



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 1, с.90-97.

Поступила: 06.05.2018

Окончательный вариант: 30.05.2018

© УлГУ

УДК 621.3

Построение переходных процессов в длинных электрических линиях при помощи метода конечных элементов

Санкин Н. Ю.^{1,*}

[*sankin66@mail.ru](mailto:sankin66@mail.ru)

¹УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе предложен частотный метод решения задач построения переходных процессов в длинных электрических линиях со ступенчато-переменными характеристиками. Для отдельных участков линии с постоянными характеристиками решается краевая задача по нахождению изображений краевых токов через изображения краевых напряжений, составляются уравнения, выражающие суммы токов, сходящихся в узле, по которым строят АФЧХ, по построенным АФЧХ находим переходный процесс в интересующей точке линии.

Ключевые слова: частотный метод, переходный процесс в длинной линии, амплитудно-фазовая частотная характеристика.

Расчет переходных процессов в длинных электрических линиях со ступенчато-переменными характеристиками известными аналитическими методами затруднителен [1, 2]. В частности, применение преобразования Лапласа к дифференциальным уравнениям длинной линии позволяет получать решение в простейших случаях. Уже при наличии хотя бы двух участков с различными характеристиками, аналитическое обратное преобразование Лапласа настолько сложно, что подобный подход приводит к практически непреодолимым трудностям [3].

Частотный метод решения задач построения переходных процессов в длинных электрических линиях со ступенчато-переменными характеристиками позволяет избежать таких трудностей. Для отдельных участков линии с постоянными характеристиками, дифференциальные уравнения которых преобразуются по Лапласу, решается краевая задача по нахождению изображений краевых токов через изображения краевых напряжений. Затем составляются уравнения, выражающие условие равенства нулю суммы токов, сходя-

щихся в узле, по которым строят АФЧХ. По построенным АФЧХ строится переходный процесс в интересующей нас точке линии.

Рассмотрим дифференциальные уравнения длинной линии [4].

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + c \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

Исключим из уравнений (1) токи. В результате получим следующее уравнение:

$$Lc \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (Lg + rc) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -rgu. \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (2) по Лапласу:

$$\left[Lcp^2 + (rc + Lg)p + rg \right] U - \frac{d^2 U}{dx^2} = Lc(pu_0 + u_1) + (rc + Lg)u_0, \quad (3)$$

где U – напряжение, преобразованное по Лапласу; u_0 – начальное напряжение; u_1 – начальная скорость изменения напряжения; p – параметр преобразования Лапласа. Обозначая

$$a = -l^2 \left[Lcp^2 + (rc + Lg)p + rg \right], \quad (4)$$

вместо (3) получим:

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + aU = -l^2 \left[Lc(pu_0 + u_1) + (rc + Lg)u_0 \right] \quad (5)$$

где $\xi = \frac{x}{l}$ – безразмерная координата; l – длина линии.

Рассмотрим однородное уравнение (4):

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + aU = 0. \quad (6)$$

Решим задачу Коши для однородного уравнения (6), полагая известными следующие начальные условия:

$$U|_{x=0} = U_0; \quad I|_{x=0} = I_0 = -\frac{1}{l(r + pL)} \frac{dU_0}{d\xi}, \quad (7)$$

где I_0 , U_0 – напряжение и ток, преобразованные по Лапласу, в начале линии.

Обозначим

$$m_k = -\left[Lc(pu_0 + u_1) + (rc + Lg)u_0 \right] \quad (8)$$

Решение уравнения (6) запишется в виде:

$$U = C_1 \cos \alpha \xi + C_2 \sin \alpha \xi, \quad (9)$$

где $\alpha = \sqrt{a}$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий. Тогда в нашем случае получим:

$$C_1 = U_0; C_2 = -\frac{I_0 l(r + pL)}{\alpha}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), с учетом соотношения $I = -\frac{1}{l(r + pL)} \frac{du}{d\xi}$ получим:

$$U = U_0 \cos \alpha \xi - I_0 \frac{l(r + pL) \sin \alpha \xi}{\alpha}, I = -U_0 \frac{l}{l(r + pL)} \alpha \sin \alpha \xi + I_0 \cos \alpha \xi.$$

Рассмотренному решению соответствует матрица переноса или матрица фундаментальных решений:

$$K(\xi) = \begin{vmatrix} K_{UU} & -l(r + pL)K_{UI} \\ \frac{1}{l(r + pL)}K_{IU} & K_{UU} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где $K_{UU} = \cos \alpha \xi$; $K_{UI} = \frac{\sin \alpha \xi}{\alpha}$; $K_{IU} = \alpha \sin \alpha \xi$; $K_{II} = K_{UU}$.

