МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАЦИОННЫХ И
АВИАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

М.С. Гаврилова

Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Дополнительные главы теории вероятностей»

Для студентов направления бакалавриата «Прикладная математика и информатика»

Лабораторная работа № 1

Моделирование случайных величин с дискретными распределениями общего вида

1.1 Общие сведения о дискретных распределениях случайных величин

Определение. Система F подмножеств Ω называется σ*-алгеброй*, если она является алгеброй и если $A_n \in F \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{n\ge 1} A_n \in F \ \text{ и } \bigcap_{n\ge 1} A_n \in F.$$

Упражнение. Рассмотрите в качестве примера борелевскую σ-алгебру $B(R)$ и точечную σ-алгебру.

Определение. *Вероятностная мера, или вероятность* на σ-алгебре F – это числовая функция множеств $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)$, $\forall A \in F$, если:

1) $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$;
2) $\forall\, A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \ne j$ из F

$$\mathbf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n);$$

3) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Определение (аксиоматика Колмогорова). Набор (Ω, F, P), где

а) Ω – множество ω – пространство элементарных событий;
б) F – σ-алгебра подмножеств Ω; $A \subseteq \mathbf{\Omega}$, $A \in F$;
в) P – вероятность на F;

называется *вероятностным пространством* или *вероятностной моделью*, $\mathrm{P}(A)$ – вероятностью события A.

Определение. *Случайная величина* $\xi(\omega)$ – это любая определенная на $\omega \in \Omega$, F-измеримая числовая функция ω, т. е. для любого подмножества $B \in B(R)$ верно $A = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F$, где B принадлежит борелевской σ-алгебре $B(R)$.

Определение. *Вероятностная мера* $\mathrm{P}_\xi(B) = \mathrm{P}(\omega : \xi(\omega) \in B)$, $B \in B(R)$ – это распределение вероятностей случайной величины ξ на $(R, B(R))$.

Определение. *Функцией распределения* случайной величины ξ называется $F_\xi(x) = F(x) = \mathrm{P}(\omega : \xi(\omega) \le x) = \mathrm{P}(\omega : \xi(\omega) \in (-\infty\,; x])$ для любого $x \in R$,
где x – независимая переменная.

Функцией распределения может являться любая функция $F(x)$ такая, что

1) $F(x)$ – неубывающая функция;
2) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, где $F(-\infty)=\lim\limits_{x\downarrow-\infty}F(x)$; $F(+\infty)=\lim\limits_{x\uparrow+\infty}F(x)$;
3) $F(x)$ непрерывна справа, имеет предел слева $\forall x\in R$, т.е.

$$F(x_0)=F(x_0+)\overset{def}{=}\lim_{x\downarrow x_0}F(x), \text{ и } \exists\ F(x_0-)=\lim_{x\uparrow x_0}F(x).$$

Определение. Случайная величина ξ имеет *дискретное распределение*, если множество ее значений не более чем счетно, т.е. мера $\mathbf{P}_\xi(B)$ сосредоточена не более чем в счетном числе точек:

$$\mathrm{P}_\xi(B)=\sum_{\{k:\xi_k\in B\}}\mathrm{P}\{\xi=\xi_k\}=\sum_{\{k:\xi_k\in B\}}\Delta F_\xi(\xi_k).$$

Функция распределения $F(x)$ в этом случае становится кусочно-постоянной (ступенчатой) и задается суммой

$$F_\xi(x)=\sum_{\{k:\xi_k\le x\}}\mathrm{P}\{\xi=\xi_k\}.$$

Таблица, в которой представлены все значения такой случайной величины ξ и вероятности, с которыми она их принимает $p_1=P(\xi=\xi_1)$, $p_2=P(\xi=\xi_2)$,..., называется *рядом распределения вероятностей дискретной случайной величины* ξ:

ξ	ξ_1	ξ_2	...	ξ_k	...
p	p_1	p_2	...	p_k	...

