Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева»
механико-математический факультет

На правах рукописи

Грехов Михаил Владимирович

ГЛАДКИЕ ЦЕЛЫЕ МОДЕЛИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Панов Александр Николаевич

Самара 2019

Содержание

Введение 4

Глава 1. Целые модели алгебраических торов 16

1.1. Определение линейной алгебраической группы 16

1.2. Диагональные группы 19

1.3. Характеры групповых схем 20

1.4. Точные последовательности линейных алгебраических групп 21

1.5. Формы и одномерные когомологии 23

1.6. Формы групповых схем 25

1.7. Алгебраический тор 26

1.8. Целые модели алгебраических торов 27

1.9. Целая модель Нерона алгебраического тора 29

1.10. Стандартная целая модель алгебраического тора над локальным полем 30

Глава 2. Модели Нерона двумерных алгебраических торов над локальными полями 35

2.1. Дефект гладкости целой модели алгебраического тора 35

2.2. Построение модели Нерона алгебраического тора над локальным полем 36

2.3. Классификация двумерных анизотропных алгебраических торов 39

2.4. Построение модели Нерона двумерных анизотропных алгебраических торов 41

Глава 3. Целые модели алгебраических торов над полями алгебраических чисел 60

3.1. Каноническая и стандартная целые модели алгебраического тора над полем алгебраических чисел 60

3.2. Построение модели Нерона алгебраического тора над полем алгебраических чисел 62
3.3. Свойства стандартной целой модели алгебраического тора над полем алгебраических чисел 64
3.4. Совпадение канонической и стандартной моделей 70
3.5. Модель Нерона максимальных торов без аффекта в полупростых группах для случая B_n 84
3.6. Стандартная целая модель максимальных торов без аффекта в полупростых группах для случая A_n и её особенности 91
Список литературы 100

Введение

Теория алгебраических торов — активно развивающаяся область алгебраической геометрии, которая представляет большой интерес для дальнейшего исследования. Важнейшим импульсом к её изучению был переход от рассмотрения алгебраически замкнутого поля к случаю алгебраически незамкнутого. Если над алгебраически замкнутым полем алгебраические торы имеют весьма простую структуру и, скорее, представляют интерес как структурный элемент алгебраических групп, то над незамкнутым полем структура алгебраического тора может быть и достаточно сложной, что оправдывает интерес к нему как самостоятельному объекту (см. книгу В. Е. Воскресенского [3]), и при таком изучении неоднократно бывали получены новые значительные результаты. В частности, одним из перспективных направлений для случая, когда поле определения рассматриваемых алгебраических торов локальное или глобальное, оказалось изучение целых моделей этих торов.

Пусть G — линейная алгебраическая группа, определённая над полем K (локальным или глобальным). Тогда целой моделью G называют такую групповую схему X, определённую над $\mathcal{O}_K \subset K$ — кольцом целых поля K, что $G \cong X \times_{\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K} \mathrm{Spec}\, K$. Классической является целая модель Нерона, подробно описанная в работе З. Боша, В. Люткебомерта и М. Рейно [18]. Её главное достоинство в том, что всегда выполняется свойство гладкости, требуемое от целой модели как дополнительное во многих задачах. Однако модель Нерона определяется неконструктивно, вследствие чего её построение и изучение достаточно сложно. Поэтому сохраняется интерес и к альтернативным целым моделям, обладающим какими-либо полезными дополнительными свойствами. Одной из таких моделей для случая локального основного поля является стандартная целая модель (она же модель Воскресенского), впервые упомянутая в работе В. Е. Воскресенского и Т. В. Фоминой [6] и впоследствии окончательно определённая в заметке В. Е. Воскресенского [24]. Стандартная целая модель определена конструктивно, всегда строго плоская и имеет конечный тип. Однако свойство гладкости для неё, вообще говоря, может не выполняться. Это обусловило интерес к изучению взаимосвязи между стандартной целой моделью и моделью Нерона, которое производилось в работах С. Ю. Попова [22], а также Ч. Чинг-Ли и Ю. Цзю-Канга [19]. В них было доказано, что для случая, когда минимальное поле разложения L алгебраического тора не более чем слабо разветвлено над основным полем K, модель Нерона этого тора совпадает со стандартной целой моделью, а в оставшемся случае дикого ветвления может быть получена из неё за конечное число шагов путём применения процесса сглаживания. При рассмотрении конкретных примеров во всех вышеуказанных работах в качестве локального поля рассматривались поля p-адических чисел или их конечные расширения.

Для случая, когда основное поле — глобальное, построение и свойства модели Нерона изучены хуже. В качестве глобального основного поля в конкретных примерах обычно рассматривается поле алгебраических чисел. Чтобы реализовать алгоритм построения модели Нерона над полем алгебраических чисел, требуется некоторая целая модель, которая может использоваться в качестве начального шага процесса сглаживания. Известны две различным образом определяемые целые модели, каждая из которых может считаться обобщением идеи стандартной целой модели из случая локального поля для случая поля алгебраических чисел. Это стандартная целая модель, определённая и описанная в совместной работе В. Е. Воскресенского, Б. Э. Кунявского и Б. З. Мороза [5], и каноническая целая модель, определение которой впервые появляется в книге В. Е. Воскресенского [4]. Любая из этих моделей, как следует из их описания в соответствующих работах, может использоваться в качестве начальной схемы для построения модели Нерона путём сглаживания, однако при этом возникают трудности, отсутствующие в случае локального поля. Так, для канонической целой модели неизвестно явное задание, что не позволяет получить явное задание модели Нерона в конкретных примерах алгебраических торов, а для стандартной целой модели неизвестна структура её слоёв над пополнениями основного поля, что также препятствует получению явного задания модели Нерона. Кроме того, до сих пор не была изучена взаимосвязь между стандартной и канонической моделями произвольного алгебраического тора над полем алгебраических чисел.

Целями данной работы являются: доказательство для произвольного алгебраического тора, определённого над полем алгебраических чисел, совпадения его канонической и стандартной целых моделей, изучение свойств указанных моделей (что позволит использовать их при построении явного задания глобальной модели Нерона), а также построение модели Нерона в явном виде и изучение её свойств для некоторых серий частных случаев, в которых её структура приобретает дополнительные закономерности: двумерных торов и максимальных торов без аффекта в полупростых группах.

Кратко перечислим основные инструменты данного исследования. При исследовании аффинной реализации алгебраических торов и их целых моделей используются методы целочисленных представлений групп Галуа и классификации соответствующих целочисленных решёток. В вопросах изучения гладкости целых моделей мы часто используем дефект гладкости — величину, характеризующую меру отклонения групповой схемы от гладкой структуры. При исследовании редукции целых моделей мы используем структурную теорию алгебраических групп над совершенными полями (см. книгу А. Гротендика и М. Демазюра [20]).

Результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры алгебры и геометрии Самарского государственного университета, на III Международной конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Тольятти, 2012 г.), на XI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Саратов, 2013 г.), на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН (руководитель проф. А. И. Генералов) и на V Международной конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, 2015 г.).

Результаты диссертации изложены в 6 печатных работах: трёх статьях [7], [8], [9], опубликованных в журналах, входящих в список ВАК и международные реферативные базы данных и системы цитирования, и трёх тезисах докладов на международных конференциях [10], [11], [12].

Диссертация изложена на 102 страницах и состоит из настоящего введения, трёх глав и списка литературы, содержащего 25 наименований. Каждая глава разделена на пункты, в пределах главы теоремы, предложения, леммы и формулы охвачены единой нумерацией в порядке их следования в тексте.

Дадим краткий обзор содержания диссертации.

Глава 1 носит подготовительный характер. В ней приводится необходимый материал из теории функторов и групповых схем, а также арифметики алгебраических торов, используемый в дальнейшем. Глава содержит краткое изложение необходимых сведений, касающихся аффинных схем, форм и одномерных когомологий алгебраических многообразий, а также целых моделей алгебраических торов.

В частности, в этой главе даётся определение двух основных объектов исследования настоящей работы. Первый из них — алгебраический тор, рассматриваемый как аффинная схема. Алгебраическим тором T, определённым над полем k и диагонализируемым (разложимым) над его расширением L, являющимся расширением Галуа, называют схему $T = \mathrm{Spec}\ (L[\mathbb{Z}^n])^G$ такую, что группа

Галуа $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ действует диагонально на алгебре Хопфа $L[\mathbb{Z}^n]$. Как видно из этого определения, категория L-разложимых алгебраических k-торов и категория G-модулей конечного $\mathbb{Z}$-ранга без кручения (решеток Галуа) двойственны. При этом каждому тору T соответствует его G-модуль характеров $\hat{T}$. В условиях данных обозначений для тора T поле k также называют основным полем, а L — полем разложения. Вообще говоря, поле разложения для данного тора может быть не единственным; известно, что минимальное поле разложения всегда является конечным расширением основного поля. Второй основной объект исследования — целая модель X алгебраического тора T, представляющая собой такую групповую схему над $\mathcal{O}_k$ — кольцом целых элементов поля k, что $X \times_{\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_k} \mathrm{Spec}\, k \cong T$.

Самый простой пример алгебраического тора — диагональная группа (она называется k-разложимым тором). Следующий по сложности структуры тип торов — квазиразложимые. Они обладают тем важнейшим свойством (см. [15]), что произвольный алгебраический тор может быть реализован как подтор некоторого квазиразложимого тора. Во всех исследованиях данной работы в качестве первого шага мы рассматриваем случай квазиразложимого тора, а затем переносим результаты на случай произвольного тора или объясняем препятствия для такого переноса. В силу описанной выше двойственности торов и их модулей характеров вместо явного построения квазиразложимого надтора для изучаемого алгебраического тора мы строим точную последовательность вида $0 \to \hat{R} \to \hat{S} \to \hat{T} \to 0$. Здесь $\hat{T}$, $\hat{R}$ и $\hat{S}$ — G-модули характеров алгебраических торов, определённых над k и разложимых (диагонализируемых) над L, причём тор S квазиразложим над k и поэтому $\hat{S}$ — пермутационный G-модуль.

Далее описываются конструкции основных целых моделей, наиболее часто используемых при исследовании арифметики алгебраических торов. Первой из них является стандартная целая модель (известная также как каноническая модель или модель Воскресенского) алгебраического тора над локальным полем. Напомним, как она определяется.

В условиях ранее введённых обозначений известно, что $k[T] = L[\hat{T}]^G$, где $L[\hat{T}]$ — групповое кольцо $\hat{T}$, $k[T]$ — координатное кольцо T. Пусть $[L : k] = n$, $\mathrm{rk}\,\hat{T} = d$. Из определения алгебраического тора как связной алгебраической k-группы, диагонализируемой над L, следует изоморфизм $T \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\,L \cong G^d_{m,L}$. Для объектов, двойственных участвующим в этом изоморфизме, имеет место аналогичный изоморфизм $L[\hat{T}] \cong L \otimes L[\hat{T}]^G \cong \bigoplus_{i=1}^n (L[\hat{T}]^G \omega_i)$, где $\{\omega_i\}$ — какой-либо базис расширения L/k. Отсюда можно получить разложение по базису $\{\omega_i\}$ любого характера из $\hat{T}$. В частности, для базисных характеров $\hat{T}$ имеет место некоторое разложение $\chi_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}\omega_j$, $i = \overline{1, d}$, а для обратных им — разложение $\chi_i^{-1} = \sum_{j=1}^n y_{ij}\omega_j$. Известно (см. [22]), что $L[\hat{T}]^G$ как k-алгебра порождена над k элементами x_{ij}, y_{ij}, это формально обозначают $L[\hat{T}]^G = k[x_{ij}, y_{ij}]$. Причём в случае, если поля k и L локальные, базис $\{\omega_i\}$ всегда можно выбрать целым. Тогда моделью Воскресенского называется схема $X = \mathrm{Spec}\,B$, где $B = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$.

Вторая из основных целых моделей — модель Нерона. Напомним, что целая модель X тора T называется моделью Нерона, если она гладкая, приведённая и удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любой гладкой $\mathcal{O}_k$-схемы Y любой k-морфизм $u_k : Y \times \mathrm{Spec}\,k \to X \times \mathrm{Spec}\,k$ единственным образом продолжается до $\mathcal{O}_k$-морфизма $u : Y \to X$.

Основные недостатки модели Нерона — для произвольной аффинной k-схемы X, где k — локальное поле или глобальное поле характеристики 0, модель Нерона может не существовать, если X содержит подгруппу типа $\mathbb{G}_a$, или не иметь конечного типа, если X содержит подгруппу типа $\mathbb{G}_m$ (см. [18], с. 289).

Заметим, что построения модели Нерона требуют многие вопросы арифметики алгебраических торов как над локальными, так и над глобальными полями, но, к сожалению, явной конструкции, в отличие от модели Воскресенского, модель Нерона не имеет. Известно лишь, что она является аффинной групповой схемой конечного типа для k-анизотропных алгебраических торов и только для них. Следуя общей рекомендации (см. [18]), получить модель Нерона для произвольного алгебраического тора можно с помощью процесса сглаживания, применённого к некоторой целой модели, которая выступает в качестве первого шага. Известно (см. [19]), что для случая локального поля в качестве первого шага в этом алгоритме может быть использована любая аффинная групповая схема конечного типа над кольцом целых $\mathcal{O}_k$, обладающая тем экстремальным свойством, что $X(\mathcal{O}_k) = U$, где $U \subset T(k)$ — максимальная компактная подгруппа группы k-точек тора T. В частности, подходящими свойствами обладает упомянутая ранее целая модель Воскресенского (см. [22]).

Таким образом, проблема построения модели Нерона в явном виде для k-анизотропного тора сведена к следующей самостоятельной задаче: изучить особенности редукции модели Воскресенского исследуемого тора и указать последовательность их разрешения и её реализацию. Ранее данная задача была поставлена и решена в работе [21] только для одного частного случая (семейства норменных алгебраических торов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям), мы же решили эту задачу для всех двумерных анизотропных алгебраических торов над локальными полями в **главе 2**.

Воспользовавшись известной классификацией (см. [3]) двумерных алгебраических торов, мы выбрали из 13 типов двумерных торов 10 анизотропных и для представителя каждого из них построили модель Воскресенского в явном виде. С учётом общих свойств стандартной целой модели, таких как этальная замена базы и гладкость модели в случае не более чем ручного ветвления поля разложения L над основным полем k, мы свели задачу к случаю, когда L вполне и дико разветвлено над k, а поле вычетов имеет характеристику 2 или 3. Во всех рассмотренных случаях редукция стандартной целой модели оказалась неприведённой групповой схемой, особенности в каждом конкретном случае с учётом кратности приведены в таблице 1 (торы тех типов, номера которых отсутствуют в таблице, не являются k-анизотропными).

При разрешении особенностей с помощью дилатации на каждом шаге мы проверяли гладкость полученной групповой схемы. Вычисляя на каждом шаге дефект гладкости, за конечное число шагов мы получали его нулевое значение, что означало гладкость целой модели. В результате мы для каждого случая построили аффинную групповую схему над кольцом целых основного поля k, которая является моделью Нерона соответствующего алгебраического тора. Это и есть основной результат главы 2.

Номер типа тора	$[L:k]$	$\operatorname{char} r_k = 2$	$\operatorname{char} r_k = 3$
3	2	μ_2	—
5	3	—	μ_3
6	4	μ_2, α_2	—
7	4	μ_2, μ_2	—
8	4	μ_2, α_2	—
9	6	α_2, α_2	α_3
10	6	α_2, α_2	α_3
11	6	—	μ_3
12	8	μ_2, α_2	—
13	12	α_2, α_2	α_3

Таблица 1. Особенности двумерных анизотропных алгебраических торов

Глава 3 посвящена вопросам построения модели Нерона алгебраических торов над полями алгебраических чисел. Для случая, когда k — глобальное поле характеристики 0, известен (см. [18]) следующий результат: целая модель X алгебраического тора T является моделью Нерона тогда и только тогда, когда каждая модель $X \times \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}$ является моделью Нерона тора $T_\wp = T \times \mathrm{Spec}\ k_\wp$ (здесь $\wp \lhd \mathcal{O}_k$ — простой идеал, $k_\wp$ — пополнение k по $\wp$-адическому показателю, $\mathcal{O}_{k_\wp}$ — кольцо целых элементов $k_\wp$). Это позволяет построить модель Нерона тора T косвенным способом: если взять такую модель X' этого тора, что для её слоёв $X' \times \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}$ известен результат построения модели Нерона, то модель Нерона X тора T можно получить, применив к модели X' все преобразования, которые используются для построения моделей Нерона её локальных слоёв.

Такая модель известна, это так называемая каноническая целая модель (см. [4]). Напомним её определение. Пусть k — поле алгебраических чисел. Для каждого простого идеала $\wp \lhd \mathcal{O}_k$ можно рассмотреть пополнение поля k по соответствующему $\wp$-адическому показателю, оно будет локальным полем (обозначим его $k_\wp$). Тогда для каждого тора $T_\wp = T \times \mathrm{Spec}\ k_\wp$ определена ранее описанная конструкция модели Воскресенского над локальным полем. Пусть $B_\wp$ — такая алгебра Хопфа, что $X_\wp = \mathrm{Spec}\ B_\wp$ — соответствующая модель Воскресенского.

Определение 1. В условиях обозначений выше схема вида $X = \mathrm{Spec}\ C$, где $C = \bigcap\limits_{\wp \lhd \mathcal{O}_k} C_\wp$, $C_\wp = B_\wp \bigcap k[T]$, называется канонической целой моделью тора T.

Основным недостатком такой модели является отсутствие явного задания. Этого недостатка не имеет другая возможная модель — стандартная целая модель (см. [5]). Напомним её определение (такое определение корректно благодаря результату М. В. Бондарко [17]).

Определение 2. Стандартной целой моделью тора T называется $\mathcal{O}_k$-схема вида $X' = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} — координаты (координатные функции) при разложении базисных характеров модуля $\hat{T}$ и обратных им по целому базису расширения L/k, где L — такое поле разложения T, что для него существует целый базис над k.

Недостатком этой модели была неизученность свойств её локальных слоёв: если для канонической модели X тора T по определению слои $X_\wp$ представляют собой модели Воскресенского торов $T_\wp$, но при этом неизвестно явное задание самой X, то для стандартной модели X' тора T по определению известно явное задание, но её слои $X'_\wp$ представляют собой некоторые целые модели торов $T_\wp$, из задания которых не следует, что они совпадают с моделями Воскресенского этих торов. Чтобы использовать стандартную модель для построения модели Нерона, требуется доказать, что её локальные слои удовлетворяют необходимым для этого свойствам. Кроме того, возникает вопрос о том, в каких случаях стандартная и каноническая модели совпадают, а в каких различны. Именно эти вопросы решаются в данной главе диссертации.

Основные результаты настоящей главы следующие. Главным результатом всего нашего исследования является теорема о совпадении стандартной и канонической моделей.

Теорема 1. *Пусть X и X' — соответственно каноническая и стандартная целые модели тора T, определённого над полем алгебраических чисел k. Тогда $X = X'$.*

Также в данной главе были доказаны свойства стандартной модели, необходимые для построения в явном виде модели Нерона и самой стандартной целой модели. Результат заключён в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть S, T — алгебраические торы такие, что они оба определены над полем алгебраических чисел k и имеют поле разложения L. Пусть $G = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, $\hat{S}$ и $\hat{T}$ — модули характеров соответственно S и T, $X_S = \mathrm{Spec}\ A(\hat{S})$ и $X_T = \mathrm{Spec}\ A(\hat{T})$ — стандартные целые модели S и T. Наконец, пусть определён G-эпиморфизм G-модулей характеров $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Пусть $k_\wp$ — пополнение поля k по простому идеалу $\wp$, $\mathcal{O}_{k_\wp}$ — его кольцо целых. Пусть $X_\wp$ — слой схемы X_T над кольцом $\mathcal{O}_{k_\wp}$. Пусть алгебра Хопфа $A(\hat{T})$ имеет вид $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$. Тогда группа $\mathcal{O}_{k_\wp}$-точек $X_\wp(\mathcal{O}_{k_\wp})$ схемы

$X_\wp = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$ совпадает с максимальной компактной подгруппой U группы $k_\wp$-точек $T_\wp(k_\wp)$ тора $T_\wp = T \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k_\wp$.

2) Алгебра Хопфа $A(\hat{T})$ может быть получена как $A(\hat{S})/I$, где $I = A(\hat{S}) \cap \operatorname{Ker} \beta_k$, $\beta_k : k[S] \to k[T]$ — морфизм колец регулярных функций, индуцированный β. Идеал I при этом имеет вид $I = A(\hat{S}) \cap J$, где J — идеал в алгебре Хопфа $k[S]$, порождённый элементами $(x_{ij} - c_j)$, где $c_j \in \mathcal{O}_k$ — коэффициенты при разложении элемента 1_L по целому базису L/k, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $I \equiv J$ по модулю π-кручения.

Таким образом, было доказано, что мы можем использовать стандартную модель над полем алгебраических чисел как первый шаг при построении модели Нерона. Но, как и в главе 2, в таком случае возникает задача построения модели Нерона в явном виде в каждом конкретном случае. В качестве серий алгебраических торов для решения этой задачи мы выбрали максимальные алгебраические торы без аффекта в полупростых группах. Для случая системы корней B_n была построена стандартная целая модель и изучены её особенности. Результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть T — максимальный тор без аффекта в полупростой группе, определённый над полем алгебраических чисел k, с группой Галуа вида $W(B_n)$. Тогда $T = R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m))$, где $k \subset L_2 \subset L_1 \subset L$, $[L_2 : k] = n$, $[L_1 : L_2] = 2$. Если $\wp \nmid (2)$, то слои $X'_\wp$ стандартной модели X' тора T гладкие, если $\wp \mid (2)$, то редукции слоёв $X'_\wp$ имеют единственную особенность вида μ_2.*

Затем было описано сглаживание найденных особенностей и полностью описана последовательность преобразований, позволяющих получить явное задание модели Нерона тора T.

Для случая A_n была построена стандартная целая модель и частично описаны её особенности, результат сформулирован в следующем утверждении.

Утверждение 1. *Пусть T — максимальный тор без аффекта в полупростой* *группе, определённый над полем алгебраических чисел k, с группой Галуа вида $W(A_n)$. Пусть X' — стандартная целая модель тора T, $X'_\wp$ — её слои над пополнениями поля k по простым идеалам $\wp$. Тогда выполняются следующие свойства:*

1) При $n = 1$ слои $X'_\wp$ гладкие, если $\wp \nmid (2)$, и их редукция имеет единственную особенность вида μ_2, если $\wp \mid (2)$;

2) При $n = 2$ слои $X'_\wp$ гладкие, если $\wp \nmid (2)$, $\wp \nmid (3)$, и их редукция имеет две особенности вида α_2, если $\wp \mid (2)$, или одну особенность вида α_3, если $\wp \mid (3)$;

3) При $n \geqslant 3$ редукция слоёв $X'_\wp$ не имеет мультипликативных особенностей для любых $\wp$;

4) При $n \geqslant 3$ редукция слоёв $X'_\wp$ не имеет унипотентных особенностей, если $\wp \nmid (n+1)$.