Пользуясь матрицей (11), напишем соотношения метода начальных параметров:

$$V(\xi) = K(\xi)V(0) + l \int_0^\xi K(\xi - S)V(S) dS, \quad (12)$$

$$V^T(0) = (U_0, I_0), \quad V^T(S) = (0, cL(pU_0 + U_1) - (rc + Lg)U_0).$$

где S – переменная интегрирования.

Рассмотрим первую строчку матричного соотношения (12), полагая $U_0 = U_n$, где U_n – напряжение в начале участка. Тогда получим соотношение для начального I_n и конечного I_k токов:

$$I_n = Q_{nk}U_n - R_{nk}U_k + R_{nk}[U_k], \quad (13)$$

$$I_k = Q_{nk}U_k - R_{nk}U_n + R_{nk}[U_n], \quad (14)$$

где $Q_{nk} = \phi \frac{K_{UU}(1)}{K_{UI}(1)}$; $R_{nk} = \phi \frac{1}{K_{UI}(1)}$; $\phi = \frac{1}{l(r + pL)}$.

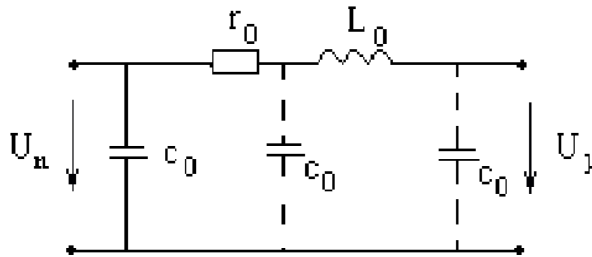


Рис. 1. Электрическая линия

Величины в квадратных скобках для начала и конца линии можно записать следующим образом:

$$[U_n] = l/\varphi \int_0^1 m_k K_{UI}(S) dS, [U_k] = l/\varphi \int_0^1 m_k K_{UI}(1-S) dS. \quad (15)$$

Рассмотрим длинную линию без нагрузки и без утечки (рис. 1).

Параметры линии имеют следующие значения: $l=100$ км, $c_0 = 10^{-6}$ Ф/км, $l_0 = 0,36 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $r_0 = 0,1 \cdot 10^{-4}$ Ом/км, $U_0 = 1$. Решая уравнения (13) и (14), получаем формулу для преобразованного по Лапласу напряжения в конце линии:

$$U(p) = \frac{1}{\cos \alpha} U_0. \quad (16)$$

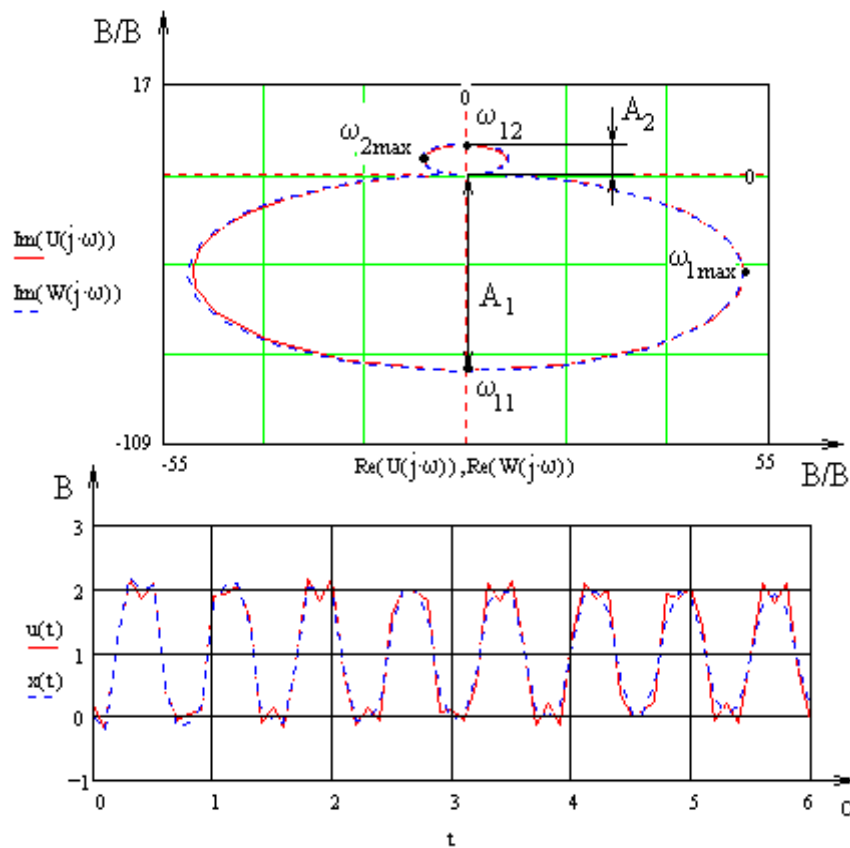


Рис. 2. АФЧХ и переходные процессы электрической линии без нагрузки.