Математическое ожидание случайной величины ξ, имеющей дискретное распределение, определяется формулой

$$M\xi=\sum_k\xi_k\cdot\mathrm{P}\{\xi=\xi_k\}=\sum_k\xi_k p_k, \textit{ если ряд абсолютно сходится.}$$

Замечание. Если $\eta=f(\xi)$, то $M\eta=Mf(\xi)=\sum\limits_k f(\xi_k)\cdot\mathrm{P}\{\xi=\xi_k\}=\sum\limits_k f(\xi_k)p_k$, если ряд абсолютно сходится.

Дисперсия случайной величины ξ с дискретным распределением

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2=M(\xi^2)-(M\xi)^2.$$

Среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ – квадратный корень из ее дисперсии

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D\xi}.$$

Математическое ожидание принимает любые значения, дисперсия и среднеквадратическое отклонение по определению неотрицательны.

1.2 Задание лабораторной работы № 1

Дан ряд распределения случайной величины ξ с конечным множеством значений:

1. Сгенерировать N значений случайной величины ξ и представить их в виде графика функции, где по оси абсцисс откладывается номер испытания, а по оси ординат – соответствующее значение ξ.
2. Вычислить теоретические значения математического ожидания и дисперсии случайной величины ξ.
3. Вычислить эмпирические оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины ξ, сравнить их с соответствующими теоретическими значениями, сделать выводы.
4. Построить теоретическую и эмпирическую функции распределения ξ на одном и том же графике, сравнить эти функции и сделать выводы.

Варианты задания лабораторной работы № 1:

Вариант 1

ξ	4	–7	6	0
p	0.4	0.1	0.3	0.2

Вариант 2

ξ	–4	1	0	2
p	0.1	0.1	0.5	0.3

Вариант 3

ξ	0	–1	2	3
p	0.1	0.1	0.1	0.7

Вариант 4

ξ	–3	0	2	2
p	0.6	0.2	0.1	0.1

Вариант 5

ξ	8	–2	0	4
p	0.7	0.1	0.1	0.1

Вариант 6

ξ	4	–7	6	0
p	0.1	0.1	0.1	0.7

Вариант 7

ξ	–1	2	7	0
p	0.3	0.3	0.3	0.1

Вариант 8

ξ	–1	1	0	3
p	0.5	0.2	0.1	0.2

Вариант 9

ξ	–2	3	4	0
p	0.4	0.1	0.3	0.2

Вариант 10

ξ	–8	0	1	4
p	0.5	0.3	0.1	0.1

Вариант 11

ξ	–3	0	2	2
p	0.5	0.3	0.1	0.1

Вариант 12

ξ	0	7	1	–1
p	0.3	0.2	0.3	0.2

Вариант 13

ξ	–4	0	5	2
p	0.4	0.2	0.1	0.3

Вариант 14

ξ	0	1	3	–1
p	0.6	0.2	0.1	0.1

Вариант 15

ξ	7	0	–1	2
p	0.5	0.3	0.1	0.1

Вариант 16

ξ	3	0	2	–3
p	0.3	0.2	0.3	0.2

Вариант 17

ξ	0	–1	2	3
p	0.5	0.3	0.1	0.1

Вариант 18

ξ	–4	1	0	2
p	0.1	0.1	0.1	0.7

Вариант 19

ξ	1	–7	0	2
p	0.1	0.1	0.4	0.4

Вариант 20

ξ	0	8	3	–2
p	0.4	0.2	0.3	0.1

1.3 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 1

1. Для выполнения первого пункта лабораторной работы № 1 нужен алгоритм генерации псевдослучайных чисел, непрерывно распределенных на отрезке [0, 1]. Ниже представлен пример программной реализации данного алгоритма на языке программирования высокого уровня Borland Delphi 7.0.

