 + r_B$, то $r_B = 0{,}1453$. Таким образом, внутренняя норма доходности составляет 14,53%.

В данном варианте инвестиционного проекта капиталовложения осуществляются разовой выплатой, поэтому для нахождения индекса доходности воспользуемся формулой (7.5).

$$\sum_t R_t v^t = 363{,}3 + 413{,}2 + 300{,}5 + 239{,}1 = 1316{,}1.$$

$$U = \frac{1316{,}1}{1200} = 1{,}10.$$

Рассмотрим теперь инвестиционный проект *Y*, для которого характерна следующая схема денежных потоков:

№ интервала планирования	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Поток реальных денежных поступлений	0	300	400	400	200
Инвестиционные затраты	500	500	0	0	0
Чистый поток ден. средств	-500	-200	400	400	200

Показатели эффективности данного проектного варианта находим при той же ставке сравнения $r = 10\%$.

Чистая приведенная стоимость проекта:

$$W = -500 - \frac{200}{1{,}1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{400}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} = 85{,}9.$$

Срок окупаемости проекта (статический показатель):

$$T_{OK} = 1 + \left(\frac{700 - 400}{400}\right) = 1{,}75 \textit{ периода.}$$

Для нахождения срока окупаемости на базе дисконтированных потоков платежей найдем сначала сумму капиталовложений с процентами по ставке $r = 10\%$ на дату завершения инвестиций:

$$K = 500(1 + 0{,}1) + 200 = 750.$$

(Здесь при расчете в интервале планирования 2 учтены реальные денежные поступления в размере 300 ед.).

Дисконтированные на момент завершения инвестиций потоки реальных поступлений денежных средств составят последовательность:

$$\frac{400}{1{,}1};\quad \frac{400}{1{,}1^2};\quad \frac{200}{1{,}1^3}\qquad \textit{или}\quad 363{,}6;\quad 330{,}6;\quad 150{,}3.$$

Срок окупаемости проекта составляет:

$$T'_{OK} = 2 + \left(\frac{750 - (363{,}6 + 330{,}6)}{150{,}3}\right) = 2{,}37\ \textit{периода.}$$

Внутреннюю норму доходности находим из уравнения относительно $y = 1 + r_B$:

$$-500 - \frac{200}{y} + \frac{400}{y^2} + \frac{400}{y^3} + \frac{200}{y^4} = 0 \quad \textit{или} \quad 5y^4 + 2y^3 - 4y^2 - 4y - 2 = 0.$$

Исходные оценки: $a = 1{,}15$; $b = 1{,}16$.

$f(1{,}15) = -0{,}10;\quad f(1{,}16) = 0{,}07.$

$$y = 1{,}15 + 0{,}10\left(\frac{1{,}16 - 1{,}15}{0{,}07 + 0{,}10}\right) = 1{,}1559, \quad \textit{т.е.} \quad r_B = 0{,}1559 \quad \textit{или} \quad 15{,}59\%.$$

Для нахождения индекса доходности воспользуемся формулой (7.6).

$$\sum K_t v^t = 500 + \frac{500}{1{,}1} = 954{,}5;$$

$$\sum R_t v^t = \frac{300}{1{,}1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{400}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} = 1040{,}4, \quad \textit{следовательно,} \quad U = \frac{1040{,}4}{954{,}5} = 1{,}09.$$

Для проекта Z характерны разовые инвестиции и равномерное поступление доходов. В этом случае поток поступлений целесообразно рассматривать как ренту, что, во-первых, упрощает расчет показателей эффективности, а во-вторых, дает возможность исследовать их чувствительность к изменению различных факторов.

Вопросы анализа финансовых рент рассмотрены в главе 4. Поэтому здесь мы используем основные понятия и формулы, связанные с рентой, без дополнительных пояснений.

№ интервала планирования	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Поток реальных денежных поступлений	0	350	350	350	350
Инвестиционные затраты	1000	0	0	0	0
Чистый поток ден. средств	-1000	350	350	350	350

Чистую приведенную стоимость проекта находим как разность современной величины A ренты, каждый член которой R равен 350, и объема инвестиций, K:

$$W = A - K = Ra_{n;r} - K,$$

где $a_{n;r}$ - коэффициент приведения ренты со сроком n и процентной ставкой r.

В данном примере: $n = 4,\ r = 10\%,\ a_{4;10} = 3{,}169865446$ (по таблице коэффициентов приведения ренты).

$$W = 1109{,}5 - 1000 = 109{,}5.$$

Срок окупаемости найдем из условия полной окупаемости инвестиций за срок T', т. е. современная величина ренты с постоянным членом R, процентной ставкой r и сроком T' должна быть равна объему инвестиций K. Таким образом,

$$Ra_{T';r} = K$$

или с учетом (4.4): $$R\frac{1-(1+r)^{-T'}}{r} = K.$$

Из последнего выражения находим срок окупаемости T':

$$T' = \frac{-\ln\left(1-\frac{Kr}{R}\right)}{\ln(1+r)}.$$

Подставляя значения K, R и r, получаем:

$$T' = \frac{-\ln\left(1-1000\times\frac{0{,}1}{350}\right)}{\ln(1+0{,}1)} = \frac{-\ln 0{,}7143}{\ln 1{,}1} = \frac{0{,}3369}{0{,}0953} = 3{,}54\ \textit{периода}.$$

При нахождении внутренней нормы доходности объем инвестиций приравнивается современной величине соответствующей ренты, т. е.

$$K = R\frac{1-(1+r_B)^{-n}}{r_B}$$

или $$\frac{K}{R}r_B + \frac{1}{(1+r_B)^n} - 1 = 0.$$

Это уравнение не имеет алгебраического решения, поэтому требуется использовать приближенные методы. С учетом данных проекта уравнение примет вид:

$$2{,}86r_B + \frac{1}{(1 + r_B)^4} - 1 = 0.$$

В качестве исходных оценок выберем $a = 0{,}14$ и $b = 0{,}15$.

$f(a) = -0{,}0079, \quad f(b) = 0{,}0003.$

$r_B = 0{,}14 + \dfrac{0{,}0079(0{,}15 - 0{,}14)}{0{,}0003 + 0{,}0079} = 0{,}1496 \quad \text{или} \quad 14{,}96\%.$

Индекс доходности найдем как отношение современной величины ренты к величине инвестиций:

$$U = \frac{A}{K} = \frac{Ra_{4;10}}{K} = \frac{1109{,}5}{1000} = 1{,}11.$$

Результаты расчетов показателей эффективности по проектам X, Y и Z сведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Показатели	**Проект X**	**Проект Y**	**Проект Z**
NPV (W)	116,1	85,9	109,5
PP ($T'_{ок}$)	3,5	2,37	3,54
IRR ($r_в$), %	14,53	15,59	14,96
PI (U)	1,10	1,09	1,11

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ*

Задание №1

В банке взяли ссуду 100000 рублей в момент времени t_1. Какая сумма долга будет на момент t_2, если проценты простые по ставке *i* и расчеты ведутся по схеме:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
t_1	13.11.06	21.12.07	22.06.07	28.09.07	07.10.07
t_2	07.08.07	15.06.08	09.05.08	12.04.08	08.08.08
i	0,12	0,13	0,09	0,14	0,15
Вариант	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t_1	06.06.06	03.02.08	07.07.07	09.08.07	16.09.07
t_2	11.03.07	12.11.08	08.04.08	13.03.08	11.02.08
i	0,16	0,14	0,15	0,16	0,17
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
t_1	18.10.09	25.11.08	12.06.07	08.09.09	04.10.07
t_2	17.08.10	19.06.09	19.03.08	12.05.10	10.09.08
i	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
Вариант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
t_1	16.06.08	13.02.08	07.06.07	09.09.07	16.09.09
t_2	11.05.09	10.11.08	08.05.08	13.08.08	11.02.10
i	0,16	0,07	0,08	0,09	0,1

* Задания заимствованы из учебного пособия: С. И. Моисеев, А. В. Татаринцев. Математика финансовых операций. – Воронеж: ВФ МГЭИ, 2010. – 76 с.