АФЧХ, построенная по уравнению (16), изображена на рис. 2. В передаточной функции, представляемой в виде суммы колебательных звеньев, число звеньев берется равным числу существенно проявляющихся витков АФЧХ. По построенной АФЧХ находим постоянные времени и коэффициенты усиления передаточной функции для напряжения в конце линии

$$W(p) = \sum_{n=1}^s \frac{k_n}{T_{2n}^2 p^2 + T_{1n} p + 1}, \quad (17)$$

где $\frac{T_{1n}}{T_{2n}} = 1 - \frac{\omega_{nmax}^2}{\omega_n^2}$; $T_{2n} = \frac{1}{\omega_{1n}}$; $k_n = A_n T_{1n} \omega_{1n}$.

Здесь $s=2$, поскольку амплитуда третьего витка составляет менее 1% от амплитуды первого витка.

При определении частот ω_n и ω_{nmax} следует уделять особое внимание экстремумам, на которых они получаются, так как точность их определения отражается на графике переходного процесса. При высокой точности определения ω_n и ω_{nmax} АФЧХ построенные по формулам (16) и (17) совпадают с точностью порядка 1%, что говорит о высокой эффективности предложенной методики.

Сопоставим переходные процессы в рассматриваемой длинной линии, построенные по известной и предлагаемой методике. В [3] дано решение уравнения (4), которое имеет следующий вид:

$$u(t)|_{x=l} = U_0 \left[1 - \frac{\pi e^{-at} v^2}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(\omega_n^2 + a^2)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) (a \sin(\omega_n t) + \omega_n \cos(\omega_n t)) \right], \quad (18)$$

где $a = \frac{r}{2L}$; $v = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$; $\omega_n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} - a^2}$.

Переходный процесс можно построить, взяв интеграл по вещественной части выражения (17), делённого на $j\omega$:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} W(j\omega) \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega \right). \quad (19)$$

Множитель $1/j\omega$ в (19) взят в связи с тем, что имеет место ступенчатое возмущение. При численном интегрировании конкретный верхний предел в выражении (19) устанавливается численным экспериментом, исходя из АФЧХ, изображенной на рис. 2. Как было отмечено, формула (19) может быть представлена в виде ряда (20), причем этот ряд является абсолютно и равномерно сходящимся. Поэтому всегда существует такое число членов ряда, когда обеспечивается заданная точность и, кроме того, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W(j\omega)| = 0$. Поэтому не представляет труда выбрать такое значение ω , когда $|W(j\omega)| \leq \varepsilon$, где ε – сколь угодно малое положительное число. На практике в качестве ε берется некоторое малое число, такое чтобы результат вычисления по формуле (19) уже не зависел бы от выбранного конечного верхнего предела в рамках заданной точности.

На рис. 2 переходные процессы, построенные по формулам (18) и (19), совпадают с точностью около 1%.

Рассмотрим длинную линию с утечкой $g_0 = 10^{-6}$ см/км. Изображение напряжения в конце линии, согласно уравнениям (13) и (14), будет иметь вид:

$$U(p) = \frac{-U_0 R R_{nk}}{1 - R Q_{nk}}, \quad (20)$$

где R – сопротивление нагрузки; U_0 – изображение напряжения в начале линии. АФЧХ для этого случая показана на рис. 3.