Генератор псевдослучайных чисел, основанный на линейно-конгруэнтной последовательности $\xi_{i+1} = \left(5^{15}\xi_i + 3141592221\right) \bmod 2^{48}$ с периодом повторения 2^{48}

```
procedure rndset;           //разложение системного времени на составляющие
var h: extended;
begin

 h:=time;                   //получение системного времени в виде переменной
 x0:=round(h*7151);
 x1:=round(h*1397);
 x2:=round(h*3157);
end;

function rnd: extended;    //функция подсчета случайной величины r ~R[0, 1]
var y0,y1,y2: longword;
     res: int64;
```

```
begin
  y0:=x0*18829+58525;
  y1:=x1*18829+x0*6909+47936;
  y2:=18829*x2+6909*x1+7*x0;

  x0:=y0 mod 65536;
  y1:=y1+y0 div 65536;
  x1:=y1 mod 65536;
  y2:=y2+y1 div 65536;
  x2:=y2 mod 65536;

  res:=int64(x0)+int64(x1)*65536+int64(x2)*4294967296;
  result:=1-res/281474976710656;
end;
```

2. Рассмотрим алгоритм генерации значений случайной величины ξ методом обратной функции.

Разобьем [0, 1] на частичные отрезки Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n. Пусть эти отрезки имеют длины соответственно p_1, p_2, ..., p_n. Так как $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, то эти отрезки в совокупности покроют отрезок [0, 1] полностью. Пусть длины этих отрезков равны $p_i = P(\xi = \xi_i)$.

Тогда алгоритм генерации значений случайной величины ξ, распределенной дискретно с конечным множеством значений, имеет вид:

$r = rnd$;

$s = \xi_1$, если r попадает в отрезок Δ_1;

$s = \xi_2$, если r попадает в отрезок Δ_2;

...

$s = \xi_n$, если r попадает в отрезок Δ_n.

3. Эмпирические оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины ξ имеют вид:

$m = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N} s_j$ – эмпирическая оценка математического ожидания $M\xi$.

$\delta = \dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{j=1}^{N} \left(s_j - m\right)^2$ – эмпирическая оценка дисперсии $D\xi$.

Последовательность $\{s_j\}_{j=1}^{N}$ – сгенерированные значения случайной величины ξ с дискретным распределением.

4. Формулы для $M\xi$ и $D\xi$, а также описание теоретической и эмпирической функций распределения ξ даны в пункте 1.1.

Лабораторная работа № 2

Моделирование случайных величин со стандартными дискретными распределениями

2.1 Стандартные дискретные распределения случайных величин

Дискретное равномерное распределение

Дискретное равномерное распределение (англ. discrete uniform distribution) – это распределение случайной величины, которая принимает все целочисленные значения из отрезка $[a\,;b]$ с одинаковыми вероятностями, где $a,b\in Z$ и $a<b$.

Пусть ξ имеет дискретное равномерное распределение: $\xi \sim DU(a,b)$, или $\xi \sim U\{a,b\}$, $\xi \sim unif\{a,b\}$.

Параметры дискретного равномерного распределения:
1. Параметр положения $a\in Z$.
2. Масштабный параметр $b-a$, $b\in Z$, $a<b$.
3. Число значений случайной величины $n=b-a+1$.

Ряд распределения случайной величины $\xi \sim DU(a,b)$.

ξ	a	$a+1$	$a+2$	...	$b-1$	b
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Математическое ожидание и дисперсия $\xi \sim DU(a,b)$ имеют вид:

$$M\xi=\frac{a+b}{2},\ D\xi=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Распределение Бернулли

Распределение Бернулли (англ. Bernoulli distribution) – дискретное распределение случайной величины, принимающей значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q=1-p$. Если случайная величина равна единице, это событие называют “успехом”, иначе “неудачей” или “неуспехом”.

Пусть случайная величина ξ распределена по Бернулли с параметром p: $\xi \sim Bernoulli(p)$, где вероятность “успеха” $p\in(0\,;1)$.

