Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 1, с. 72-82.

Поступила: 20.12.2017
Окончательный вариант: 13.01.2018

УДК 519.714.71

Минимизация булевых функций геометрическим методом

Михеева Е. А.[1,*], Еникеева А.Ф.[1]

[*] melalex05@rambler.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе представлен алгоритм минимизации булевых функций геометрическим методом. Программа, реализующая построение всех минимальных ДНФ заданной функции, протестирована на множестве примеров, в результате чего подтверждена правильность её работы.

Ключевые слова: *булевы функции, графический способ представления булевых функций, геометрический метод, сокращённые дизъюнктивные нормальные формы, минимальные дизъюнктивные нормальные формы, минимизация булевых функций.*

Введение

Алгебра логики возникла в середине 19 века в трудах английского математика Джорджа Буля. Он пытался решить традиционные логические задачи алгебраическими методами.

В настоящее время аппарат алгебры логики имеет большое прикладное значение. Он используется, например, для разработки электрических схем, применяемых в компьютерах и других автоматических устройствах. Эти схемы содержат сотни и тысячи переключательных элементов (реле, выключатели и т.д.), их разработка – весьма трудоёмкое дело [6].

Задача нахождения наиболее простых схем среди равносильных является весьма актуальной. Большой вклад в её решение внесли российские учёные Ю.И. Журавлев, С.В. Яблонский и др. [9].

Поиск наиболее простой схемы сводится к нахождению минимальной булевой функции, реализующей эту схему. Любая минимальная дизъюнктивная нормальная форма

(ДНФ) булевой функции может быть получена из сокращённой ДНФ в результате удаления некоторых элементарных конъюнкций.

Существует целый ряд способов построения сокращенной ДНФ [2,3]. Следует отметить, что для любой булевой функции она является единственной, а минимальных может быть несколько. Кроме того, минимальная ДНФ может совпадать с сокращённой.

Цель статьи – разработка алгоритма минимизации булевых функций геометрическим методом [8] и его программная реализация [5].

1. Графический способ представления булевой функции

Для построения сокращенной ДНФ геометрическим методом необходимо вначале представить булеву функцию графическим способом.

Множество наборов из E_2^n, на каждом из которых функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение 1, обозначим какN_f, n-мерный единичный куб – как B^n.

Определение 1.*Диаграмма частично упорядоченного множества A (диаграмма Хассе)* – ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с множеством A, а пара (a, b) является дугой тогда и только тогда, когда $a < b$, и не найдется отличного от a, b элемента $c \in A$ такого, что $a < c < b$.

Графический способ представления булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$ заключается в указании вершин -мерного единичного куба B^n (на диаграмме частично упорядоченного множества E_2^n), принадлежащих N_f.

На рис. 1 представлены примеры -мерных единичных кубов при $n = 1, \dots, 4$, построенных для функций из таблицы 1. Чёрным цветом выделены вершины, отвечающие наборам N_f.

Таблица 1. Примеры булевых функций для построения -мерных единичных кубов.

$n = 1$	$\overline{x}$
$n = 2$	$x + y$
$n = 3$	$x + y + z$
$n = 4$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3x_4}$

2. Геометрический метод построения сокращённой ДНФ булевой функции

Для небольших значений n сокращённую ДНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ можно найти, исходя из геометрического изображения множества N_f в единичном кубе B^n.

Определение 2. Множество N_k называется *интервалом рангаr*. В геометрической интерпретации интервал ранга r представляет собой$(n - r)$-мерную грань B^n.

Определение 3. Интервал N_i является *максимальным* для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если $N_i \subseteq N_f$ и не существует интервала N_j с условием$N_i \subseteq N_j \subseteq N_f$.

Утверждение 1. Интервал N_i является максимальным для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда соответствующая ему конъюнкция K_i есть простая импликанта данной функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

На данном утверждении и основан геометрический метод построения сокращённой ДНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$, состоящий в построении покрытия множества N_f максимальными интервалами и выписывании соответствующих им конъюнкций.

