



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 1, с. 123-130.

Поступила: 22.03.2018

Окончательный вариант: 25.05.2018

© УлГУ

УДК 531, 517.925.51

Об управлении и стабилизации перевернутого математического маятника вертикальными силами

Юрьева О.Д.^{1,*}, Баунина А.В.²

[*yurjevaod@mail.ru](mailto:yurjevaod@mail.ru)

^{1,2}УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе обсуждается возможность применения вертикальной силы для управления и стабилизации перевернутого маятника. Предложенные ранее способы стабилизации перевернутого маятника в основном ориентированы на получение и использование линейных математических моделей данного объекта, что не всегда позволяло получить желаемые свойства в замкнутой системе. В представленной работе задача рассматривается в нелинейной постановке.

Ключевые слова: управление, стабилизация, устойчивость.

Введение

Перевернутый маятник является широко изучаемой динамической системой, рассматриваемой в физике, механике, прикладной математике, теории управления, численных методах и т.д. и т.п. Математический маятник и задачи, связанные с его стабилизацией и управлением, сделали этот объект своего рода эталоном при проведении численных исследований в искусственных нейронных сетях, в задачах нечеткой логики, при использовании метода обобщенных координат, в решении задач оптимального управления, при исследовании устойчивости по Ляпунову.

Помимо того, что задача управления математическим маятником всегда была тестовой в численных методах, она является модельной и для интеллектуальных систем [2,3]. Управление маятником в его неустойчивом верхнем положении не только интересная физико-математическая задача со сложной инженерной реализацией, так как она связана с нелинейностью и быстротой обработки поступающей информации, но и, что очень важно, является непростой задачей для любого искусственного интеллекта, так как требует коррекции и анализа входных данных и действий. Неудивительно, что стабилизировать мате-

математический маятник в верхнем неустойчивом положении равновесия пытались с помощью манипуляторов и специализированных датчиков [4 -7].

Библиография по математическому маятнику многочисленна [1-21]. Тем не менее, практически вся техническая литература относится к исследованию плоского маятника с одной степенью свободы. Только недавно появились публикации, относящиеся к задаче о сферическом маятнике с двумя степенями свободы [8 - 11]. Из-за сложностей задач управления, в [9] рассматривается стабилизация сферического маятника одновременно двумя несвязанными плоскими маятниками. В работах [10, 11] для получения условий устойчивости сферического маятника применен так называемый метод управляемых лагранжианов.

На практике, для стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия используется управляющее воздействие в виде горизонтальной силы, которая в большинстве случаев реализуется с помощью электрической тележки. Управляющее воздействие в такой системе реализуется за счет ее горизонтальных смещений.

В немногочисленных случаях, авторы рассматривают альтернативное действие управления, состоящее из колебательного действия вертикальной силы, приложенной в точке подвеса маятника. Стабилизирующий эффект таких быстрых вертикальных колебаний, приложенных к основанию маятника, хорошо известен, начиная с ранних работ Стивенсона в 1908 году [12].

В пятидесятые годы Капица привел строгое доказательство условий стабилизации перевернутого маятника, когда его точка подвеса колеблется с высокой частотой [13].

Другой подход управления маятником основан на приложении крутящего момента к основанию маятника, как это было предложено в работе Фурута [15]. На самом деле, реализация данного механизма снова приводит к различного рода плоским маятникам, известным в литературе как вращательный маятник [16] или просто маятник Фурута [17].

В работах [18 - 20] рассматривается стабилизация маятника с помощью так называемых колебательных сигналов, что является хорошо известным способом для управления механическими системами. В [21] рассматривается возможность использования вертикальных сил для стабилизации маятника. Большинство авторов используют очень упрощенную линейную модель.

В представленной работе предпринята попытка проведения качественного и аналитического анализа возможностей управления и стабилизации перевернутого математического маятника с помощью вертикальной силы в нелинейной постановке.

1. Вывод уравнений движения

Рассмотрим следующую механическую систему. На платформу массы M установлен маятник (см. рис.1) массы m и длины $2l$. Зададим внешнюю вертикальную силу F_y .

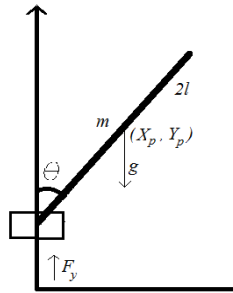


Рис. 1. Перевернутый маятник, установленный на платформе с приложенной вертикальной силой F_y .