Ряд распределения случайной величины $\xi \sim Bernoulli(p)$:

ξ	0	1
p	q	p

Вероятностные характеристики случайной величины $\xi \sim Bernoulli(p)$:

$$M\xi = p \text{ и } D\xi = p - p^2 = p(1-p) = pq\,.$$

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение (англ. binomial distribution) – это дискретное распределение случайной величины, равной числу "успехов" в *n* независимых испытаниях с вероятностью "успеха" в одном испытании *p*.

Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами *n* и *p*: $\xi \sim B(n,p)$, $\xi \sim Bin(n,p)$, $\xi \sim Binom(n,p)$ или $\xi \sim bin(n,p)$.

Параметры биномиального распределения:
1. Число независимых испытаний $n \in \mathrm{N}$.
2. Вероятность "успеха" в одном испытании $p \in (0\,;1)$, величина $p \equiv const$.

Ряд распределения случайной величины $\xi \sim Bin(n,p)$:

ξ	0	1	2	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

где $k \in Z$, $k \in [0\,;n]$ и $q = 1 - p$,

$C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент.

Случайная величина $\xi \sim Bin(n,p)$ равна сумме *n* независимых случайных величин, распределенных по закону Бернулли с параметром *p*:

$$\xi = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n\,,$$

где $\zeta_i \sim Bernoulli(p)$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\Rightarrow$ вероятностные характеристики ξ равны: $M\xi = nM(\zeta_1) = np$, $D\xi = nD(\zeta_1) = npq$.

Геометрическое распределение

Геометрическое распределение (англ. geometric distribution) – это дискретное распределение случайной величины, равной числу "неудач" до появления первого "успеха" в независимых испытаниях с вероятностью "успеха" в одном испытании *p*.

Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p: $\xi \sim Geom(p)$, $\xi \sim geom(p)$, где вероятность “успеха” $p \in (0;1)$. Ряд распределения случайной величины $\xi \sim Geom(p)$:

ξ	0	1	2	...	k	...
p	p	qp	$q^2 p$	...	$q^k p$	...

где $k \in N_0$ и $q = 1 - p$.

Математическое ожидание и дисперсия $\xi \sim Geom(p)$ имеют вид:

$$M\xi = \frac{q}{p},\ D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

2.2 Задание лабораторной работы № 2

1. Смоделировать N_1 значений случайной величины $\xi \sim DU(a,b)$. Вычислить точные значения математического ожидания, дисперсии ξ и их эмпирические оценки, сравнить их между собой и сделать выводы.

2. Смоделировать N_2 значений случайной величины $\eta \sim Bin(n,p)$. Вычислить точные значения математического ожидания, дисперсии η и их эмпирические оценки, сравнить их между собой и сделать выводы.

3. Смоделировать N_3 значений случайной величины $\mu \sim Geom(\tilde{p})$. Вычислить точные значения математического ожидания, дисперсии μ, их эмпирические оценки, сравнить их между собой и сделать выводы.

Варианты задания лабораторной работы № 2:

№ варианта	Параметры распределений
1	$a = 0, b = 3, n = 20,\ p = 0.4,\ \tilde{p} = 0.1$
2	$a = 0, b = 2, n = 15,\ p = 0.2,\ \tilde{p} = 0.7$
3	$a = 2, b = 4, n = 10,\ p = 0.8,\ \tilde{p} = 0.3$
4	$a = 3, b = 7, n = 25,\ p = 0.5,\ \tilde{p} = 0.4$
5	$a = 0, b = 4, n = 20,\ p = 0.3,\ \tilde{p} = 0.2$
6	$a = 0, b = 7, n = 10,\ p = 0.1,\ \tilde{p} = 0.8$
7	$a = 1, b = 8, n = 25,\ p = 0.7,\ \tilde{p} = 0.5$
8	$a = 4, b = 5, n = 15,\ p = 0.2,\ \tilde{p} = 0.9$
9	$a = 1, b = 4, n = 22,\ p = 0.4,\ \tilde{p} = 0.2$

