Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ.Электрон. журн. 2018, № 1, с.22-28.

Поступила: 10.04.2018
Окончательный вариант: 19.04.2018

УДК 519.21

Имитационное моделирование случайных блужданий методами рандомизации

Бутов А. А.[1,*], Сухарева А.Ю.[1]

[*]butovaa@ulsu.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе рассматривается простая модель системы массового обслуживания и, в результате применения к ней метода рандомизации, показывается, что найденные значения длин очередей могут быть распределены как случайное блуждание, слабо сходящееся к распределению винеровского процесса, умноженного на величину дисперсии нормированного по времени блуждания. В работе представлена математическая и компьютерная модель системы.

Ключевые слова*: имитационная модель, случайные блуждания, метод рандомизации, точечный процесс, система массового обслуживания, компенсатор.*

Введение

Случайные блуждания являются одними из самых основополагающих и самых изучаемых процессов в природе. Они возникают как в теоретических задачах, так и в приложениях теории вероятностей, таких, например, как последовательный статистический анализ или теория массового обслуживания.

На сегодняшний день большую роль играют процессы массового обслуживания, возникающие в системах, предназначенных для многоразового использования при решении однотипных задач – в системах массового обслуживания (СМО, см. [1]). Ими являются системы автотранспортного, авиационного, ремонтного обслуживания, телефонные системы, вычислительные комплексы, магазины, билетные кассы и т.д. В связи с этим целью данной работы является имитационное моделирование случайных блужданий методами рандомизации, а задачей – определение средних значений функций от длин очередей методом диффузионной аппроксимации.

Рассмотрим простейшую математическую и компьютерную модель системы массового обслуживания.

1. Математическая модель

Опишем вид простейшей модели СМО (рис.1).

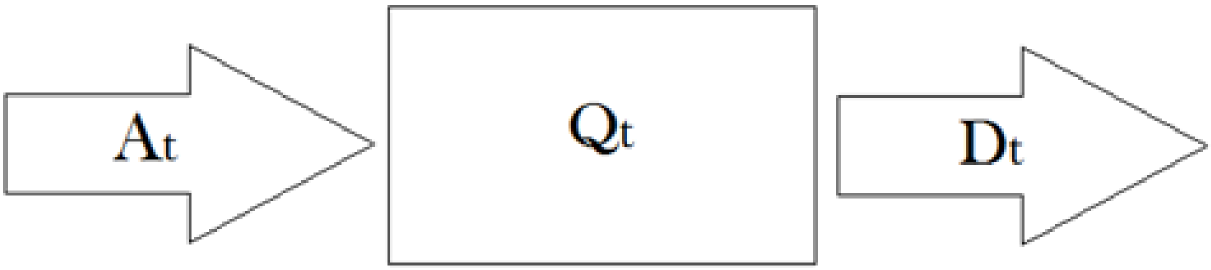

Рис. 1. Схема простейшей системы массового обслуживания

Пусть на стохастическом базисе $\boldsymbol{B}$ заданы точечные процессы (см. [2]):

– процесс $A = (A_t)_{t \geq 0}$ – пуассоновский процесс с компенсатором

$$\tilde{A}_t = \lambda \cdot t, \tag{1.1}$$

где параметр $\lambda > 0$ – интенсивность;

– процесс $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – пуассоновский процесс с компенсатором

$$\tilde{B}_t = \mu \cdot t, \tag{1.2}$$

где параметр $\mu > 0$ – интенсивность; (параметры λ и μ должны строго соответствовать условию равенства: $\lambda = \mu$, в противном случае процесс не будет являться мартингалом и к нему не удастся применить метод «расклейки» очереди)

– процесс $D = (D_t)_{t \geq 0}$–точечный процесс с компенсатором

$$\widetilde{D}_t = \int_0^t I\{q_s > 0\} dB_s \,, \tag{1.3}$$

где $q_t = (q_t)_{t \geq 0}$ – число заявок в очереди, ожидающих своего обслуживания в момент времени $t \geq 0$, а $I\{q_s > 0\} = \begin{cases} 0, \text{при } q_s \leq 0 \\ 1, \text{при } q_s > 0, \end{cases}$– индикаторная функция.