Задание №2

На депозит положили *P* тысяч рублей под сложный процент.

Определить:

а) накопленную сумму через *n* лет, если ставка процента *i* и процент начисляется *m* раз в году.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	150	140	130	120	110	100	125	145	115	95
n	2	3	4	5	6	5	4	3	5	7
i	0,1	0,12	0,13	0,11	0,09	0,08	0,13	0,12	0,11	0,1
m	12	6	4	3	2	4	3	12	6	2
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
P	130	120	110	100	125	150	140	95	125	145
n	5	4	3	5	7	2	3	4	5	6
i	0,1	0,12	0,13	0,11	0,09	0,08	0,13	0,12	0,11	0,1
m	6	12	4	2	3	4	3	12	6	2

Задание №3

Определить денежную сумму, которую нужно положить в банк на депозит сроком на *n* лет, если в конце срока нужно, чтобы накопленная сумма равнялась 300000 рублей и ставка наращения равна *i*, если:

а) процент простой;

б) процент сложный с ежегодным начислением процента;

в) процент сложный с ежеквартальным начислением процента.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	5	4	3	5	7	2	3	4	5	6
i	0,08	0,13	0,12	0,11	0,1	0,1	0,12	0,13	0,11	0,09
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
n	6	2	4	3	5	7	3	4	5	2
i	0,09	0,14	0,13	0,11	0,12	0,1	0,16	0,15	0,11	0,08

Задание №4

Вексель будет учтен через *n* лет за 50000 рублей. Определить его современную стоимость при учетной ставке *d*, если:

а) процент простой;

б) процент сложный с ежегодным удержанием процента.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	4	5	2	3	4	6	4	3	2	7
d	0,07	0,06	0,1	0,09	0,08	0,05	0,07	0,08	0,09	0,06
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
n	4	3	6	5	2	3	5	8	6	4
d	0,09	0,08	0,1	0,07	0,06	0,05	0,09	0,11	0,09	0,08

Задание №5

Определить номинальную ставку банка (брутто-ставку), обеспечивающую реальную доходность *i*, если ожидаемая инфляция составляет α. Какая реальная доходность по вкладу, если номинальная составляет 11% при ожидаемой инфляции α.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
i	0,06	0,07	0,08	0,09	0,07	0,1	0,11	0,12	0,05	0,08
α	0,08	0,09	0,07	0,06	0,07	0,08	0,09	0,07	0,03	0,05
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
i	0,09	0,11	0,1	0,08	0,12	0,13	0,1	0,6	0,07	0,09
α	0,09	0,08	0,11	0,07	0,1	0,09	0,06	0,07	0,06	0,05

Задание №6

Заемщик обязан выплатить сумму α тыс.р. через год и сумму β еще через 2 года. Но он решил сегодня досрочно погасить весь долг. Сколько должен заплатить заемщик при сложной ставке процента *i*.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
α	500	700	1500	100	900	600	400	500	1200	400
β	300	500	900	300	800	100	400	700	300	100
i	0,1	0,11	0,12	0,13	0,13	0,1	0,11	0,12	0,05	0,08
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
α	1500	900	1200	1100	700	400	600	800	1400	300
β	600	400	500	1200	400	500	700	1500	100	900
i	0,15	0,14	0,13	0,12	0,11	0,1	0,09	0,13	0,16	0,08

Задание №7

Семья может ежегодно класть в банк по *R* рублей под 11 % годовых. Какая сумма накопится за *n* лет, если процент начисляется раз в году.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
R	2000	4000	3500	1500	3000	5500	4500	5000	2000	2500
n	5	4	3	6	5	7	5	4	3	4
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
R	3000	4500	2500	5500	4000	1500	6500	7000	8000	7500
n	3	4	5	6	5	7	3	6	5	8

Задание №8

Семья хочет накопить 500000 на автомобиль, вкладывая в банк 50000 ежегодно. Годовая ставка процента в банке (процент сложный) составляет *i*. Какое время придется копить?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
i	0,1	0,11	0,12	0,13	0,13	0,1	0,11	0,12	0,05	0,08
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
i	0,15	0,14	0,13	0,12	0,11	0,1	0,09	0,13	0,16	0,08

Литература

1. Брюсов П.Н., Брюсов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В. Финансовая математика: Учебное пособие.- М.: КноРус, 2013.-224с.

2. Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов: Пер. с серб..- М.: Финансы и статистика, 1994.- 268с.

3. Малыхин В.И. Финансовая математика: Учебное пособие.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.- 237с.

4. Малыхин В.И., Моисеев С.И., Родин В.А. Финансовая математика и модели налогообложения в упражнениях и задачах: Учебное пособие.- Воронеж: АОНО «ИММиФ», 2008.- 280с.

5. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика: Учебно-справочное пособие.- М.:Инфра-М, 2002.- 383с.

6. Моисеев С.И., Татаринцев А.В. Математика финансовых операций: Учебное пособие.- Воронеж: ВФ МГЭИ, 2010.- 76с.

7. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник.- М.: Дело, 2000.- 400с.

Приложение. ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ

Таблица 1

Порядковые номера дней в году

День месяца	**Январь**	**Февраль**	**Март**	**Апрель**	**Май**	**Июнь**	**Июль**	**Август**	**Сентябрь**	**Октябрь**	**Ноябрь**	**Декабрь**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	199	330	330
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

Таблица 2

Множители наращения (сложные проценты)