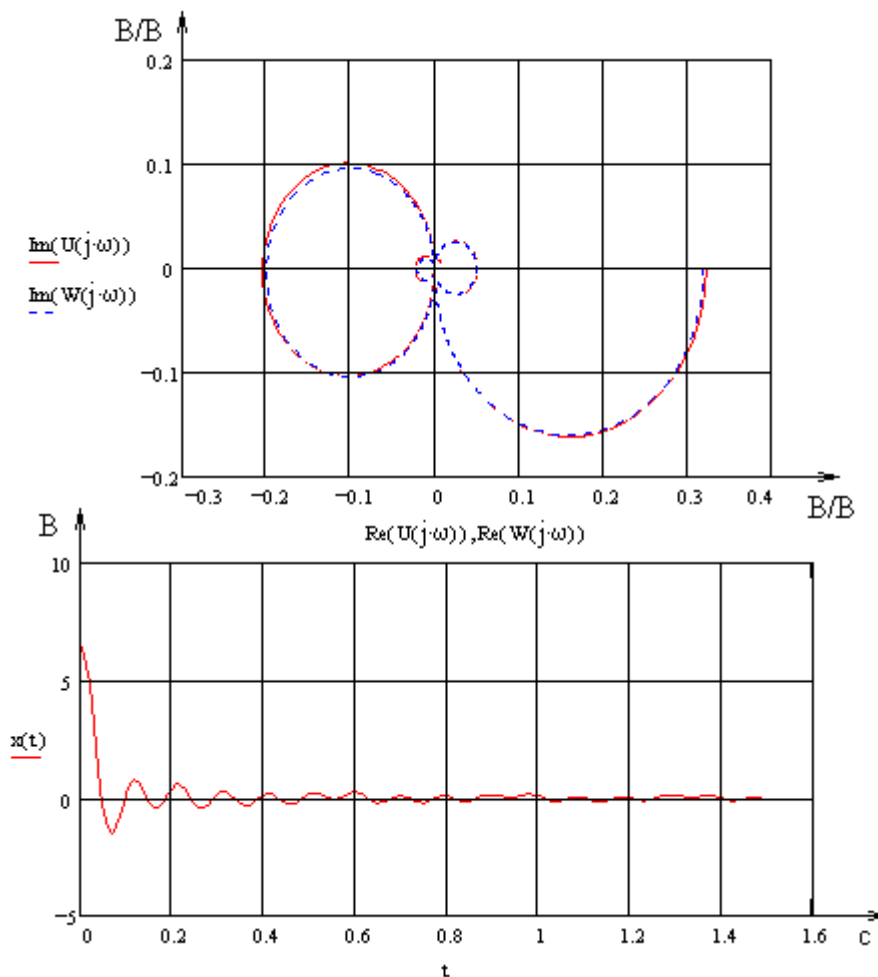


Рис. 3. АФЧХ и переходный процесс электрической линии с учетом ее утечки.

Первый виток АФЧХ представляет собой аperiodическое звено, передаточная функция которого имеет вид $W(p) = \frac{k_n}{T_n p + 1}$, где $T = 1/\omega_n$. Остальные витки характерны для произведений колебательных звеньев на параметр P . Поэтому передаточная функция для АФЧХ, показанной на рис. 3, запишется следующим образом [5, 6]:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1} + \sum_{n=2}^4 \frac{k_n p}{T_{2n}^2 p^2 + T_{1n} p + 1}. \quad (21)$$

АФЧХ и переходные процессы, построенные по формулам (20) и (21), практически совпадают.

Рассмотрим длинную линию представленную на рис. 1, но с другими параметрами, которые имеют следующие значения: $l = 100$ км, $c_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ Ф/км, $L_0 = 0,36$ Гн/км, $r_0 = 0,1$ Ом/км, $U_0 = 100$ в.