Процесс A описывает число поступивших заявок в систему за время t, процесс D – число обслуженных заявок за время t.

Тогда, число заявок, находящихся в очереди в момент времени *t*:

$$q_t = A_t - D_t. \tag{1.4}$$

Это уравнение является балансовым для исходной системы (т.е. $q_0 = 0$).

Для имитационного моделирования случайных блужданийиспользуется процесс q_t. К нему применяется метод рандомизации, или так называемый метод «расклейки» очереди, описанный в [3]. Опишем этот метод.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ определена последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин $(\xi_k)_{k \geq 1}$ с $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = 1/2$, не зависящая от A и Dи процесс $U = (U_t)_{t \geq 0}$:

$$U_t = \sum_{j=1}^{A_t} \xi_j. \quad (1.5)$$

Тогда $R = (R_t)_{t\geq 0}$– процесс расклейки очереди, принимающий значения $\{-1, 0, 1\}$, причём $q_t = 0$ одновременно с $R_t = 0$ и $q_t R_{t-} = 0$.

$$R_t = \int_0^t I(q_{s-} = 0)dU_s - \int_0^t I(q_{s-} = 1)R_{s-}dD_s. \quad (1.6)$$

Величины ξ здесь задают знак – положительный или отрицательный, и, в зависимости от этого, некоторые части траектории отражаются относительно оси времени или остаются прежними (см. рис.2).

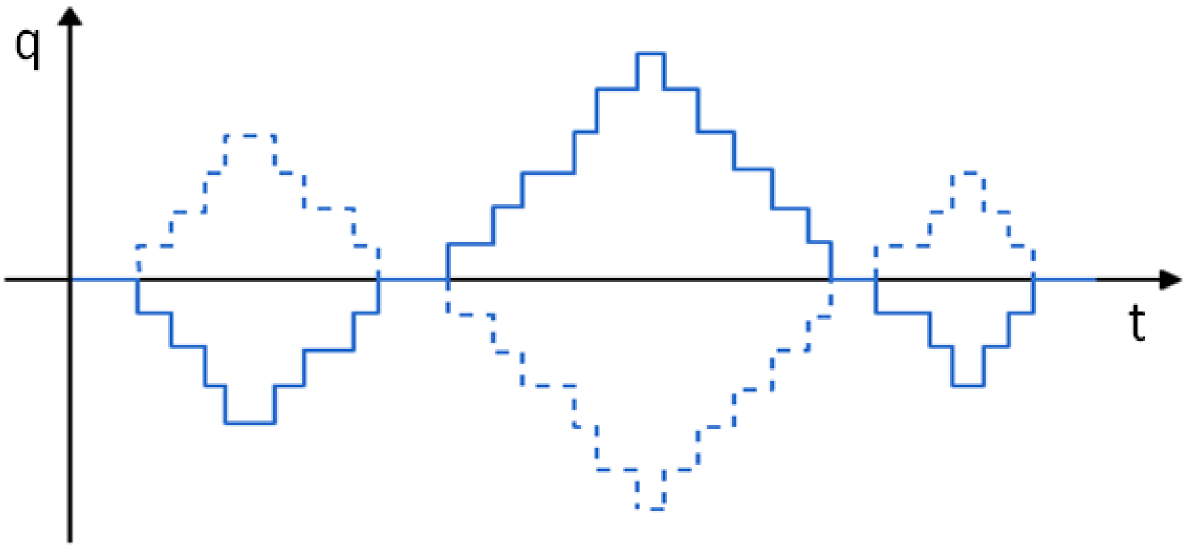

Рис. 2. Вид траектории рандомизированного процесса очереди

тогда новый рандомизированный процесс $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ равен

$$Y_t = q_t R_t. \quad (1.7)$$

Найдём максимально близкое значение к среднему от функции длин очередей - строим эмпирическую функцию распределения, со значениями Y_t в фиксированный момент времени t и теоретическую функцию распределения со случайными величинами σW_t.