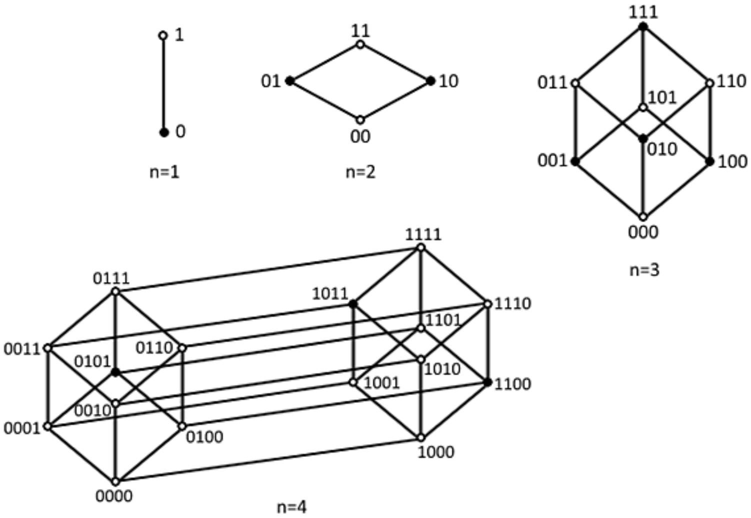


Рис. 1. Единичные кубы для функций, представленных в таблице 1**.**

Рассмотрим данный метод на примере функции трёх переменных.

Пример 1. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = (01010111)$. Отметим на трёхмерном единичном кубе вершины, входящие в N_f , зачернёнными кружочками (рис. 2). ны $001, 011, 101, 111$ покрываются одной из граней куба. Этот интервал является максимальным, так как имеет ранг 1, а $f \not\equiv 1$. Осталась непокрытой вершина 110. Это может быть сделано тремя пересекающимися в ней двумерными гранями куба, однако каждая из граней содержит вершины, не входящие в N_f, и поэтому данная вершина не является интервалом для f. Тогда вершина 110 может быть покрыта тремя инцидентными ей рёбрами, из которых только одно, соединяющее вершины 110 и 111, содержится в N_f. Это ребро является максимальным интервалом для f, так как содержащие его двумерные грани не содержатся в N_f.

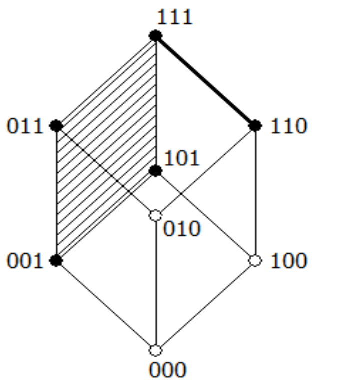


Рис. 2.Покрытия N_f максимальными интервалами для функции $f(x_1, x_2, x_3) = (01010111)$.

Таким образом, имеем два максимальных интервала, покрывающих N_f. Грани соответствует конъюнкция x_3, а ребру соответствует конъюнкция $x_1 x_2$. Сокращённая ДНФ данной булевой функции: $D_c = x_3 \vee x_1 x_2$.

3. Минимизация булевых функций геометрическим методом

Определение 4. *Покрытие* множества N_f максимальными интервалами называется *тупиковым*, если при удалении из него любого из максимальных интервалов получается множество, не являющееся покрытием N_f.

Определение 5. ДНФ, соответствующая тупиковому покрытию множества N_f, называется *тупиковой ДНФ* булевой функции.

Определение 6. *ДНФ*, реализующая булеву функцию, называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число букв по сравнению со всеми другими ДНФ, реализующими данную функцию.

Для нахождения всех минимальных ДНФ булевой функции нужно построить все тупиковые ДНФ, реализующие эту функцию, и выделить среди них все минимальные.

4. Программная реализация

Программную реализацию минимизации булевых функций геометрическим методом можно разделить на три этапа:

1) Представление булевой функции графическим способом.
2) Построение сокращённой ДНФ геометрическим методом.
3) Минимизация булевой функции.

Заметим, что для функций, зависящих от четырёх и более переменных, геометрическое представление применяется очень редко, так как трудно построить наглядную модель -мерного куба при $n > 4$. Поэтому будет рассматриваться построение сокращённой ДНФ только для булевых функций небольшого числа аргументов, хотя всё изложенное справедливо для функций, зависящих от большего числа аргументов.

Программа, написанная на объектно-ориентированном языке программирования Delphi:

- производит построение -мерного единичного куба ($n = 1, \dots ,4$), представляющего булеву функцию, на котором выделено его максимальное покрытие,

- выводит сокращённую ДНФ,

- выводит одну или несколько минимальных ДНФ.

Булева функция в векторном виде записывается пользователем в окно Edit. Программа считывает эту строку, по длине которой и определяется n (т.е. какая фигура будет получена в результате) (табл. 2).

Таблица 2. Зависимость размерности булевой функции от количества нулей и единиц в векторной записи.