Динамические уравнения рассматриваемого маятника могут быть непосредственно получены как уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i; \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$L = T - \Pi,$$

где L - лагранжиан системы; T - кинетическая энергия и Π - потенциальная энергия системы; Q_i - обобщенные силы, q_i - обобщенные координаты, которыми в данном случае являются y и θ соответственно.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \quad (2)$$

где I - момент инерции маятника, будем считать, что им можно пренебречь. Запишем координаты центра масс маятника

$$x_p = l \sin \theta; \quad y_p = y + l \cos \theta. \quad (3)$$

Потенциальная энергия в предположении, что масса маятника концентрируется в своей верхней части имеет вид

$$\Pi = Mgy + mgy_p = (M + m)gy + mgl \cos \theta. \quad (4)$$

После очевидных преобразований Лагранжиан примет вид

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (M + m) \dot{y}^2 - ml \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} - (M + m)gy - mgl \cos \theta \quad (5)$$

Подставляя L в уравнения Лагранжа второго рода общего вида, получим уравнения динамики системы

$$(M + m)\ddot{y} - ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \cos \theta \dot{\theta}^2 = F_y - (M + m)g \quad (6)$$

$$-ml \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} + ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0,$$

которые могут быть выражены в стандартной компактной форме

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q. \quad (7)$$

Здесь $M(q)$ - симметричная, положительно определенная матрица инерции, $C(q, \dot{q})$ - Кориолисова /центростремительная матрица, $G(q)$ - вектор силы тяжести:

$$q = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}; \quad M(q) = \begin{bmatrix} (M + m) & -ml \sin \theta \\ -ml \sin \theta & ml^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml \cos \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad G(q) = \begin{bmatrix} (M + m)g \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$Q = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Интересно сравнить полученные уравнения с уравнениями для случая, в котором рассматриваются чисто горизонтальные силы.

Если F_x – горизонтальная приложенная сила, то уравнения движения перевернутого маятника как уравнения Лагранжа второго рода будут иметь вид

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F_x \quad (9)$$

$$ml \cos \theta \ddot{x} + ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0$$

Несмотря на кажущееся сходство формул (6) и (9), стабилизация маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия, как будет показано ниже, в каждом случае совершенно разная.

2. Анализ уравнений движения

В качестве первого шага в анализе полученной нелинейной системы (6), сосредоточимся на ситуации практического интереса, а именно, движениях маятника в окрестности положения $\theta = 0$.

Рассмотрим следующие приближения

$$\sin \theta \approx \theta; \quad \cos \theta \approx 1 - \theta^2/2 \quad (10)$$

Подставим эти выражения в функцию Лагранжа (4), получим

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (M + m) \dot{y}^2 - ml\theta \dot{\theta} \dot{y} - (M + m)gy - mgl(1 - \theta^2/2) \quad (11)$$

Из уравнений Лагранжа, получим следующие уравнения движений

$$(M + m)\ddot{y} - ml\theta \ddot{\theta} - ml \cos \theta \dot{\theta}^2 = F_x - (M + m)g \quad (12)$$

$$-\theta \ddot{y} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0$$

Действуя аналогично, для случая действия горизонтальной силы, получим следующую систему

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = F_x \quad (13)$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0$$

В отличие от динамических уравнений для случая горизонтальной силы (13), которые полностью линейны, уравнения малых колебаний (12) – нелинейные, что делает анализ устойчивости и управления сравнительно сложнее.

Выразим \ddot{x} из второго уравнения (13) и подставим в первое, получим уравнение вида

$$\ddot{\theta} - \frac{M+m}{ml} g\theta = -\frac{F_x}{ml} \quad (14)$$

Характеристическое уравнение для (14) имеет вид $\lambda^2 - \frac{M+m}{Ml}g = 0$, корнями которого являются числа $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{M+m}{Ml}g}$. Откуда следует, что решениями соответствующего однородного уравнения (14) будут являться гиперболические синусы и косинусы и, следовательно, динамика маятника неустойчива.

Тем не менее, введя в уравнение (14) хорошо известный закон управления вида

$$F_x = k_p \theta + k_d \dot{\theta}, \quad (15)$$

верхнее положение равновесия можно стабилизировать.