Для того, чтобы вычислить эмпирическую оценку дисперсии $\hat{\sigma}$ случайных величин Y_tпри конкретной интенсивности обслуживания μ используем следующую формулу:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{E^{\text{эмп}} Y_t^2}{t}}. \quad (1.8)$$

Эта оценка при одной и той же интенсивности будет оставаться постоянной.

Функцию распределения винеровского процесса строим по известной формуле:

$$F_{\sigma W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2 t}} dy, \; x \in \mathrm{R} \quad (1.9)$$

На этом же графике строим эмпирическую функцию распределения по формуле:

$$F_{\xi}^{эмп}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{\xi_i \le x\}. \qquad (1.10)$$

Чтобы оценить максимальное отклонение между этими двумя функциями, находим расстояние между ними по формуле:

$$\max_{x_i}(F(x) - F^{эмп}(x)). \qquad (1.11)$$

Если данная величина мала, то функции распределения можно считать близкими.

Таким образом, для произвольной, ограниченной, измеримой по Борелю функции $\varphi(x)$ возникает возможность «полуэмпирического» нахождения значения $E\varphi(q_t)$ по следующей формуле:

$$E\varphi(q_t) \sim E\varphi(|W_t \cdot \hat{\sigma}|) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2 t}} \cdot \varphi(|x \cdot \hat{\sigma}|)dx. \qquad (1.12)$$

Здесь знак "~" говорит об аппроксимации, а не о точном значении. Это происходит потому, что, во-первых, $\hat{\sigma} \neq \sigma$ в точности, и, во-вторых, процесс сходится по распределению к винеровскому, а не является им.

2. Компьютерная модель

Дискретизация математических моделей (1.1) – (1.7) осуществлялась в два этапа (см. [5]).

На первом этапе непрерывная область $[0; T]$ заменяется на дискретную область – совокупность конечного числа точек $\left\{t_k : t_k = \frac{k}{L}, k = 0, 1, \dots, [LT]\right\}$, где функция $[x]$ обозначает целую часть числа x, $-\infty < x < +\infty$. Данное множество представляет собой равномерную разностную сетку с шагом дискретизации $\Delta = \frac{1}{L}$, где L – натуральное число.

На втором этапе осуществлен переход от случайных процессов A, B, D, q, U, R, Y к их дискретным аналогам:

$$A_{k+1} = A_k + \Delta_A, \qquad (2.1)$$

$$B_{k+1} = B_k + \Delta_B, \qquad (2.2)$$

$$D_{k+1} = D_k + \Delta_B, \text{ если } q_k > 0, \qquad (2.3)$$

$$q_{k+1} = A_{k+1} - D_{k+1}, \qquad (2.4)$$

$$U_{k+1} = U_k \text{ (если } A_{k+1} = A_k \text{ или } A_{k+1} = 0), \qquad (2.5)$$

$$\text{(иначе если } \xi_{k+1} < 0.5) \; U_{k+1} = U_k - 1,$$

$$\text{иначе } U_{k+1} = U_k + 1,$$

$$R_{k+1} = R_k + \Delta_U \text{ (если } q_k = 0), \qquad (2.6)$$

$$\text{(иначе если } q_k = 1) \; R_{k+1} = R_k - R_k\Delta_D,$$

$$\text{иначе } R_{k+1} = R_k,$$

$$Y_{k+1} = q_{k+1}R_{k+1}, \qquad (2.7)$$

где $A_k = A_{t_k}$, $B_k = B_{t_k}$, $D_k = D_{t_k}$, $q_k = q_{t_k}$, $U_k = U_{t_k}$, $R_k = R_{t_k}$ и $Y_k = Y_{t_k}$.

Величины скачков Δ_A и Δ_B вычисляются следующим образом:

1. $\Delta_A = 1$, если $\xi \in (0{,}5;\ 0{,}5 + \lambda \cdot \Delta)$, иначе $\Delta_A = 0$. Здесь $\xi \sim R[0; 1]$, Δ– шаг дискретизации.