Length = 2	=>	$n = 1$
Length = 4	=>	$n = 2$
Length = 8	=>	$n = 3$
Length = 16	=>	$n = 4$

Значения функции записываются в массив по одному элементу, при этом информация типа String преобразуется в тип Byte.

Для наглядности будем рассматривать все необходимые построения для функций трёх переменных.

4.1. Этап 1

Сначала представляем заданную булеву функцию графическим способом.

Программа рисует трёхмерный куб с вершинами $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$. Им соответствуют значения элементов массива с 0 по 7 соответственно.

Вершины единичного куба изображаются в виде окружностей, а ребра – в виде отрезков. Перед построением каждой вершины проверяется условие: если значение функции при данном наборе равно 1, то устанавливаем заливку, которую после изображения эллипса снимаем. Таким образом, вершины, обозначающие наборы, при которых функция принимает значение «истина» (или 1), будут закрашенными.

Между единичными кубами для $n = 3$ и $n = 4$, очевидно (рис. 1), есть нечто общее в плане построения фигуры – это куб. Поэтому для оптимизации кода изображение куба выносим в процедуру.

Эта процедура строит куб с некими смещениями x и y – это передаваемые параметры. При этом для $n = 3$ смещения равны нулю. Для $n = 4$ сначала строится куб без смещения, затем повторно вызывается та же процедура, но уже со смещением.

Результат работы программы для произвольной функции четырёх переменных см. на рис. 3.

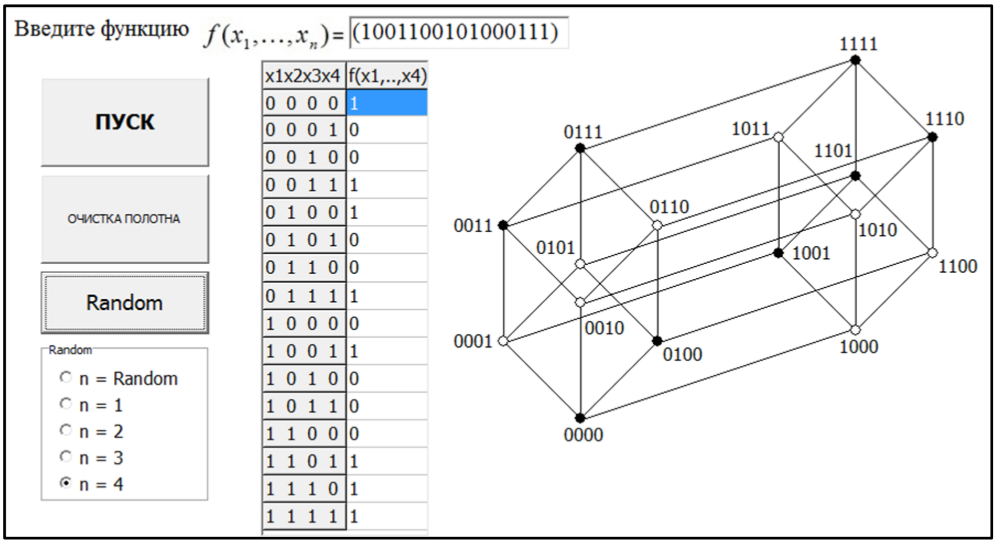


Рис. 3. Пример представления булевой функции четырёх переменных графическим способом.

4.2. Этап 2

После изображения единичного куба производится построение сокращённой ДНФ следующим способом.

Сначала создается массив рёбер: если ребро соединяет две закрашенные вершины, то оно помечается единицей, иначе – нулем.

Затем создается массив граней куба: если все четыре ребра, составляющих грань, помечены единицей, то присваиваем ей значение один, иначе – ноль. При этом если данной грани соответствует значение единица, то заштриховываем её и записываем часть сокращённой ДНФ – конъюнкцию первого ранга, которой соответствует эта грань. Грани куба и соответствующие им конъюнкции см. в табл. 3.

Если осталось ребро, помеченное единицей и не входящее в уже заштрихованные грани, выделяем его жирной линией и дописываем в сокращённую ДНФ после знака дизъюнкции соответствующую этому ребру конъюнкцию второго ранга. Рёбра и соответствующие им конъюнкции см. в табл. 4.

И, наконец, если осталась закрашенная вершина, не входящая в заштрихованные грани и выделенные ребра (т.е. соседние вершины которой не закрашены), дописываем в сокращённую ДНФ после знака дизъюнкции соответствующую этой вершине конъюнкцию третьего ранга. Вершины и их конъюнкции см. в табл. 5.