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	1	**2**	**3**	**4**
1	1,01	1,02	1,03	1,04
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816
3	1,030301	1,061208	1,092727	1,124864
4	1,04060401	1,08243216	1,12550881	1,16985856
5	1,051010050	1,104080803	1,159274074	1,216652902
6	1,061520151	1,126162419	1,194052297	1,265319018
7	1,072135352	1,148685668	1,229873865	1,315931779
8	1,082856706	1,171659381	1,266770081	1,368569050
9	1,093685273	1,195092569	1,304773184	1,423311812
10	1,104622125	1,218994420	1,343916379	1,480244285
11	1,115668347	1,243374308	1,384233871	1,539454056
12	1,126825030	1,268241795	1,425760887	1,601032219
13	1,138093280	1,293606630	1,468533713	1,665073507
14	1,149474213	1,319478763	1,512589725	1,731676448
15	1,160968955	1,345868338	1,557967417	1,800943506
16	1,172578645	1,372785705	1,604706439	1,872981246
17	1,184304431	1,400241419	1,652847632	1,947900496
18	1,196147476	1,428246248	1,702433061	2,025816515
19	1,208108950	1,456811173	1,753506053	2,106849176
20	1,220190040	1,485947396	1,806111235	2,191123143
21	1,232391940	1,515666344	1,860294572	2,278768069
22	1,244715860	1,545979671	1,916103409	2,369918792
23	1,257163018	1,576899264	1,973586511	2,464715543
24	1,269734649	1,608437249	2,032794106	2,563304165
25	1,282431995	1,640605994	2,093777930	2,665836331
26	1,295256315	1,673418114	2,156591268	2,772469785
27	1,308208878	1,706886477	2,221289006	2,883368576
28	1,321290967	1,741024206	2,287927676	2,998703319
29	1,334503877	1,775844690	2,356565506	3,118651452
30	1,347848915	1,811361584	2,427262471	3,243397510
31	1,361327404	1,847588816	2,500080345	3,373133410
32	1,374940679	1,884540592	2,575082756	3,508058747
33	1,388690085	1,922231404	2,652335238	3,648381097
34	1,402576986	1,960676032	2,731905296	3,794316341
35	1,416602756	1,999889553	2,813862454	3,946088994
36	1,430768784	2,039887344	2,898278328	4,103932554
37	1,445076471	2,080685091	2,985226678	4,268089856
38	1,459527236	2,122298792	3,074783478	4,438813450
39	1,474122509	2,164744768	3,167026983	4,616365988
40	1,488863734	2,208039664	3,262037792	4,801020628
41	1,503752371	2,252200457	3,359898926	4,993061453
42	1,518789895	2,297244466	3,460695894	5,192783911
43	1,533977794	2,343189355	3,564516770	5,400495268
44	1,549317572	2,390053142	3,671452273	5,616515078
45	1,564810747	2,437854205	3,781595842	5,841175681
46	1,580458855	2,486611289	3,895043717	6,074822709
47	1,596263443	2,536343515	4,011895028	6,317815617
48	1,612226078	2,587070385	4,132251879	6,570528242
49	1,628348338	2,638811793	4,256219436	6,833349371
50	1,644631822	2,691588029	4,383906019	7,106683346
60	1,816696699	3,281030788	5,891603104	10,51962741
70	2,006763368	3,999558223	7,917821912	15,57161835
80	2,216715217	4,875439156	10,64089056	23,04979907
90	2,448632675	5,943133126	14,30046711	34,11933334
100	2,704813829	7,244646118	19,21863198	50,50494818

Таблица 2 (продолжение)

Множители наращения (сложные проценты)

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	5	**6**	**7**	**8**
1	1,05	1,06	1,07	1,08
2	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664
3	1,157625	1,191016	1,225043	1,259712
4	1,21550625	1,26247696	1,31079601	1,36048896
5	1,276281563	1,338225578	1,402551731	1,469328077
6	1,340095641	1,418519112	1,500730352	1,586874323
7	1,407100423	1,503630259	1,605781476	1,713824269
8	1,477455444	1,593848075	1,718186180	1,850930210
9	1,551328216	1,689478959	1,838459212	1,999004627
10	1,628894627	1,790847697	1,967151357	2,158924997
11	1,710339358	1,898298558	2,104851952	2,331638997
12	1,795856326	2,012196472	2,252191589	2,518170117
13	1,885649142	2,132928260	2,409845000	2,719623726
14	1,979931599	2,260903956	2,578534150	2,937193624
15	2,078928179	2,396558193	2,759031541	3,172169114
16	2,182874588	2,540351685	2,952163749	3,425942643
17	2,292018318	2,692772786	3,158815211	3,700018055
18	2,406619234	2,854339153	3,379932276	3,996019499
19	2,526950195	3,025599502	3,616527535	4,315701059
20	2,653297705	3,207135472	3,869684462	4,660957144
21	2,785962590	3,399563601	4,140562375	5,033833715
22	2,925260720	3,603537417	4,430401741	5,436540413
23	3,071523756	3,819749662	4,740529863	5,871463646
24	3,225099944	4,048934641	5,072366953	6,341180737
25	3,386354941	4,291870720	5,427432640	6,848475196
26	3,555672688	4,549382963	5,807352925	7,396353212
27	3,733456322	4,822345941	6,213867630	7,988061469
28	3,920129138	5,111686697	6,648838364	8,627106386
29	4,116135595	5,418387899	7,114257049	9,317274897
30	4,321942375	5,743491173	7,612255043	10,06265689
31	4,538039494	6,088100643	8,145112896	10,86766944
32	4,764941469	6,453386682	8,715270798	11,73708300
33	5,003188542	6,840589883	9,325339754	12,67604964
34	5,253347969	7,251025276	9,978113537	13,69013361
35	5,516015368	7,686086792	10,67658148	14,78534429
36	5,791816136	8,147252000	11,42394219	15,96817184
37	6,081406943	8,636087120	12,22361814	17,24562558
38	6,385477290	9,154252347	13,07927141	18,62527563
39	6,704751154	9,703507488	13,99482041	20,11529768
40	7,039988712	10,28571794	14,97445784	21,72452150
41	7,391988148	10,90286101	16,02266989	23,46248322
42	7,761587555	11,55703267	17,14425678	25,33948187
43	8,149666933	12,25045463	18,34435475	27,36664042
44	8,557150280	12,98548191	19,62845959	29,55597166
45	8,985007793	13,76461083	21,00245176	31,92044939
46	9,434258183	14,59048748	22,47262338	34,47408534
47	9,905971092	15,46591673	24,04570702	37,23201217
48	10,40126965	16,39387173	25,72890651	40,21057314
49	10,92133313	17,37750403	27,52992997	43,42741899
50	11,46739979	18,42015427	29,45702506	46,90161251
60	18,67918589	32,98769085	57,94642683	101,2570637
70	30,42642554	59,07593018	113,9893922	218,6064059
80	49,56144107	105,7959935	224,2343876	471,9548343
90	80,73036505	189,4645112	441,1029799	1018,915089
100	131,5012578	339,3020835	867,7163256	2199,761256

Таблица 2 (продолжение)

Множители наращения (сложные проценты)