2. $\Delta_B = 1$, если $\eta \in (0{,}5;\ 0{,}5 + \ \mu \cdot \Delta)$, иначе $\Delta_B = 0$. Здесь $\eta \sim R[0;1]$ и не зависит от ξ.

Изменения процессов Δ_U и Δ_D находятся по формулам:

$$\Delta_U = \ U_k - U_{k-1}, \tag{2.8}$$

$$\Delta_D = D_K - D_{k-1}. \tag{2.9}$$

Построив $n = 1000$ траекторий всех вышеописанных процессов и зафиксировав последний момент времени t, получаем 1000 значений случайных величин процесса Y_t. Обозначим их за ξ.

Тогда оценку $\hat{\sigma}$ находим следующим образом:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}{n} / t}. \tag{2.10}$$

Для построения эмпирической функции распределения выполним следующую последовательность действий:

1) Записываем в массив значений выборочный ряд – набор из n чисел, являющихся значениями случайной величины ξ в n независимых экспериментах (n=1000).
2) Получаем вариационный ряд – новый набор случайных величин, упорядоченных по возрастанию.
3) Строим эмпирическую функцию распределения:

$$F_n^*(y) = \begin{cases} 0, & y < X_{(1)}, \\ \frac{k}{n}, & X_{(k)} \le y < X_{(k+1)}, \\ 1, & y \ge X_{(n)}, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $X_{(k)} - k$-ая порядковая статистика.

Для построения теоретической функции распределения по формуле (1.9) разбиваем $F_{\sigma W_t}(x)$ в зависимости от аргумента на две части: $F_{\sigma W_t}(x)$ и $F_{\sigma W_t}(-x)$.

При $x \ge 0$:

$$F_{\sigma W_t}(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \cdot e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2 t}} dy. \tag{2.12}$$

При $x < 0$:

$$F_{\sigma W_t}(-x) = 1 - F_{\sigma W_t}(x). \tag{2.13}$$

Обозначим $\varphi(x)$ подынтегральное выражение в (2.12):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2 t}}. \tag{2.14}$$

Тогда при имитационном моделировании

$$\int_0^x \varphi(y) dy = \sum_{i=1}^{n} \Delta X \cdot \varphi\left((i-1)\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right), \tag{2.15}$$

где $\Delta X = 0{,}1;\ n = \frac{X}{\Delta X} = X \cdot 10$.

После проведения необходимых построений можно наглядно оценить схожесть полученных функций распределения и прийти выводу, что при больших t они действительно эквивалентны. Также на это указывает значение максимального отклонения, найденного по формуле (1.11).

Компьютерное моделирование случайных блужданий было реализовано на языке высокого уровня BorlandDelphi 7.0 (см. рис.3).