Таблица 3.Грани трёхмерного единичного куба и соответствующие им конъюнкции.

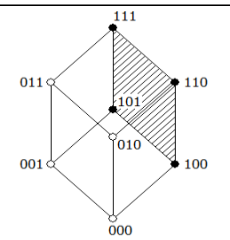
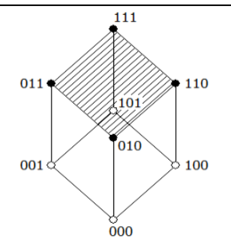
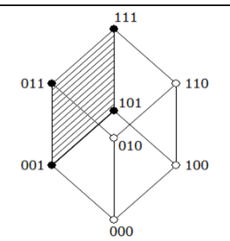
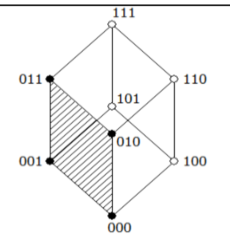
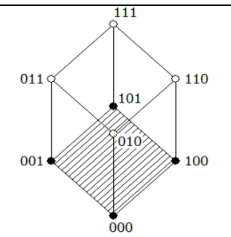
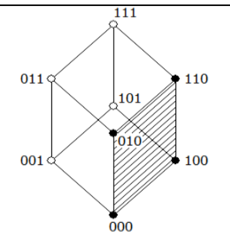
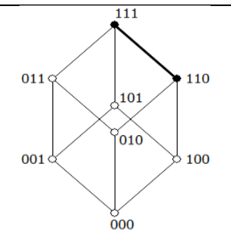
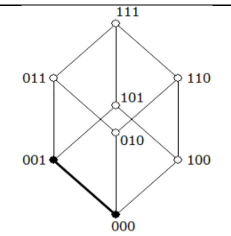
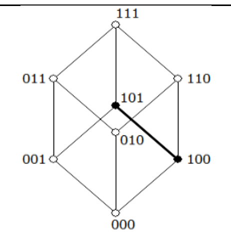
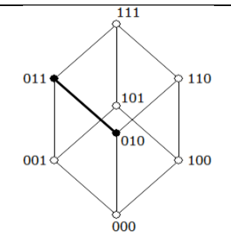
 x_1	 x_2	 x_3
 $\overline{x_1}$	 $\overline{x_2}$	 $\overline{x_3}$

Таблица 4. Рёбра трёхмерного единичного куба и соответствующие им конъюнкции.