10	$a=3, b=8, n=17,\ p=0.5,\ \tilde{p}=0.1$
11	$a=-1, b=2, n=27,\ p=0.3,\ \tilde{p}=0.4$
12	$a=-2, b=3, n=29,\ p=0.1,\ \tilde{p}=0.3$
13	$a=-2, b=4, n=21,\ p=0.9,\ \tilde{p}=0.2$
14	$a=-1, b=7, n=18,\ p=0.4,\ \tilde{p}=0.7$
15	$a=-4, b=1, n=24,\ p=0.5,\ \tilde{p}=0.1$
16	$a=-2, b=9, n=12,\ p=0.7,\ \tilde{p}=0.5$
17	$a=-3, b=0, n=23,\ p=0.8,\ \tilde{p}=0.4$
18	$a=-1, b=4, n=24,\ p=0.3,\ \tilde{p}=0.9$
19	$a=-4, b=0, n=17,\ p=0.2,\ \tilde{p}=0.3$
20	$a=-4, b=7, n=20,\ p=0.4,\ \tilde{p}=0.7$

2.3 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 2

1. Алгоритм генерации $\xi \sim DU(a,b)$:
$r \sim R[0, 1]$, см. п. 1.3;
$s = a + [c \cdot r]$, где $c = b - a + 1$, функция $[x]$ – целая часть числа x, округление числа x до ближайшего целого в меньшую сторону;
$s \sim DU(a,b)$.

2. Алгоритм генерации $\eta \sim Bin(n, p)$ включает алгоритм генерации величин с распределением Бернулли $\zeta \sim Bernoulli(p)$:
$r \sim R[0, 1]$, см. п. 1.3;
$\zeta = 1$, если $r \le p$, иначе $\zeta = 0$.

Для того чтобы сгенерировать $\eta \sim Bin(n, p)$, необходимо:
сгенерировать n случайных величин $\zeta_i \sim Bernoulli(p)$, где $i = 1, \ldots, n$;
найти их сумму $t = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \sim Bin(n, p)$.

3. Алгоритм генерации $\mu \sim Geom(\tilde{p})$:
начальное значение $u = 0$;
генерируем $\varepsilon_k \sim Bernoulli(\tilde{p})$ до тех пор, пока $\varepsilon_k \ne 1$, увеличивая на каждом шаге значение u на единицу $u = u + 1$;
как только $\varepsilon_k = 1$, имеем $u \sim Geom(\tilde{p})$.

4. Эмпирические оценки по выборке математического ожидания и дисперсии случайной величины с дискретным распределением даны в п. 1.3.

Лабораторная работа № 3

Моделирование случайных величин с абсолютно непрерывными распределениями

3.1 Общие сведения об абсолютно непрерывных распределениях

Определение. Вероятностное распределение $\mathrm{P}_\xi(B)=\mathrm{P}(\omega:\xi(\omega)\in B), B\in B(R)$ называется *абсолютно непрерывным*, если существует неотрицательная функция $\rho_\xi(x), x\in R$, такая, что для любого борелевского множества $B\in B(R)$ $P\{\xi\in B\}=\int\limits_B \rho_\xi(x)dx.$

Определение. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует неотрицательная функция $\rho_\xi(x), x\in R$, такая что $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\rho_\xi(t)dt$.

Замечание. Интеграл понимается в общем случае в смысле Лебега, а функция $\rho_\xi(x), x\in R$ называется *плотностью*. Очевидно, любая плотность удовлетворяет свойствам: неотрицательности $\rho_\xi(x)\geq 0$ и нормированности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\xi(x)dx=1$. Можно доказать и обратное утверждение: для любой функции, удовлетворяющей этим двум свойствам, существует распределение, для которого эта функция является плотностью.

Замечание. Если случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, то ее функция распределения всюду непрерывна, что следует из непрерывности интеграла как функции верхнего предела.