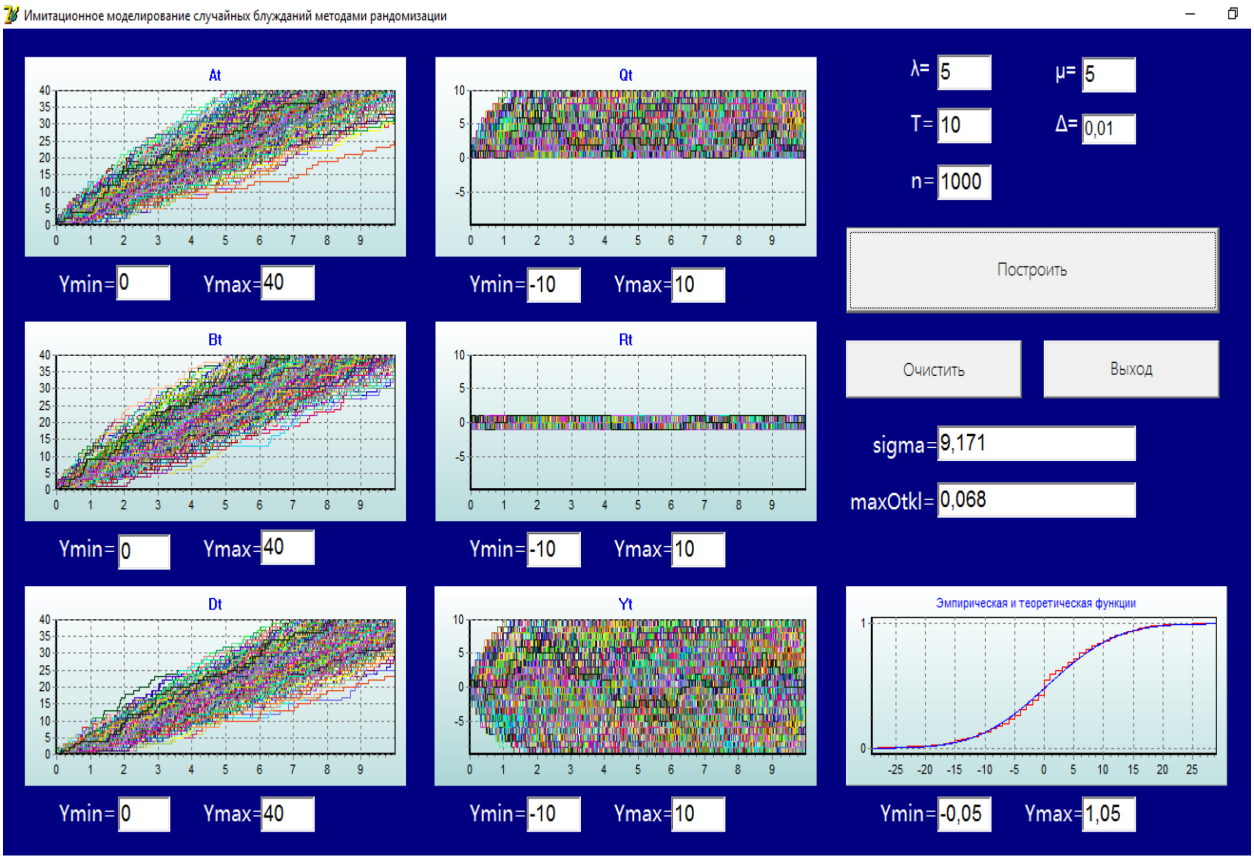

Рис. 3. Имитационное моделирование случайных блужданий методами рандомизации

Заключение

В настоящей работе была построена компьютерная имитационная модель случайных блужданий. Её исследование показало, что для нахождения математического ожидания от функции длины очереди в фиксированный момент времени t достаточно найти математическое ожидание модуля произведения этой функции от винеровского процесса в тот же момент t, умноженного на оценку сигма, конечно же при больших t. Заметим, что функция в (1.12) предполагается такой, что математическое ожидание существует, например – измеримой и ограниченной (см., например, [4]).

Для доказательства использовался метод рандомизации траекторий процесса q_t и сравнение между собой эмпирической функции распределения, построенной по рандомизированным значениям, и теоретической функции распределения винеровского процесса.

Таким образом, данная эквивалентность позволяет нам найти среднее значение функции от длин очередей при том же параметре интенсивности обслуживания с помощью винеровского процесса и уже найденной оценки сигма.

Установленное заключение особенно необходимо в том случае, если мы не можем посчитать математическое ожидание функции от длин очередей, но можем найти это другим эквивалентным способом.

Список литературы

1. Бутов А.А., Савинов Ю.Г. *Теория массового обслуживания: учебно-методическое пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2007.
2. Бутов А.А. *Теория случайных процессов и её дополнительные главы*: *учеб .пособие*. Ч. 1: Введение в стохастическое исчисление. Ульяновск: УлГУ, 2016.
3. Бутов А.А., Липцер Р.Ш. Диффузионная аппроксимация с отражением для модели массового обслуживания с автономным прибором // *"Статистика и управление случайными процессами"* (сб. тр. МИАН). М.: Наука, 1989.
4. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов: учебное пособие* / А.А.Бутов, К.О. Раводин. Ульяновск: УлГУ, 2009.
5. Бутов А.А., Волков М.А., Санников И.А. *Технология имитационного стохастического моделирования: учебно-методическое пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2006.