 x_1x_2	 $\overline{x_1}\overline{x_2}$	 $x_1\overline{x_2}$	 $\overline{x_1}x_2$

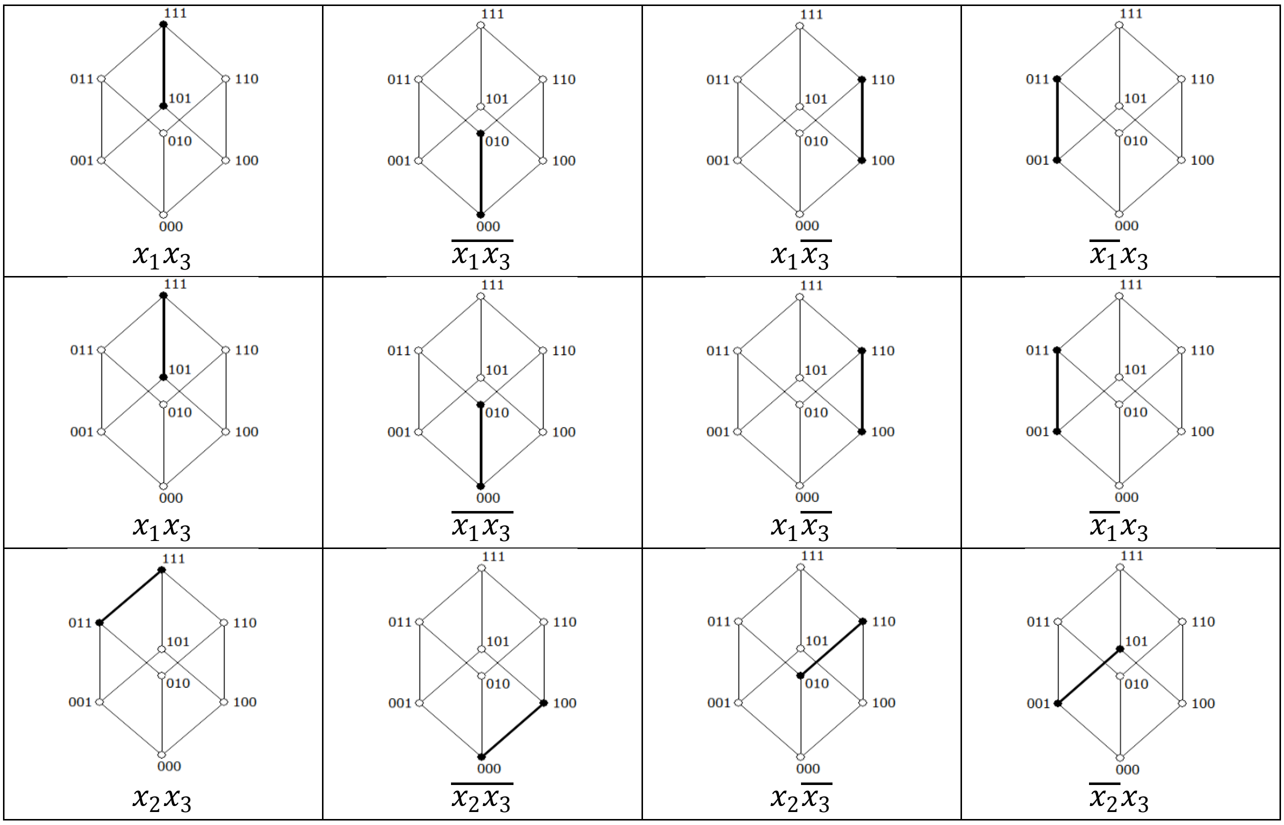
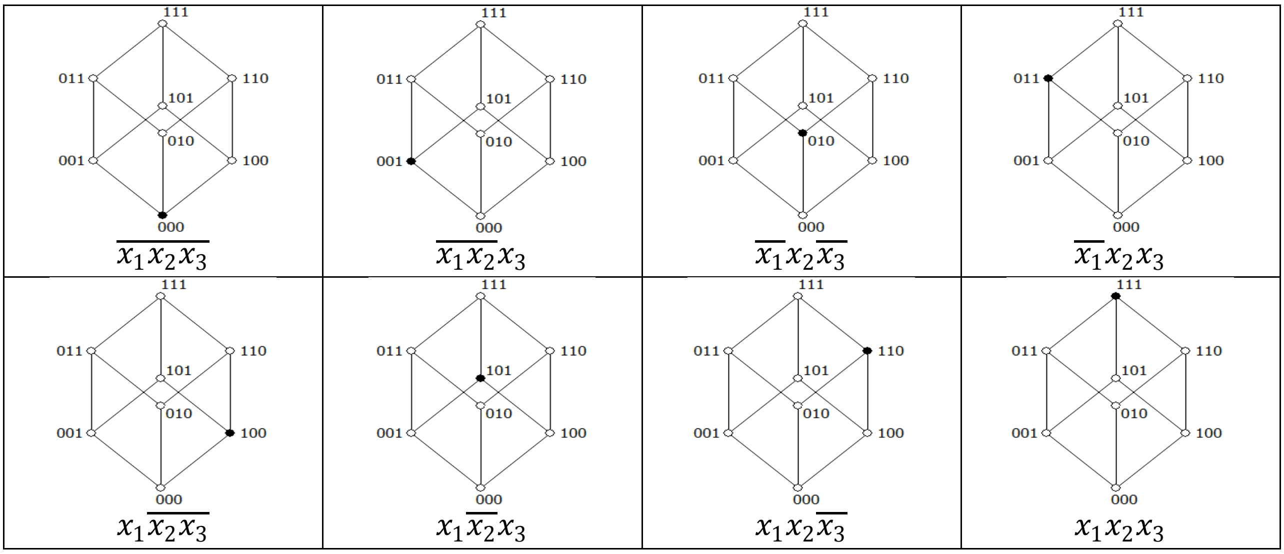


Таблица 5. Вершины трёхмерного единичного куба и соответствующие им конъюнкции.



4.3. Этап 3

После того, как мы построили сокращённую ДНФ, приступаем к минимизации заданной булевой функции геометрическим методом.

Для функции трёх переменных процесс минимизации можно несколько упростить. Мы не будем находить все тупиковые ДНФ и выбирать среди них минимальные. Данный алгоритм разработан так, что искомую функцию можно вывести сразу.