Глава 1. Целые модели алгебраических торов

1.1. Определение линейной алгебраической группы

Как уже упоминалось, настоящая глава носит вводный характер. Вначале напомним необходимые сведения об алгебраических группах. В данной работе исследуются арифметические свойства некоторых линейных алгебраических групп, определенных над незамкнутым полем k. Напомним, что линейная алгебраическая группа G, определённая над алгебраически незамкнутым полем k и изоморфная над его алгебраическим замыканием $\bar{k}$ группе G_0, определённой над $\bar{k}$ (то есть $G \otimes_k \bar{k} \cong G_0$), называется k-формой группы G_0. Простейший пример алгебраических групп — это диагональная группа $D(n)$. Любая её k-форма называется алгебраическим тором, и именно алгебраические торы являются основным объектом изучения в настоящей работе. Над $\bar{k}$ всякий алгебраический тор представляет собой диагональную группу $D(n)$, однозначно определённую размерностью тора. Как мы подробно объясним в последующих пунктах данной главы, формы T группы $D(n)$, каждая из которых представляет собой задание некоторого алгебраического тора над k, однозначно определяются целочисленными представлениями группы Галуа $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ в группу $GL(n, \mathbb{Z})$, здесь k_s — сепарабельное замыкание поля k. Очевидно, что задача описания k-форм группы $D(n)$ при достаточно больших размерностях очень сложна. Поэтому исследование алгебраических торов, помимо возможных алгебраического или геометрического подхода, требует специального подхода, каковым является теория схем, разработанная А. Гротендиком (см. [20]). В настоящем пункте ограничимся небольшой частью этой области алгебраической геометрии, а именно некоторыми результатами, известными относительно аффинных групповых схем.

Пусть S — схема, G — групповая S-схема. С точки зрения описания G при этом определены следующие морфизмы:

$m : G \times_S G \to G$;

$i : G \to G$;

$e : S \to G$.

Эти морфизмы называются соответственно морфизмами умножения, обращения и единицы, они должны удовлетворять стандартным аксиомам: ассоциативности, свойствам обратного элемента и единицы. Теперь, если T — какая-либо произвольная S-схема, то множество $G(T)$ является обычной группой, а G — функтором $T \to G(T)$. При определённых условиях S-схему G можно восстановить однозначно, имея только группу $G(T)$. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, и пусть с этого момента $S = \operatorname{Spec} R$. Тогда *аффинной S-группой* (или R-группой) называется такая групповая S-схема G, что $G = \operatorname{Spec} A$, где A — некоторая R-алгебра. Групповая структура аффинной R-группы G может быть описана в терминах кольца A. При этом морфизмам m, i, e соответствуют двойственные им морфизмы R-алгебр:

$m^* : A \to A \otimes_R A$ (коумножение);

$i^* : A \to A$ (кообращение);

$e^* : A \to R$ (коединица).

Они удовлетворяют аксиомам, получаемым по двойственности из аксиом умножения для G. Напомним, что в случае, когда для операций m^*, i^*, e^* выполняются соответствующие аксиомы когруппы, рассматриваемая алгебра A называется *алгеброй Хопфа*. Вопросы классификации аффинных R-групп и R-алгебр Хопфа равносильны.

Заметим, что R-алгебра A может иметь некоторые структурные особенности, в частности, может не быть областью целостности или может содержать нильпотенты. Понятие алгебраической группы подразумевает отсутствие таких особенностей, хотя в работе мы будем вынуждены использовать алгебры Хопфа с нильпотентами.

Приведём несколько важных примеров базовых аффинных алгебраических групп, которые будут встречаться в данной работе.

Пример 1.1. Пусть G_m — ковариантный функтор на категории коммутативных колец с единицей, определяемый условием $G_m(B) = B^\times$, где $B^\times$ — мультипликативная группа обратимых элементов кольца B. Функтор G_m представим аффинной схемой Spec $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$, где $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ — кольцо многочленов от переменных T, T^{-1}, так как $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}], B) = B^\times$. В таком случае когрупповые операции имеют вид $m^*(T) = T \otimes T$, $i^*(T) = T^{-1}$, $e^*(T) = 1$. Аффинная группа G_m называется *мультипликативной группой* и имеет естественное матричное представление $G_m(B) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{smallmatrix} \right) \mid b \in B^\times \right\}$.

Пример 1.2. Пусть функтор G_a определяется условием $G_a(B) = B$, которое каждому кольцу B ставит в соответствие то же множество, рассматриваемое как аддитивная группа. Функтор G_a представим в виде схемы Spec $\mathbb{Z}[T]$, где $\mathbb{Z}[T]$ — кольцо многочленов от одной переменной T. В самом деле, для любого B выполняется условие $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(\mathbb{Z}[T], B) = B$, поэтому $G_a = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[T]$. На G_a можно задать структуру аддитивной группы следующим образом. Пусть $m = p_1 \circ p_2$, где p_1, p_2 — проекции $G_a \times G_a$ соответственно на первый или второй множитель. Тогда в терминах колец морфизм двойственных объектов выглядит как $m^* : \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[T] \otimes \mathbb{Z}[T]$, где $m^* = p_1^* \circ p_2^*$, $p_1^*(T) = T \otimes 1$, $p_2^*(T) = 1 \otimes T$. Согласование групповой операции с m^* определяется сложением в группе $G_a(\mathbb{Z}[T] \otimes \mathbb{Z}[T]) = \mathbb{Z}[T] \otimes \mathbb{Z}[T]$. Отсюда $m^*(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$, $i^*(T) = -T$, $e^*(T) = 0$. Если R — коммутативное кольцо с единицей, то схему $G_a \times \mathrm{Spec} R$ обозначают также $G_a \otimes R$ или $G_{a,R}$. Группа $G_{a,R} = \mathrm{Spec}\ R[T]$ — ограничение функтора G_a на категорию R-алгебр. Для $G_{a,R}$ существует естественное матричное представление $G_a(B) = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \mid b \in B \}$. Аффинная группа G_a называется *аддитивной группой.*

Пример 1.3. Рассмотрим функтор $GL_n(X)$, где X — некоторое кольцо, он представим аффинной схемой $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T_{11}, T_{12}, ..., T_{nn}, D^{-1}]$, где $D = \det(T_{ij})$, когрупповые операции имеют вид $m^*(T_{ij}) = \sum_{t=1}^{n} T_{it} \otimes T_{tj}$, $e^*(T_{ij}) = \delta_{ij}$, $i^*(T_{ij}) = (-1)^{i+j} D^{-1} \det(T_{rs}), r \neq i, s \neq j$. Аффинная группа GL_n называется *полной линейной группой.*

Пример 1.4. Пусть $G_{m,k} = \mathrm{Spec}\,k[T, T^{-1}]$ — мультипликативная k-группа. Отображение $g \mapsto g^n$ определяет групповой гомоморфизм $f : G_{m,k} \to G_{m,k}$. Ядро этого гомоморфизма представляет функтор $A \to \mu_n(A)$, где $\mu_n(A) = \{a \in A \,|\, a^n = 1\}$, A — некоторая k-алгебра. Поэтому $\mu_{n,k} = \mathrm{Spec}\,k[T]/(T^n - 1)$. Если характеристика p поля k не делит n, то $\mu_{n,k}$ — гладкая k-группа, и, следовательно, является алгебраической. Если же $p \mid n$, то группа $\mu_{n,k}$ не является приведённой. В частности, если $(p, n) = 1$ и поле k содержит все корни n-й степени из 1, группа $\mu_{n,k}$ постоянна над k.

Одна из основных целей этой главы — определить основной объект нашего исследования — алгебраический тор. В случае, когда основное поле не является алгебраически замкнутым, определение алгебраического тора перестаёт быть тривиальным. Для обоснования этого определения мы должны вкратце осветить следующие темы.

Сначала мы рассмотрим относительно простые аффинные групповые схемы, которые называются диагональными группами, так как обобщают обычную диагональную группу в $GL(n, k)$. Затем мы определим характеры групповых схем и продемонстрируем двойственность группы характеров и самой групповой схемы в случае диагональной группы. Эта двойственность позволит нам получить точные последовательности линейных алгебраических групп. Далее мы перейдём к так называемым диагонализируемым группам, коротко затронув вопрос о формах групповых схем и их описании. Все эти этапы сделают определение алгебраического тора прозрачным.

1.2. Диагональные группы

Пусть M — коммутативная абстрактная группа, $\mathbb{Z}[M]$ — её групповое кольцо. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-схему $D(M) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[M]$. Если обозначить R произвольное коммутативное кольцо с единицей, то для группы точек $D(M)(R)$ по определению группового кольца будет выполняться следующее равенство:

$D(M)(R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(\mathbb{Z}[M], R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(M, R^{\times})$.

Очевидно, что $D(M)(R)$ обладает структурой коммутативной группы, причём функториальной по R. Следовательно, схема $D(M)$ является коммутативной групповой схемой. В этом случае группа $D(M)$ называется *диагональной группой*. Групповые операции в $D(M)$ в формулировке для алгебры Хопфа $\mathbb{Z}[M]$ будут иметь следующий вид:

$m^*(g) = g \otimes g$, $e^*(g) = 1$, $i^* = g^{-1}$, $\forall\, g \in M$.

Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм абелевых групп, тогда он может быть продолжен до гомоморфизма коммутативных колец $f : \mathbb{Z}[M] \to \mathbb{Z}[N]$, который, в свою очередь, определяет групповой гомоморфизм схем $D(f) : D(N) \to D(M)$. Поэтому соответствие $M \to D(M)$ представляет собой контравариантный функтор, действующий из категории абелевых групп в категорию аффинных групповых схем. Очевидно, что $D(M \times N) = D(M) \times D(N)$.

Пример 1.5. Рассмотренная ранее в примере 1.1 группа G_m является частным случаем диагональной группы, так как $G_m = D(\mathbb{Z})$, где группа $\mathbb{Z}$ рассматривается в мультипликативной записи с образующим элементом t. Если $M \cong \mathbb{Z}^n$, то $D(M) = D(\mathbb{Z}^n) = G_m^n$.

1.3. Характеры групповых схем

Пусть G — произвольная групповая S-схема, рассмотрим коммутативную группу $\hat{G}(S) = \mathrm{Hom}_{S-\mathrm{gr}}(G_S, G_{m,S})$. Группа такого вида называется *группой S-характеров группы G*. Для всякого морфизма $u : T \to S$ существует соответствующий гомоморфизм групп $\hat{G}(u) : \hat{G}(S) \to \hat{G}(T)$. Таким образом, можно задать контравариантный функтор $\hat{G}$, действующий из категории групповых схем в категорию коммутативных абстрактных групп. Если $f : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм групповых схем, ему можно поставить в соответствие однозначно определённый гомоморфизм коммутативных абстрактных групп $\hat{f} : \hat{G}_2(S) \to \hat{G}_1(S)$. Причём $(\widehat{G_1 \times G_2})(S) = \hat{G}_1(S) \times \hat{G}_2(S)$.

Пример 1.6. Пусть $D(M)$ — диагональная группа, S — аффинная схема, $S = \operatorname{Spec} R$, где R — область целостности, $u \in \widehat{D(M)}(S)$, где $\widehat{D(M)}(S)$ — группа S-характеров $D(M)$. То есть $u : D_R(M) \to G_{m,R}$ — гомоморфизм групповых схем. Рассмотрим соответствующий гомоморфизм R-алгебр $u^* : R[t, t^{-1}] \to R[M]$. Пусть m^*, i^*, e^* — операторы Хопфа алгебры $R[t, t^{-1}]$, а m_1^*, i_1^*, e_1^* — операторы Хопфа алгебры $R[M]$. Гомоморфизм u^* алгебр Хопфа однозначно определяется значением $u^*(t) = \sum r_g g$, $r_g \in R$. В силу равенства $m_1^*(u^*(t)) = (u^*, u^*)(m^*(t))$ получаем, что $\sum r_g g \otimes g = \sum r_g r_h g \otimes h$, откуда $r_g^2 = r_g$, $r_g r_h = 0$, если $g \neq h$. В силу целостности кольца R получаем, что $u^*(t) = g$, $g \in M$. Верно и обратное, то есть любой гомоморфизм R-алгебр Хопфа $R[t, t^{-1}] \to R[M]$ определяется соотношением $u^*(t) = g$, $g \in M$. Таким образом, отображение $t \mapsto g$, $g \in M$ по двойственности определяет гомоморфизм групповых схем $D_R(M) \to G_{m,R}$ и установлено биективное соответствие между множествами $\widehat{D(M)}(S)$ и $M_{\mathbb{Z}}(S)$, где $M_{\mathbb{Z}}$ — постоянная групповая схема. Указанное соответствие, очевидно, является групповым изоморфизмом. Известно (см. [25]), что аналогичные выводы можно получить для относительного случая, то есть для случая $D_S(M)$, где S — произвольная схема.

1.4. Точные последовательности линейных алгебраических групп

Пусть A и B — коммутативные кольца с единицами такие, что B является A-алгеброй и $\varphi : A \to B$ — канонический гомоморфизм. Напомним, что плоским называется такой A-модуль M, для которого функтор $\mathcal{F}_M : N \to N \otimes_A M$ является точным на категории A-модулей. B как A-алгебра называется *строго плоской*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) φ — вложение и A-модуль $B/\varphi(A)$ плоский;

2) A-модуль B плоский и отображение $\varphi^* : \mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ A$ сюръективно.

Морфизм $\mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ A$ называется строго плоским, если A-алгебра B строго плоская.

Определение 1.1. Последовательность аффинных S-групп, где $S = \mathrm{Spec}\ R$, вида $1 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 1$ называется точной, если гомоморфизм α есть замкнутое вложение, отождествляющее G' с ядром гомоморфизма β, который является строго плоским гомоморфизмом.

Группу G'' называют *факторгруппой* группы G по подгруппе G' и обозначают G/G'. Вопрос о существовании фактора весьма сложен, приведём только часть рассуждения, касающуюся алгебраических групп специального типа (результаты для более общего случая также известны, см. [20]). Пусть k — поле, k_s — его сепарабельное замыкание, $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k, L — некоторое расширение поля k. Условимся, что для любой k-схемы X схема $X \times_{\mathrm{Spec}\ k} \mathrm{Spec}\ L$ может обозначаться также X_L или $X \otimes_k L$.

Будем называть группой мультипликативного типа такую групповую k-схему G, для которой группа $G \otimes_k \bar{k}$ диагонализируема и имеет конечный тип. Эти условия означают, что существует абелева группа M с конечным числом образующих такая, что выполняется условие $G \otimes_k \bar{k} \cong D_{\bar{k}}(M) = \mathrm{Spec}\ (\bar{k}[M])$. В этом случае (см. пример 1.6) группа рациональных характеров $\hat{G}(k) = \widehat{D(M)}(\bar{k})$ группы $D_{\bar{k}}(M)$ изоморфна M (условимся, что в дальнейшем при рассмотрении алгебраических k-групп обозначение $\hat{G}(k)$ может также сокращаться до $\hat{G}$). Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть G есть k-группа. Тогда соответствие $G \to \hat{G}$ определяет отношение двойственности между категорией k-групп мультипликативного типа и категорией непрерывных $\mathcal{G}$-модулей конечного типа, где $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$. Для того, чтобы последовательность гомоморфизмов k-групп мультипликатив-*

ного типа $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ *была точной, необходимо и достаточно, чтобы двойственная последовательность* $\mathcal{G}$*-модулей рациональных характеров* $0 \to \hat{G}'' \to \hat{G} \to \hat{G}' \to 0$ *была точной.*

Пример 1.7. Рассмотрим построение факторгруппы в категории диагонализируемых R-групп. Двойственным морфизмом для мономорфизма R-групп $u^* : D_R(N) \to D_R(M)$ будет эпиморфизм вида $u : M \to N$. Пусть $H = \mathrm{Ker}\ u$, получаем $D_R(M)/D_R(N) = D_R(H)$.

1.5. Формы и одномерные когомологии

В данном пункте мы напомним когомологическое описание всех форм алгебраической схемы X, подробно изученное в книге [4], при этом следующий пункт будет посвящён частному случаю групповых схем.

Пусть L — расширение Галуа поля k, Π — его группа Галуа. Группа Π действует на схеме $X \otimes_k L$ через второй множитель, то есть $\sigma \mapsto 1 \otimes \sigma$. Здесь $1 \otimes \sigma : X_L \to X_L$, то есть данный оператор является k-автоморфизмом схемы X_L, соответственно, с его помощью можно определить действие Π на L-морфизмах вида $\varphi : X_L \to Y_L$, где X и Y — k-схемы. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mor}_L(X_L, Y_L)$. Обозначим через $\sigma\varphi$ оператор $(1 \otimes \sigma)\varphi(1 \otimes \sigma)^{-1}$, очевидно, что $\sigma\varphi \in \mathrm{Mor}_L(X_L, Y_L)$. Среди морфизмов $\varphi : X_L \to Y_L$ имеются морфизмы, полученные поднятием из k-морфизмов $\psi : X \to Y$, эти поднятые морфизмы имеют вид $\varphi = \psi \otimes 1$, будем называть их морфизмами, определёнными над полем k. Условимся, что такой морфизм φ можно также обозначать ψ, а схему $X(\mathrm{Spec}\ A)$, где A — произвольная k-алгебра, можно также обозначать $X(A)$.

Утверждение 1.1. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Mor}_L(X_L, Y_L)$. *Тогда имеют место следующие свойства:*

1) условие $\forall \sigma \in \Pi \ \ \sigma\varphi = \varphi$ *эквивалентно равенству* $\varphi = \psi \otimes 1$, $\psi : X \to Y$;

2) $\sigma\varphi \in \mathrm{Mor}_L(X_L, Y_L)$;

3) если $\xi \in \mathrm{Mor}_L(X_L, Y_L)$, *то* $\sigma(\varphi\xi) = (\sigma\xi)(\sigma\varphi)$;

4) $X(L \otimes A)^{\Pi} = X(A)$.

Определение 1.2. Пусть F — расширение поля k, X — k-схема. k-схема Y называется F/k-формой схемы X, если можно задать изоморфизм F-схем $X \otimes_k F \cong Y \otimes_k F$. Если рассматривается случай $F = \bar{k}$, схему Y называют просто k-формой.

Пусть L/k — конечное расширение Галуа, Π — его группа Галуа. Обозначим $\mathcal{F}(L/k, X)$ множество всех (с точностью до изоморфизма) L/k-форм k-схемы X. Поскольку если φ — изоморфизм таких схем, то и $\sigma\varphi$ — также их изоморфизм, то $a_\sigma = \varphi^{-1}(\sigma\varphi)$ будет автоморфизмом схемы X_L. Функция $\sigma \mapsto a_\sigma$, определённая на группе Π и принимающая значения в группе $\mathrm{Aut}_L(X)$, удовлетворяет условиям $a_{\sigma r} = a_\sigma(\sigma a_r)$ для всех $\sigma, r \in \Pi$. Такие функции называются 1-коциклами, множество всех 1-коциклов обозначают $Z^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$. Коциклы a_σ и a'_σ называют когомологичными, если существует элемент $b \in \mathrm{Aut}_L(X)$ такой, что $a'_\sigma = b^{-1}a_\sigma(\sigma b)$. Когомологичность является отношением эквивалентности на множестве Z^1, множество классов такой эквивалентности называют множеством одномерных когомологий группы Π со значениями в $\mathrm{Aut}_L(X)$ и обозначают $H^1(\Pi, \mathrm{Aut}_L(X))$ или $H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$.

Если $\mathrm{Aut}_L(X)$ — коммутативная группа, то и $H^1(\Pi, \mathrm{Aut}_L(X))$ является коммутативной группой, в общем же случае это множество, в качестве структуры на котором можно выделить только одну отмеченную точку — класс коцикла $b^{-1}(\sigma b)$. Пусть Y и Z — две L/k-формы схемы X, a_σ и a'_σ — соответствующие коциклы. Как легко проверить непосредственно, изоморфность Y и Z равносильна когомологичности коциклов a_σ и a'_σ. Таким образом, имеет место каноническое отображение $\Phi : \mathcal{F}(L/k, X) \to H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$. Сюръективным это отображение для произвольной k-схемы X, вообще говоря, не является.

Локально замкнутые подмногообразия проективного пространства $\mathbb{P}^n_k$ называются *квазипроективными*.

Теорема 1.2. *Пусть X — квазипроективное многообразие над полем k. Тогда имеет место биективное соответствие между классами изоморфных L/k-форм многообразия X и элементами множества $H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$.*

Через $H^1(k, \mathrm{Aut}_{k_s}(X))$ или $H^1(k, \mathrm{Aut}(X))$ обозначают $\lim_{\to} H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$, то есть предел индуктивной системы, образованной инъективными отображениями $H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X)) \mapsto H^1(M/k, \mathrm{Aut}_M(X))$, где L/k, M/L — расширения Галуа конечной степени. Таким образом, $H^1(k, \mathrm{Aut}(X))$ описывает все k_s/k-формы квазипроективного многообразия X.

1.6. Формы групповых схем

Пусть X — групповая схема, тогда (по крайней мере, для квазипроективного случая) множество $H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$ с точностью до изоморфизма описывает все L/k-формы группы X. Среди L/k-форм схемы X естественно рассматривать те формы Y, которые являются k-группами, при этом соответствующие изоморфизмы $\varphi : X_L \to Y_L$ являются групповыми L-изоморфизмами. Тогда коцикл $a_\sigma = \varphi^{-1}(\sigma\varphi)$ является групповым автоморфизмом L-группы X_L. Обратно, если $a_\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(X_L)$ и коцикл a_σ определяет L/k-форму Y схемы X, то на Y можно ввести такую групповую структуру, что группы X_L и Y_L будут изоморфными.

В случае группы мультипликативного типа G группа $\hat{G}(\bar{k}) = \hat{G}$ имеет конечное число образующих (по определению групп мультипликативного типа), следовательно, для поля k существует такое конечное расширение L, что $\hat{G}(L) = \hat{G}(\bar{k})$, а значит, $G(L) = D(\hat{G})$. Поля L такого вида (вообще говоря, такое поле не единственное) будем называть *полями разложения* k-группы G. Для групп мультипликативного типа поле разложения всегда сепарабельно (см. [25]).