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	10	**12**	**15**	**20**
1	1,1	1,12	1,15	1,2
2	1,21	1,2544	1,3225	1,44
3	1,331	1,404928	1,520875	1,728
4	1,4641	1,57351936	1,74900625	2,0736
5	1,61051	1,762341683	2,011357188	2,48832
6	1,771561	1,973822685	2,313060766	2,985984
7	1,9487171	2,210681407	2,660019880	3,5831808
8	2,14358881	2,475963176	3,059022863	4,29981696
9	2,357947691	2,773078757	3,517876292	5,159780352
10	2,593742460	3,105848208	4,045557736	6,191736422
11	2,853116706	3,478549993	4,652391396	7,430083707
12	3,138428377	3,895975993	5,350250105	8,916100448
13	3,452271214	4,363493112	6,152787621	10,69932054
14	3,797498336	4,887112285	7,075705764	12,83918465
15	4,177248169	5,473565759	8,137061629	15,40702157
16	4,594972986	6,130393650	9,357620874	18,48842589
17	5,054470285	6,866040888	10,76126400	22,18611107
18	5,559917313	7,689965795	12,37545361	26,62333328
19	6,115909045	8,612761690	14,23177165	31,94799994
20	6,727499949	9,646293093	16,36653739	38,33759992
21	7,400249944	10,80384826	18,82151800	46,00511991
22	8,140274939	12,10031006	21,64474570	55,20614389
23	8,954302433	13,55234726	24,89145756	66,24737267
24	9,849732676	15,17862893	28,62517619	79,49684720
25	10,83470594	17,00006441	32,91895262	95,39621664
26	11,91817654	19,04007214	37,85679551	114,4754600
27	13,10999419	21,32488079	43,53531484	137,3705520
28	14,42099361	23,88386649	50,06561207	164,8446624
29	15,86309297	26,74993047	57,57545388	197,8135948
30	17,44940227	29,95992212	66,21177196	237,3763138
31	19,19434250	33,55511278	76,14353775	284,8515766
32	21,11377675	37,58172631	87,56506841	341,8218919
33	23,22515442	42,09153347	100,6998287	410,1862702
34	25,54766986	47,14251748	115,8048030	492,2235243
35	28,10243685	52,79961958	133,1755234	590,6682292
36	30,91268053	59,13557393	153,1518519	708,8018750
37	34,00394859	66,23184280	176,1246297	850,5622500
38	37,40434344	74,17966394	202,5433242	1020,674700
39	41,14477779	83,08122361	232,9248228	1224,809640
40	45,25925557	93,05097044	267,8635462	1469,771568
41	49,78518112	104,2170869	308,0430782	1763,725882
42	54,76369924	116,7231373	354,2495399	2116,471058
43	60,24006916	130,7299138	407,3869709	2539,765269
44	66,26407608	146,4175035	468,4950165	3047,718323
45	72,89048369	163,9876039	538,7692690	3657,261988
46	80,17953205	183,6661163	619,5846593	4388,714386
47	88,19748526	205,7060503	712,5223582	5266,457263
48	97,01723378	230,3907763	819,4007120	6319,748715
49	106,7189572	258,0376695	942,3108188	7583,698458
50	117,3908529	289,0021898	1083,657442	9100,438150
60	304,4816395	897,5969335	4383,998746	56347,51435
70	789,7469568	2787,799828	17735,72004	348888,9569
80	2048,400215	8658,483100	71750,87940	2160228,462
90	5313,022612	26891,93422	290272,3252	13375565,25
100	13780,61234	83522,26573	1174313,451	82817974,52

Таблица 3

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	1	**2**	**3**	**4**
1	0,99009901	0,980392157	0,970873786	0,961538462
2	0,980296049	0,961168781	0,942595909	0,924556213
3	0,970590148	0,942322335	0,915141659	0,888996359
4	0,960980345	0,923845426	0,888487048	0,854804191
5	0,951465688	0,905730810	0,862608784	0,821927107
6	0,942045235	0,887971382	0,837484257	0,790314526
7	0,932718055	0,870560179	0,813091511	0,759917813
8	0,923483223	0,853490371	0,789409234	0,730690205
9	0,914339824	0,836755266	0,766416732	0,702586736
10	0,905286955	0,820348300	0,744093915	0,675564169
11	0,896323718	0,804263039	0,722421277	0,649580932
12	0,887449225	0,788493176	0,701379880	0,624597050
13	0,878662599	0,773032525	0,680951340	0,600574086
14	0,869962970	0,757875025	0,661117806	0,577475083
15	0,861349475	0,743014730	0,641861947	0,555264503
16	0,852821262	0,728445814	0,623166939	0,533908176
17	0,844377487	0,714162563	0,605016446	0,513373246
18	0,836017314	0,700159375	0,587394608	0,493628121
19	0,827739915	0,686430760	0,570286027	0,474642424
20	0,819544470	0,672971333	0,553675754	0,456386946
21	0,811430169	0,659775817	0,537549276	0,438833602
22	0,803396207	0,646839036	0,521892501	0,421955387
23	0,795441789	0,634155918	0,506691748	0,405726333
24	0,787566127	0,621721488	0,491933736	0,390121474
25	0,779768443	0,609530871	0,477605569	0,375116802
26	0,772047963	0,597579285	0,463694727	0,360689233
27	0,764403924	0,585862044	0,450189056	0,346816570
28	0,756835568	0,574374553	0,437076753	0,333477471
29	0,749342147	0,563112307	0,424346362	0,320651415
30	0,741922918	0,552070889	0,411986760	0,308318668
31	0,734577146	0,541245970	0,399987145	0,296460258
32	0,727304105	0,530633304	0,388337034	0,285057940
33	0,720103075	0,520228729	0,377026247	0,274094173
34	0,712973341	0,510028166	0,366044900	0,263552090
35	0,705914199	0,500027613	0,355383398	0,253415471
36	0,698924950	0,490223150	0,345032425	0,243668722
37	0,692004901	0,480610932	0,334982937	0,234296848
38	0,685153367	0,471187188	0,325226152	0,225285431
39	0,678369670	0,461948224	0,315753546	0,216620606
40	0,671653139	0,452890415	0,306556841	0,208289045
41	0,665003108	0,444010211	0,297628001	0,200277928
42	0,658418919	0,435304128	0,288959224	0,192574930
43	0,651899919	0,426768753	0,280542936	0,185168202
44	0,645445465	0,418400739	0,272371783	0,178046348
45	0,639054916	0,410196803	0,264438624	0,171198412
46	0,632727639	0,402153728	0,256736528	0,164613858
47	0,626463009	0,394268361	0,249258765	0,158282555
48	0,620260405	0,386537609	0,241998801	0,152194765
49	0,614119213	0,378958440	0,234950292	0,146341120
50	0,608038825	0,371527882	0,228107080	0,140712615
60	0,550449616	0,304782267	0,169733090	0,095060401
70	0,498314857	0,250027614	0,126297359	0,064219401
80	0,451117939	0,205109728	0,093977097	0,043384326
90	0,408391185	0,168261417	0,069927786	0,029308896
100	0,369711212	0,138032967	0,052032840	0,019800040

Таблица 3 (продолжение)