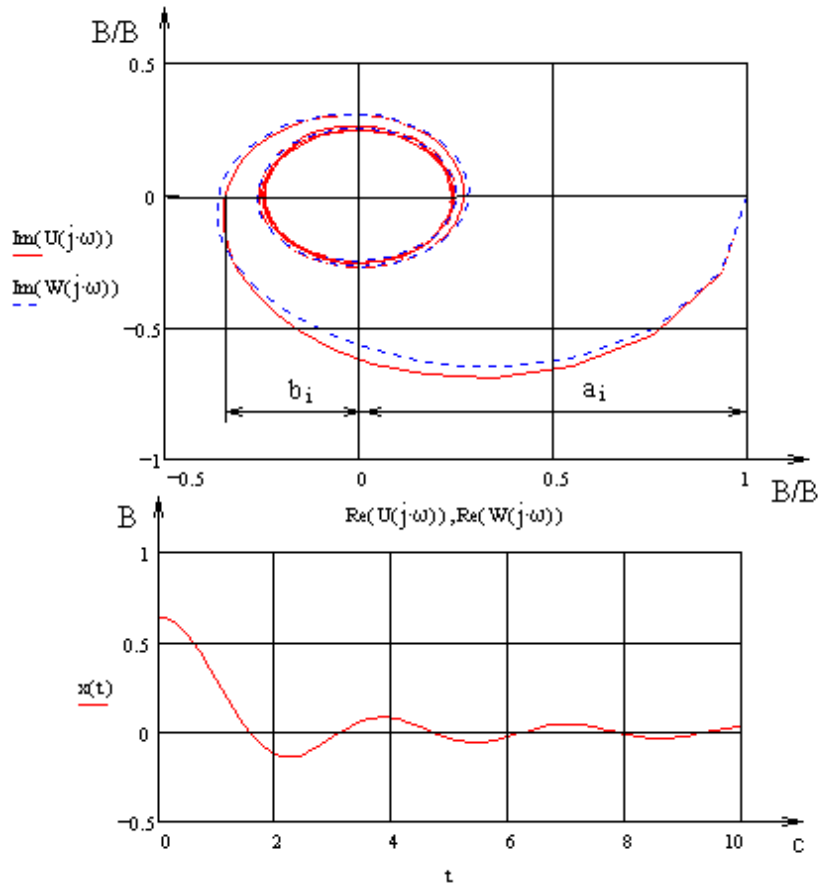


Рис. 4. АФЧХ и переходный процесс в электрической линии без нагрузки.

Преобразованное напряжение в конце этой линии дается формулой (19). АФЧХ и переходный процесс для этого случая представлена на рис. 4. Передаточная функция в этом случае будет такова:

$$W(p) = \prod_{n=1}^s \frac{T_{1n}p + 1}{T_{2n}p + 1}, \quad (22)$$

где $T_{1n} = \frac{b_n T_{2n}}{a_n}$, $T_{2n} = \frac{1}{\omega_n}$.

Для системы, имеющей несколько разнородных участков, уравнения Кирхгофа запишутся следующим образом:

$$-R_{k-1,k} U_{k-1} + (Q_{k-1,k} + Q_{k,k+1}) U_k - R_{k,k+1} U_{k+1} = -R_{k-1,k} [U_{k-1}] - R_{k,k+1} [U_{k+1}], \quad k = \overline{1, s}, \quad (23)$$

где s – число узлов системы.

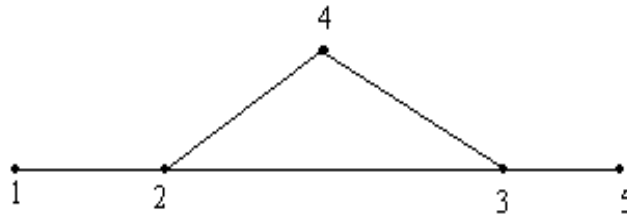


Рис. 5. Электрическая сеть.

Рассмотрим длинную линию, состоящую из 5 узлов (рис. 5). Расстояния между узлами имеют следующие значения: $l_{12} = 15$ км., $l_{23} = 60$ км., $l_{35} = 25$ км., $l_{24} = 20$ км., $l_{43} = 40$ км. Система уравнений, согласно выражению (23), для каждого узла имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & Q_{nk12}U_1 - R_{nk12}U_2 = 0; \\
 & -R_{nk12}U_1 + (Q_{nk12} + Q_{nk23} + Q_{nk24})U_2 - R_{nk23}U_3 - R_{nk24}U_4 = 0; \\
 & -R_{nk23}U_2 + (Q_{nk23} + Q_{nk43} + Q_{nk35})U_3 - R_{nk43}U_4 - R_{nk35}U_5 = 0; \\
 & -R_{nk24}U_2 - R_{nk43}U_3 + (Q_{nk24} + Q_{nk43})U_4 = 0; \\
 & -R_{nk35}U_3 + Q_{nk35}U_5 = 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Решая систему уравнений (24), построим АФЧХ для напряжения в конце линии (узел 5). При этом АФЧХ и переходные процессы, построенные по формуле полученной из системы (24) и по формуле (17), если убрать ветви 2-4 и 4-3, то есть положить $Q_{nk23} = 0$ и $R_{nk23} = 0$, практически совпадают (рис. 2).

Таким образом, разработан метод анализа математических моделей электрических цепей, как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, позволяющий строить переходные процессы в точках линии при любом характере зависимости входного напряжения от времени.

Список литературы

1. Блок В.М., Электрические сети и системы. М.: Высшая школа, 1986. 430 с.
2. Веников В.А. и др. Электрические системы: Управление переходными режимами электроэнергетических систем. М.: Высшая школа, 1982. 247 с.
3. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высшая школа, 1985. 536 с.
4. Нейман М.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. М.: Энергия, Ч1. 1967. 524 с.; Ч2. 1967. 408 с.
5. Пирожков С.Л. Математическое моделирование сложных электрических цепей. // Механика и процессы управления. Ульяновск: УлГТУ, 1998. С.56-63.
6. Санкин Ю.Н., Пирожков С.Л. Переходные процессы в длинных электрических линиях со ступенчатыми характеристиками. Электротехника. 2000. №6. С. 13-16.