Замечание. Если случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, то ее функция распределения дифференцируема почти всюду, и

$$\rho_\xi(x)=F'_\xi(x)=\frac{d}{dx}F_\xi(x) \text{ для почти всех } x,$$

то есть кроме, возможно, x из некоторого множества нулевой меры Лебега.

Замечание. Вообще любая функция распределения дифференцируема почти всюду. Например, функции распределения равномерного распределения и распределения Бернулли дифференцируемы всюду, кроме двух точек. Но у равномерного распределения плотность существует, а у распределения Бернулли – нет. Поэтому возможность дифференцировать функцию распределения никакого отношения к существованию плотности не имеет. Даже если мы дополнительно потребуем непрерывности функции распределения, этого не будет достаточно для абсолютной непрерывности распределения. Функция *сингулярного* распределения может быть непрерывна и дифференцируема почти всюду (например, лестница Кантора), при этом плотности у данного распределения нет, поскольку производная функции распределения почти всюду равна нулю.

Замечание. Если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, то $P\{\xi = x\} = 0$ для любого $x \in R$. Соответственно для любых $a < b$ имеют место равенства:

$$P\{a < \xi < b\} = P\{a \le \xi < b\} = P\{a < \xi \le b\} = P\{a \le \xi \le b\} = \int_a^b \rho_\xi(x)dx.$$

Замечание. Иногда вводят определение «**непрерывной»** случайной величины, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна по всем $x \in R$. Однако данное определение не является корректным, поскольку случайная величина – эта функция (отображение) на пространстве Ω произвольной природы, и понятие непрерывности на Ω может вообще не иметь смысла.

Определение. *Математическим ожиданием случайной величины* ξ называется число $M\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$, если интеграл Лебега существует. Для случайной величины ξ с абсолютно непрерывным распределением математическое ожидание может быть вычислено по формуле

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho_\xi(x)dx, \textit{ если интеграл Лебега существует.}$$

Определение. *Центральным моментом к-го порядка* случайной величины ξ называется $M(\xi - M\xi)^k$.

Определение. *Дисперсией* случайной величины ξ называется центральный момент второго порядка и обозначается $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

3.2 Непрерывное равномерное распределение

Непрерывное равномерное распределение (continuous uniform distribution, continuous rectangular distribution) — абсолютно непрерывное распределение вероятностей случайной величины ξ, принимающей значения из отрезка $[a;b]$ и имеющей постоянную плотность распределения на этом отрезке. Из-за вида графиков, плотности равномерного распределения называют прямоугольными.

Обозначение: $\xi \sim U[a;b]$, $\xi \sim U(a;b)$, $\xi \sim R[a;b]$.

Исторически одно из первых применений непрерывного равномерного распределения было в теории ошибок измерений, 18 в. Английский

математик *Роджер Котс* (1682–1716) предполагал, что ошибки измерений равномерно распределены на некотором отрезке $[-a;a]$.
Параметры распределения:
$a, b \in R,\ a < b$; a – параметр положения, b – масштабный параметр.
Область определения: $\xi \in [a;b]$.
Функция распределения:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{åñëè } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{åñëè } x \in [a;b] \\ 1, & \text{åñëè } x > b \end{cases}$$

Плотность распределения:

$$\rho_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{åñëè } x \in [a;b] \\ 0, & \text{åñëè } x < a,\ x > b \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$.

Дисперсия $D(\xi) = \dfrac{(a-b)^2}{12}$.

Варианты применения:
1. Распределение ошибок при округлении чисел. Например, если число округляется до первого знака после запятой, то ошибка округления равномерно распределена на отрезке $[-0.05;\, 0.05]$.
2. Простейшая модель случайной величины, принимающей значения из $[a;b]$, о которой почти ничего неизвестно.
3. Стандартное равномерное распределение $R[0\,;1]$ является универсальным распределением при генерировании случайных величин с другими законами распределения.