Проведем аналогичные рассуждения для системы (12) для случая маятника с вертикальной силой. Второе уравнение системы (13) перепишем в виде

$$l\ddot{\theta} - (g + \ddot{y})\theta = 0. \quad (16)$$

Вертикальное ускорение не будем рассматривать в качестве внешнего управляющего воздействия. Очевидно, что это уравнение (16) является неустойчивым, если выполнено условие

$$(g + \ddot{y}) > 0. \quad (17)$$

В этом случае получим неограниченные гиперболические решения в окрестности 0. Напротив, если $(g + \ddot{y}) < 0$, то получим устойчивые колебательные решения, так как характеристическое уравнение будет иметь следующие корни

$$\lambda^2 - \frac{|g+\ddot{y}|}{l} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{|g+\ddot{y}|}{l}}, \quad (18)$$

так что

$$\theta(t) = A \cos[\omega(t) \cdot t + \varphi], \quad (19)$$

где угловая частота $\omega(t)$ зависит от времени, так как она связана с переменной вертикальной силой. Поэтому, когда условия устойчивости $(g + \ddot{y}) < 0$ выполняются, маятник будет колебаться с постоянной амплитудой и медленно меняющейся частотой, определяемой соотношениями

$$A = \sqrt{\theta^2(0) + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2(0)}}; \quad \varphi = \arctg \left[\frac{-\dot{\theta}(0)}{\omega(0) \cdot \theta(0)} \right] \quad (20)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{|g+\ddot{y}|}{l}}.$$

Чем больше вертикальное ускорение, тем выше частота колебаний. Учитывая обычное условие $\dot{\theta}(0)/\omega(0) \ll \theta(0)$, можно положить, что амплитуда практически равна начальному отклонению $\theta(0)$.

Итак, для системы, находящейся под действием вертикальной силы, представленной на рис. 1, можно гарантировать устойчивое колебательное движение, если и только если применяемая вертикальная сила F_y , производит отрицательное вертикальное ускорение, такое что $\ddot{y} < -g$.

Так как устойчивость маятника зависит от величины вертикального ускорения, проанализируем вертикальную динамику маятника, которая при малых углах отклонения описывается уравнением

$$(M + m)\ddot{y} - ml\theta\ddot{\theta} = F_y - (M + m)g \quad (21)$$

Подставляя вертикальное ускорение, определяемое формулой (21), в динамику маятника, получим следующее уравнение

$$\ddot{\theta} - \left[\frac{F_y}{(M+m)l} + \frac{m}{M+m} \theta \ddot{\theta} \right] \theta = 0. \quad (22)$$

Очевидно, что при выполнении условия

$$F_y < -ml\theta\ddot{\theta} \quad (23)$$

маятник будет совершать устойчивые колебательные движения.

Если предположить, что угол отклонения был стабилизирован вертикальной силой, удовлетворяющей условию (23), тогда θ , и его вторая производная - синусоиды противоположного знака, так что верхний предел стабилизирующей вертикальной силы всегда положителен.

$$F_y = ml|\theta\ddot{\theta}| \quad (24)$$

Предположим, что $F_y = 0$, то есть, пара платформа – маятник остается в свободном падении. В этом случае, условие устойчивости будет иметь вид

$$(g + \ddot{y}) = \frac{ml}{M+m} \theta \ddot{\theta} < 0 \quad (25)$$

и соответствующие малые колебания θ будут иметь очень низкую частоту

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{|\theta\ddot{\theta}|}{M+m}} \quad (26)$$

с амплитудой, заданной уравнением (20).

Резюмируя вышесказанное, заключаем, что перевернутый маятник может быть стабилизирован с помощью свободного падения пары платформа-маятник, что, очевидно, является нецелесообразной стратегией управления. По этой причине исследуем вопрос, можно ли, в какой-то момент времени после стабилизации маятника остановить платформу, и даже поднять ее в исходное положение? Для этого, введем положительную вертикальную силу вида $F_y = (M + m)g$. Уравнение движения вертикальной силы будет иметь вид

$$\ddot{y} = \frac{ml}{M+m} \theta \ddot{\theta}. \quad (27)$$

Подставим это выражение в уравнение (16), получим следующее условие для малых колебаний θ вокруг вертикальной оси

$$\frac{ml}{M+m} |\theta\ddot{\theta}| > g. \quad (28)$$

Условие (28), очевидно, нарушается при реальных значениях параметров M , m и l , и малых значениях угла отклонения маятника и его второй производной. Следовательно, пара маятник - платформа должны оставаться в состоянии свободного падения, чтобы поддерживать устойчивые колебания.

Рассмотрим более строгий подход, анализируя уравнение Матье, которое определяет динамику маятника.