Если покрытие N_f максимальными интервалами совпадает с тупиковым покрытием, то минимальная ДНФ соответствующей булевой функции единственна и совпадает с сокращённой

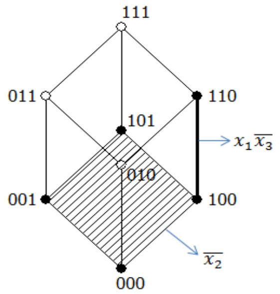


Рис. 4.Сокращённая ДНФ для функции $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3) = (11001110)}$.

Например, для функции $f(x_1,x_2,x_3) = (11001110)$ получаем$D_c = D_{min} = \overline{x_2} \vee x_1\overline{x_3}$ (рис. 4).

Результат работы программы для другой функции трёх переменных, минимальная ДНФ которой также единственна и совпадает с сокращённой, см.на рис. 5.

Рассмотрим случаи, когда минимальная ДНФ булевой функции не совпадает с сокращённой и может быть не единственной. При этом покрытие N_f максимальными интервалами включает в себя рёбра, выстроенные в «цепочку». Изображение «дерева», демонстрирующего варианты таких функций (нижние три ряда), см. на рис. 6.

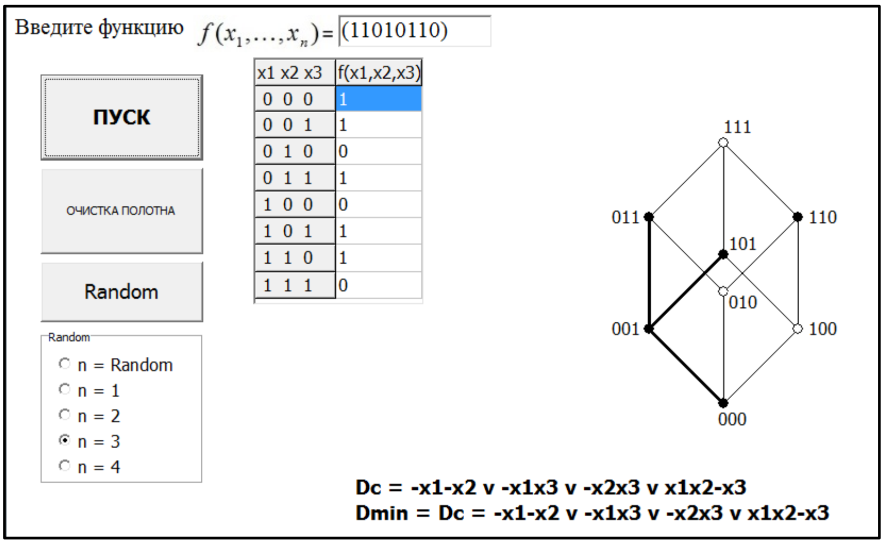


Рис. 5.Пример минимизации булевой функции трёх переменных

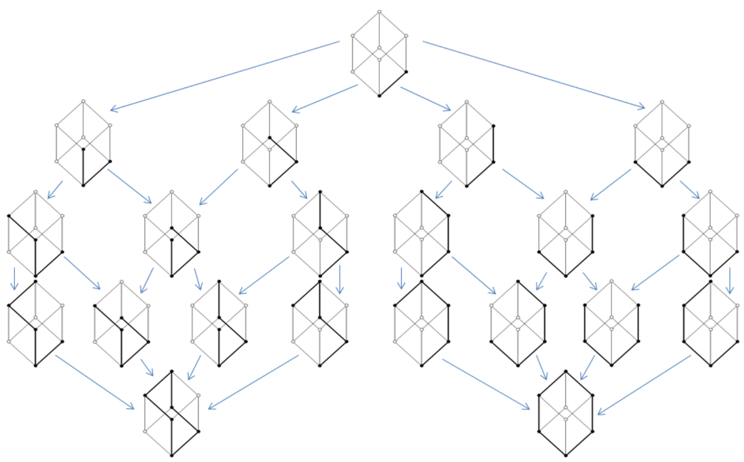


Рис. 6.Дерево, изображающее некоторые варианты булевых функций.

Случай 1. Закрашены три ребра, тогда минимальная функция получается из сокращённой в результате удаления конъюнкции, соответствующей ребру, расположенному посередине. Например, для функции $f(x_1, x_2, x_3) = (11001010)$ существует одна тупиковая ДНФ. Следовательно, она является минимальной: $D_{min} = \overline{x_1 x_2} \vee x_1\overline{x_3}$ (рис. 7).

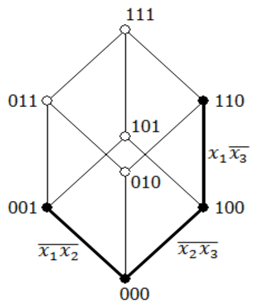


Рис. 7.Сокращённая ДНФ для функции $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = (11001010)}$.