Обозначим через M коммутативную группу с конечным числом образующих. Все k-формы группы $D_k(M)$ расщепляются уже над сепарабельными расширениями k, поэтому все они описываются множеством $H^1(k, \mathrm{Aut}_{k_s}(D(M)))$

с точностью до изоморфизма. В свою очередь, для любого расширения L поля k группа $\mathrm{Aut}_L(D(M))$ изоморфна $\mathrm{Aut}(M)$, поэтому $H^1(k, \mathrm{Aut}_{k_s}(D(M))) = H^1(k, \mathrm{Aut}(M)) = H^1(\mathcal{G}, \mathrm{Aut}(M))$, где $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ и действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathrm{Aut}(M)$ тривиально. Таким образом, $H^1(\mathcal{G}, \mathrm{Aut}(M))$ совпадает со множеством эквивалентных непрерывных представлений топологической компактной группы $\mathcal{G}$ в дискретную группу $\mathrm{Aut}(M)$. Каждое из этих представлений определяет строение непрерывного $\mathcal{G}$-модуля на группе M. Обратно, строение непрерывного $\mathcal{G}$-модуля на группе M также определяет представление группы $\mathcal{G}$ в $\mathrm{Aut}(M)$ с точностью до эквивалентности. Далее, пусть G — k-группа мультипликативного типа, определяемая представлением $h : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(M)$. Модуль (M, h) изоморфен $\mathcal{G}$-модулю $\hat{G}$ рациональных характеров группы G с естественным действием группы Галуа $\mathcal{G}$. Опишем построение группы G. Мы имеем представление $h : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(M)$, из непрерывности h, компактности $\mathcal{G}$ и дискретности $\mathrm{Aut}(M)$ следует, что $\mathrm{Im}\ h$ — конечная группа. Пусть $H = \mathrm{Ker}\ h$. Групповое кольцо $k_s[M]$ можно рассматривать как $\mathcal{G}$-модуль с действием на M и естественным действием на k_s. Пусть $A = k_s[M]^{\mathcal{G}}$ — алгебра инвариантов конечного типа над k, тогда $G = \mathrm{Spec}\ A$ и есть искомая групповая схема.

Пересечение всех полей разложения k-группы G называют её *минимальным полем разложения*. В частности, в рассмотренном выше случае, когда G — группа мультипликативного типа, минимальное поле разложения есть поле инвариантов $L = {k_s}^H$ с группой Галуа $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k) \cong \mathcal{G}/H$. Конечная подгруппа $h(\mathcal{G})$ в группе $\mathrm{Aut}(\hat{G})$ называется *группой разложения* схемы G.

1.7. Алгебраический тор

Теперь у нас есть все средства и зафиксирована необходимая терминология для того, чтобы определить один из основных объектов исследования в данной работе — алгебраический тор.

Определение 1.3. Групповая k-схема T называется алгебраическим тором, если выполняется изоморфизм $T \otimes_k \bar{k} \cong D_{\bar{k}}(\mathbb{Z}^n) = G^n_{m,\bar{k}}$.

Таким образом, алгебраический тор T есть k-форма диагональной группы $D_{\bar{k}}(\mathbb{Z}^n)$ с $\mathcal{G}$-модулем рациональных характеров $\hat{T} = \mathbb{Z}^n$. Категория k-торов дуальна категории $\mathcal{G}$-модулей конечного $\mathbb{Z}$-ранга без кручения. Если L — минимальное поле разложения T, то $T \otimes_k L = D_L(\mathbb{Z}^n)$, где $\mathbb{Z}^n$ рассматривается как Π-модуль, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, действие группы Π определяется представлением $h : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$. Учитывая, что тогда алгебра Хопфа тора T имеет вид $A = (L[\mathbb{Z}^n])^{\Pi}$, получаем эквивалентное определение тора T как аффинной k-схемы: $T = \mathrm{Spec}\ (L[\mathbb{Z}^n])^{\Pi}$.

Ещё одно эквивалентное определение алгебраического тора T можно получить, рассматривая его в качестве схемы, представляющей некоторый функтор. Пусть теперь L — произвольное поле разложения тора T, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$. Тогда для всякой k-алгебры A имеем равенства $T(A) = T(A_L)^{\Pi} = \mathrm{Hom}(\hat{T}, A_L^{\times})^{\Pi} = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, A_L^{\times}) = (\hat{T}^0 \otimes A_L^{\times})^{\Pi}$, где $\hat{T}^0 = \mathrm{Hom}(\hat{T}, \mathbb{Z})$, $A_L = L \otimes_k A$. Как можно понять из этих равенств, алгебраический тор есть k-схема, представляющая функтор $A \to \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, (L \otimes_k A)^{\times})$, где L/k — конечное расширение Галуа, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, $\hat{T}$ — Π-модуль без кручения конечного ранга, A — коммутативная k-алгебра.

1.8. Целые модели алгебраических торов

Пусть k — поле алгебраических чисел, то есть конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_k$ — кольцо целых элементов k, X_k — алгебраическое многообразие над полем k. Вопросы арифметики алгебраических многообразий требуют продолжения структуры X_k как многообразия до S-схемы X, где S — открытое подмножество в $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k$, причём $X_k = X \times_S \mathrm{Spec}\ k$ (то есть X является S-формой X_k). Схему X называют S-целой моделью многообразия X_k. Аналогичную конструкцию можно рассматривать также в случае, когда многообразие $X_{k_\wp}$, определённое над полем $k_\wp$ — $\wp$-адическим пополнением поля

k, где $\wp \triangleleft \mathcal{O}_k$ — простой идеал, продолжается до схемы $X_\wp$, определённой над $S_\wp$ — открытым подмножеством спектра кольца $\mathcal{O}_{k_\wp}$ целых элементов $k_\wp$.

Пример 1.8. В случае, когда X_k — аффинное многообразие конечного типа над k, простейшая целая модель может быть построена путём так называемого избавления от знаменателей (см. [18]). А именно, пусть $X_k = \mathrm{Spec}\ A_k$, где $A_k = k[t_1, ..., t_n]/I_k$, $t_1, ..., t_n$ — свободные переменные, I_k — идеал, порождённый конечным множеством многочленов $f_1, ..., f_r$. Очевидно, в качестве порождающих I_k можно выбрать также некоторые многочлены вида $\tilde{f}_i = c_i f_i$, $c_i \in k$, $\tilde{f}_i \in \mathcal{O}_k[t_1, ..., t_n]$, $i = \overline{1, r}$ (это и есть упомянутое избавление от знаменателей). Тогда если обозначить $A = \mathcal{O}_k[t_1, ..., t_n]/I$, где $I \subset \mathcal{O}_k[t_1, ..., t_n]$ — идеал, порождённый $\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_r$, то $X = \mathrm{Spec}\ A$ будет $\mathcal{O}_k$-целой моделью схемы X_k, причём также конечного типа.

Для исследования целых моделей в дальнейшем часто будет использоваться нахождение их редукции по простому модулю. Редукция рассматривается в точке $\wp$ и имеет для схемы X вид $\overline{X} = X \times_S \mathrm{Spec}\ (\mathcal{O}_k/\wp)$, а для $X_\wp$ соответственно $\overline{X}_\wp = X_\wp \times_{S_\wp} \mathrm{Spec}\ (\mathcal{O}_{k_\wp}/\wp)$ (как можно заметить, если $X_\wp = X \times_{\mathrm{Spec}\ k} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}$, то редукции X и $X_\wp$ совпадают). Напомним, что схема X_k также называется общим слоем схемы X, а схема $\overline{X}$ — специальным слоем X.

Далее до конца данного пункта будем считать, что k — поле $\wp$-адических чисел или его конечное расширение. В работе [6] описано построение целой модели X группы G на основе точного линейного представления $\varphi : G \to GL_k(V)$. Один из методов такого построения — линеаризация. Если задано точное линейное представление k-группы G вида $\varphi : G \to GL_k(n)$, оно определяет эпиморфизм $\varphi^* : k[GL(n)] \to k[G]$ их алгебр Хопфа. Алгебра $k[GL(n)]$ имеет вид $k[x_{11}, ..., x_{nn}, y^{-1}]$, где $y = \det(x_{ij})$. При этом $\mathcal{O}_k$-алгебра $\mathcal{O}_k[x_{11}, ..., x_{nn}, y^{-1}]$ определяет в $GL_k(n)$ целую групповую структуру $GL_{\mathcal{O}_k}(n)$ и алгебра $A = \varphi^*(\mathcal{O}_k[x_{11}, ..., x_{nn}, y^{-1}])$ есть G-алгебра Хопфа в $k[G]$.

Таким образом, каждое точное линейное представление φ группы определяет групповую $\mathcal{O}_k$-форму $G_\varphi = \mathrm{Spec}\ A$ группы G. Известно (см. [6]), что хотя строение $k[G]$ не зависит от выбора φ, строение G_φ от него, вообще говоря, зависит. Известно также, что построенная таким образом модель всегда имеет конечный тип над $\mathcal{O}_k$ и всегда можно так выбрать точное представление φ, чтобы $X(\mathcal{O}_k)$ было максимальной компактной подгруппой в локально компактной группе $G(k)$, определённой однозначно в случае коммутативности G. Эти её свойства будут важны впоследствии, когда от целой модели будет требоваться выполнение дополнительных условий.

1.9. Целая модель Нерона алгебраического тора

Одним из дополнительных свойств, которые требуются от целой модели алгебраического многообразия, часто оказывается свойство гладкости. Определение гладкости для схем над кольцами целых имеет свои сложности. Мы ограничимся рассматриваемым в данной работе случаем аффинной групповой схемы, для которого это определение следующее.

Пусть $X = \mathrm{Spec}\ R$, где R — некоторая $\mathcal{O}_k$-алгебра, $\mathcal{O}_k$ — кольцо целых поля k. Пусть $\overline{X} = \mathrm{Spec}\overline{R}$ — редукция X по модулю простого идеала $\wp \triangleleft \mathcal{O}_k$. Здесь $\overline{R} = R \otimes_{\mathcal{O}_k} r_k$, $r_k = \mathcal{O}_k/\wp$. Наконец, пусть X — групповая схема.

Определение 1.4. Условие гладкости для многообразия X означает, что его редукция $\overline{X}$ по модулю каждого простого идеала $\wp \triangleleft \mathcal{O}_k$ является приведённой схемой (или, что эквивалентно, двойственная $\overline{X}$ алгебра Хопфа $\overline{R}$ не содержит нильпотентов).

Определение 1.5. Целая модель X алгебраического многообразия X_k называется моделью Нерона, если она гладкая, приведённая и удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любой гладкой $\mathcal{O}_k$-схемы Y любой k-морфизм $u_k : Y \times \mathrm{Spec}\ k \to X \times \mathrm{Spec}\ k$ единственным образом продолжается до $\mathcal{O}_k$-морфизма $u : Y \to X$.

Модель Нерона выделяется среди целых моделей как одна из классических, так как свойство гладкости у неё по определению всегда выполняется. Некоторые основные свойства модели Нерона (см. [18]), существенные для нас в дальнейшем, сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1.3. *Пусть X_k — алгебраическое многообразие, определённое над полем k, X — его модель Нерона. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Конструкция модели Нерона перестановочна с этальной заменой базы, то есть если $S \to \mathcal{O}_k$ — этальный морфизм и K — кольцо рациональных функций S, то $X_S = X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k} \mathrm{Spec}\ S$ есть модель Нерона (определённая над S) многообразия $X_K = X_k \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\ K$;

2) Если X_k имеет k-групповую структуру, то эта групповая структура единственным образом продолжается до $\mathcal{O}_k$-групповой структуры на X;

3) Если $X_k = T$ — алгебраический тор, а основное поле k — глобальное характеристики 0 или локальное, то X существует;

4) Если $X_k = T$ — анизотропный алгебраический тор, то X имеет конечный тип.

Напомним, что если для тора T выполняется условие $\hat{T}^{\Pi} = \{\varepsilon\}$, где $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, $\varepsilon \in \hat{T}$ — единичный характер, T называется анизотропным. Для произвольного алгебраического многообразия, вообще говоря, не известно, существует ли модель Нерона и имеет ли она конечный тип. Как можно заметить, определение модели Нерона само по себе не даёт алгоритма её построения, поэтому построение модели Нерона представляет собой отдельную задачу. Решению этой задачи для некоторых частных случаев посвящена глава 2 данной работы.

1.10. Стандартная целая модель алгебраического тора над локальным полем

Отмеченных недостатков модели Нерона лишена ещё одна широко известная целая модель алгебраического тора — стандартная целая модель (она же каноническая целая модель или модель Воскресенского), определение которой было впервые предложено В.Е. Воскресенским в работе [25].

Пусть T — алгебраический тор, определённый над локальным полем k, L — некоторое поле разложения T, $G = \mathrm{Gal}(L/k)$. Как мы ранее упоминали в пункте 1.7, координатное кольцо $k[T]$ тора T совпадает с кольцом инвариантов $L[\hat{T}]^G$, где $L[\hat{T}]$ — групповое кольцо $\hat{T}$, $\hat{T}$ — группа характеров T. Из очевидного изоморфизма $G^d_{m,L} \cong T \otimes_k L$ следует изоморфизм двойственных объектов $L[\hat{T}] \cong L[\hat{T}]^G \otimes_k L$. Пусть $\{\omega_i\}$, $i = \overline{1,n}$ — некоторый базис L над k. Тогда предыдущий изоморфизм можно записать в виде $L[\hat{T}] \cong \bigoplus_{i=1}^n (L[\hat{T}]^G \omega_i)$. Таким образом, любой характер из группы характеров $\hat{T}$ тора T может быть однозначным образом разложен по базису $\{\omega_i\}$. В частности, для базисных характеров χ_j группы $\hat{T}$ и обратных им ${\chi_j}^{-1}$ имеют место некоторые выражения $\chi_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}\omega_i$, ${\chi_j}^{-1} = \sum_{i=1}^n y_{ij}\omega_i$, $x_{ij}, y_{ij} \in k[T] = L[\hat{T}]^G$, $j = 1, ..., d$. Известно (см. [22]), что алгебра $k[T]$ порождена над k элементами x_{ij}, y_{ij}, этот факт условно обозначают $k[T] = k[x_{ij}, y_{ij}]$, хотя образующие этой алгебры, вообще говоря, в совокупности не являются алгебраически независимыми над k. Учитывая, что $T \cong \mathrm{Spec}\ k[T]$, полученная конструкция также задаёт аффинную реализацию тора T. Так как поле k локальное, известно, что базис $\{\omega_i\}$ можно выбрать целым. Тогда стандартная целая модель определяется следующим образом.

Определение 1.6. В условиях ранее введённых обозначений $\mathcal{O}_k$-схема $X = \mathrm{Spec}\, A(\hat{T})$, где $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,d}$, называется стандартной целой моделью (или моделью Воскресенского) алгебраического тора T.

Как легко проверить (см. [22]), полученная схема действительно является целой моделью T, причём её конструкция не зависит ни от выбора целого базиса $\{\omega_i\}$ расширения полей L/k, ни от выбора базиса $\{\chi_j\}$ группы характеров

$\hat{T}$. При этом на алгебре $A(\hat{T})$ задана также структура алгебры Хопфа, что определяет свойства схемы X.

Далее мы в качестве важного примера построим стандартную целую модель алгебраического тора специального вида.

Пример 1.9. Пусть $k \subset F \subset L$ — башня полей (локальных) такая, что L/k — расширение Галуа с группой Галуа G и пусть по соответствию Галуа $F = L^{G_1}$, где G_1 — некоторая подгруппа G. Пусть S — квазиразложимый тор с основным полем k и полем разложения L, полученный действием функтора ограничения Вейля с поля F на k на диагональную группу $G^n_{m,F}$, где $n = \dim T$ (напомним, что алгебраический тор такого вида обозначают $S = R_{F/k}(G_m)$, подробно эта конструкция описана, например, в [15]). Известно (см. [3]), что в этом случае группа $\hat{S}$ обладает пермутационным относительно действия G базисом (пусть это базис $\chi_1, ..., \chi_d$), причём G_1 — стабилизатор характера χ_1, условимся, что $\hat{S} \cong \mathbb{Z} \otimes_{G_1} \mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[G/G_1]$. Из того, что характеры $\chi_2, ..., \chi_d$ имеют выражение через χ_1 вида $\chi_i = \chi_1^{\delta_i}$, $\delta_i \in G$, следует, как легко проверить, что коэффициенты x_{ij} при разложении этих характеров по базису L/k линейно выражаются над $\mathcal{O}_k$ через такие коэффициенты для χ_1, то же выполняется и для обратных им характеров χ_i^{-1} и соответствующих коэффициентов y_{ij}. Таким образом, $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{11}, ..., x_{1d}, y_{11}, ..., y_{1d}]$. Более того, можно доказать (см. [22]), что коэффициенты y_{1j} линейно выражаются через элементы множества $\{x_{1j}, y^{-1}\}$, $j = \overline{1, d}$, где y — некоторая форма степени d от переменных x_{1j} (точнее, норменный многочлен расширения F/k). Поэтому $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{11}, ..., x_{1d}, y^{-1}]$, что соответствует результату, полученному в упоминавшейся ранее работе [6].

Если теперь T — произвольный алгебраический тор над полем k, то (см. [3]) T является подгруппой в некотором квазиразложимом торе $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_m$, где S_i — квазиразложимые торы такого же вида, как в примере 1.9. Тогда следующий факт позволяет явно описать конструкцию стандартной целой модели тора T.

Теорема 1.4. *Пусть T_1, T_2 — алгебраические торы, определённые над одним и тем же локальным полем k и имеющие одно и то же поле разложения L, $G = \mathrm{Gal}(L/k)$, а $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ — соответственно их группы характеров. Пусть также существует G-эпиморфизм модулей характеров $\beta : \hat{T}_1 \to \hat{T}_2$ (или, что эквивалентно, вложение самих торов $\alpha : T_2 \to T_1$). Тогда морфизм β однозначным образом определяет морфизмы $\beta_L : L[\hat{T}_1] \to L[\hat{T}_2]$, $\beta_k : k[T_1] \to k[T_2]$ и $\beta_{\mathcal{O}_k} : A(\hat{T}_1) \to A(\hat{T}_2)$, при этом имеет место соотношение $A(\hat{T}_2) = A(\hat{T}_1)/I$, где $I = A(\hat{T}_1) \cap \mathrm{Ker}\, \beta_k$.*

Ещё некоторые важные свойства стандартной целой модели описываются следующей теоремой (более подробно см. [22]).

Теорема 1.5. *Пусть $X = \mathrm{Spec}\ A$ — стандартная целая модель тора T, основное поле которого k локальное. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Конструкция стандартной целой модели перестановочна с этальной заменой базы, то есть если $S \to \mathcal{O}_k$ — этальный морфизм и K — кольцо рациональных функций S, то $X_S = X \times_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k} \mathrm{Spec}\ S$ есть стандартная целая модель (определённая над S) тора $T_K = T \times_{\mathrm{Spec}\ k} \mathrm{Spec}\ K$;

2) Алгебра A является алгеброй Хопфа конечного типа над $\mathcal{O}_k$ и индуцирует исходную структуру алгебры Хопфа на $k[T]$;

3) Алгебра A строго плоская над $\mathcal{O}_k$;

4) $X(\mathcal{O}_k) = U$, где U — максимальная компактная подгруппа $T(k)$.

Заметим, что выполнение условия 2) означает также взаимно однозначное соответствие $\mathcal{O}_k$-групповой структуры на X и k-групповой на T.

Благодаря вышеописанным свойствам стандартная целая модель алгебраического тора, как и модель Нерона, входит в число классических. Однако, в отличие от модели Нерона, у модели Воскресенского может не выполняться свойство гладкости, поэтому существенно также то, что построение стандартной целой модели может быть использовано для построения аффинной реализации модели Нерона. Рассказ о гладкости стандартной целой модели, её связи с моделью Нерона и построении модели Нерона будет продолжен в главе 2. Представляет интерес также вопрос, каким образом конструкцию стандартной целой модели, определённую для случая локального поля k, можно обобщить для случая, когда поле k глобальное характеристики 0. Целая модель, являющаяся таким обобщением для случая поля алгебраических чисел, известна. О ней будет рассказано в главе 3, в которой также изучаются свойства нескольких возможных целых моделей алгебраических торов над полями алгебраических чисел, связь между конструкцией этих моделей и, наконец, построение модели Нерона алгебраических торов специального вида над полями алгебраических чисел.

Глава 2. Модели Нерона двумерных алгебраических торов над локальными полями

2.1. Дефект гладкости целой модели алгебраического тора

Как мы уже отмечали в 1 главе, определение гладкости для схемы над кольцом целых какого-либо поля (и, шире, для любой R-схемы, где R — дедекиндова область) не является тривиальным и требует дополнительного изучения структур, связанных с этой схемой. Как обычно в таких случаях, появляются вычислительные объекты, косвенно характеризующие исследуемую характеристику. Для изучения гладкости R-схем таким объектом является дефект гладкости, впервые предложенный в [18]. Он представляет собой, неформально говоря, количественную характеристику отклонения рассматриваемой схемы от гладкой структуры. Строгое определение дефекта гладкости позволяет ввести его для максимально общего случая не обязательно аффинной схемы и требует введения большого количества дополнительных понятий, никак не использующихся в настоящем исследовании. Поэтому для целей данной работы ограничимся эквивалентным описанием дефекта гладкости в аффинном случае, введённым также в книге [18]. Вначале уточним обозначения, которые будем использовать далее в данной главе.

Пусть k — поле (в рассматриваемых далее случаях глобальное характеристики 0 или локальное), $R = \mathcal{O}_k$ — его кольцо целых, r_k — поле вычетов кольца R, X — аффинная R-схема конечного типа такая, что её общий слой $X_k = X \otimes_R k$ гладкий над k, a — R^{sh}-значная точка X (где R^{sh} — строгая гензелизация R), a_k и a_{r_k} — её общий и специальный слои. Тогда X может быть реализована как замкнутая подсхема R-схемы Z, гладкой над R и имеющей постоянную относительную размерность n, например, в качестве Z может выступить всё аффинное пространство, в которое вкладывается схема X. Далее, пусть $z_1, ..., z_n$ — координатные функции на Z, а $g_1, ..., g_m$ — функции, порождающие идеал многообразия X. Обозначим через J матрицу Якоби вида $J = \left(\frac{\delta g_i}{\delta z_j}\right)$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, а через d — размерность многообразия X в точке a_k. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *В условиях ранее введённых обозначений значение дефекта гладкости в точке a можно вычислить по формуле $\delta(a) = \min\{\nu(a^*\Delta), \Delta \in \Lambda\}$, где Λ — множество $(n-d)$-миноров матрицы J, Δ — миноры из этого множества, $a^*\Delta$ — значение минора Δ в точке a, ν — дискретное нормирование на R.*

Приведём важнейшие свойства дефекта гладкости, выражающие его смысл и связь со свойством гладкости многообразия (более подробно см. в [18]).

Теорема 2.2. *В условиях ранее введённых обозначений справедливы следующие утверждения:*

1) Точка a является гладкой точкой многообразия X тогда и только тогда, когда $\delta(a) = 0$;

2) Существует такая константа $c_X \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\delta(a) \leqslant c_X$ для всех точек $a \in X(R^{sh})$.

О том, как дефект гладкости используется при построении модели Нерона, будет рассказано в следующем пункте.

2.2. Построение модели Нерона алгебраического тора над локальным полем

Алгоритм построения модели Нерона был впервые описан в работе [18]. Он основывается на следующей теореме.