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	5	**6**	**7**	**8**
1	0,952380952	0,943396226	0,934579439	0,925925926
2	0,907029479	0,889996440	0,873438728	0,857338820
3	0,863837599	0,839619283	0,816297877	0,793832241
4	0,822702475	0,792093663	0,762895212	0,735029853
5	0,783526167	0,747258173	0,712986180	0,680583197
6	0,746215397	0,704960540	0,666342224	0,630169627
7	0,710681330	0,665057114	0,622749742	0,583490395
8	0,676839362	0,627412371	0,582009105	0,540268885
9	0,644608916	0,591898464	0,543933743	0,500248967
10	0,613913254	0,558394777	0,508349292	0,463193488
11	0,584679289	0,526787525	0,475092796	0,428882859
12	0,556837418	0,496969364	0,444011959	0,397113759
13	0,530321351	0,468839022	0,414964448	0,367697925
14	0,505067953	0,442300964	0,387817241	0,340461041
15	0,481017098	0,417265061	0,362446020	0,315241705
16	0,458111522	0,393646284	0,338734598	0,291890468
17	0,436296688	0,371364419	0,316574391	0,270268951
18	0,415520655	0,350343791	0,295863916	0,250249029
19	0,395733957	0,330513011	0,276508333	0,231712064
20	0,376889483	0,311804727	0,258419003	0,214548207
21	0,358942365	0,294155403	0,241513087	0,198655748
22	0,341849871	0,277505097	0,225713165	0,183940507
23	0,325571306	0,261797261	0,210946883	0,170315284
24	0,310067910	0,246978548	0,197146620	0,157699337
25	0,295302772	0,232998631	0,184249178	0,146017905
26	0,281240735	0,219810029	0,172195493	0,135201764
27	0,267848319	0,207367952	0,160930367	0,125186818
28	0,255093637	0,195630143	0,150402212	0,115913721
29	0,242946321	0,184556739	0,140562815	0,107327519
30	0,231377449	0,174110131	0,131367117	0,099377333
31	0,220359475	0,164254841	0,122773007	0,092016049
32	0,209866167	0,154957397	0,114741128	0,085200045
33	0,199872540	0,146186223	0,107234699	0,078888931
34	0,190354800	0,137911531	0,100219345	0,073045306
35	0,181290285	0,130105218	0,093662939	0,067634543
36	0,172657415	0,122740772	0,087535457	0,062624577
37	0,164435633	0,115793181	0,081808838	0,057985719
38	0,156605365	0,109238850	0,076456858	0,053690481
39	0,149147966	0,103055519	0,071455008	0,049713408
40	0,142045682	0,097222188	0,066780381	0,046030933
41	0,135281602	0,091719045	0,062411571	0,042621235
42	0,128839621	0,086527401	0,058328571	0,039464106
43	0,122704401	0,081629624	0,054512683	0,036540839
44	0,116861334	0,077009079	0,050946433	0,033834110
45	0,111296509	0,072650074	0,047613489	0,031327880
46	0,105996675	0,068537806	0,044498588	0,029007296
47	0,100949214	0,064658308	0,041587465	0,026858608
48	0,096142109	0,060998403	0,038866790	0,024869081
49	0,091563913	0,057545664	0,036324103	0,023026927
50	0,087203727	0,054288362	0,033947759	0,021321229
60	0,053535524	0,030314338	0,017257320	0,009875854
70	0,032866168	0,016927368	0,008772746	0,004574431
80	0,020176976	0,009452154	0,004459619	0,002118847
90	0,012386913	0,005278033	0,002267044	0,000981436
100	0,007604490	0,002947226	0,001152450	0,000454595

Таблица 3 (продолжение)

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	10	**12**	**15**	**20**
1	0,909090909	0,892857143	0,869565217	0,833333333
2	0,826446281	0,797193878	0,756143667	0,694444444
3	0,751314801	0,711780248	0,657516232	0,578703704
4	0,683013455	0,635518078	0,571753246	0,482253086
5	0,620921323	0,567426856	0,497176735	0,401877572
6	0,564473930	0,506631121	0,432327596	0,334897977
7	0,513158118	0,452349215	0,375937040	0,279081647
8	0,466507380	0,403883228	0,326901774	0,232568039
9	0,424097618	0,360610025	0,284262412	0,193806700
10	0,385543289	0,321973237	0,247184706	0,161505583
11	0,350493900	0,287476104	0,214943223	0,134587986
12	0,318630818	0,256675093	0,186907150	0,112156655
13	0,289664380	0,229174190	0,162527957	0,093463879
14	0,263331254	0,204619813	0,141328658	0,077886566
15	0,239392049	0,182696261	0,122894485	0,064905472
16	0,217629136	0,163121662	0,106864770	0,054087893
17	0,197844669	0,145644341	0,092925887	0,045073244
18	0,179858790	0,130039590	0,080805119	0,037561037
19	0,163507991	0,116106777	0,070265321	0,031300864
20	0,148643628	0,103666765	0,061100279	0,026084053
21	0,135130571	0,092559612	0,053130677	0,021736711
22	0,122845974	0,082642510	0,046200589	0,018113926
23	0,111678158	0,073787956	0,040174425	0,015094938
24	0,101525598	0,065882103	0,034934283	0,012579115
25	0,092295998	0,058823307	0,030377637	0,010482596
26	0,083905453	0,052520809	0,026415337	0,008735497
27	0,076277684	0,046893580	0,022969858	0,007279581
28	0,069343350	0,041869268	0,019973790	0,006066317
29	0,063039409	0,037383275	0,017368513	0,005055264
30	0,057308553	0,033377924	0,015103055	0,004212720
31	0,052098685	0,029801718	0,013133091	0,003510600
32	0,047362441	0,026608677	0,011420079	0,002925500
33	0,043056764	0,023757747	0,009930504	0,002437917
34	0,039142513	0,021212274	0,008635220	0,002031597
35	0,035584103	0,018939530	0,007508887	0,001692998
36	0,032349184	0,016910295	0,006529467	0,001410832
37	0,029408349	0,015098478	0,005677798	0,001175693
38	0,026734863	0,013480784	0,004937215	0,000979744
39	0,024304421	0,012036414	0,004293231	0,000816453
40	0,022094928	0,010746798	0,003733244	0,000680378
41	0,020086298	0,009595356	0,003246299	0,000566982
42	0,018260271	0,008567282	0,002822869	0,000472485
43	0,016600247	0,007649359	0,002454669	0,000393737
44	0,015091133	0,006829785	0,002134494	0,000328114
45	0,013719212	0,006098022	0,001856082	0,000273429
46	0,012472011	0,005444662	0,001613984	0,000227857
47	0,011338192	0,004861306	0,001403465	0,000189881
48	0,010307447	0,004340452	0,001220404	0,000158234
49	0,009370406	0,003875403	0,001061221	0,000131862
50	0,008518551	0,003460181	0,000922801	0,000109885
60	0,003284270	0,001114086	0,000228102	1,77470E-05
70	0,001266228	0,000358706	5,63834E-05	2,86624E-06
80	0,000488186	0,000115494	1,39371E-05	4,62914E-07
90	0,000188217	3,71859E-05	3,44504E-06	7,47632E-08
100	7,25657E-05	1,19729E-05	8,51561E-07	1,20747E-08

