Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2017, № 1, с.13-15.

Поступила: 07.07.2017
Окончательный вариант: 22.09.2017

УДК 512.553.3

О строении инъективной оболочки модуля

Веревкин А.Б. [1,*]

[*]a_verevkin@mail.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе дано внутреннее описание инъективной оболочки модуля над ассоциативной алгеброй, как существенного расширения в модуле линейных отображений.

Ключевые слова*: инъективный модуль, инъективная оболочка модуля, существенное расширение модуля.*

Введение

Группы с операторами могут иметь сложное описание. Из них наиболее ясны конечномерные векторные пространства и конечные абелевы группы. Понимание их устройства является фундаментом алгебры. Простота исчезает при отказе от финитности или при большей запутанности скаляров. На этом пути появилось обобщающее понятие модуля над кольцом. Понадобились методы изучения его структуры. В модуле могут лежать стандартные части. Иногда модуль может иметь более прозрачные, чем он сам образы. Но, в общем-то, модуль не собирается из своих частей и образов, как из компонент, из-за неполной разложимости действующих на нём операторов. Теорема о гомоморфизме может казаться единственным конкретным утверждением о строении модуля.

Некоторые свойства модулей проявляются при аддитивных функторах – естественных преобразованиях в модули иного типа, уважающих компонентное разложение. Но функторы не обязательно сохраняют ядра или образы гомоморфизмов, т.е., – бывают *неточными*. Если они полуточны, сохраняя что-либо одно, то они обладают *производными* функторами, позволяющими опосредованно применять теорему о гомоморфизме. Для вычисления значений производных функторов используются проективные и инъективные модули. Первые являются компонентами свободных модулей, но сейчас для нас важны вторые, поскольку в интересных факторах категории модулей может быть мало проективных объектов, а инъективных остаётся достаточно для построения производных функторов ([1, 2]).

Описание инъективных модулей тривиально, если говорить о модулях над полями. В этом случае любой модуль инъективен. Над областями главных идеалов, – например, целыми числами, – инъективность модуля равносильна его делимости. В произвольной кольцевой ситуации делимости модуля может быть недостаточно для инъективности. Критерий Бэра ([3]) вполне характеризует инъективные модули гомоморфизмами, являясь хорошим инструментом для работы с ними.

Инъективные модули и линейные операторы

Любой правый A-модуль M_A различным образом вкладывается в инъективные правые A-модули, но есть единственное с точностью до изоморфизма подчинённое погружение M_A такого типа, называемое *инъективной оболочкой* ([3]). Её мы обозначим $I(M)_A$. Наша цель – указать её внутреннее строение, погрузив в обозримый A-модуль.

В интересующей нас ситуации A – ассоциативная алгебра над полем k. Тогда всякий модуль становятся векторным пространством над k, что символически отмечается так – M_k. Сама алгебра A является векторным пространством над k, а также – левым и правым A-модулем: ${}_A A_k$, ${}_A A_A$.

Замечание 1. Всякий модуль реализуется через A-гомоморфизмы из A:

$M_A = Hom_{mod\text{-}A}({}_A A_A\,, M_A)$, где $m(a) = m{*}a$, $f{*}a(a') = f(a{*}a')$.

Поскольку A-гомоморфизмы k-линейны, есть модуль $L(M)_A$, содержащий M_A :

$L(M)_A = Hom_{mod\text{-}k}({}_A A_k\,, M_k)$.

Лемма 2. Модуль $L(M)_A$ инъективен. Модуль $I(M)_A$ – это максимальное существенное расширение M_A в $L(M)_A$.

Доказательство. Первое утверждение – следствие изоморфизма:

$Hom_{mod\text{-}A}(U_A\,, L(M)_A) = Hom_{mod\text{-}k}(U_k\,, M_k)$.

Для доказательства второго утверждения установим, что E_A – максимальное существенное расширение M_A в $L(M)_A$ – совпадает с $I(M)_A$ при стандартном вложении последнего в $L(M)_A$.

По инъективности, вложенный в $L(M)_A$ модуль $I(M)_A$ имеет прямое дополнение в сумме $I(M)_A + E_A$. Это дополнение можно считать подмодулем E_A, имеющим нулевое пересечение с $I(M)_A$ и M_A. Поэтому $I(M)_A + E_A = I(M)_A$. Модуль E_A оказался подмодулем существенного расширения $I(M)_A$. В силу максимальности расширения E_A, оно совпадает с $I(M)_A$.

Теперь можно указать – какие k-линейные отображения f из A в M попадают в $I(M)_A$. Для этого определим $J(f)_A$ – наибольший правый идеал A, на котором оператор f оказывается A-линейным гомоморфизмом.

Пример 3. Ситуация с идеалом $J(f)_A$ может быть разной. Например, $J(0)_A = A$. Напротив, пусть $A = M = k[x]$ и $f(P(x)) = P(-x)$. Тогда $J(f)_A = 0$.

Лемма 4. Идеал $J(f)_A$ обладает следующими свойствами:

1) *он непустой, поскольку содержит 0;*

2) $J(f)_A = A$*, если и только если* f *лежит в* M_A.

3) $J(f)_A$ *содержит все правые идеалы вида* $a{*}J(f{*}a)_A$;

4) *пересечение* $J(f)_A$ *с* $Ker(f)$ *совпадает с правым аннулятором* f *в* A;

Доказательство. Первые два пункта очевидны. Последующие вытекают из внутреннего описания идеала $J(f)_A$: он состоит из тех a, для которых при всех a' выполняется равенство $f(a{*}a') = f(a){*}a'$.

***Теорема* 5.** *Если* f *лежит в* $I(M)_A$, *то* f *нетривиален на* $J(f)_A$.

Доказательство. Пусть f лежит в $I(M)_A$, тогда правый модуль $f{*}A$ должен нетривиальным образом пересекаться с M_A, состоящим из A-гомоморфизмов из A_A в M_A. То есть, найдётся a, такой, что $f{*}a$ – ненулевой гомоморфизм:

$f{*}a(a'{*}a'') = f{*}a(a'){*}a''$, то есть $f(a{*}a'{*}a'') = f(a{*}a'){*}a''$.

Следовательно, f – ненулевой A-гомоморфизм из $a{*}A_A$ в M_A , и $a{*}A_A$ – подмодуль $J(f)_A$, на котором f нетривиален.

Замечание 6. Обратное включение, в общем-то, неверно, поскольку множество отображений f, нетривиальных на $J(f)_A$, может не быть замкнутым относительно правых A-линейных комбинаций.

Список литературы

1. Верёвкин А.Б. Инъективные пучки Серра // *Математические заметки*, 1992, т.52, №4, с. 35-41.
2. Верёвкин А.Б. Точное вложение категории Серра в категорию модулей // *Известия ВУЗ'ов, (математика)*, 1993, №11(387), с. 3-5.
3. Каш Ф. *Модули и кольца.* М.: Мир, 1981.