Теорема 2.3. *В условиях ранее введённых обозначений пусть также Y_{r_k} — замкнутая подсхема X_{r_k}, гладкая над r_k и такая, что Y_{r_k} является схемным замыканием множества $r_{k^{sh}}$-значных точек X_{r_k}, которые поднимаются до R^{sh}-значных точек X (здесь $r_{k^{sh}}$ — поле вычетов кольца R^{sh}). Далее, пусть $X_\pi^{'} \to X$ — дилатация Y_{r_k} в X. Для каждой точки $a \in X(R^{sh})$ такой, что $a_{r_k} \in Y_{r_k}$, обозначим через $a^{'} \in X_\pi^{'}(R^{sh})$ единственную точку, полученную подъёмом a. Тогда* *для каждой точки $a \in X(R^{sh})$, специализация которой лежит в Y_{r_k}, выполняется условие $\delta(a') \leqslant \max\{0, \delta(a) - 1\}$.*

Таким образом, каждое применение дилатации в точке с ненулевым дефектом гладкости снижает значение дефекта гладкости в этой точке не менее чем на 1. С учётом конечности числа особых точек в особом слое схемы (в рассматриваемых нами случаях поле вычетов r_k конечно) и конечности значения дефекта гладкости в каждой из них это означает, что за конечное число повторений этой операции (в совокупности они называются процессом сглаживания) можно получить гладкую схему, у которой общий слой и множество R-точек такие же, как у исходной схемы. В частности, если X — целая модель некоторой схемы, то конечный результат будет гладкой целой моделью той же схемы, и при выполнении определённых дополнительных условий для X результат будет моделью Нерона (см. [18]).

Как и в случае с определением дефекта гладкости, в описанном виде алгоритм не подходит для построения моделей Нерона конкретных многообразий. Однако позднее в работах [19] и [22] было показано, что для произвольного аффинного многообразия T (в частности, алгебраического тора), определённого над локальным полем K с кольцом целых R, в качестве начальной схемы для данного алгоритма может выступать любая целая модель X схемы T такая, что у неё $X(R^{sh}) = U$, где $U \subset T(K^{sh})$ — максимальная компактная подгруппа группы K^{sh}-точек схемы T. В частности, как уже говорилось в главе 1, такому свойству удовлетворяет модель Воскресенского.

Для случая модели Воскресенского более простой вид имеет и сам шаг алгоритма. Если аффинное многообразие T вкладывается в аффинное пространство $\operatorname{Spec} k[z_1, ..., z_n]$ и задаётся идеалом I, порождённым функциями $g_1, ..., g_m$, дилатация в точке $a = (a_1, ..., a_n)$ представляет собой замену переменных $z_i^{(1)} = \pi z_i + a_i$, где π — образующий элемент единственного простого идеала $\wp \triangleleft R$, с последующим сокращением полученного в новых переменных выражения для функций g_j на максимально возможную степень π.

В частности, как очевидно из формулировки алгоритма, если модель Воскресенского многообразия T сама является гладкой, она совпадает с моделью Нерона этого многообразия. Более того, при дальнейшем изучении модели Воскресенского алгебраического тора (см. [22]), было установлено, что условие гладкости для неё может не выполняться только в том случае, если расширение L/k дико разветвлено, то есть $\mathrm{char}\, r_k \mid e$. Здесь k — основное поле алгебраического тора, L — минимальное поле разложения, e — индекс ветвления L над k, r_k — поле вычетов.

После получения этих результатов дальнейшего продвижения в задаче построения модели Нерона произвольного тора, определённого над локальным полем, не происходило. Однако можно поставить более узкую задачу построения явного задания модели Нерона для некоторой серии алгебраических торов, для которых она имеет специфический, неслучайный вид. Таким образом можно получить дополнительные нетривиальные результаты, например, в работе [21] рассматривалась модель Нерона норменного тора сколь угодно большой размерности при условии, что степень расширения L/k равна характеристике поля вычетов r_k. В данной главе настоящей работы будет получено явное задание моделей Нерона серии алгебраических торов малой размерности, а именно всех двумерных анизотропных алгебраических торов, определённых над локальным полем, являющимся полем p-адических чисел или его конечным расширением.

При работе с моделями Воскресенского для построения моделей Нерона мы можем ограничиться рассмотрением вполне разветвлённых расширений (также называемых чисто разветвлёнными), так как известно, что для любого расширения локальных полей L/k существует промежуточное поле F, $k \subset F \subset L$ такое, что F/k неразветвлённое, а L/F вполне разветвлённое (см. [13]), причём модель Воскресенского над k (по свойству этальной замены базы, доказанному в [22]) однозначно восстанавливается по модели над F. Поэтому в дальнейшем будем считать, что L/k вполне разветвлённое, то есть $e = [L : k]$. Это позволит также использовать тот известный факт, что в случае вполне разветвлённого расширения минимальный многочлен униформизующего элемента a поля L над k является многочленом Эйзенштейна (см. [13]). Напомним, что многочлен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ называется многочленом Эйзенштейна, если $\nu_\wp(a_0) = 1$, $\nu_\wp(a_i) \geq 1$, $i = \overline{1,\ n-1}$, где $\nu_\wp$ — дискретное нормирование в поле k (в рассматриваемом случае оно совпадает с $\wp$-адическим показателем, где $\wp \lhd R$ — единственный простой идеал).

2.3. Классификация двумерных анизотропных алгебраических торов

Классификация двумерных алгебраических торов известна (см. [4]). Из определения алгебраического тора следует, что произвольный тор T однозначно задаётся следующими данными: расширение полей L/k, где L — минимальное поле разложения T, и целочисленное представление $\rho : G \to GL(d, \mathbb{Z})$, где $G = \mathrm{Gal}(L/k)$, $d = \dim T$. Образ представления ρ называют группой разложения T.

Классификация групп разложения для двумерных алгебраических торов также хорошо изучена, это подгруппы в группах целочисленных автоморфизмов квадратичных форм $x^2 + y^2$ и $x^2 + xy + y^2$. Напомним, что для квадратичной формы $x^2 + y^2$ группа целочисленных автоморфизмов есть группа D_4, порождаемая элементами $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (как можно проверить, они связаны соотношениями ${\sigma_1}^4 = {\tau_1}^2 = e$ и ${\sigma_1}^3\tau_1 = \tau_1\sigma_1$). Для формы $x^2 + xy + y^2$ группа целочисленных автоморфизмов — группа D_6, порождаемая $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ (связанными соотношениями ${\sigma_2}^6 = {\tau_2}^2 = e$ и ${\sigma_2}^5\tau_2 = \tau_2\sigma_2$). Для краткости приведём только общий вид групп Галуа рассматриваемых торов, явное их задание легко можно восстановить по приведённым данным.

Классификация имеет следующий вид:

1) $T = {G_m}^2$, $[L : k] = 1$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e\}$.

2) $T = G_m \times R^{(1)}_{L/k}(G_m)$, $[L : k] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ {\sigma_1}^2\tau_1\}$.

3) $T = R^{(1)}_{L/k}(G_m) \times R^{(1)}_{L/k}(G_m)$, $[L : k] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ {\sigma_1}^2\}$.

4) $T = R_{L/k}(G_m)$, $[L : k] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ {\sigma_1}^3\tau_1\}$.

5) $T = R^{(1)}_{L/k}(G_m)$, $[L : k] = 3$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ {\sigma_2}^2;\ {\sigma_2}^4\}$.

6) $T = R_{L_1/k}(R^{(1)}_{L/L_1}(G_m))$, $[L : k] = 4$,

$k \subset L_1 \subset L$, $[L_1 : k] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ {\sigma_1}^2;\ \sigma_1\tau_1;\ {\sigma_1}^3\tau_1\}$.

7) $T = R^{(1)}_{L_1/k}(G_m) \times R^{(1)}_{L_2/k}(G_m)$, $[L : k] = 4$,

$k \subset L_1 \subset L$, $k \subset L_2 \subset L$, $L_1 \neq L_2$, $[L_1 : k] = 2$, $[L_2 : k] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ {\sigma_1}^2;\ \tau_1;\ {\sigma_1}^2\tau_1\}$.

8) $T = R_{L_1/k}(R^{(1)}_{L/L_1}(G_m))$, $[L : k] = 4$,

$k \subset L_1 \subset L$, $[L_1 : k] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ \sigma_1;\ {\sigma_1}^2;\ {\sigma_1}^3\}$.

9) $T = R_{L_1/k}(R^{(1)}_{L/L_1}(G_m)) \cap R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L/L_2}(G_m))$, $[L : k] = 6$,

$k \subset L_1 \subset L$, $[L_1 : k] = 3$, $k \subset L_2 \subset L$, $[L_2 : k] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ {\sigma_2}^2;\ {\sigma_2}^4;\ \sigma_2\tau_2;\ {\sigma_2}^3\tau_2;\ {\sigma_2}^5\tau_2\}$.

10) $T = R_{L_1/k}(R^{(1)}_{L/L_1}(G_m)) \cap R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L/L_2}(G_m))$, $[L : k] = 6$,

$k \subset L_1 \subset L$, $[L_1 : k] = 3$, $k \subset L_2 \subset L$, $[L_2 : k] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ \sigma_2;\ {\sigma_2}^2;\ {\sigma_2}^3;\ {\sigma_2}^4;\ {\sigma_2}^5\}$.

11) $T\ =\ R^{(1)}_{L_1/k}(G_m)$, $[L : k] = 6$,

$k \subset L_1 \subset L$, $[L_1 : k] = 3$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ {\sigma_2}^2;\ {\sigma_2}^4;\ \tau_2;\ {\sigma_2}^2\tau_2;\ {\sigma_2}^4\tau_2\}$.

12) $T\ =\ R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m))$, $[L : k] = 8$,

$k \subset L_2 \subset L_1 \subset L$, $[L_2 : k] = 2$, $[L_1 : L_2] = 2$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ \sigma_1;\ {\sigma_1}^2;\ {\sigma_1}^3;\ \tau_1;\ \sigma_1\tau_1;\ {\sigma_1}^2\tau_1;\ {\sigma_1}^3\tau_1\}$.

13) $T\ =\ R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m)) \cap R_{L_3/k}(R^{(1)}_{L_1/L_3}(G_m))$, $[L : k] = 12$,

$k \subset L_2 \subset L_1 \subset L$, $k \subset L_3 \subset L_1 \subset L$, $[L_2 : k] = 3$, $[L_1 : L_2] = 2$, $[L_3 : k] = 2$, $[L_1 : L_3] = 3$,

$\mathrm{Gal}(L/k) = \{e;\ \sigma_2;\ {\sigma_2}^2;\ {\sigma_2}^3;\ {\sigma_2}^4;\ {\sigma_2}^5;\ \tau_2;\ \sigma_2\tau_2;\ {\sigma_2}^2\tau_2;\ {\sigma_2}^3\tau_2;\ {\sigma_2}^4\tau_2;\ {\sigma_2}^5\tau_2\}$.

Как легко проверить (по определению), торы типов 1), 2), 4) не анизотропны, остальных типов — анизотропны. Построение их моделей Нерона будет описано в следующем пункте.

2.4. Построение модели Нерона двумерных анизотропных алгебраических торов

Вначале необходимо построить модели Воскресенского исследуемых торов. Для этого рассматривают эпиморфизм, переводящий в модуль характеров $\hat{T}$ тора T модуль характеров $\hat{S}$ некоторого квазиразложимого тора S подходящей размерности. Обозначим этот эпиморфизм φ (известно, что такой морфизм существует, см. [3], [15]). При известном S канонический изоморфизм $\hat{S}/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \hat{T}$ позволяет получить модуль характеров $\hat{T}$, после чего при известных полях k и L можно однозначно восстановить тор T.

В результате будут получены соотношения, задающие $\mathrm{Ker}\,\varphi$ и представляющие собой уравнение или систему уравнений относительно элементов $\hat{T}$ (по ним можно также определить тип рассматриваемого тора, таким образом ранее была получена известная классификация двумерных торов). Если характеры из $\hat{T}$ заменить их известным разложением по базису L/k, описанным в главе 1, мы получим уравнения относительно координатных функций из $k[T]$, задающие T как аффинное многообразие. Наконец, если используемый базис L/k целый, те же уравнения задают модель Воскресенского X тора T.

Далее, необходимо проверить выполнение условия гладкости. Если в каких-либо случаях оно нарушается, нужно провести процесс сглаживания полученной модели Воскресенского. Как было сказано ранее, для рассматриваемых нами торов условие гладкости может не выполняться только при $\operatorname{char} r_k \,|\, e$. Это означает $p \,|\, [L:k]$, что имеет место в следующих случаях:

$p = 2$, $[L:k] \in \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12\}$;

$p = 3$, $[L:k] \in \{3;\ 6;\ 12\}$.

Во всех остальных случаях модель Воскресенского будет совпадать с моделью Нерона. При рассмотрении конкретных алгебраических торов мы не будем каждый раз упоминать этот факт и сразу будем переходить к исследованию случаев, подозрительных на негладкость.

Теперь более подробно опишем процесс построения и сглаживания моделей Воскресенского для интересующих нас торов (при этом номера типов торов будут использоваться те же, что в вышеприведённой классификации):

3) $\operatorname{Ker} \varphi$ задаётся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} f_1 f_1^{\sigma} = 1, \\ f_2 f_2^{\sigma} = 1. \end{cases}$$

Здесь $f_1, f_2 \in \hat{T}$ — базисные характеры. Возьмём $L = k(a)$, где $a \notin k$ — корень многочлена $x^2 - b$, $b = a^2 \in k$, $\nu(b) = 1$ (тогда b является униформизующим элементом k). Заменим характеры их разложением по базису L/k:

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + ax_2, \\ f_2 = x_3 + ax_4. \end{cases}$$

Здесь $x_1, ..., x_4 \in k[T]$. Окончательно модель Воскресенского X тора T задаётся следующей системой:

$$\begin{cases} x_1^2 - bx_2^2 = 1, \\ x_3^2 - bx_4^2 = 1. \end{cases}$$

Так как b — униформизующий элемент поля k, то соответствующий коэффициент после редукции будет равен 0, значит, редукция $\overline{X}$ данной модели задаётся системой

$$\begin{cases} x_1^2 = 1, \\ x_3^2 = 1. \end{cases}$$

Как легко проверить, алгебра Хопфа, задающая X, содержит нильпотенты только при $b \mid 2$ (то есть $p = \mathrm{char}\ r_k = 2$), эти нильпотенты имеют вид $(x_1 - 1)^2 = 0$ и $(x_3 - 1)^2 = 0$ (оба соответствуют особенностям вида μ_2). Сглаживание требуется в точках особого слоя вида $a_i \in \{(1, x_2, x_3, x_4); (x_1, x_2, 1, x_4)\}$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — произвольные координаты. Рассмотрим сглаживание в точке $a = (1, 0, 1, 0)$, первый шаг сглаживания представляет собой следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = by_1 + 1, \\ x_2 = by_2, \\ x_3 = by_3 + 1, \\ x_4 = by_4. \end{cases}$$

Как можно заметить, после замены a перейдёт в $a^{'} = (0, 0, 0, 0)$ и дальнейшие шаги алгоритма, если они потребуются, будут заключаться в сглаживании в $a^{'}$.

При каждом из этих шагов соответствующая замена переменных будет иметь вид $y_i = bz_i$, $i = \overline{1,4}$, то есть будет переводить a' саму в себя. Поэтому вместо последовательности замен переменных с сокращением после каждой из них на максимальную возможную степень униформизующего элемента мы можем получить аналогичный результат после одной замены переменных с последующим сокращением уравнений (этим приёмом мы будем пользоваться и далее). Замена в таком случае будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = b^t y_1 + 1, \\ x_2 = b^t y_2, \\ x_3 = b^t y_3 + 1, \\ x_4 = b^t y_4. \end{cases}$$

Здесь $t \in \mathbb{N}$ — параметр (заметим, что здесь и далее мы находим минимальное подходящее значение параметра t, так как при дальнейшей дилатации схемы, уже являющейся гладкой, можно получить целую модель, не изоморфную модели Нерона). Так как элемент b униформизующий, то 2 делится на b. Пусть $\wp$-адический показатель числа 2 равен m, то есть $2 = b^m r_2$, где $r_2 \in \mathcal{O}_k$, $b \nmid r_2$, $m \in \mathbb{N}$. После замены и упрощения система примет вид

$$\begin{cases} b^{2t} y_1^2 + r_2 b^{m+t} y_1 - b^{2t+1} y_2^2 = 0, \\ b^{2t} y_3^2 + r_2 b^{m+t} y_3 - b^{2t+1} y_4^2 = 0. \end{cases}$$

Положим $t = m$, тогда оба уравнения можно сократить на b^{2m}, получим

$$\begin{cases} y_1^2 + r_2 y_1 - b y_2^2 = 0, \\ y_3^2 + r_2 y_3 - b y_4^2 = 0. \end{cases}$$

Покажем, что результат проведённых преобразований — гладкая схема. Построим её матрицу Якоби в произвольной точке $y = (y_1, y_2)$, где $y_1, y_2 \in k$, получим $J = \begin{pmatrix} 2y_1+r_2 & -2by_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3+r_2 & -2by_4 \end{pmatrix}$. Размерность аффинной схемы X (а значит, и её относительная размерность над кольцом $\mathcal{O}_k$) равна 2, а размерность аффинного пространства, в которое вкладывается X, равна 4. Тогда Λ — множество ненулевых миноров J второго порядка. Среди элементов Λ есть минор $\Delta = (2y_1 + r_2)(2y_3 + r_2)$, так как ранее мы условились, что $b \mid 2$, $b \nmid r_2$, то $\nu_\wp(\Delta) = 0$ независимо от значения переменных y_i, следовательно, $\delta(y) = 0$ и модель Нерона тора T построена.

5) $\operatorname{Ker}\varphi$ для данного типа тора задаётся следующим уравнением:

$ff^{\sigma}f^{\sigma^2} = 1.$

В качестве поля разложения L тора T возьмём $k(a)$, где a — корень многочлена Эйзенштейна вида t^3+bt+c, дискриминант которого является квадратом элемента из k. Заменим характер f его разложением по базису L/k:

$f = x_1 + ax_2 + a^2x_3.$

После замены уравнение принимает следующий вид:

$x_1{}^3 - 2bx_1{}^2x_3 + bx_1x_2{}^2 + 3cx_1x_2x_3 + b^2x_1x_3{}^2 - cx_2{}^3 - bcx_2x_3{}^2 + c^2x_3{}^3 = 1.$

Это уравнение задаёт модель Воскресенского исследуемого тора. Так как b, c — коэффициенты многочлена Эйзенштейна, то $\nu_\wp(b) \geq 1$, $\nu_\wp(c) = 1$, то есть c является униформизующим элементом поля k. Это означает, что редукция по модулю $\wp$ для b и c равна 0, поэтому редукция $\overline{X}$ модели Воскресенского задаётся уравнением $x_1{}^3 = 1$.

Таким образом, алгебра Хопфа $A(\hat{T})$ содержит нильпотент только при $c \mid 3$, то есть $p = 3$, этот нильпотент имеет вид $(x-1)^3 = 0$, что соответствует особенности вида μ_3. Сглаживание требуется в точках вида $a_{ij} = (1, x_2, x_3)$, где x_2, x_3 — произвольные. Рассмотрим сглаживание в точке $a = (1, 0, 0)$. Как и в предыдущем случае, при сглаживании можем рассмотреть одну замену переменных следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 = c^t y_1 + 1, \\ x_2 = c^t y_2, \\ x_3 = c^t y_3. \end{cases}$$

Здесь $t \in \mathbb{N}$ — параметр. Пусть $\nu_\wp(b) = m$, то есть $b = c^m \cdot r_b$, $r_b \in \mathcal{O}_k$, $c \nmid r_b$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu_\wp(3) = q$, то есть $3 = c^q \cdot r_3$, $r_3 \in \mathcal{O}_k$, $c \nmid r_3$, $q \in \mathbb{N}$. Тогда после замены переменных и приведения подобных уравнение примет следующий вид:

$c^{3t}{y_1}^3 + r_3 c^{2t+q}{y_1}^2 + r_3 c^{t+q} y_1 - 2r_b c^{m+3t}{y_1}^2 y_3 - 4r_b c^{m+2t} y_1 y_3 - 2r_b c^{m+t} y_3 + r_b c^{m+3t} y_1 {y_2}^2 + r_b c^{m+2t}{y_2}^2 + r_3 c^{q+1+3t} y_1 y_2 y_3 + r_3 c^{q+1+2t} y_2 y_3 + {r_b}^2 c^{2m+3t} y_1 {y_3}^2 + {r_b}^2 c^{2m+2t}{y_3}^2 - c^{1+3t}{y_2}^3 - r_b c^{m+1+3t} y_2 {y_3}^2 + c^{2+3t}{y_3}^3 = 0.$

Тогда $\wp$-адические показатели коэффициентов будут следующими (приводятся в том же порядке, что и слагаемые): $3t$, $2t+q$, $t+q$, $m+3t$, $m+2t$, $m+t$, $m+3t$, $m+2t$, $q+1+3t$, $q+1+2t$, $2m+3t$, $2m+2t$, $1+3t$, $m+1+3t$, $2+3t$.

Положим, что $t = \min(m, q)$. Тогда максимальная степень c, на которую можно сократить уравнение, равна $2t$. После деления на c^{2t} уравнение будет иметь вид

$c^t{y_1}^3 + r_3 c^q {y_1}^2 + r_3 c^{q-t} y_1 - 2r_b c^{m+t}{y_1}^2 y_3 - 4r_b c^m y_1 y_3 - 2r_b c^{m-t} y_3 + r_b c^{m+t} y_1 {y_2}^2 + r_b c^m {y_2}^2 + r_3 c^{q+1+t} y_1 y_2 y_3 + r_3 c^{q+1} y_2 y_3 + {r_b}^2 c^{2m+t} y_1 {y_3}^2 + {r_b}^2 c^{2m}{y_3}^2 - c^{1+t}{y_2}^3 - r_b c^{m+1+t} y_2 {y_3}^2 + c^{2+t}{y_3}^3 = 0.$

При этом по крайней мере одна из степеней c вида $q-t$ и $m-t$ по предположению равна 0. С другой стороны, все степени c, кроме этих двух, ненулевые. Поэтому редукция будет задаваться уравнением

$\overline{r_3 c^{q-t}} y_1 - \overline{2r_b c^{m-t}} y_3 = 0.$

Здесь если $q > m$, не обращается в 0 первый коэффициент, если $q < m$, то второй, если $q = m$, оба коэффициента ненулевые.

Чтобы показать, что полученная схема гладкая, найдём дефект гладкости в произвольной точке. Матрица Якоби будет иметь вид $J = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \end{pmatrix}$, где элементы матрицы следующие:

$j_{11} = 3c^t y_1^2 + 2r_3 c^q y_1 + r_3 c^{q-t} - 4r_b c^{m+t} y_1 y_3 - 4r_b c^m y_3 + r_b c^{m+t} y_2^2 + r_3 c^{q+1+t} y_2 y_3 + r_b c^{2m+t} y_3^2;$

$j_{12} = r_b c^{m+t} y_1 y_2 + 2r_b c^m y_2 + r_3 c^{q+1+t} y_1 y_3 + r_3 c^{q+1} y_3 - 3c^{1+t} y_2^2 - r_b c^{m+1+t} y_3^2;$

$j_{13} = -2r_b c^{m+t} y_1^2 - 4r_b c^m y_1 - 2r_b c^{m-t} + r_3 c^{q+1+t} y_1 y_2 + r_3 c^{q+1} y_2 + 2r_b^2 c^{2m+t} y_1 y_3 + 2r_b^2 c^{2m} y_3 - 2r_b c^{m+1+t} y_2 y_3 + 3c^{2+t} y_3^2.$

Так как размерность рассматриваемой схемы равна 2, а размерность аффинного пространства, в которое она вкладывается, равна 3, для определения дефекта гладкости необходимо рассматривать миноры первого порядка матрицы Якоби, множество таких миноров совпадает со множеством элементов J.