Таблица 4

Коэффициенты наращения годовой ренты

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	1	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
2	2,01	2,02	2,03	2,04
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216
4	4,060401	4,121608	4,183627	4,246464
5	5,10100501	5,20404016	5,30913581	5,41632256
6	6,15201506	6,308120963	6,468409884	6,632975462
7	7,213535211	7,434283383	7,662462181	7,898294481
8	8,285670563	8,582969050	8,892336046	9,214226260
9	9,368527268	9,754628431	10,15910613	10,58279531
10	10,46221254	10,94972100	11,46387931	12,00610712
11	11,56683467	12,16871542	12,80779569	13,48635141
12	12,68250301	13,41208973	14,19202956	15,02580546
13	13,80932804	14,68033152	15,61779045	16,62683768
14	14,94742132	15,97393815	17,08632416	18,29191119
15	16,09689554	17,29341692	18,59891389	20,02358764
16	17,25786449	18,63928526	20,15688130	21,82453114
17	18,43044314	20,01207096	21,76158774	23,69751239
18	19,61474757	21,41231238	23,41443538	25,64541289
19	20,81089504	22,84055863	25,11686844	27,67122940
20	22,01900400	24,29736980	26,87037449	29,77807858
21	23,23919404	25,78331720	28,67648572	31,96920172
22	24,47158598	27,29898354	30,53678030	34,24796979
23	25,71630184	28,84496321	32,45288370	36,61788858
24	26,97346485	30,42186247	34,42647022	39,08260412
25	28,24319950	32,03029972	36,45926432	41,64590829
26	29,52563150	33,67090572	38,55304225	44,31174462
27	30,82088781	35,34432383	40,70963352	47,08421440
28	32,12909669	37,05121031	42,93092253	49,96758298
29	33,45038766	38,79223452	45,21885020	52,96628630
30	34,78489153	40,56807921	47,57541571	56,08493775
31	36,13274045	42,37944079	50,00267818	59,32833526
32	37,49406785	44,22702961	52,50275852	62,70146867
33	38,86900853	46,11157020	55,07784128	66,20952742
34	40,25769862	48,03380160	57,73017652	69,85790852
35	41,66027560	49,99447763	60,46208181	73,65222486
36	43,07687836	51,99436719	63,27594427	77,59831385
37	44,50764714	54,03425453	66,17422260	81,70224640
38	45,95272361	56,11493962	69,15944927	85,97033626
39	47,41225085	58,23723841	72,23423275	90,40914971
40	48,88637336	60,40198318	75,40125973	95,02551570
41	50,37523709	62,61002284	78,66329753	99,82653633
42	51,87898946	64,86222330	82,02319645	104,8195978
43	53,39777936	67,15946777	85,48389235	110,0123817
44	54,93175715	69,50265712	89,04840912	115,4128770
45	56,48107472	71,89271027	92,71986139	121,0293920
46	58,04588547	74,33056447	96,50145723	126,8705677
47	59,62634433	76,81717576	100,3965009	132,9453904
48	61,22260777	79,35351928	104,4083960	139,2632060
49	62,83483385	81,94058966	108,5406479	145,8337343
50	64,46318218	84,57940145	112,7968673	152,6670837
60	81,66966986	114,0515394	163,0534368	237,9906852
70	100,6763368	149,9779111	230,5940637	364,2904588
80	121,6715217	193,7719578	321,3630185	551,2449767
90	144,8632675	247,1566563	443,3489037	827,9833335
100	170,4813829	312,2323059	607,2877327	1237,623705

Таблица 4 (продолжение)

Коэффициенты наращения годовой ренты

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	5	**6**	**7**	**8**
1	1	1	1	1
2	2,05	2,06	2,07	2,08
3	3,1525	3,1836	3,2149	3,2464
4	4,310125	4,374616	4,439943	4,506112
5	5,52563125	5,63709296	5,75073901	5,86660096
6	6,801912813	6,975318538	7,153290741	7,335929037
7	8,142008453	8,393837650	8,654021093	8,922803360
8	9,549108876	9,897467909	10,25980257	10,63662763
9	11,02656432	11,49131598	11,97798875	12,48755784
10	12,57789254	13,18079494	13,81644796	14,48656247
11	14,20678716	14,97164264	15,78359932	16,64548746
12	15,91712652	16,86994120	17,88845127	18,97712646
13	17,71298285	18,88213767	20,14064286	21,49529658
14	19,59863199	21,01506593	22,55048786	24,21492030
15	21,57856359	23,27596989	25,12902201	27,15211393
16	23,65749177	25,67252808	27,88805355	30,32428304
17	25,84036636	28,21287976	30,84021730	33,75022569
18	28,13238467	30,90565255	33,99903251	37,45024374
19	30,53900391	33,75999170	37,37896479	41,44626324
20	33,06595410	36,78559120	40,99549232	45,76196430
21	35,71925181	39,99272668	44,86517678	50,42292144
22	38,50521440	43,39229028	49,00573916	55,45675516
23	41,43047512	46,99582769	53,43614090	60,89329557
24	44,50199887	50,81557736	58,17667076	66,76475922
25	47,72709882	54,86451200	63,24903772	73,10593995
26	51,11345376	59,15638272	68,67647036	79,95441515
27	54,66912645	63,70576568	74,48382328	87,35076836
28	58,40258277	68,52811162	80,69769091	95,33882983
29	62,32271191	73,63979832	87,34652928	103,9659362
30	66,43884750	79,05818622	94,46078632	113,2832111
31	70,76078988	84,80167739	102,0730414	123,3458680
32	75,29882937	90,88977803	110,2181543	134,2135374
33	80,06377084	97,34316471	118,9334251	145,9506204
34	85,06695938	104,1837546	128,2587648	158,6266701
35	90,32030735	111,4347799	138,2368784	172,3168037
36	95,83632272	119,1208667	148,9134598	187,1021480
37	101,6281389	127,2681187	160,3374020	203,0703198
38	107,7095458	135,9042058	172,5610202	220,3159454
39	114,0950231	145,0584581	185,6402916	238,9412210
40	120,7997742	154,7619656	199,6351120	259,0565187
41	127,8397630	165,0476836	214,6095698	280,7810402
42	135,2317511	175,9505446	230,6322397	304,2435234
43	142,9933387	187,5075772	247,7764965	329,5830053
44	151,1430056	199,7580319	266,1208513	356,9496457
45	159,7001559	212,7435138	285,7493108	386,5056174
46	168,6851637	226,5081246	306,7517626	418,4260668
47	178,1194218	241,0986121	329,2243860	452,9001521
48	188,0253929	256,5645288	353,2700930	490,1321643
49	198,4266626	272,9584006	378,9989995	530,3427374
50	209,3479957	290,3359046	406,5289295	573,7701564
60	353,5837179	533,1281809	813,5203834	1253,213296
70	588,5285107	967,9321696	1614,134174	2720,080074
80	971,2288213	1746,599891	3189,062680	5886,935428
90	1594,607301	3141,075187	6287,185427	12723,93862
100	2610,025157	5638,368059	12381,66179	27484,51570

Таблица 4 (продолжение)