Случай 2. Закрашены четыре ребра, тогда получаем две минимальные ДНФ. Из сокращённой ДНФ по очереди удаляются конъюнкции, соответствующие двум рёбрам, расположенным посередине. Например, для функции $f(x_1, x_2, x_3) = (01011110)$ существует две тупиковые ДНФ. Они одинаковой сложности, следовательно, обе являются минимальными: $D_{min\,1} = \overline{x_1}x_3 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1\overline{x_3}$, $D_{min\,2} = \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_3}$ (рис. 8).

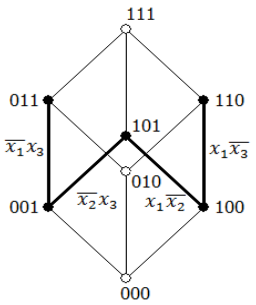


Рис. 8.Сокращённая ДНФ для функции $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = (01011110)}$.

Случай 3. Закрашены шесть рёбер, тогда также получаем две минимальные ДНФ. Из сокращённой ДНФ удаляются конъюнкции, соответствующие рёбрам, которые не являются соседними (т.е. по цепочке через одну). Например, для функции $f(x_1, x_2, x_3) = (11011011)$ существует пять тупиковых ДНФ:

1) $f_1 = \overline{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\overline{x_3} \vee \overline{x_2x_3}$,
2) $f_2 = x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x_1x_2} \vee \overline{x_2x_3}$,
3) $f_3 = \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1x_2} \vee x_1x_2 \vee x_1\overline{x_3}$,
4) $f_4 = \overline{x_1x_2} \vee x_2x_3 \vee x_1\overline{x_3}$,
5) $f_5 = \overline{x_1}x_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x_2x_3}$.

Первые три функции не являются минимальными. Они получаются путём удаления двух конъюнкций, соответствующих параллельным рёбрам. Функции f_4 и f_5, очевидно, являются минимальными ДНФ (рис. 9).

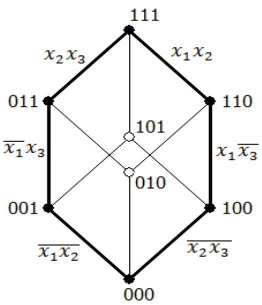


Рис. 9.Сокращённая ДНФ для функции $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = (11011011)}$.

Все конъюнкции, которые можно убрать из сокращённой ДНФ при минимизации булевой функции, в программе записываются в скобках.

Из симметричности куба следует универсальность приведённого алгоритма (т.е. алгоритм работает для всех возможных функций трёх переменных).

При $n = 4$ удалось построить лишь сокращённую ДНФ (результат работы программы для произвольной булевой функции четырёх переменных см. на рис.10). Для последующей минимизации потребуется разработать гораздо более сложный алгоритм, чем для $n = 3$.

Дело в том, что количество вершин, рёбер и граней при увеличении числа аргументов очень быстро растёт, а в программе их все нужно расписывать отдельно (см. табл. 6).

Таблица 6. Количество вершин, рёбер и граней для $n = 1, \dots, 5$.

↓количество	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	n
вершин	2	4	8	16	32	2^n
рёбер	1	4	12	32	80	$n \cdot 2^{n-1}$
граней	0	1	6	24	80	$n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-3}$