Как уже говорилось выше, хотя бы одна из степеней $q - t$ или $m - t$ равна 0. Тогда матрица J содержит элемент (соответственно первый или третий), в котором одно слагаемое по построению имеет $\wp$-адический показатель 0, а остальные слагаемые — больше 0. Это означает, что $\wp$-адический показатель всего элемента равен 0 и при вычислении дефекта гладкости в произвольной точке минимальным окажется показатель именно этого элемента, рассматриваемого как минор 1-го порядка. Так как он равен 0, полученное многообразие гладко в произвольной точке и искомая модель Нерона построена.

6) Чтобы задать модель Воскресенского для данного случая, нужно к норменному уравнению второго порядка (такому же, как рассматривалось для тора типа 4)), определенному над полем L_1, применить функтор ограничения Вейля $R_{L_1/k}$. Пусть $L_1 = k(a)$, где $a^2 = b \in k$, $L = L_1(c)$, где $c^2 = d \in L_1$. Тогда над L_1 уравнение имеет вид ${x_1}^2 - d{x_2}^2 = 1$. Пусть $d = d_1 + ad_2$, где $d_1, d_2 \in k$. Для того, чтобы определить уравнение над k, необходима следующая замена переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + ay_3, \\ x_2 = y_2 + ay_4. \end{cases}$$

После неё уравнение принимает следующий вид:

$y_1^2 + 2ay_1y_3 + by_3^2 - (d_1 + ad_2)(y_2^2 + 2ay_2y_4 + by_4^2) = 1.$

После раскрытия скобок получаем следующее уравнение:

$y_1^2 + 2ay_1y_3 + by_3^2 - d_1y_2^2 - 2ad_1y_2y_4 - bd_1y_4^2 - ad_2y_2^2 - 2bd_2y_2y_4 - abd_2y_4^2 = 1.$

С учётом того, что $y_1, ..., y_4, d_1, d_2, b \in k$, $a \notin k$, уравнение, определённое над L_1, можно представить в виде $P_1 + aP_2 = 1$, где $P_1, P_2 \in k[y_1, ..., y_4]$, и заменить эквивалентной системой уравнений, определённых над k, а именно следующей:

$$\begin{cases} y_1^2 + by_3^2 - d_1y_2^2 - bd_1y_4^2 - 2bd_2y_2y_4 = 1, \\ 2y_1y_3 - 2d_1y_2y_4 - d_2y_2^2 - bd_2y_4^2 = 0. \end{cases}$$

Мы можем считать, что a является также униформизующим элементом L_1. По заданию расширение L/k вполне разветвлено, следовательно, и его подрасширение L_1/k вполне разветвлено, поэтому $\nu_\wp(b) = 1$. Так как $\nu_\wp(b) = 1$, то мы можем положить $\pi = b$ (где π — униформизующий элемент k). Пусть $\nu_\wp(2) = m$. Тогда $2 = r_2 \cdot b^m$, где $r_2 \in \mathcal{O}_k$, $b \nmid r_2$, $m \in \mathbb{N}$. Редукция $\overline{X}$ модели Воскресенского задаётся следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1^2 - \overline{d}_1y_2^2 = 1, \\ \overline{d}_2y_2^2 - \overline{2}y_1y_3 + \overline{2d}_1y_2y_4 = 0. \end{cases}$$

Нильпотенты могут возникнуть только при $\pi \mid 2$ и имеют вид $(y_1 - uy_2 - 1)^2 = 0$ (где $u^2 = d_1 \bmod \pi$, возникает в случае, если d_1 — квадратичный вычет по модулю π) и $y_2^2 = 0$ (возникает в случае, если $d_2 \neq 0 \bmod \pi$). Эти нильпотенты соответствуют особенностям вида μ_2 и α_2. Таким образом, сглаживание требуется в точках $a_i \in \{(s_1, s_2, x_3, x_4)\} \cup \{(x_1, x_2, 0, x_4)\}$, где $x_1, ..., x_4, s_1, s_2 \in k$ и $s_1 - us_2 = 1$. Рассмотрим сначала сглаживание в точке $a = (1, 0, 0, 0)$, которая входит в оба указанных множества. Как и в предыдущих случаях, вместо композиции замен переменных можно рассмотреть одну замену переменных следующего вида:

$$\begin{cases} y_1 = b^tz_1 + 1, \\ y_2 = b^tz_2, \\ y_3 = b^tz_3, \\ y_4 = b^tz_4. \end{cases}$$

Здесь $t \in \mathbb{N}$ — параметр. После раскрытия скобок и приведения подобных получим

$$\begin{cases} b^{2t}z_1^2 + r_2 b^{t+m} z_1 - d_1 b^{2t} z_2^2 + b^{2t} z_3^2 - d_1 b^{2t+1} z_4^2 - d_2 r_2 b^{2t+m+1} z_2 z_4 = 0, \\ d_2 b^{2t} z_2^2 - r_2 b^{2t+m} z_1 z_3 - r_2 b^{t+m} z_3 - d_1 r_2 b^{2t+m} z_2 z_4 - d_2 b^{2t+1} z_4^2 = 0. \end{cases}$$

Так как параметру t можно придать любое натуральное значение, положим $t = m$. Заметим, что так как для любого расширения локальных полей существует целый базис, мы можем условиться, что $d_1, d_2 \in \mathcal{O}_k$, отсюда $\nu_\wp(d_1) \geqslant 0$, $\nu_\wp(d_2) \geqslant 0$. Тогда каждое уравнение системы можно сократить максимум на c^{2m}, после этого они примут следующий вид:

$$\begin{cases} z_1^2 + r_2 z_1 - d_1 z_2^2 + z_3^2 - d_1 b z_4^2 - d_2 r_2 b^{m+1} z_2 z_4 = 0, \\ d_2 z_2^2 - r_2 b^m z_1 z_3 - r_2 z_3 - d_1 r_2 b^m z_2 z_4 - d_2 b z_4^2 = 0. \end{cases}$$

Чтобы показать, что полученная схема гладкая, построим матрицу Якоби. Она будет иметь следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} 2z_1 + r_2 & -2d_1 z_2 - d_2 r_2 b^{m+1} z_4 & 2z_3 & -d_2 r_2 b^{m+1} z_2 - 2d_1 b z_4 \\ -r_2 b^m z_3 & 2d_2 z_2 & -r_2 b^m z_1 - r_2 & -d_1 r_2 b^m z_2 - 2d_2 b z_4 \end{pmatrix}$$

Так как размерность аффинного пространства, в которое вкладывается схема X, равна 4, а размерность самой схемы X равна 2, то необходимо рассмотреть миноры 2-го порядка в J. Один из них имеет вид $\Delta = \begin{vmatrix} 2z_1 + r_2 & 2z_3 \\ -r_2 b^m z_3 & -r_2 b^m z_1 - r_2 \end{vmatrix} = (2z_1 + r_2)(-r_2 b^m z_1 - r_2) - 2z_3(-r_2 b^m z_3) = -r_2^2 - r_2^2 b^m z_1 - r_2^2 b^{2m} z_1^2 - r_2^2 b^m z_1 + r_2^2 b^{2m} z_3^2$. Как легко видеть, при любых значениях переменных $z_i \in \mathcal{O}_k$, то есть в произвольной точке многообразия, все слагаемые, кроме первого, имеют $\wp$-адический показатель, не меньший 1, а последнее слагаемое — равный 0. Следовательно, $\wp$-адический показатель этого минора в произвольной точке, а значит, и дефект гладкости в ней, равен 0, полученное многообразие является гладким и искомая модель Нерона построена.

7) Данный тор — прямое произведение двух одномерных норменных торов, диагонализируемых над разными промежуточными полями $L_1, L_2 \subset L$, где $[L_1 :$

$k] = [L_2 : k] = 2$. Пусть $L_1 = k(a)$, $L_2 = k(b)$ (причём a и b также являются униформизующими элементами соответствующих полей), тогда, так как $[L : k] = 4$, получаем, что $L = k(a, b) = L_1(b) = L_2(a)$. Тор T задаётся следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} {x_1}^2 - b^2{x_2}^2 = 1, \\ {x_3}^2 - a^2{x_4}^2 = 1. \end{cases}$$

Оба уравнения сразу определены над k, переменные второго уравнения не зависят от переменных первого. Так как расширение L/k вполне разветвлено по условию, его подрасширения L_1/k и L_2/k также вполне разветвлены, следовательно, элементы b^2 и a^2 поля k, являющиеся свободными членами минимальных многочленов униформизующих элементов этих полей над k, удовлетворяют условию $\nu_\wp(b^2) = \nu_\wp(a^2) = 1$. В таком случае мы можем считать один из этих элементов k униформизующим, пусть $b^2 = \pi$ — униформизующий элемент k, тогда $a^2 = c\pi$, где $c \in \mathcal{O}_k$ и $\nu_\wp(c) = 0$. Тогда система, задающая модель Воскресенского X тора T, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} {x_1}^2 - \pi{x_2}^2 = 1, \\ {x_3}^2 - c\pi{x_4}^2 = 1. \end{cases}$$

Соответственно, редукция $\overline{X}$ задаётся следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 = 1, \\ x_3^2 = 1. \end{cases}$$

Нильпотенты могут возникнуть только при $\pi \mid 2$ и имеют вид $(x_1 - 1)^2 = 0$, $(x_3 - 1)^2 = 0$, оба соответствуют особенностям вида μ_2. Таким образом, сглаживание требуется в точках вида $a_i \in \{(1, x_2, x_3, x_4)\} \cup \{(x_1, x_2, 1, x_4)\}$, где $x_1, ..., x_4 \in k$. Рассмотрим сначала сглаживание в точке $a = (1, 0, 1, 0)$, которая входит в оба указанных множества. Пусть $\nu_\wp(2) = m$. Тогда $2 = r_2 \cdot \pi^m$, где $r_2 \in \mathcal{O}_k$, $\pi \nmid r_2$, $m \in \mathbb{N}$.

Как и в предыдущих случаях, вместо композиции замен переменных можно рассмотреть одну замену переменных следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 = \pi^t y_1 + 1, \\ x_2 = \pi^t y_2, \\ x_3 = \pi^t y_3 + 1, \\ x_4 = \pi^t y_4. \end{cases}$$

Здесь $t \in \mathbb{N}$ — параметр. После замены получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \pi^{2t} y_1^2 + r_2 \pi^{m+t} y_1 - \pi^{2t+1} y_2^2 = 0, \\ \pi^{2t} y_3^2 + r_2 \pi^{m+t} y_3 - c\pi^{2t+1} y_4^2 = 0. \end{cases}$$

Положим $t = m$, тогда оба уравнения можно сократить на π^{2m}, после чего система примет следующий вид:

$$\begin{cases} y_1^2 + r_2 y_1 - \pi y_2^2 = 0, \\ y_3^2 + r_2 y_3 - c\pi y_4^2 = 0. \end{cases}$$

Чтобы показать, что полученная схема гладкая, построим матрицу Якоби, она будет иметь следующий вид:

$J = \left(\begin{smallmatrix} 2y_1+r_2 & -2\pi y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3+r_2 & -2c\pi y_4 \end{smallmatrix}\right)$

Так как размерность аффинного пространства, в которое вкладывается X, равна 4, а размерность X равна 2, то необходимо рассмотреть миноры 2-го порядка в J. Один из них равен $\Delta = \left|\begin{smallmatrix} 2y_1+r_2 & 0 \\ 0 & 2y_3+r_2 \end{smallmatrix}\right| = (2y_1+r_2)(2y_3+r_2)$. Как легко проверить, $\wp$-адический показатель элемента такого вида равен 0 независимо от значений переменных, следовательно, дефект гладкости построенной модели в произвольной точке равен 0 и эта схема является моделью Нерона тора T.

8) Этот случай отличается от случая 6) только структурой расширения L/k, группа Галуа которого должна быть циклической. Реализация алгоритма построения моделей Воскресенского и Нерона без изменений переносится на данный случай со случая 6).

9) Тор задаётся системой, состоящей из двух норменных уравнений — 3-го и 2-го порядка:

$$\begin{cases} x_1^3 - 2bx_1^2x_3 + bx_1x_2^2 + 3cx_1x_2x_3 + b^2x_1x_3^2 - cx_2^3 - bcx_2x_3^2 + c^2x_3^3 = 1, \\ y_1^2 - ay_2^2 = 1. \end{cases}$$

При этом первое уравнение определено над L_1, второе над L_2, где $L_1, L_2 \subset L$ — промежуточные поля, $[L : L_1] = 3$, $[L : L_2] = 2$. Пусть $L_1 = k(\alpha)$, $L_2 = k(\beta)$. Тогда, так как $[L : k] = 6$, то получаем, что $L = k(\alpha, \beta) = L_1(\beta) = L_2(\alpha)$. Коэффициенты a, b и c в уравнениях заданы тем условием, что $t^3 + bt + c$ — минимальный многочлен β над L_1, $t^2 + a$ — минимальный многочлен α над L_2). Причём так как $[L : L_1] = 3 = [L_2 : k]$, $L = L_1(\beta)$, $L_2 = k(\beta)$, то в качестве минимального многочлена элемента β над L_1 можно взять минимальный многочлен этого элемента над k, то есть можно считать, что $b, c \in k$. Аналогично можно считать, что $a \in k$. Далее, переменные в уравнениях системы не являются алгебраически независимыми, так как переменные x_i и y_j представляют собой разложение одного и того же общего вида элемента L по базисам соответственно L/L_1 и L/L_2. Тогда, чтобы получить уравнения, определённые над k, необходима следующая замена переменных:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + \alpha z_2, \\ x_2 = z_3 + \alpha z_4, \\ x_3 = z_5 + \alpha z_6, \\ y_1 = z_1 + \beta z_3 + \beta^2 z_5, \\ y_2 = z_2 + \beta z_4 + \beta^2 z_6. \end{cases}$$

Как легко проверить, в результате получаем правильное разложение $x_1 + \beta x_2 + \beta^2 x_3 = y_1 + \alpha y_2 = z_1 + \alpha z_2 + \beta z_3 + \alpha\beta z_4 + \beta^2 z_5 + \alpha\beta^2 z_6$ общего вида элемента L. Как и в предыдущем случае, в полученной после упрощения системе каждое уравнение можно заменить системой определённых над k уравнений, соответствующих компонентам при разложении по базису промежуточного поля над k. Как и в предыдущих случаях, поскольку по условию расширение L/k вполне разветвлено, а значит, L_1/k и L_2/k также вполне разветвлены, то $\nu_\wp(b) \geqslant 1$, $\nu_\wp(c) = 1$, $\nu_\wp(a) = 1$. Поэтому, в частности, можем считать, что $c = \pi$ — униформизующий элемент k. После указанных замен система, задающая X, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} z_1^3 + 3az_1z_2^2 - 2bz_1^2z_3 - 2abz_2^2z_3 - 4abz_1z_2z_4 + bz_1z_3^2 + 2abz_2z_3z_4 + abz_1z_4^2 + \\ \quad + 3cz_1z_3z_5 + 3acz_2z_3z_6 + 3acz_1z_4z_6 + 3acz_2z_4z_5 + b^2z_1z_5^2 + ab^2z_1z_6^2 + \\ \quad + 2ab^2z_2z_5z_6 - cz_3^3 - 3acz_3z_4^2 - bcz_3z_5^2 - abcz_3z_6^2 - 2abcz_4z_5z_6 + c^2z_5^3 + \\ \quad + 3ac^2z_5z_6^2 = 1, \\ 3z_1^2z_2 + az_2^3 - 4bz_1z_2z_3 - 2bz_1^2z_4 - 2abz_2^2z_4 + bz_2z_3^2 + 2bz_1z_3z_4 + abz_2z_4^2 + \\ \quad + 3cz_1z_3z_6 + 3cz_2z_3z_5 + 3cz_1z_4z_5 + 3acz_2z_4z_6 + 2b^2z_1z_5z_6 + b^2z_2z_5^2 + ab^2z_2z_6^2 - \\ \quad - 3cz_3^2z_4 - acz_4^3 - 2bcz_3z_5z_6 - bcz_4z_5^2 - abcz_4z_6^2 + 3c^2z_5^2z_6 + ac^2z_6^3 = 0, \\ z_1^2 - 2cz_1z_5 - az_2^2 + 2acz_4z_6 = 1, \\ -cz_5^2 + 2z_1z_3 - 2bz_1z_5 + acz_6^2 - 2az_2z_4 + 2abz_4z_6 = 0, \\ z_3^2 - bz_5^2 + 2z_1z_5 - az_4^2 + abz_6^2 - 2az_2z_6 = 0. \end{cases}$$

Модель Воскресенского X исследуемого тора построена. Рассмотрим теперь случаи, подозрительные на нарушение условия гладкости.

Пусть $\pi \mid 2$ (из этого следует $\pi \nmid 3$). Тогда четвёртое уравнение системы можно сократить на c и редукция задаётся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} z_1^3 = 1, \\ \overline{3}z_1^2z_2 = 0, \\ z_1^2 = 1, \\ z_5^2 - \overline{2c^{-1}}z_1z_3 = 0, \\ z_3^2 = 0. \end{cases}$$

Так как в систему входят сразу оба уравнения $z_1^3 = 1$ и $z_1^2 = 1$, нильпотенты вида $(z_1-1)^3 = 0$ и $(z_1-1)^2 = 0$ не могут возникнуть, так как система этих двух уравнений эквивалентна уравнению $z_1 = 1$. Однако возникают нильпотенты вида $z_3^2 = 0$ и $z_5^2 = 0$ (последний возникает только при условии $\nu_\wp(2) > 1$). Оба этих нильпотента соответствуют особенностям вида α_2. Положим $\nu_\wp(2) = m \in \mathbb{N}$, тогда $2 = r_2 c^m$, где $r_2 \in \mathcal{O}_k$, $\nu_\wp(r_2) = 0$. Проведём сглаживание в точке $a = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, которая удовлетворяет условиям особых точек. Аналогично предыдущим случаям, проводим замену следующего вида:

$$\begin{cases} z_1 = c^t x_1 + 1, \\ z_i = c^t x_i, i = \overline{2, 6}. \end{cases}$$

Здесь $t \in \mathbb{N}$ — параметр. Положим $t = m+1$. Приводить явное задание системы, получаемой в результате сокращения, и её матрицу Якоби из соображений сложности восприятия мы не будем и обоснуем результат в общем виде.

После замены переменных изменение вида уравнений системы можно описать следующим образом. Свободный член 1 в правой части первого и третьего уравнений после раскрытия скобок взаимоуничтожается со слагаемым 1, получаемым при раскрытии скобок в слагаемом, имевшем до замены вид соответственно z_1^3 и z_1^2. При этом в первом уравнении минимальный π-адический показатель среди оставшихся слагаемых, равный $m + 1$, будет иметь слагаемое $3c^{m+1}x_1$, получаемое из z_1^3. Покажем, что у всех остальных слагаемых он больше. Как легко проверить, все слагаемые, входящие в первое уравнение до замены переменных, кроме z_1^3 и $-2bz_1^2 z_3$, имеют общую степень относительно переменных $z_2, ..., z_6$ не менее 2, и при этом в каждый из их коэффициентов входит хотя бы один из множителей a, b или c. В совокупности это означает, что $\wp$-адический показатель каждого из слагаемых, получаемых из указанных слагаемых после замены переменных и раскрытия скобок, будет не менее $2m + 1$. Слагаемые, получаемые из $-2bz_1^2 z_3$, будут иметь показатель не менее $2m + 1$, так как для коэффициента $-2b$ он не менее $m + 1$, а z_3 после замены увеличит показатель ещё на m. Наконец, среди слагаемых, получаемых из z_1^3, кроме самого $2c^m x_1$, остаются $c^{3m+3}x_1^3$ и $3c^{2m+2}x_1^2$, их показатель равен соответственно $3m+3$ и $2m+2$. Итак, первое уравнение можно сократить максимум на c^{m+1}, после этого в нём $\wp$-адический показатель одного слагаемого $3x_1$ будет 0, а у остальных слагаемых не менее 1.

Слагаемым с минимальным $\wp$-адическим показателем во втором уравнении, как легко показать аналогичным рассуждением, будет $3c^{m+1}x_2$, получаемое из $3z_1^2 z_2$, его показатель равен $m+1$, а у остальных слагаемых строго больше этого числа, после сокращения на c^{m+1} показатель этого слагаемого будет равен 0, а у остальных не менее 1.

В третьем уравнении минимальный $\wp$-адический показатель будет у слагаемого $2c^{m+1}x_1$, получаемого из z_1^2, он будет равен $2m+1$, а у остальных не менее $2m+2$, после сокращения на c^{2m+1} соответственно 0 и не менее 1.

В четвёртом уравнении минимальный $\wp$-адический показатель будет у $2c^m x_3$, получаемого из $2c^{-1}z_1 z_3$, он равен $2m$, а у остальных слагаемых строго больше, после сокращения на c^{2m} соответственно 0 и не менее 1.

Наконец, в пятом уравнении минимальный $\wp$-адический показатель имеет слагаемое $2c^{m+1}x_5$, получаемое из $2z_1 z_5$. У него показатель равен $2m+1$, а у остальных не менее $2m+2$, после сокращения на c^{2m+1} соответственно 0 и не менее 1.

Покажем, что после такой замены и сокращения получим гладкую схему. В общем виде её матрицу Якоби можно записать как $J = (j_{uv})$, $u = \overline{1,5}$, $v = \overline{1,6}$. Так как размерность схемы X равна 2, а размерность аффинного пространства, в которое она вкладывается, равна 6, для вычисления дефекта гладкости необходимо рассматривать миноры 4-го порядка в J. Один из этих миноров $\Delta = \begin{vmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{15} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{25} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{45} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{55} \end{vmatrix}$ обладает следующими свойствами. В силу вышесказанного в матрице, определителем которой является минор Δ, $\wp$-адический показатель элементов j_{11}, j_{22}, j_{43}, j_{55} равен 0, а остальных строго больше 0, так как все 4 указанных элемента имеют вид $1+P_{uv}(x_1, ..., x_6)$, а остальные элементы имеют вид $P_{uv}(x_1, ..., x_6)$, где $P_{uv}(x_1, ..., x_6)$ — многочлен, все коэффициенты которого имеют $\wp$-адический показатель не менее 1. Так как при вычислении определителя одно слагаемое будет произведением указанных 4 элементов, а все остальные будут содержать в качестве сомножителя и хотя бы один из остальных элементов, получаем, что значение минора в произвольной точке $a = (x_1, ..., x_6)$ будет иметь $\wp$-адический показатель 0 независимо от значений переменных. Следовательно, полученная схема гладкая и для этого случая модель Нерона построена.