3.3 Задание лабораторной работы № 3

Дана плотность $\rho(x)$ случайной величины ξ, распределенной абсолютно непрерывно в интервале (a, b).
1. Сгенерировать N значений случайной величины ξ и представить их в виде графика функции, где по оси абсцисс откладывается номер испытания, а по оси ординат – соответствующее значение ξ.
2. Вычислить теоретические значения математического ожидания и дисперсии случайной величины ξ.
3. Вычислить эмпирические оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины ξ, сравнить их с соответствующими теоретическими значениями, сделать выводы.

4. Построить теоретическую и эмпирическую функции распределения ξ на одном и том же графике, сравнить эти функции и сделать выводы.

Варианты задания лабораторной работы № 3:

№ варианта	Плотность распределения $\rho(x)$ интервал (a,b)
1	$\rho(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}$, $(1,2)$
2	$\rho(x)=\sin x$, $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$
3	$\rho(x)=-\cos x$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$
4	$\rho(x)=\dfrac{2}{x^2}$, $(1,2)$
5	$\rho(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(1,4)$
6	$\rho(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $(1,e)$
7	$\rho(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$
8	$\rho(x)=\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $(0,1)$
9	$\rho(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, $(0,1)$
10	$\rho(x)=\dfrac{\ln x}{e^2}$, (e,e^2)
11	$\rho(x)=\dfrac{e^x}{4}$, $(\ln 2,\ln 6)$
12	$\rho(x)=\ln x$, $(1,e)$
13	$\rho(x)=\dfrac{3}{16}\sqrt{x}$, $(0,4)$
14	$\rho(x)=\dfrac{\ln x}{2x}$, $(1,e^2)$
15	$\rho(x)=\dfrac{2}{9}(x+1)$, $(-1,2)$
16	$\rho(x)=\dfrac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

17	$\rho(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4\cos^2 x}$, $\left(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$
18	$\rho(x)=\dfrac{3}{\pi(1+x^2)}$, $(0, \sqrt{3})$
19	$\rho(x)=2\sin 2x$, $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$
20	$\rho(x)=\cos x$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

3.4 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 3

1. Функция абсолютно непрерывного распределения вычисляется с помощью плотности по формуле:

$$F(x)=P(\xi \le x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(t)dt$$

2. Алгоритм генерирования случайной величины ξ с помощью ее функции распределения:
сгенерировать N значений случайной величины $r \sim R[0, 1]$, см. п. 1.3;
для каждого такого значения r_i найти соответствующее значение s_i:
$s_i = F^{-1}(r_i)$, где F^{-1} – функция, обратная к функции распределения F.

3. Вероятностные характеристики случайной величины ξ:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\rho(x)dx,\ M\left(\xi^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\rho_\xi(x)dx,\ D\xi=M\left(\xi^2\right)-(M\xi)^2.$$

4. Эмпирические оценки математического ожидания и дисперсии ξ описаны в п. 1.3.

Литература

1. Зубков, А.М. Сборник задач по теории вероятностей [Текст] / А.М.Зубков, Б.А.Севастьянов, В.П.Чистяков. – М.: Наука. – 1989. – 320 с.
2. Ширяев, А.Н. Вероятность. М.: Наука. – 1980. – 576 с.
3. Бутов, А.А. Решение задач по теории вероятностей : учеб.-метод. пособие. Часть 1 / А.А. Бутов, М.С. Гаврилова, Ю.Г. Савинов, С.А. Хрусталев – Ульяновск : УлГУ, 2014. – 27 с.
4. Бутов, А.А. Решение задач по теории вероятностей : учеб.-метод. пособие. Часть 2 / А.А. Бутов, М.С. Гаврилова, Ю.Г. Савинов. – Ульяновск : УлГУ, 2016. – 36 с.
5. Кельтон, В. Имитационное моделирование. Классика CS, 3-е издание / В. Кельтон, А. Лоу. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.
6. Иванов, А.В. Моделирование случайных величин, систем массового обслуживания и случайных процессов. Часть 1: методические указания к лабораторным работам / А.В. Иванов, А.П. Иванова. – М.: МИИТ, 2005. – 28 с.