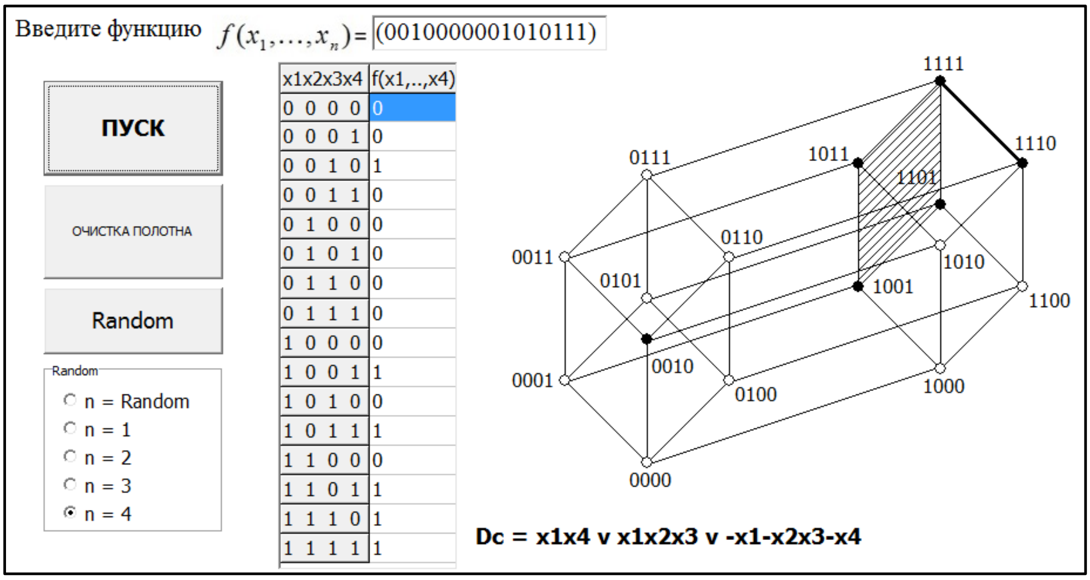


Рис. 10.Пример построения сокращённой ДНФ булевой функции четырёх переменных.

Заключение

В результате выполнения работы разработан алгоритм минимизации булевых функций геометрическим методом, впоследствии реализованный в программе на языке Borland Delphi 7.0.Программа создаёт изображение -мерного единичного куба, представляющего булеву функцию, производит построение сокращенной дизъюнктивной нормальной формы, а также одной или нескольких минимальных ДНФ.

Недостатки программы:

– возможность работы программы только для небольших n (представление булевой функции графическим способом и построение сокращённой ДНФ геометрическим методом только при $n \leq 4$, построение минимальных ДНФ при $n \leq 3$);
– необходимость очистки полотна после каждого построения;
– невозможность вывода сокращённой ДНФ булевой функции соответствующим способом, ввиду отсутствия инструмента, позволяющего записывать индексы переменных и операцию отрицания.

Достоинства программы:

– наглядное представление булевой функции в виде единичного куба;
– достаточно высокая скорость выполнения необходимых преобразований булевой функции;

– возможность самостоятельной проверки правильности работы программы благодаря представлению функции в виде таблицы;
– работа программы не только для заданной функции, но и для произвольной;
– простота интерфейса и удобство использования программы.

Задача минимизации булевых функций геометрическим методом остаётся до конца не решённой, так как в результате был разработан алгоритм для функций, зависящих лишь от трёх переменных. Результаты работы были представлены на Международных научных конференциях «68 (69) Герценовские чтения»[10-11].

Список литературы

1. Гаврилов Г.П. *Сборник задач по дискретной математике* /Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. М.: Наука,1977,1991 (2-е изд., перераб. и доп.), 2004 (3-е изд., перераб.).
2. *Избранные труды С.В. Яблонского* / Отв. ред. В.Б. Алексеев, В.И. Дмитриев, М.: МАКС Пресс, 2004.
3. Михеева, Е.А. *Индивидуальные задания для математического практикума на ЭВМ по «Дискретной математике»: методические указания* / Е.А. Михеева. Ульяновск: фМГУ, 1995.
4. Михеева, Е.А. *Учебно-методическое пособие для студентов I и II курсов факультета математики и информационных технологий* / Е.А. Михеева. Ульяновск: УлГУ, 2008.
5. Новиков Ф.А. *Дискретная математика для программистов*. 1-е, 2-е, 3-е издание. / Ф.А. Новиков. СПб:«Питер», 2000 (1-е изд.), 2007 (2-е изд.), 2009 (3-е изд.).
6. *Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики*, Тр. МИАН СССР, 51, Изд-во АН СССР, М., 1958.
7. Шауцукова Л.З. *Информатика*. М.: Просвещение, 2000 г. Режим доступа: http://book.kbsu.ru/theory/chapter5/1_5_0.html (дата обращения 21.03.2016).
8. Яблонский С.В. *Введение в дискретную математику*. М.: Наука, 1979, 1986 (2-е изд., перераб. и доп.), 2001 (3-е изд., стер.).
9. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике // *Тр. математического ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР*,1958,т.51, с. 3-142.
10. Михеева Е.А., Еникеева А.Ф., Новикова М.А, Федорова Л.В. Способы задания булевых функций и их программная реализация. // *Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «68 Герценовские чтения»*/ Под ред. В.В. Орлова. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2015, с. 86-87.
11. Михеева Е.А., Еникеева А.Ф. Минимизация булевых функций геометрическим методом и её программная реализация. // *Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «69 Герценовские чтения»* / Под ред. В.В. Орлова. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2016, с. 174-175.