Остаётся рассмотреть случай $\pi \mid 3$ (тогда $\pi \nmid 2$). Рассуждение аналогично только что рассмотренному случаю со следующими отличиями. Теперь второе уравнение можно сократить на a, после чего редукция будет задаваться следующими уравнениями:

$$\begin{cases} z_1^3 = 1, \\ z_2^3 + \overline{3a^{-1}}z_1^2 z_2 - \overline{4ba^{-1}}z_1 z_2 z_3 - \overline{2ba^{-1}}z_1^2 z_4 + \overline{ba^{-1}}z_2 z_3^2 + \overline{2ba^{-1}}z_1 z_3 z_4 = 0, \\ z_1^2 = 1, \\ \overline{2c^{-1}}z_1 z_3 = 0, \\ z_3^2 + \overline{2}z_1 z_5 = 0. \end{cases}$$

Нильпотенты вида $(z_1 - 1)^3 = 0$ и $(z_1 - 1)^2 = 0$, как и ранее, не могут возникнуть, возникает нильпотент вида $z_2^3 = 0$ (при условии $\nu_\wp(3) > 1$, $\nu_\wp(b) > 1$). Этот нильпотент соответствует особенности вида α_3. Положим $\nu_\wp(3) = m \in \mathbb{N}$, тогда $3 = r_3 c^m$, где $r_3 \in \mathcal{O}_k$, $\nu_\wp(r_3) = 0$. Проведём сглаживание в точке $a = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, которая удовлетворяет условиям особых точек. Проводим замену следующего вида:

$$\begin{cases} z_1 = c^t x_1 + 1, \\ z_i = c^t x_i, i = \overline{2, 6}. \end{cases}$$

Здесь $t \in \mathbb{N}$ — параметр. Положим $t = m + 1$. Обоснуем результат замены переменных и сокращения в общем виде.

В первом уравнении минимальный $\wp$-адический показатель может быть либо у слагаемого $3c^{m+1}x_1$, получаемого из z_1^3, либо у слагаемого $2bc^{m+1}x_3$, получаемого из $2bz_1^2z_3$. Обозначим $\wp$-адический показатель элемента b через v, тогда показатель первого из указанных слагаемых равен $2m+1$, второго $m+v$, а у остальных не менее $2m+2$. Тогда если $v > m+1$, то минимальный показатель у первого из указанных слагаемых и уравнение можно сократить максимум на c^{2m+1}, если $v < m+1$, то у второго и уравнение можно сократить на c^{m+v}, а если $2m+1 = m+v$, то показатели указанных слагаемых равны и уравнение можно сократить на c^{2m+1}. В любом случае после сокращения у одного или обоих указанных слагаемых $\wp$-адический показатель будет 0, а у остальных слагаемых не менее 1.

Во втором уравнении минимальный $\wp$-адический показатель может быть либо у слагаемого $3a^{-1}c^{m+1}x_2$, получаемого из $3a^{-1}z_1^2z_2$, либо у $2a^{-1}bc^{m+1}x_4$, получаемого из $2a^{-1}bz_1^2z_4$. По аналогии с предыдущим уравнением показатель первого из указанных слагаемых равен $2m+1$, второго $m+v$, а у остальных слагаемых не менее $2m+2$. Дальнейшее рассуждение аналогично предыдущему уравнению. В любом случае после сокращения у одного или обоих указанных слагаемых $\wp$-адический показатель будет равен 0, а у остальных слагаемых не менее 1.

В третьем уравнении минимальный $\wp$-адический показатель будет у слагаемого $2c^{m+1}x_1$, получаемого из z_1^2, он равен $m+1$, а у остальных не менее $m+2$, после сокращения на c^{m+1} соответственно 0 и не менее 1.

В четвёртом уравнении минимальный показатель будет у $2c^{m+1}x_3$, получаемого из $2z_1z_3$, он равен $m+1$, а у остальных слагаемых строго больше, после сокращения на c^{m+1} соответственно 0 и не менее 1.

В пятом уравнении минимальный показатель у слагаемого $2c^{m+1}x_5$, получаемого из $2z_1z_5$, он равен $m+1$, а у остальных не менее $m+2$, после сокращения на c^{m+1} соответственно 0 и не менее 1.

Покажем, что после проведённых преобразований полученная схема будет гладкой. Как и для случая $\pi \mid 2$, в общем виде её матрицу Якоби можно записать как $J = (j_{uv})$, $u = \overline{1,5}$, $v = \overline{1,6}$, для вычисления дефекта гладкости необходимо рассматривать миноры 4-го порядка в J. Рассмотрим случай $2m+1 \leqslant m+v$ (то есть $m \leqslant v-1$). Покажем, что минор $\Delta = \begin{vmatrix} j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{25} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{35} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{45} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{55} \end{vmatrix}$ всегда будет иметь $\wp$-адический показатель 0. В силу вышесказанного в матрице, определителем которой является минор Δ, $\wp$-адический показатель элементов j_{22}, j_{31}, j_{43}, j_{55} равен 0, а остальных строго больше 0. Дальнейшее доказательство аналогично случаю $\pi \mid 2$, получаем, что значение минора в произвольной точке $a = (x_1, ..., x_6)$ будет иметь $\wp$-адический показатель 0 независимо от значений переменных. В оставшемся случае $m > v-1$ необходимо аналогичным образом рассмотреть минор $\Delta_1 = \begin{vmatrix} j_{21} & j_{23} & j_{24} & j_{25} \\ j_{31} & j_{33} & j_{34} & j_{35} \\ j_{41} & j_{43} & j_{44} & j_{45} \\ j_{51} & j_{53} & j_{54} & j_{55} \end{vmatrix}$. Таким образом, для всех случаев доказано, что полученная схема гладкая, следовательно, она является моделью Нерона тора T.

10) Так же как между рассмотренными ранее случаями 8) и 6), различие между данным случаем и случаем 9) только в структуре расширения L/k (его группа Галуа теперь должна быть циклической). Процесс построения модели Воскресенского и её сглаживания до получения модели Нерона без изменений переносится на данный случай со случая 9).

У торов каждого из оставшихся типов 11), 12), 13) все базисные элементы $\hat{T}$ с помощью действия группы Галуа G могут быть выражены через некоторый базисный характер χ_1, имеющий нетривиальный стабилизатор относительно действия G. Это означает, что χ_1 имеет разложение с коэффициентами из $k[T]$ над некоторым подполем $L_1 \subset L$ таким, что $[L_1 : k] = |G|/|\mathrm{Stab}\ \chi_1|$. Правда, расширение L_1/k может само не быть нормальным, однако конструкция аффинной реализации на нём может быть задана с помощью действия на характеры универсальной группы Галуа $\mathrm{Gal}(k_s/k)$, где k_s — сепарабельное замыкание k. Известно (см. [4]), что аффинная реализация торов такого вида, а значит, и их модели Воскресенского и Нерона аналогичны по конструкции тем же объектам для двумерных торов с основным полем k и полем разложения $\tilde{L}_1$ таких, что $[\tilde{L}_1 : k] = [L_1 : k]$, то есть в нашем случае торов соответственно типов 5), 6), 9), и их построение аналогично рассмотренному для указанных типов торов.

Глава 3. Целые модели алгебраических торов над полями алгебраических чисел

3.1. Каноническая и стандартная целые модели алгебраического тора над полем алгебраических чисел

Возникает вопрос, как можно обобщить конструкцию модели Воскресенского на случай глобального поля. Мы сосредоточим своё внимание на случае, когда k и L — поля алгебраических чисел. Набросок рассуждения, приводящего к определению необходимого объекта, приводится в [4], проведём это рассуждение в более развёрнутом виде.

Пусть в условиях тех же обозначений, что и в главе 2, k и L — поля алгебраических чисел, $\mathcal{O}_k$ и $\mathcal{O}_L$ — соответственно их кольца целых. Далее, пусть $\wp \lhd \mathcal{O}_k$, $\mathfrak{P} \lhd \mathcal{O}_L$ — простые идеалы, $\mathfrak{P}|\wp$. Для каждой такой пары простых идеалов можно рассмотреть расширение локальных полей $L_\mathfrak{P}/k_\wp$, где $k_\wp$ и $L_\mathfrak{P}$ — пополнения соответственно полей k и L по $\wp$-адическому и $\mathfrak{P}$-адическому показателю (известно (см. [13]), что $L_\mathfrak{P}$ также может быть задано как минимальное расширение $k_\wp$, содержащее L). Заметим, что если L/k — расширение Галуа с группой G, то $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ — расширение Галуа с группой $G_\wp$, которая является подгруппой G, но, вообще говоря, может не совпадать с ней.

Далее, рассмотрим тор $T_\wp = T \otimes_k k_\wp$. Как и ранее, G-модуль $\hat{T}$ является группой характеров для тора T, тогда $\hat{T}$, рассматриваемый как $G_\wp$-модуль, является модулем рациональных характеров для $T_\wp$. Тогда для тора $T_\wp$, заданного парой $\hat{T}$ и $L_\mathfrak{P}/k_\wp$, можно построить модель Воскресенского, соответствующую определению 1.6, получив при этом алгебру Хопфа, обозначим её $B_\wp = A_\wp(\hat{T})$. Саму целую модель Воскресенского тора $T_\wp$ обозначим $X_\wp = \mathrm{Spec}\ B_\wp$. Из определения модели Воскресенского следует, что $B_\wp \subset L_\mathfrak{P}[\hat{T}]^{G_\wp} \cong k_\wp[T]$. Причём кольцо инвариантов $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L[\hat{T}]^G)$ является $\mathcal{O}_k$-формой T, так как $Y \otimes_{\mathcal{O}_k} k \cong T$, и для всех точек $\wp$, неразветвлённых в L, выполняется соотношение $X_\wp = Y_\wp$

(см. [4]). Теперь для каждого простого идеала $\wp \lhd \mathcal{O}_k$ обозначим $C_\wp = B_\wp \cap k[T]$ и рассмотрим $C = \cap_\wp C_\wp$. Поясним строение этого объекта.

Как говорилось ранее в главе 1, $B_\wp = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{uv}^{(\wp)}, y_{uv}^{(\wp)}]$, где $x_{uv}^{(\wp)}, y_{uv}^{(\wp)}$ — координаты при разложении базисных элементов $\hat{T}$ и обратных им по целому базису $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ (обозначим его $\{\omega_v^{(\wp)}\}$, $v = \overline{1,m}$, где $m = [L_\mathfrak{P} : k_\wp]$). Аналогично $k[T] \cong k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} — координаты при разложении базисных и обратных им характеров по базису $\{\omega_j\}$, $j = \overline{1,n}$ расширения L/k. Таким образом (см. [4]), C является алгеброй Хопфа над $\mathcal{O}_k$. Наконец, из конструкции C следует, что $\mathcal{O}_L[\hat{T}]^G \subset C$, поэтому схема $X = \operatorname{Spec} C$ является $\mathcal{O}_k$-формой (то есть целой моделью) T.

Определение 3.1. Аффинную групповую схему $X = \operatorname{Spec} C$ будем называть канонической целой моделью тора T, определённого над полем алгебраических чисел k.

Основным недостатком такой модели является то, что определение само по себе не даёт способа построения требуемой алгебры Хопфа, в отличие от определения стандартной целой модели над локальным полем. Так как известно, что не всякое расширение полей алгебраических чисел обладает целым базисом, то непосредственный перенос конструкции стандартной целой модели со случая локального поля на случай поля алгебраических чисел был, вообще говоря, невозможен. Однако позднее в работе [17] М. В. Бондарко был получен следующий результат. Пусть L/k — произвольное расширение полей алгебраических чисел. Тогда существует такое конечное нормальное расширение F/L, что F имеет целый базис над k. Применительно к нашему случаю F можно считать некоторым (не обязательно минимальным) полем разложения T. Это позволяет дать конструктивное определение ещё одной целой модели алгебраического тора над полем алгебраических чисел (впервые оно было предложено в работе [5]).

Определение 3.2. Пусть в условиях тех же обозначений, что в определении 3.1, L — такое поле разложения T, что существует целый базис L над k. Стандартной целой моделью T называется $\mathcal{O}_k$-схема вида $X' = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} — координаты при разложении базисных элементов модуля $\hat{T}$ и обратных им по целому базису L/k.

Как стандартную, так и каноническую модель можно считать обобщением конструкции стандартной целой модели для алгебраических торов, определённых над локальными полями, на случай глобального поля. Их алгоритм построения следует из алгоритма для случая локального поля.

Возникает задача сравнения канонической и стандартной целых моделей произвольного тора, определённого над полем алгебраических чисел. Вопрос о том, в каких случаях они представляют собой один и тот же объект, будет рассмотрен и решён в данной главе.

Далее объясним, почему построение одной из рассмотренных целых моделей (стандартной или канонической) алгебраического тора позволяет построить модель Нерона этого тора.

3.2. Построение модели Нерона алгебраического тора над полем алгебраических чисел

Способ построения модели Нерона, который, как уже говорилось выше, не следует непосредственно из её определения, был впервые описан в [18]. В интересующем нас аффинном случае он состоит в том, что модель Нерона может быть получена за конечное число шагов (называемых вместе процессом сглаживания) путём последовательных дилатаций в особых точках специального слоя из некоторой целой модели того же тора. Позднее в [19] и [22] было доказано, что для случая локального поля в качестве такой модели может использоваться модель Воскресенского рассматриваемого алгебраического тора над локальным полем, о построении модели Нерона на её основе мы рассказали в пункте 2.2.

В [18] говорится и о построении модели Нерона над глобальным полем характеристики 0 (в нашем случае это условие выполнено). А именно, доказано следующее. Если рассматривать алгебраический тор T и его модель Нерона X как схемы в общем смысле теории схем, а модели Нерона $X_{\mathcal{O}_k}$ тора T_k, определённого над глобальным полем k, и $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$ каждого тора $T \otimes_k k_\wp$, определённого над локальным полем $k_\wp$ — как слои этих схем над соответствующими полями и их кольцами целых, то $X_{\mathcal{O}_k}$ является моделью Нерона тора T_k тогда и только тогда, когда каждая $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$ является моделью Нерона тора $T \otimes_k k_\wp$. Это даёт следующий алгоритм построения модели Нерона для T_k.

Каноническая целая модель тора T_k по определению есть схема $X = \text{Spec } C$, где $C = \bigcap\limits_{\wp \lhd \mathcal{O}_k} C_\wp$, $\wp$ — простые идеалы кольца $\mathcal{O}_k$, при этом $C_\wp = B_\wp \cap k[T]$, где $X_\wp = \text{Spec } B_\wp$ — модели Воскресенского торов $T_\wp = T_k \otimes_k k_\wp$. Для каждого тора $T_\wp$ можно построить его модель Нерона вида $\tilde{X}_\wp = \text{Spec } \tilde{B}_\wp$. Если после этого к X применить процесс сглаживания, то есть все преобразования, использованные при построении моделей Нерона $\tilde{X}_\wp$, получим объект вида $\tilde{X} = \bigcap\limits_{\wp \lhd \mathcal{O}_k} \tilde{C}_\wp$, где $\tilde{C}_\wp = \tilde{B}_\wp \cap k[T]$ (такое задание корректно, так как $C_\wp \subset \tilde{C}_\wp \subset k_\wp[T_\wp]$). По построению для $\tilde{X}$ слой над каждым локальным полем $k_\wp$ будет моделью Нерона тора $T_\wp$, поэтому сама модель $\tilde{X}$ будет моделью Нерона тора T_k.

Подобный алгоритм имеет тот недостаток, что в результате невозможно получить явное задание полученной модели Нерона, так как такое задание неизвестно для канонической модели Воскресенского. Поэтому возникает идея использовать вместо неё стандартную целую модель Воскресенского из определения 3.2. Однако имеет место следующее препятствие. Если снова рассматривать целую модель X как схему, слоями которой являются $X_{\mathcal{O}_k}$ над кольцом целых поля алгебраических чисел и $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$ над кольцами целых локальных полей, то в случае стандартной модели, в отличие от канонической, $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}} = \text{Spec } A'(\hat{T})$, где $A'(\hat{T}) = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$. То есть из задания $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$, вообще говоря, не следует, что они являются моделями Воскресенского торов $T_\wp$. Поэтому требуется доказать, что они подходят в качестве начальных схем для построения моделей Нерона торов $T_\wp$.

Сформулированное в [19] достаточное условие, которому должна для этого удовлетворять аффинная схема X, состоит в том, что её группа $\mathcal{O}_{k_\wp}$-точек $X(\mathcal{O}_{k_\wp})$ должна совпадать с максимальной компактной подгруппой группы $k_\wp$-точек тора T (обозначим её $U \subset T(k_\wp)$). Схема вида $X'_{\mathcal{O}_{k_\wp}} = \mathrm{Spec}\ A'(\hat{T})$ обладает этим свойством, что будет доказано вместе с другими свойствами стандартной модели Воскресенского и соответствующих ей моделей над локальным полем в следующих пунктах данной главы.

3.3. Свойства стандартной целой модели алгебраического тора над полем алгебраических чисел

Докажем несколько используемых в дальнейшем свойств стандартной целой модели над полем алгебраических чисел. Как будет показано далее, они в значительной степени повторяют свойства модели Воскресенского над локальным полем, подробно изученные в [22], хотя их доказательство придётся модифицировать.

С этого момента для краткости изменим использовавшиеся обозначения. Далее в данной работе будем обозначать через X стандартную целую модель алгебраического тора T над полем алгебраических чисел k, через $A(\hat{T})$ — алгебру Хопфа, спектром которой является схема X, а через $X_\wp$ — индуцируемые ей модели над локальными полями.

Вначале докажем свойство замкнутых вложений для стандартной целой модели над полем алгебраических чисел, аналогичное свойству модели Воскресенского над локальным полем.

Предложение 3.1. *Пусть S, T — k-торы, разложимые над полем L (здесь k и L — поля алгебраических чисел). Пусть $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ и существует G-*

эпиморфизм $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$ (он индуцирует вложение самих торов $\alpha : T \to S$, эпиморфизм групповых колец $\beta_L : L[\hat{S}] \to L[\hat{T}]$ и эпиморфизм колец регулярных функций $\beta_k : k[S] \to k[T]$). Пусть $Y = \mathrm{Spec}\ A(\hat{S})$ и $X = \mathrm{Spec}\ A(\hat{T})$ — стандартные целые модели торов S и T соответственно. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $A(\hat{T}) = (A(\hat{S})/I)$, где $I = A(\hat{S}) \cap \mathrm{Ker}\, \beta_k$;

2) $I = A(\hat{S}) \cap J$, где J — идеал в алгебре Хопфа $k[S]$, порождённый элементами $(x_{ij} - c_j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $I \equiv J$ по модулю $\wp$-кручения.

Доказательство. Доказательство утверждения 1) дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для стандартной целой модели алгебраического тора над локальным полем, рассмотренное в работе [22]. Докажем утверждение 2).

Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathrm{Ker}\ \beta_L$, он может быть некоторым образом представлен в виде $a = \sum_i a_i\zeta_i$, где $\zeta_i \in \hat{S}$, $a_i \in L$ (записанная сумма не обязательно конечная). Отсюда выполняется следующее равенство: $0 = \beta_L(a) = \beta_L(\sum_i a_i\zeta_i) = \sum_i a_i\beta_L(\zeta_i)$. Выделим во множестве $\{\zeta_i\}$ подмножества, соответствующие одинаковым значениям $\beta_L(\zeta_i)$, и на их основе перенумеруем ζ_i двойными индексами вида ζ_{ij} так, что для любых i, j_1, j_2 выполняется $\beta_L(\zeta_{ij_1}) = \beta_L(\zeta_{ij_2}) = \xi_i$. Тогда предыдущее равенство принимает вид $0 = \sum_i(\sum_j a_{ij})\xi_i$. Так как при эпиморфизме линейно независимые элементы переходят в линейно независимые (а теперь они сгруппированы так, что все ξ_i различны), то из этого следует, что для всех i выполняется $\sum_j a_{ij} = 0$.

Имеющееся выражение для a можно преобразовать следующим образом: $a = \sum_i \sum_j a_{ij}\zeta_{ij} = \sum_i \zeta_{i1}(\sum_j a_{ij}\zeta_{ij}\zeta_{i1}^{-1})$. Поскольку $\beta_L(\zeta_{i1})\beta_L(\zeta_{i1}^{-1}) = \beta_L(\zeta_{i1}\zeta_{i1}^{-1}) = 1$, то $\beta(\zeta_{i1}^{-1}) = \xi_i^{-1}$, следовательно, получаем $\beta_L(\zeta_{ij}\zeta_{i1}^{-1}) = \beta_L(\zeta_{ij})\beta_L(\zeta_{i1}^{-1}) = \xi_i\xi_i^{-1} = 1$, отсюда $\zeta_{ij}\zeta_{i1}^{-1} \in \mathrm{Ker}\ \beta$.

Так как доказано, что $\sum_j a_{ij} = 0$, то $a_{i1} = -\sum_{j\geqslant 2} a_{ij}$. Тогда можно записать $\sum_j a_{ij}\zeta_{ij}\zeta_{i1}^{-1} = a_{i1} + \sum_{j\geqslant 2} a_{ij}\zeta_{ij}\zeta_{i1}^{-1} = -\sum_{j\geqslant 2} a_{ij} + \sum_{j\geqslant 2} a_{ij}\zeta_{ij}\zeta_{i1}^{-1} = \sum_{j\geqslant 2} a_{ij}(\zeta_{ij}\zeta_{i1}^{-1} - 1)$.

Очевидно, что для произвольного элемента $\zeta \in \mathrm{Ker}\ \beta$ можно утверждать, что $(\zeta - 1) \in \mathrm{Ker}\ \beta_L$, тогда с учётом предыдущего соотношения $\mathrm{Ker}\ \beta_L$ является идеалом Хопфа, порождённым над L элементами вида $\zeta - 1$, где $\zeta \in \mathrm{Ker}\ \beta$.

Продолжим рассмотрение структуры $\mathrm{Ker}\ \beta_L$. Пусть $\chi_1, ..., \chi_m$ — базис $\mathrm{Ker}\ \beta$ как G-модуля, $\chi = \chi_1^{a_1}\chi_2^{a_2}...\chi_m^{a_m}$, $a_i \in \mathbb{Z}$ — разложение по этому базису произвольного характера $\chi \in \mathrm{Ker}\ \beta$. Так как нас интересует случай нетривиального элемента, то есть $\chi \neq 1$, то существует такое i, что $a_i \neq 0$. С точностью до обозначения можем считать, что $a_1 \neq 0$. Элемент $(\chi - 1) \in \mathrm{Ker}\ \beta_L$ можно представить в виде $\chi - 1 = \chi_1^{a_1}\chi_2^{a_2}...\chi_m^{a_m} - 1 = \chi_1^{a_1}(\chi_2^{a_2}...\chi_m^{a_m} - 1) + (\chi_1^{a_1} - 1)$. Если $a_1 > 0$, то можно выразить $\chi_1^{a_1} - 1 = (\chi_1 - 1)(\chi_1^{a_1-1} + \chi_1^{a_1-2} + ... + 1)$, если $a_1 < 0$, то $\chi_1^{a_1} - 1 = (\chi_1^{-1} - 1)(\chi_1^{a_1+1} + \chi_1^{a_1+2} + ... + 1) = -\chi_1^{-1}(\chi_1 - 1)(\chi_1^{a_1+1} + \chi_1^{a_1+2} + ... + 1)$. Повторяя процесс для всех $a_i \neq 0$, получаем, что $\mathrm{Ker}\ \beta_L$ как идеал Хопфа порождено над L элементами вида $\chi_i - 1$, $i = \overline{1, m}$.