Коэффициенты наращения годовой ренты

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	10	**12**	**15**	**20**
1	1	1	1	1
2	2,1	2,12	2,15	2,2
3	3,31	3,3744	3,4725	3,64
4	4,641	4,779328	4,993375	5,368
5	6,1051	6,35284736	6,74238125	7,4416
6	7,71561	8,115189043	8,753738438	9,92992
7	9,487171	10,08901173	11,06679920	12,915904
8	11,4358881	12,29369314	13,72681908	16,4990848
9	13,57947691	14,77565631	16,78584195	20,79890176
10	15,93742460	17,54873507	20,30371824	25,95868211
11	18,53116706	20,65458328	24,34927597	32,15041853
12	21,38428377	24,13313327	29,00166737	39,58050224
13	24,52271214	28,02910926	34,35191748	48,49660269
14	27,97498336	32,39260238	40,50470510	59,19592323
15	31,77248169	37,27971466	47,58041086	72,03510787
16	35,94972986	42,75328042	55,71747249	87,44212945
17	40,54470285	48,88367407	65,07509336	105,9305553
18	45,59917314	55,74971496	75,83635737	128,1166664
19	51,15909045	63,43968075	88,21181097	154,7399997
20	57,27499949	72,05244244	102,4435826	186,6879996
21	64,00249944	81,69873554	118,8101200	225,0255995
22	71,40274939	92,50258380	137,6316380	271,0307195
23	79,54302433	104,6028939	159,2763837	326,2368633
24	88,49732676	118,1552411	184,1678413	392,4842360
25	98,34705943	133,3338701	212,7930175	471,9810832
26	109,1817654	150,3339345	245,7119701	567,3772999
27	121,0999419	169,3740066	283,5687656	681,8527598
28	134,2099361	190,6988874	327,1040804	819,2233118
29	148,6309297	214,5827539	377,1696925	984,0679742
30	164,4940227	241,3326843	434,7451464	1181,881569
31	181,9434250	271,2926065	500,9569183	1419,257883
32	201,1377675	304,8477192	577,1004561	1704,109459
33	222,2515442	342,4294455	664,6655245	2045,931351
34	245,4766986	384,5209790	765,3653532	2456,117621
35	271,0243685	431,6634965	881,1701561	2948,341146
36	299,1268053	484,4631161	1014,345680	3539,009375
37	330,0394859	543,5986900	1167,497532	4247,811250
38	364,0434344	609,8305328	1343,622161	5098,373500
39	401,4477779	684,0101967	1546,165485	6119,048200
40	442,5925557	767,0914203	1779,090308	7343,857840
41	487,8518113	860,1423908	2046,953854	8813,629408
42	537,6369924	964,3594777	2354,996933	10577,35529
43	592,4006916	1081,082615	2709,246473	12693,82635
44	652,6407608	1211,812529	3116,633443	15233,59162
45	718,9048369	1358,230032	3585,128460	18281,30994
46	791,7953205	1522,217636	4123,897729	21938,57193
47	871,9748526	1705,883752	4743,482388	26327,28631
48	960,1723378	1911,589803	5456,004746	31593,74358
49	1057,189572	2141,980579	6275,405458	37913,49229
50	1163,908529	2400,018249	7217,716277	45497,19075
60	3034,816395	7471,641112	29219,99164	281732,5718
70	7887,469568	23223,33190	118231,4669	1744439,785
80	20474,00215	72145,69250	478332,5293	10801137,31
90	53120,22612	224091,1185	1935142,168	66877821,24
100	137796,1234	696010,5477	7828749,671	414089867,6

Таблица 5

Коэффициенты приведения годовой ренты

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	1	**2**	**3**	**4**
1	0,99009901	0,980392157	0,970873786	0,961538462
2	1,970395059	1,941560938	1,913469696	1,886094675
3	2,940985207	2,883883273	2,828611355	2,775091033
4	3,901965552	3,807728699	3,717098403	3,629895224
5	4,853431239	4,713459509	4,579707187	4,451822331
6	5,795476475	5,601430891	5,417191444	5,242136857
7	6,728194529	6,471991069	6,230282955	6,002054670
8	7,651677752	7,325481441	7,019692190	6,732744875
9	8,566017576	8,162236706	7,786108922	7,435331611
10	9,471304531	8,982585006	8,530202837	8,110895779
11	10,36762825	9,786848045	9,252624113	8,760476711
12	11,25507747	10,57534122	9,954003994	9,385073761
13	12,13374007	11,34837375	10,63495533	9,985647847
14	13,00370304	12,10624877	11,29607314	10,56312293
15	13,86505252	12,84926350	11,93793509	11,11838743
16	14,71787378	13,57770931	12,56110203	11,65229561
17	15,56225127	14,29187188	13,16611847	12,16566885
18	16,39826858	14,99203125	13,75351308	12,65929698
19	17,22600850	15,67846201	14,32379911	13,13393940
20	18,04555297	16,35143335	14,87747486	13,59032635
21	18,85698314	17,01120916	15,41502414	14,02915995
22	19,66037934	17,65804820	15,93691664	14,45111533
23	20,45582113	18,29220412	16,44360839	14,85684167
24	21,24338726	18,91392560	16,93554212	15,24696314
25	22,02315570	19,52345647	17,41314769	15,62207994
26	22,79520366	20,12103576	17,87684242	15,98276918
27	23,55960759	20,70689780	18,32703148	16,32958575
28	24,31644316	21,28127236	18,76410823	16,66306322
29	25,06578530	21,84438466	19,18845459	16,98371463
30	25,80770822	22,39645555	19,60044135	17,29203330
31	26,54228537	22,93770152	20,00042850	17,58849356
32	27,26958947	23,46833482	20,38876553	17,87355150
33	27,98969255	23,98856355	20,76579178	18,14764567
34	28,70266589	24,49859172	21,13183668	18,41119776
35	29,40858009	24,99861933	21,48722007	18,66461323
36	30,10750504	25,48884248	21,83225250	18,90828195
37	30,79950994	25,96945341	22,16723544	19,14257880
38	31,48466331	26,44064060	22,49246159	19,36786423
39	32,16303298	26,90258883	22,80821513	19,58448484
40	32,83468611	27,35547924	23,11477197	19,79277388
41	33,49968922	27,79948945	23,41239998	19,99305181
42	34,15810814	28,23479358	23,70135920	20,18562674
43	34,81000806	28,66156233	23,98190214	20,37079494
44	35,45545353	29,07996307	24,25427392	20,54884129
45	36,09450844	29,49015988	24,51871254	20,72003970
46	36,72723608	29,89231360	24,77544907	20,88465356
47	37,35369909	30,28658196	25,02470783	21,04293612
48	37,97395949	30,67311957	25,26670664	21,19513088
49	38,58807871	31,05207801	25,50165693	21,34147200
50	39,19611753	31,42360589	25,72976401	21,48218462
60	44,95503841	34,76088668	27,67556367	22,62348998
70	50,16851435	37,49861929	29,12342135	23,39451498
80	54,88820611	39,74451359	30,20076345	23,91539185
90	59,16088149	41,58692916	31,00240714	24,26727760
100	63,02887877	43,09835164	31,59890534	24,50499900

Таблица 5 (продолжение)