Перевернутый маятник стабилизируется путем применения отрицательной вертикальной силы, угол отклонения маятника и две его первые производные будут иметь вид

$$\begin{aligned}\theta(t) &= A \cos(\omega t + \varphi); & \dot{\theta}(t) &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{\theta}(t) &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}\quad (29)$$

Подставим эти выражения в уравнение (27). Вертикальное ускорение примет вид

$$\ddot{y} = \frac{ml}{M+m} \omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) - \cos^2(\omega t + \varphi)] + \frac{F_y}{M+m} - g, \quad (30)$$

откуда динамика маятника опишется уравнением

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{-F_y}{(M+m)l} + \frac{m}{M+m} \omega^2 A^2 \cos 2(\omega t + \varphi) \right] \theta = 0, \quad (31)$$

которое хорошо известно как уравнение Матье

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos(\omega t))x = 0. \quad (32)$$

Уравнение Матье и условия его устойчивости, были проанализированы в работах [3] и [15]. Известные аналитические условия устойчивости уравнения Матье подтверждают выводы, сделанные при качественном рассмотрении, а именно: стабилизация с помощью вертикальной силы $F_y > 0$ и $\delta < 0$ – невозможна, так как практически вся соответствующая отрицательная полуплоскость будет включать в себя области неустойчивости уравнения Матье.

Заключение

Итак, применение только вертикальной силы для стабилизации и управления маятником представляется невозможной стратегией. Но эффект довольно быстрой стабилизации маятника вертикальной силой можно использовать для построения управления с помощью ее комбинации с горизонтальной силой.

Список литературы

1. Халил Х.К. *Нелинейные системы*. М.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
2. Nelson J., Kraft L.G. Real-time control of an inverted pendulum system using complementary neural network and optimal techniques // *Proc. American Control Conference*, 1994, p.2553-2554.
3. Zhou C., Ruan D. Fuzzy control rules extraction from perception-based information using computing with words // *Information Sciences*, 2002, v. 142, p. 275-290.
4. Ghosh B.K., Xi N., Tarn T.I. *Control in robotics and automation: sensor-based integration*. Academic Press, San Diego, 1999.

5. Maravall D., de Lope J. A reinforcement learning method for dynamic obstacle avoidance in robotic mechanisms // In: Ruan D, D'hondt P, Kerre EE (eds) *Computational intelligent systems for applied research*. World Scientific, Singapore, 2002. P.485-494.
6. Schaal S. Learning from demonstration // In: Mozer MC, Jordan M, Petsche T. (eds). *Advances in neural information processing systems 9*. MIT Press, Cambridge, MA, 1997. P. 1040-1046.
7. Sprenger B., Kucera L., Mourad S. Balancing of an inverted pendulum with a SCARA robot // *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, 1998, v. 3 (2), p. 91-97.
8. Schreiber G., Ott C., Hirzinger G. Interactive redundant robotics: control of the inverted pendulum with nullspace motion// *Proc. IROS*, 2001, p. 158-164.
9. Chung C.Y. Balancing of an inverted pendulum with a kinematically redundant robot // *Int. J General Systems*, 2002, v. 31 (1), p. 1-15.
10. Bloch A.M., Leonard N.E., Marsden J.E. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems 1: the first matching theorem // *IEEE Trans. Automatic Control*, 2001, v. 45 (12), p. 2253-2270.
11. Bloch A.M., Chang D.E., Leonard N.E., Marsden J.E. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: potential shaping // *IEEE Trans. Automatic Control*, 2000, v. 46 (10), p. 1556-1570.
12. Stephenson A. On induced stability // *Philosophical Magazine*, 1908, v.15, p. 233- 236.
13. Kapitsa P.L. Dynamic stability of a pendulum with a vibrating point of suspension // *Zh. Ehksp. Teor. Fiz.*, 1951, v. 21 (5), p. 588-598.
14. Fliess M., Levine J., Martin P. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples // *Int. J Control*, 1995, v. 61 (6), p. 1327-1361.
15. Furuta K., Yamamoto M., Kobayashi S. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback // *J. Systems Control Eng.*, 1992, v. 206 (6), p. 263- 269.
16. Widjaja M., Yurkovich S. Intelligent control for swing up and balancing of an inverted pendulum system // *Proc. IEEE Conf. Control Applications*, 1995, p. 534- 542.
17. Fantoni I., Lozano R. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Berlin: Springer, 2001.
18. Meerkov S. Principle of vibrational control: theory and applications // *IEEE Trans. Automatic Control*, 1980, v. 25, p. 755-762.
19. Bogaevski V., Povzner A. *Algebraic methods in nonlinear perturbation theory*. NY: Springer-Verlag, 1991.
20. Hillsley K.L., Yurkovich S. Vibration control of a two link flexible robot arm // *Dynamics and Control*, 1993, v. 3 (3), p. 261-280.
21. Acheson D A pendulum theorem // *Proc. Royal Society of London*, 1993, Series A 443, p. 239-245.