Пусть теперь $\chi \in \hat{S}$ — произвольный характер и $\xi = \beta(\chi)$. Тогда при замене χ его разложением по базису L/k имеет место выражение $\xi = \beta(f_1\omega_1 + ... + f_n\omega_n) = \beta(f_1)\omega_1 + ... + \beta(f_n)\omega_n$, где $f_i \in L[\hat{S}]^G$, а значит, $\beta(f_i) \in L[\hat{T}]^G$. Следовательно, это выражение является разложением по тому же базису L/k характера $\xi = \beta(\chi)$, то есть коэффициенты при разложении характера χ под действием β переходят в координаты при разложении $\beta(\chi)$.

Пусть $\mathrm{rk}\ \hat{T} = d$, тогда $\mathrm{rk}\ \hat{S} = m + d$ и для $\hat{S}$ можно выбрать такой базис $\chi_1, ..., \chi_{m+d}$, что $\beta(\chi_1) = ... = \beta(\chi_m) = 1$, $\beta(\chi_{m+i}) = \xi_i$, $i = \overline{1, d}$, где $\{\xi_i\}$ — базис $\hat{T}$. При этом в силу предыдущего замечания образующие колец $A(\hat{S})$ и $k[S]$, получаемые при разложении характеров из базиса $\{\chi_j\}$, переходят в образующие колец $A(\hat{T})$ и $k[T]$, получаемые при разложении характеров из базиса $\{\xi_i\}$. Поэтому эпиморфизм β определяет также связанные с ним гомоморфизмы

$\beta_k : k[S] \to k[T]$ и $\beta_{\mathcal{O}_k} : A(\hat{S}) \to A(\hat{T})$.

Пусть разложение по базису L/k базисных характеров χ_i, $i = \overline{1,m}$ имеет вид $\chi_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}\omega_j$, а разложение $1_L \in L[\hat{S}]$ имеет вид $1 = \sum_{j=1}^n c_j\omega_j$, причём $x_{ij} \in \mathcal{O}_k$, $c_j \in \mathcal{O}_k$, так как базис $\{\omega_j\}$ целый. Тогда для любого характера вида $(\chi_i - 1) \in \mathrm{Ker}\ \beta_L$ имеет место следующее равенство: $0 = \beta_L(\chi_i - 1) = \beta_L(\sum_{j=1}^n x_{ij}\omega_j) - \beta_L(\sum_{j=1}^n c_j\omega_j) = \sum_{j=1}^n \beta_L(x_{ij} - c_j)\omega_j = \sum_{j=1}^n \beta_k(x_{ij} - c_j)\omega_j$. Это равносильно тому, что для всех $j = \overline{1,n}$ выполняется $(x_{ij} - c_j) \in \mathrm{Ker}\beta_k \subset \mathrm{Ker}\beta_L$.

Из того же равенства следует, что образующие идеала $\mathrm{Ker}\ \beta_L$ вида $\chi_i - 1$, $i = \overline{1,m}$ можно выразить через элементы $(x_{ij} - c_j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ линейно над $\mathcal{O}_L$. Тогда в качестве образующих $\mathrm{Ker}\ \beta_L$ можно взять эти элементы. Причём они будут G-инвариантны, так как являются также элементами $\mathrm{Ker}\ \beta_k$.

Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathrm{Ker}\ \beta_k$. Так как $\mathrm{Ker}\ \beta_k \subset \mathrm{Ker}\ \beta_L$, то $a \in \mathrm{Ker}\ \beta_L$. Пусть его выражение через ранее выбранные образующие имеет вид $a = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - c_j) f_{ij}$, где $f_{ij} \in L[\hat{S}]$. Дополним $1 \in k$ до базиса L/k. Полученный базис может не совпадать с базисом ω_j и не быть целым, но разложение по нему для элементов $L[\hat{S}]$ существует. Обозначим этот базис через η_j. Раскладывая f_{ij} по выбранному базису, получим для элемента a выражение вида $a = \sum_{l=1}^n (\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - c_j)) f_{ij}^{\,l} \eta_l$, где $f_{ij}^{\,l} \in k[S]$. С точностью до обозначения можем считать, что $\eta_1 = 1$. Тогда так как $a \in \mathrm{Ker}\ \beta_k$, то в разложении a ненулевым будет единственный компонент, соответствующий η_1. В таком случае $a = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - c_j)) f_{ij}^{\,1} \eta_1$. В силу произвольности a получаем, что $\mathrm{Ker}\ \beta_k$ как идеал Хопфа в алгебре $k[S]$ порождено элементами вида $x_{ij} - c_j$.

Интересующий нас идеал I при этом имеет вид $I = A(\hat{S}) \cap \mathrm{Ker}\ \beta_k$. Предложение доказано.

Свойство замкнутых вложений позволяет исследовать алгебраические торы над полями алгебраических чисел и их стандартные целые модели с помощью задания подходящего тора S и эпиморфизма β аналогично тому, как это описывалось в главе 2 для случая локального поля.

Далее построим стандартную целую модель квазиразложимого алгебраического тора специального вида над полем алгебраических чисел.

Пусть T — квазиразложимый тор вида $T = R_{F/k}(G_m)$, где $k \subset F \subset L$ — поля алгебраических чисел. Тогда в группе характеров $\hat{T}$ базис $\chi_1, ..., \chi_d$, где $d = \mathrm{rk}\,\hat{T}$, можно выбрать пермутационным, поэтому далее можем считать, что он пермутационный. Пусть $G_1 \subset G$ — стабилизатор базисного характера χ_1. Тогда $\hat{T} \cong \mathbb{Z}[G/G_1]$, $F = L^{G_1}$ и характер χ_1 может быть разложен по базису расширения F/k (все эти условия следуют из свойств аффинной реализации алгебраического тора, более подробно см. [22]). Структура стандартной целой модели тора T описывается следующим утверждением.

Предложение 3.2. *В условиях введённых ранее обозначений стандартная целая модель простейшего квазиразложимого тора $T = R_{F/k}(G_m)$ есть схема $X = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_1, x_2, ..., x_n, y^{-1}]$, где $n = [L : k]$, y — некоторая форма степени n от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.*

Доказательство. Так как базис $\hat{T}$ выбран пермутационным, все базисные характеры выражаются через χ_1 в виде $\chi_i = \chi_1^{\delta_i}$, $\delta_i \in G_1$, следовательно, если $\chi_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j \omega_j$, где $\{\omega_j\}$ — какой-либо целый базис L/k, то $\chi_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \omega_j^{\delta_i}$. Заменяя каждый коэффициент $\omega_j^{\delta_i} \in L$ его разложением по базису L/k, получаем, что коэффициенты при разложении по базису всех χ_i, $i \neq 1$, полиномиально выражаются через коэффициенты χ_1. Аналогично коэффициенты всех χ_i^{-1} выражаются через коэффициенты χ_1^{-1} из разложения $\chi_1^{-1} = \sum_{j=1}^{n} y_j \omega_j$. Следовательно, целая модель T имеет вид $X = \mathrm{Spec}\ A(\hat{T})$, где $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_j, y_j]$. Однако остаётся вопрос, выражаются ли коэффициенты χ_1^{-1} через коэффициенты χ_1. Рассмотрим характер $\chi = \chi_1 \chi_2 ... \chi_d$, где $d = \dim T = \mathrm{rk}\,\hat{T}$. Так как G действует на базисе $\hat{T}$ перестановками, то очевидно, что $\chi \in (\hat{T})^G$.

Из известного соотношения $L[\hat{T}] = \bigoplus_{i=1}^{n} (L[\hat{T}]^G \omega_i)$ следует, что $\chi = \sum_{i=1}^{n} f_i \omega_i$, где $f_i \in k[T]$. В частности, этот базис можно выбрать так, чтобы $\omega_1 = 1$, тогда $\omega_i \notin k$, $i > 1$ (возможно, выбранный базис не будет целым, но здесь это несущественно). Вместе с условием $\chi \in (\hat{T})^G$ это означает, что $\chi = f_1 \cdot 1$. Пусть теперь $\{\xi_i\}$ — целый базис L/k. Элемент $1 = 1_L = 1_k$ имеет некоторое разложение по этому базису: $1 = \sum_{i=1}^n c_i\xi_i$, причём $\forall i = \overline{1,n}$ $c_i \in \mathcal{O}_k$, так как базис $\{\xi_i\}$ целый. Отсюда $\chi = f_1 \sum_{i=1}^n c_i\xi_i = \sum_{i=1}^n f_1 c_i \xi_i$. Причём, так как это разложение χ по целому базису L/k, выполняется условие $f_1 c_i \in A(\hat{T})$ $\forall i = \overline{1,n}$. Если бы при этом имело место $f_1 \notin A(\hat{T})$, то есть $f_1 = gh^{-1}$, $g \in A(\hat{T})$, $h \in \mathcal{O}_k$, то должно было бы выполняться $h \mid c_i$ $\forall i = \overline{1,n}$, но это невозможно, так как c_i являются коэффициентами при разложении элемента 1 по базису L/k и поэтому взаимно просты в совокупности. Следовательно, $f_1 \in A(\hat{T})$. Так как элемент 1 обратен сам себе в L, то можем записать $f_1 = \chi \cdot 1$, так как оба сомножителя полиномиально выражаются через $\{x_j\}$ над L, то f_1 является некоторой формой от переменных x_j. В силу того, что $\chi \in \hat{T}$, имеет место аналогичное разложение для обратного характера: $\chi^{-1} = g_1 \sum_{i=1}^n c_i\xi_i$, $g_1 \in A(\hat{T})$. Если после этого рассмотреть очевидное равенство $\chi_1^{-1} = \chi_2\chi_3...\chi_d\chi^{-1}$, то его можно переписать в виде $\sum_{j=1}^n y_j\xi_j = (\prod_{i=2}^d (\sum_{j=1}^n x_j \xi_j^{\delta_i})) \cdot g_1 \cdot (\sum_{i=1}^n c_i\xi_i)$. Раскрыв скобки и заменив сомножители $\xi_j^{\delta_i}\xi_i$ их разложением по базису, получаем, что все y_j полиномиально выражаются через образующие x_j, $j = \overline{1,n}$, и g_1. Обозначив $f_1 = y$, $g_1 = y^{-1}$, можем окончательно записать $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[x_1, x_2, ..., x_n, y^{-1}]$. Предложение доказано.

Замечание 3.1. Вновь вернёмся к слою $X_\wp = X \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_k} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_\wp}$. Утверждения предложений 3.1 и 3.2 выполняются также и для целых моделей вида $X_\wp = \operatorname{Spec} A_\wp(\hat{T})$, где $A_\wp(\hat{T}) = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$, так как $\mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}] = \mathcal{O}_{k_\wp} \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$. Те отличия, что ω_j в расширениях локальных полей является не базисом, а системой образующих, и что относительно действия $G_\wp$ на $\hat{T}$ по сравнению с действием G на $\hat{T}$ каждой орбите сооответствует некоторое дизъюнктное объединение орбит, как можно проверить, не меняют доказательство, так как эти отличия в структуре $\hat{T}$ нигде не используются.

Теперь мы можем ответить на вопрос о совпадении канонической и стандартной целых моделей произвольного алгебраического тора над полем алгебраических чисел. Необходимое рассуждение будет проведено в следующем пункте (при этом также будет доказано свойство целых моделей, требуемое для построения модели Нерона).

3.4. Совпадение канонической и стандартной моделей

Докажем сформулированное ранее утверждение о том, что для произвольного тора, определенного над полем алгебраических чисел, его каноническая и стандартная целые модели совпадают. Вначале зафиксируем используемые обозначения и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $S = R_{F/k}(G_m)$ — простейший квазиразложимый тор, определённый над полем k, являющимся полем алгебраических чисел, и имеющий поле разложения L, причём расширение L/k является расширением Галуа и имеет целый базис. Далее, пусть $G = \mathrm{Gal}(L/k)$, $[L : k] = n$, $F \subset L$, $[F : k] = m \leqslant n$. Заметим, что, вообще говоря, расширение F/k может не являться нормальным, если $F \neq L$. Пусть $k_\wp$ — пополнение основного поля k по некоторому $\wp$-адическому дискретному нормированию (обозначим его $\nu_\wp$); затем, $F_{\mathfrak{P}_i}$, $i = \overline{1, m_F}$ — все возможные пополнения F по продолжениям дискретного нормирования $\nu_\wp$ на F; наконец, $L_{\tilde{\mathfrak{P}}_j}$, $j = \overline{1, m_L}$ — все возможные пополнения L по продолжениям $\nu_\wp$ на L. Если $F \neq L$, то возможно, что $m_F < m_L$.

Пусть $\omega_1, ..., \omega_m$ — произвольный базис F/k, а $\omega_1, ..., \omega_n$ — базис L/k, до которого его можно дополнить (вообще говоря, также произвольный). Обозначим $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)} = F_{\mathfrak{P}_1} \oplus ... \oplus F_{\mathfrak{P}_{m_F}}$ и $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)} = L_{\tilde{\mathfrak{P}}_1} \oplus ... \oplus L_{\tilde{\mathfrak{P}}_{m_L}}$. Тогда известно (см. [2]), что $\hat{\omega}_1, ..., \hat{\omega}_m$, где $\hat{\omega}_i = (\omega_i, ..., \omega_i)$ (содержит m_F компонентов), будет базисом $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ как векторного пространства над $k_\wp$, аналогично $\hat{\omega}_1, ..., \hat{\omega}_n$, где

$\hat{\omega}_i = (\omega_i, ..., \omega_i)$ (содержит m_L компонентов) будет базисом $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}$ как векторного пространства над $k_\wp$ (выполнение указанных свойств следует из изоморфизма $F \otimes_k k_\wp \cong \bigoplus F_{\mathfrak{P}_i}$ и аналогичного для L). Причём $\sum_{j=1}^{m_F} [F_{\mathfrak{P}_i} : k_\wp] = [F : k]$ и аналогично $\sum_{j=1}^{m_L} [L_{\tilde{\mathfrak{P}}_i} : k_\wp] = [L : k]$. Более того, так как расширение L/k нормальное, то $\forall i = \overline{1, m}$ $[L_{\tilde{\mathfrak{P}}_i} : k_\wp] = n/m_L$ и все поля вида $L_{\tilde{\mathfrak{P}}_i}$ попарно $k_\wp$-изоморфны.

Лемма 3.1. Пусть $S_\wp = S \times \mathrm{Spec}\, k_\wp$, $S_{\mathfrak{P}_i} = R_{F_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp}(G_m)$, $S_{\mathfrak{P}} = S_{\mathfrak{P}_1} \times ... \times S_{\mathfrak{P}_{m_F}}$. Тогда $S_\wp \cong S_{\mathfrak{P}}$.

Доказательство.

Если $m_F = 1$, утверждение тривиально. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $m_F > 1$. Из конструкции торов $S_\wp$ и $S_{\mathfrak{P}}$ следует, что для них обоих основным полем является $k_\wp$. Далее, рассмотрим нормальное замыкание минимального расширения поля $k_\wp$, содержащего поле L. Оно, очевидно, будет полем разложения для $S_\wp$ (обозначим это поле $L_\wp$). Теперь рассмотрим нормальное замыкание расширения поля $k_\wp$, содержащего все поля $L_{\mathfrak{P}_i}$ (которые все равны $L_{\mathfrak{P}_1}$), оно очевидно, будет полем разложения для $S_{\mathfrak{P}}$ (обозначим это поле $L_{\mathfrak{P}}$). Но из такого задания следует, что полученные расширения $k_\wp$ совпадают, то есть $L_\wp = L_{\mathfrak{P}}$ (рассуждение выше показывает, что минимальные поля разложения указанных торов совпадают, но тогда, как легко проверить, любое поле разложения для $S_\wp$ является также полем разложения для $S_{\mathfrak{P}}$ и обратно, поэтому не требуется, чтобы в нашем случае $L_{\mathfrak{P}}$ было минимальным).

Так как основное поле и поле разложения у торов $S_\wp$ и $S_{\mathfrak{P}}$ одни и те же, теперь для выполнения утверждения леммы необходимо и достаточно (см. [2]), чтобы были изоморфны модули характеров рассматриваемых торов. Прежде чем перейти к рассмотрению модуля характеров тора $S_\wp$, напомним, какова конструкция модуля характеров тора S (обозначим его $\hat{S}$) и как она меняется при расширении поля констант до $k_\wp$. Известно (см. [2]), что конструкция $\hat{S}$

как группы при этом не меняется и все отличия в конструкции $\hat{S}$ как модуля связаны с действием групп Галуа соответствующих расширений полей.

Далее, известно (см. [2]), что базис модуля характеров $\hat{S}$ простейшего квазиразложимого тора можно выбрать пермутационным, тогда все базисные характеры могут быть выражены через любой один из них с помощью действия группы G. Пусть, например, $\chi_j = \chi_1^{\delta_j}$, $\delta_j \in G$, где $j = \overline{1,d}$, $\hat{S} = \langle \chi_1, ..., \chi_d \rangle$, $d = \mathrm{rk}\, \hat{S}$, $\delta_1 = \varepsilon$, где ε — тождественный характер.

Пусть α — какой-либо примитивный элемент поля F над k, $p_\alpha(x)$ — его минимальный многочлен. Так как расширение F/k сепарабельно, а L/k нормально и сепарабельно, то $p_\alpha(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \alpha_j)$, где α_j — корни $p_\alpha(x)$, причём все они различны, лежат в L и в совокупности порождают L над k (но не обязательно все корни лежат в F, так как F/k может не быть нормальным; условимся, что $\alpha_1 = \alpha \in F$). Известно, что любой элемент G переводит корень $p_\alpha(x)$ также в корень $p_\alpha(x)$, при этом $|G| = n$ и $d = m \leqslant n$, тогда можно установить соответствие между элементами группы G и базисными характерами модуля $\hat{S}$ следующим образом. Зафиксируем один корень α_1 минимального многочлена $p_\alpha(x)$ и один базисный характер χ_1, затем рассмотрим изоморфизм $L[\hat{S}] \cong L \otimes k[S] \cong \bigoplus_{i=1}^{n} k[S]\omega_i$, выполняющийся для любого алгебраического тора. В качестве $\{\omega_i\}$ возьмём степенной базис, состоящий из степеней элемента α_1. Тогда для χ_1 будем иметь разложение вида $\chi_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}\alpha_1^i$, $x_{i1} \in k[S]$. Каждый базисный характер χ_j можно представить как результат действия на χ_1 элемента $\delta_{1j} \in G$, переводящего α_1 в α_j, при этом $\delta_{11} = \varepsilon$ (но при $F \neq L$ взаимно однозначного соответствия между базисными характерами и элементами G, вообще говоря, не будет, так как на χ_1 могут одинаково действовать несколько элементов G). Так как тор S простейший квазиразложимый, то известно, что $d = [F : k] = m$ и $\forall j = \overline{1,d}\ \ \mathcal{O}_G(\chi_j) = \{\chi_1, ..., \chi_d\}$, то есть орбита каждого базисного характера χ_j состоит в точности из всех базисных характеров $\hat{S}$ (для краткости будем обозначать указанную орбиту $\mathcal{O}_G(\chi_1)$).

Так как мы условились, что $m_F > 1$, известно, что $[F_{\mathfrak{P}_i} : k_\wp] < [F : k]$ для любого $i = \overline{1, m_F}$. В таком случае многочлен $p_\alpha(x)$ приводим в $k_\wp[x]$. Рассмотрим корни многочлена $p_\alpha(x)$, лежащие в F. Каждый из них является примитивным элементом F над k и по заданию остаётся примитивным элементом и для соответствующего расширения $F_{\mathfrak{P}_i}$ над $k_\wp$. Но над $k_\wp$ минимальным для этого корня является уже некоторый многочлен $p^{(\mathfrak{P})}_{\alpha_i}(x)|p_\alpha(x)$. Известно (см. [2]), что существует взаимно однозначное соответствие между простыми идеалами $\mathfrak{P}_i$ (которые при этом находятся во взаимно однозначном соответствии с полями $F_{\mathfrak{P}_i}$) и неприводимыми множителями в разложении многочлена $p_\alpha(x)$ в $k_\wp[x]$. При этом каждый неприводимый множитель будет содержать хотя бы один примитивный элемент F над k. Обозначим это разложение $p_\alpha(x) = \prod_{i=1}^m p^{(\mathfrak{P})}_{\alpha_{t_i}}(x)$, тогда группа $G_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/k_\wp)$ (одна и та же, так как в силу сказанного ранее все расширения $F_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$ вкладываются в нормальные расширения, равные $L_{\mathfrak{P}}/k_\wp$) своим действием переводит друг в друга только базисные характеры, соответствующие корням одного и того же многочлена $p^{(\mathfrak{P})}_{\alpha_{t_i}}(x)$ (минимального многочлена одного из примитивных элементов поля $F_{\mathfrak{P}_i}$ над $k_\wp$). В силу ранее введённого биективного соответствия множество $\mathcal{O}_G(\chi_1)$ при этом принимает вид $\mathcal{O}_G(\chi_1) = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{O}_{G_{\mathfrak{P}}}(\chi_{t_i})$.

Теперь, когда действие группы $G_{\mathfrak{P}}$ на элементы модуля $\hat{S}_\wp$ установлено, определим тип тора $S_\wp$. Известно, что $\mathrm{rk}\ \hat{S}_\wp = \mathrm{rk}\ \hat{S}$ и действие элементов $G_{\mathfrak{P}}$ на базисные характеры из $\hat{S}_\wp$ такое же, как у соответствующих элементов G. Следовательно, тор $S_\wp$ остаётся квазиразложимым. Полученному выше разбиению множества базисных характеров $\mathcal{O}_G(\chi_1)$ в дизъюнктное объединение соответствует конструкция вида $S_\wp \cong S_{\wp_1} \times \ldots \times S_{\wp_m}$, где $S_{\wp_i}$ — торы, соответствующие $\mathcal{O}_{G_{\mathfrak{P}}}(\chi_{t_i})$ (полем разложения для всех их остаётся $L_{\mathfrak{P}}$). Наконец, известно, что действие $G_{\mathfrak{P}}$ внутри каждой из орбит переводит каждый базисный характер в каждый другой базисный, поэтому торы $S_{\wp_i}$ являются простейшими квазиразложимыми и утверждение леммы доказано.

Ранее введённая в рассмотрение $k_\wp$-алгебра $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ является прямой суммой локальных полей $F_{\mathfrak{P}_i}$, причём каждое расширение $F_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$, будучи расширением локальных полей, имеет целый базис. Базис алгебры $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ над полем $k_\wp$, полученный прямым произведением целых базисов полей $F_{\mathfrak{P}_i}$ над $k_\wp$, будем называть целым базисом. Отметим, что в $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ естественным образом выделяется целая подструктура — $\mathcal{O}_{k_\wp}$-алгебра $\bigoplus_i \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{P}_i}}$. Для этой алгебры целый базис $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ над $k_\wp$ является целым базисом как для $\mathcal{O}_{k_\wp}$-модуля. Аналогичным образом определим целый базис для $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}$ над $k_\wp$.

Лемма 3.2. Если $\{\omega_i\}$ — целый базис L/k, то и $\{\hat{\omega}_i\}$ — целый базис $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}/k_\wp$.