Коэффициенты приведения годовой ренты

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	5	**6**	**7**	**8**
1	0,952380952	0,943396226	0,934579439	0,925925926
2	1,859410431	1,833392666	1,808018168	1,783264746
3	2,723248029	2,673011950	2,624316044	2,577096987
4	3,545950504	3,465105613	3,387211257	3,312126840
5	4,329476671	4,212363786	4,100197436	3,992710037
6	5,075692067	4,917324326	4,766539660	4,622879664
7	5,786373397	5,582381440	5,389289402	5,206370059
8	6,463212759	6,209793811	5,971298506	5,746638944
9	7,107821676	6,801692275	6,515232249	6,246887911
10	7,721734929	7,360087051	7,023581541	6,710081399
11	8,306414218	7,886874577	7,498674337	7,138964258
12	8,863251636	8,383843940	7,942686297	7,536078017
13	9,393572987	8,852682963	8,357650744	7,903775942
14	9,898640940	9,294983927	8,745467986	8,244236983
15	10,37965804	9,712248988	9,107914005	8,559478688
16	10,83776956	10,10589527	9,446648603	8,851369156
17	11,27406625	10,47725969	9,763222993	9,121638107
18	11,68958690	10,82760348	10,05908691	9,371887136
19	12,08532086	11,15811649	10,33559524	9,603599200
20	12,46221034	11,46992122	10,59401425	9,818147407
21	12,82115271	11,76407662	10,83552733	10,01680316
22	13,16300258	12,04158172	11,06124050	10,20074366
23	13,48857388	12,30337898	11,27218738	10,37105895
24	13,79864179	12,55035753	11,46933400	10,52875828
25	14,09394457	12,78335616	11,65358318	10,67477619
26	14,37518530	13,00316619	11,82577867	10,80997795
27	14,64303362	13,21053414	11,98670904	10,93516477
28	14,89812726	13,40616428	12,13711125	11,05107849
29	15,14107358	13,59072102	12,27767407	11,15840601
30	15,37245103	13,76483115	12,40904118	11,25778334
31	15,59281050	13,92908599	12,53181419	11,34979939
32	15,80267667	14,08404339	12,64655532	11,43499944
33	16,00254921	14,23022961	12,75379002	11,51388837
34	16,19290401	14,36814114	12,85400936	11,58693367
35	16,37419429	14,49824636	12,94767230	11,65456822
36	16,54685171	14,62098713	13,03520776	11,71719279
37	16,71128734	14,73678032	13,11701660	11,77517851
38	16,86789271	14,84601917	13,19347345	11,82886899
39	17,01704067	14,94907468	13,26492846	11,87858240
40	17,15908635	15,04629687	13,33170884	11,92461333
41	17,29436796	15,13801592	13,39412041	11,96723457
42	17,42320758	15,22454332	13,45244899	12,00669867
43	17,54591198	15,30617294	13,50696167	12,04323951
44	17,66277331	15,38318202	13,55790810	12,07707362
45	17,77406982	15,45583209	13,60552159	12,10840150
46	17,88006650	15,52436990	13,65002018	12,13740880
47	17,98101571	15,58902821	13,69160764	12,16426741
48	18,07715782	15,65002661	13,73047443	12,18913649
49	18,16872173	15,70757228	13,76679854	12,21216342
50	18,25592546	15,76186064	13,80074629	12,23348464
60	18,92928953	16,16142771	14,03918115	12,37655182
70	19,34267665	16,38454387	14,16038934	12,44281961
80	19,59646048	16,50913077	14,22200544	12,47351442
90	19,75226174	16,57869945	14,25332794	12,48773205
100	19,84791020	16,61754623	14,26925071	12,49431757

Таблица 5 (продолжение)

Коэффициенты приведения годовой ренты

Число пер-в	*Ставка процентов*			
	10	**12**	**15**	**20**
1	0,909090909	0,892857143	0,869565217	0,833333333
2	1,735537190	1,690051020	1,625708885	1,527777778
3	2,486851991	2,401831268	2,283225117	2,106481482
4	3,169865446	3,037349347	2,854978363	2,588734568
5	3,790786769	3,604776202	3,352155098	2,990612140
6	4,355260700	4,111407324	3,784482694	3,325510117
7	4,868418818	4,563756539	4,160419734	3,604591764
8	5,334926198	4,967639767	4,487321508	3,837159803
9	5,759023816	5,328249792	4,771583920	4,030966503
10	6,144567106	5,650223028	5,018768626	4,192472086
11	6,495061005	5,937699133	5,233711849	4,327060071
12	6,813691823	6,194374226	5,420618999	4,439216726
13	7,103356203	6,423548416	5,583146955	4,532680605
14	7,366687457	6,628168228	5,724475613	4,610567171
15	7,606079506	6,810864490	5,847370099	4,675472642
16	7,823708642	6,973986151	5,954234868	4,729560535
17	8,021553311	7,119630492	6,047160755	4,774633779
18	8,201412101	7,249670082	6,127965874	4,812194816
19	8,364920092	7,365776859	6,198231195	4,843495680
20	8,513563720	7,469443624	6,259331474	4,869579734
21	8,648694291	7,562003236	6,312462151	4,891316445
22	8,771540264	7,644645746	6,358662740	4,909430371
23	8,883218422	7,718433702	6,398837165	4,924525309
24	8,984744020	7,784315806	6,433771448	4,937104424
25	9,077040018	7,843139112	6,464149085	4,947587020
26	9,160945471	7,895659922	6,490564422	4,956322517
27	9,237223156	7,942553501	6,513534280	4,963602097
28	9,306566505	7,984422769	6,533508070	4,969668414
29	9,369605914	8,021806044	6,550876582	4,974723679
30	9,426914467	8,055183968	6,565979637	4,978936399
31	9,479013152	8,084985685	6,579112728	4,982446999
32	9,526375593	8,111594362	6,590532807	4,985372499
33	9,569432357	8,135352109	6,600463310	4,987810416
34	9,608574870	8,156564383	6,609098531	4,989842013
35	9,644158973	8,175503913	6,616607418	4,991535011
36	9,676508157	8,192414208	6,623136885	4,992945843
37	9,705916506	8,207512686	6,628814683	4,994121536
38	9,732651369	8,220993470	6,633751898	4,995101280
39	9,756955790	8,233029884	6,638045129	4,995917733
40	9,779050719	8,243776682	6,641778373	4,996598111
41	9,799137017	8,253372037	6,645024672	4,997165092
42	9,817397288	8,261939319	6,647847541	4,997637577
43	9,833997535	8,269588678	6,650302209	4,998031314
44	9,849088668	8,276418462	6,652436704	4,998359428
45	9,862807880	8,282516484	6,654292786	4,998632857
46	9,875279891	8,287961147	6,655906770	4,998860714
47	9,886618083	8,292822452	6,657310235	4,999050595
48	9,896925530	8,297162904	6,658530639	4,999208829
49	9,906295936	8,301038307	6,659591860	4,999340691
50	9,914814487	8,304498488	6,660514661	4,999450576
60	9,967157297	8,324049285	6,665145985	4,999911265
70	9,987337716	8,330344118	6,666290777	4,999985669
80	9,995118142	8,332370886	6,666573753	4,999997685
90	9,998117832	8,333023451	6,666643700	4,999999626
100	9,999274343	8,333233560	6,666660990	4,99999994