Доказательство.

Вначале докажем, что $\{\omega_i\}$ — целая система образующих для расширения локальных полей $L_{\mathfrak{P}}/k_\wp$. Из того, что по заданию $L_{\mathfrak{P}}$ порождено над $k_\wp$ всеми элементами L, а $L = k(\omega_1, ..., \omega_n)$, следует, что любой элемент $a \in L_{\mathfrak{P}}$ может быть представлен в виде суммы $a = \sum_{i=1}^n a_i\omega_i$. Осталось доказать, что система образующих $\{\omega_i\}$ целая. При разложении по ней элементов из L коэффициенты при ω_i лежат в $\mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}_{k_\wp}$, так как в таком случае мы по условию имеем разложение по целому базису L/k. Если же рассматриваемый элемент имеет вид $a \in L_{\mathfrak{P}}$, $a \notin L$, то, как известно из конструкции $\wp$-адического пополнения поля по показателю, $a = \lim_{j\to\infty} a^{(j)}$, где $a^{(j)} \in L$, $\{a^{(j)}\}$ — фундаментальная последовательность. Тогда элементы $a^{(j)}$ могут быть разложены по $\{\omega_i\}$, пусть разложение имеет вид $a^{(j)} = \sum_{i=1}^n a_i^{(j)}\omega_i$, причём это разложение однозначное как разложение по базису и $a_i^{(j)} \in \mathcal{O}_k$. Из элементарных свойств предела получаем, что $a = \lim_{j\to\infty} a^{(j)} = \sum_{i=1}^n (\lim_{j\to\infty} a_i^{(j)})\omega_i$. Но из конструкции $\wp$-адического пополнения известно (см. [2]), что если $a_i^{(j)} \in \mathcal{O}_k$, то $\lim_{j\to\infty} a_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{k_\wp}$. А это означает, что коэффициенты при разложении элемента a по системе образующих $\{\omega_i\}$ целые, то есть в силу произвольности a она целая.

Теперь вернёмся к утверждению леммы. Тот факт, что $\{\hat{\omega}_i\}$ — базис $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}/k_{\wp}$, известен (см. [2]). Докажем, что это целый базис. Рассмотрим разложение по данному базису произвольного элемента $a \in L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}$. Пусть это разложение имеет вид $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\omega}_i$. Так как $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)} = L_{\mathfrak{P}_1} \oplus ... \oplus L_{\mathfrak{P}_m}$, мы можем записать полученное разложение в виде $a = (a^{(1)}, ..., a^{(m)})$, где $a^{(j)} \in L_{\mathfrak{P}}$, $j = \overline{1, m}$, причём представление в таком виде однозначно. Учитывая, что по заданию $\hat{\omega}_i = (\omega_i, ..., \omega_i)$, получаем, что разложению $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\omega}_i$ соответствует разложение для каждого из его компонентов вида $a^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} \omega_i$. По доказанному ранее $a_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{k_{\wp}}$, тогда и элементы вида $a_i = (a_i^{(1)}, ..., a_i^{(m)})$ целые по заданию, так как все их компоненты целые. Утверждение леммы доказано.

Поскольку в рассуждении выше не использовалась нормальность расширения, полностью аналогично для поля F доказывается, что если $\{\omega_i\}$ — целый базис F/k, то $\{\hat{\omega}_i\}$ — целый базис $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}/k_{\wp}$.

Перед формулировкой следующей леммы немного изменим конструкцию рассматриваемых торов. Обозначим через F^{δ_i} результат действия на F элемента $\delta_i \in G$, $i = \overline{1, n}$. Понятно, что для всех i выполняется условие $k \subset F^{\delta_i} \subset L$. Пусть α_1 — примитивный элемент поля F над k, $p_{\alpha}(x)$ — его минимальный многочлен, $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ — множество корней $p_{\alpha}(x)$.

Как уже упоминалось ранее, существует взаимно однозначное соответствие между полями $F_{\mathfrak{P}_i}$, каждое из которых получено пополнением F по простому идеалу $\mathfrak{P}_i$, лежащему над некоторым фиксированным простым идеалом $\wp \subset k$, и простыми множителями в разложении многочлена $p_{\alpha}(x)$, рассматриваемого в $k_{\wp}[x]$. Возьмём в этом разложении по одному корню из каждого множителя и обозначим их α_{i_j}, $j = \overline{1, m_F}$, $m_F \leqslant m$ (в частности, $\alpha_{i_1} = \alpha_1$). Далее, пусть δ_{1j} — такой элемент G, который переводит корень α_1 в α_j (в частности, $\delta_{11} = \varepsilon$). Тогда все поля вида $F^{\delta_{1j}}$ будут различными и каждое будет содержать единственный простой идеал $\mathfrak{P}_{i_j}$ кольца $\mathcal{O}_F$, лежащий над $\wp$, причём в совокупности они будут содержать все такие идеалы. Обозначим пополнение поля $F^{\delta_{1j}}$ по идеалу $\mathfrak{P}_{i_j}$ через $(F^{\delta_{1j}})_{\mathfrak{P}_{i_j}}$. Учитывая, что $F^{\delta_{1j}} \cong F$ и $k \subset F^{\delta_{1j}}$, а конструкция $\wp$-адического пополнения в этих полях одинакова, мы получаем, что при некотором t локальные поля $(F^{\delta_{1j}})_{\mathfrak{P}_{i_j}}$ и $F_{\mathfrak{P}_t}$ являются $k_\wp$-изоморфными. Так как все такие изоморфные пары полей различны, можно сделать вывод, что $\bigoplus_{i_j}(F^{\delta_{1j}})_{\mathfrak{P}_{i_j}} \cong F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ (для краткости обозначим эту прямую сумму $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$). Тогда тор $\prod_{i_j}(R_{(F^{\delta_{1j}})_{\mathfrak{P}_{i_j}}/k_\wp}(G_m))$ по заданию будет изоморфен $S_{\mathfrak{P}}$. Поэтому мы можем отождествить его с тором $S_{\mathfrak{P}}$, с этого момента будем обозначать так именно этот тор. В частности, утверждение леммы 3.1 для него выполняется. Для обеих конструкций тора $S_{\mathfrak{P}}$ поле L, поле $L_{\mathfrak{P}}$ и алгебра $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}$, введённые ранее, одни и те же. Поскольку нумерация $\mathfrak{P}_{i_j}$ для доказательства несущественна, с точностью до перенумерации можем считать $i_j = j$, для краткости будем писать $S_{\mathfrak{P}} = \prod_{t=1}^{m_F}(R_{(F^{\delta_t})_{\mathfrak{P}_t}/k_\wp}(G_m))$.

Обсудим, как после переобозначений необходимо видоизменить лемму 3.2. Если зафиксировать базис расширения F/k вида $\{\omega_i\}$, $i = \overline{1, m}$, для F^{δ_t}/k ему соответствует базис $\{\omega_i^{\delta_t}\}$. Очевидно, базис пространства $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)} = \bigoplus_{t=1}^{m_F} F_{\mathfrak{P}_t}^{\delta_t}$ над $k_\wp$, соответствующий базису $\{\hat{\omega}_i\}$, в таком случае должен иметь вид $\{\hat{\omega}_i^{(1)} = (\omega_i, \omega_i^{\delta_2}, ..., \omega_i^{\delta_{m_F}})\}$ (так как $\delta_1 = \varepsilon$). Проверим, что полученный объект будет базисом нужного пространства. Для произвольного элемента $a \in F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ справедливо равенство $a = \sum_{i=1}^m c_i\hat{\omega}_i$, где $c_i \in k_\wp$, так как $\{\hat{\omega}_i\}$ — базис этого векторного $k_\wp$-пространства. Далее, $a = (a_1, ..., a_{m_F})$, $\hat{\omega}_i = (\omega_i, ..., \omega_i)$, тогда указанное равенство равносильно системе $a_j = \sum_{i=1}^m c_i\omega_i$, $j = \overline{1, m_F}$. Подействовав на каждое из равенств системы элементом $\delta_j \in G$ с соответствующим номером, получим равенства $a_j^{\delta_j} = \sum_{i=1}^m c_i\omega_i^{\delta_j}$. По построению $a_j^{\delta_j} \in F_{\mathfrak{P}_j}^{\delta_j}$, следовательно, элемент $(a_1, a_2^{\delta_2}, ..., a_m^{\delta_m})$ лежит в $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$, причём в силу произвольности a_i он является также произвольным элементом этого пространства. В силу биективности построенного отображения любой элемент $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ раскладывается по системе образующих $\{\omega_j^{\delta_j}\}$. Докажем, что разложение однозначно. Если бы элемент $(a_1, a_2^{\delta_2}, ..., a_m^{\delta_m})$ имел два различных разложения, записывающиеся системами равенств вида $a_j^{\delta_j} = \sum_{i=1}^m c_i \omega_i^{\delta_j}$ и $a_j^{\delta_j} = \sum_{i=1}^m d_i \omega_i^{\delta_j}$, то действие на соответствующие равенства элементами δ_j^{-1} позволило бы получить два различных разложения элемента a по базису $\{\hat{\omega}_i\}$, что невозможно. Итак, $\{\hat{\omega}_i^{(1)}\}$ действительно является базисом $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$. Тот факт, что если базис $\{\omega_i\}$ целый, то и $\{\hat{\omega}_i^{(1)}\}$ целый, доказывается полностью аналогично лемме 3.2.

Лемма 3.3. Пусть, помимо ранее введённых обозначений, X_T — стандартная, а X'_T — каноническая целая модель алгебраического тора T. Тогда слои над полем $k_\wp$ у X_T и X'_T совпадают.

Доказательство.

Сначала рассмотрим случай алгебраического тора специального вида. Пусть $T = S = R_{F/k}(G_m)$, то есть тор T является простейшим квазиразложимым. Изучим структуру указанных слоёв целых моделей. Стандартная целая модель для S есть схема $X_S = \text{Spec } \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, а $x_{ij}, y_{ij} \in k[S]$ — коэффициенты при разложении базисных характеров $\chi_1, ..., \chi_n$ модуля $\hat{S}$ и обратных им по системе образующих $\{\omega_i\}$, являющейся базисом расширения L/k. Как уже упоминалось, L можно выбрать так, чтобы оно имело целый базис над k (возможно, выбранное поле не будет минимальным, но для доказательства это не имеет значения), поэтому условимся, что далее $\{\omega_i\}$ — целый базис. Так как коэффициенты при разложении $\chi_2, ..., \chi_n$ выражаются с помощью действия группы Галуа через соответствующие коэффициенты для χ_1, можем считать, что $X_S = \text{Spec } \mathcal{O}_k[x_{1j}, y_{1j}]$. Слой этой схемы над $k_\wp$, очевидно, имеет вид $X_{S_\wp} = \text{Spec } \mathcal{O}_k[x_{1j}, y_{1j}] \times \text{Spec } \mathcal{O}_{k_\wp} = \text{Spec } (\mathcal{O}_k[x_{1j}, y_{1j}] \otimes \mathcal{O}_{k_\wp}) = \text{Spec } \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{1j}, y_{1j}]$. Заметим, что поскольку S — простейший квазиразложимый тор, все его характеры, в частности, интересующие нас χ_1 и χ_1^{-1}, могут быть разложены по базису расширения F/k. То есть можно обозначить $\omega_1, ..., \omega_m$ какой-либо целый базис F/k (пока условимся, что мы рассматриваем случай, когда F имеет целый базис над k) и взять в качестве образующих рассматриваемой алгебры Хопфа коэффициенты при разложении элементов χ_1 и χ_1^{-1} по этому базису. Получим $X_{S_\wp} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{1j}, y_{1j}]$, $j = \overline{1, m}$.

Теперь рассмотрим слой канонической целой модели тора S. Он представляет собой стандартную целую модель в смысле определения 1.6 тора $S_\wp = S \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\ k_\wp$. Так как по лемме 3.1 имеет место изоморфизм $S_\wp \cong S_\mathfrak{P}$, мы можем рассмотреть вместо этого стандартную целую модель тора $S_\mathfrak{P}$. Так как $S_\mathfrak{P} = S_{\mathfrak{P}_1} \times ... \times S_{\mathfrak{P}_m}$, то $k_\wp[S_\mathfrak{P}] = k_\wp[S_{\mathfrak{P}_1}] \otimes ... \otimes k[S_{\mathfrak{P}_m}]$. Каждый из торов $S_{\mathfrak{P}_i}$ может быть аффинно реализован как схема $\mathrm{Spec}\ k_\wp[S_{\mathfrak{P}_i}]$, тогда $S_\mathfrak{P} = \mathrm{Spec}\ (k_\wp[S_{\mathfrak{P}_1}] \otimes ... \otimes k[S_{\mathfrak{P}_m}])$. Как упоминалось при доказательстве леммы 3.1, для каждого из простейших квазиразложимых торов $S_{\mathfrak{P}_i}$ все базисные характеры группы $\hat{S}_{\mathfrak{P}_i}$ могут быть выражены с помощью действия группы Галуа через один из базисных характеров группы $\hat{S}$ (с точностью до обозначения будем считать, что это χ_i). Таким образом, если $\eta_1, ..., \eta_s$ — целый базис $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ (здесь $s = n/m_L$), а $x_{i1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{is}^{(\mathfrak{P})}$ и $y_{i1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{is}^{(\mathfrak{P})}$ — коэффициенты при разложении по этому базису соответственно характеров χ_i и χ_i^{-1}, то слой канонической модели X_S' тора S над полем $k_\wp$ имеет вид $X_{S_\wp}' = \mathrm{Spec}\ (\otimes_{i=1}^{m_L} \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{i1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{is}^{(\mathfrak{P})}, y_{i1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{is}^{(\mathfrak{P})}]) = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{1s}^{(\mathfrak{P})}, y_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{1s}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_L 1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_L s}^{(\mathfrak{P})}, y_{m_L 1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{m_L s}^{(\mathfrak{P})}]$. Причём, как ранее для S, для каждого тора $S_{\mathfrak{P}_i} = R_{(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp}(G_m)$ характеры из $\hat{S}_{\mathfrak{P}_i}$ можно разложить по целому базису $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$ (мы условились, что целые базисы существуют для L/k и F/k, следовательно, они существуют и для $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ и $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$). Тогда через коэффициенты при разложении характеров $\chi_1, ..., \chi_{m_F}$ по целым базисам $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$ с помощью действия группы Галуа $G_\mathfrak{P}$ можно выразить коэффициенты при разложении остальных базисных характеров. Пусть теперь $\eta_1^{(i)}, ..., \eta_{t_i}^{(i)}$ — целые базисы соответствующих расширений $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$, здесь $t_i = [(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i} : k_\wp] \leqslant [L_{\mathfrak{P}} : k_\wp]$), получим, что рассматриваемый слой имеет вид $X'_{S_\wp} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{1t_1}^{(\mathfrak{P})}, y_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{1t_1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_F1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_Ft_{m_F}}^{(\mathfrak{P})}, y_{m_F1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{m_Ft_{m_F}}^{(\mathfrak{P})}]$.

Для доказательства леммы осталось доказать, что образующие, порождающие над $\mathcal{O}_{k_\wp}$ каждую из сравниваемых алгебр Хопфа, спектрами которых являются соответственно $X_{S_\wp}$ и $X'_{S_\wp}$, выражаются через образующие другой. Групповое кольцо тора $S_{\mathfrak{P}}$ по изоморфизму, рассмотренному нами в пункте 1.10, имеет вид $L_{\mathfrak{P}}[\hat{S}_{\mathfrak{P}}] = L_{\mathfrak{P}} \otimes k_\wp[S_{\mathfrak{P}}]$. С учётом сказанного выше о характерах χ_i в нём лежит элемент вида $\chi = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_{m_L})$. Каждый из характеров χ_i, как мы уже упоминали, имеет разложение по базису $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$ вида $\chi_i = \sum_{j=1}^{t_i} x_{ij}^{(\mathfrak{P})}\eta_j^{(i)}$. Как легко проверить, эти разложения в совокупности задают разложение характера χ по базису пространства $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}/k_\wp$, который имеет вид $\{\hat{\eta}_{ij}^{(\mathfrak{P})} = (0, ..., 0, \eta_j^{(i)}, 0, ..., 0)\}$, то есть на i-м месте стоит j-й элемент базиса $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$, а на остальных нули. С другой стороны, все характеры χ_i имеют также разложение по базису F^{δ_i}/k, который можно рассматривать как систему образующих пространства $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$ (хотя, вообще говоря, такая система образующих может быть линейно зависимой). Причём так как $\chi_1 = \sum_{j=1}^m x_{1j}\omega_j$, то $\chi_i = \chi_1^{\delta_i} = \sum_{j=1}^m x_{1j}(\omega_j)^{\delta_i}$, то есть во всех разложениях характеров χ_i, где $i = \overline{1, m_L}$, по системам образующих такого вида коэффициенты будут одни и те же. Как и ранее, эти разложения можно в совокупности рассматривать как разложение χ по системе образующих пространства $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}/k_\wp$, причём это оказывается система $\hat{\omega}_j^{(1)}$, которая, как было показано в рассуждении перед началом леммы 3.3, является базисом данного пространства.

Приравняв два ранее полученных разложения характера χ, получаем равенство вида $\sum_{i=1}^{m_F}\sum_{j=1}^{t_i} \hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})}\hat{\eta}_{ij}^{(\mathfrak{P})} = \sum_{v=1}^m \hat{x}_v\hat{\omega}_v^{(1)}$. Здесь $\hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})} = (0, ..., 0, x_{ij}^{(\mathfrak{P})}, 0, ..., 0) \in k_\wp[S_{\mathfrak{P}}]$, $\hat{\eta}_{ij}^{(\mathfrak{P})} = (0, ..., 0, \eta_j^{(i)}, 0, ..., 0) \in (F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$, $\hat{x}_v = (x_v, ..., x_v) \in k_\wp[S_{\mathfrak{P}}]$, $\hat{\omega}_v^{(1)} = (\omega_v, \omega_v^{\delta_2}, ..., \omega_v^{\delta_{m_F}}) \in (F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$.

Обе системы образующих $\{\hat{\eta}_{ij}^{(\mathfrak{P})}\}$ и $\{\hat{\omega}_v^{(1)}\}$ являются базисами пространства

$(F^{\delta})^{(m_F)}_{\mathfrak{P}}/k_{\wp}$, поэтому все элементы каждой из этих систем могут быть линейно выражены (причём невырожденно и единственным образом) через элементы другой. Выразив одну из них через другую (что корректно в силу единственности), получим уравнение с коэффициентами из алгебры $k_{\wp}^{m_F} = \bigoplus_{i=1}^{m_F} k_{\wp}$ относительно переменных $\hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})}$, $\hat{x}_v$. Количество переменных $\hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ равно $\sum_{i=1}^{m_F} t_i = m$, то есть равно количеству переменных $\hat{x}_v$. Полученное равенство мы можем заменить системой относительно переменных $x_{ij}^{(\mathfrak{P})}$, x_v, получаемых путём покомпонентной записи первоначального равенства. Причём так как переменные $x_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})}$, а $\hat{x}_v$ с x_v, то количество переменных из множеств $x_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ и x_v также одинаково. Принимая переменные одного из этих множеств за параметры, после эквивалентных преобразований системы можно линейно выразить через них переменные другого из этих множеств. Поскольку элементы x_v представляют собой образующие алгебры Хопфа, спектром которой является схема $X_{S_{\wp}}$, и аналогично $x_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ — образующие алгебры Хопфа, соответствующей $X'_{S_{\wp}}$, то нами получено выражение образующих одной из этих алгебр Хопфа через образующие другой и обратно. Выражение друг через друга образующих y_v и $y_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ получается аналогично. Так как полученное выражение невырожденное и в силу рассуждения перед началом леммы 3.3 коэффициенты в этом выражении целые, всё проведённое доказательство корректно, то есть построены совпадающие аффинные реализации $X_{S_{\wp}} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{1j}, y_{1j}]$, $j = \overline{1,m}$ и $X'_{S_{\wp}} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{1t_1}^{(\mathfrak{P})}, y_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{1t_1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_F1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_Ft_{m_F}}^{(\mathfrak{P})}, y_{m_F1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{m_Ft_{m_F}}^{(\mathfrak{P})}]$ слоёв над полем $k_{\wp}$ соответственно стандартной и канонической целых моделей тора S. Таким образом, указанные слои изоморфны и для случая простейшего квазиразложимого тора лемма доказана.

Далее, пусть тор T квазиразложимый, но не является простейшим. Тогда по определению (см. [15]) этот тор можно представить в виде прямого произведения $T = S_1 \times ... \times S_l$, где все компоненты S_i, $i = \overline{1,l}$ представляют собой простейшие квазиразложимые торы. Рассмотрим алгебры Хопфа $A(\hat{T})$ и $A^{'}(\hat{T})$, спектрами которых являются соответственно стандартная и каноническая модели T. Из двойственности алгебраического тора как аффинной схемы и соответствующей ему алгебры Хопфа с учётом известной конструкции T получаем, что $A(\hat{T}) = A(\hat{S}_1) \otimes ... \otimes A(\hat{S}_l)$, аналогично $A^{'}(\hat{T}) = A'(\hat{S}_1) \otimes ... \otimes A'(\hat{S}_l)$. Так как по ранее доказанному $A(\hat{S}_i) = A^{'}(\hat{S}_i)$, $i = \overline{1,l}$, то получаем $A(\hat{T}) = A^{'}(\hat{T})$, следовательно, $X_{T_\wp} = X^{'}_{T_\wp}$ и для этого случая лемма также доказана.

Наконец, рассмотрим случай, когда тор T произвольный. Известно (см. [22]), что существует эпиморфизм (его также называют накрытием) $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$, где S — некоторый квазиразложимый тор. По доказанному для предыдущих случаев совпадают слои над полем $k_\wp$ стандартной и канонической моделей X_S и $X^{'}_S$ тора S, то есть $X_{S_\wp} = X^{'}_{S_\wp}$.

Для канонической целой модели слой $X^{'}_{S_\wp}$ над полем $k_\wp$ по определению представляет собой стандартную целую модель в смысле определения 1.6 (то есть над локальным полем) тора $S_\wp = S \otimes_k k_\wp$, а слой $X^{'}_{T_\wp}$ над полем $k_\wp$ — аналогичную модель тора $T_\wp = T \otimes_k k_\wp$. Для алгебр Хопфа, спектрами которых являются стандартные целые модели над локальным полем, так как задан эпиморфизм $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$, выполняется (см. [22]) свойство замкнутых вложений: $A^{'}_{T_\wp} = A^{'}_{S_\wp}/I^{'}$, где $I^{'} = A^{'}_{S_\wp} \cap \mathrm{Ker}\ \beta_k$, $\beta_k : k[S] \to k[T]$ — морфизм координатных колец, индуцированный β (здесь и далее для краткости будем обозначать $A^{'}_{T_\wp} = A^{'}(\hat{T}_\wp)$, $A_{T_\wp} = A(\hat{T}_\wp)$ и т.д.).

Для слоёв стандартных целых моделей $X_{S_\wp}$ и $X_{T_\wp}$ свойство замкнутых вложений выполняется, так как доказано в предложении 3.1 (с учётом замечания 3.1). Поэтому $A_{T_\wp} = A_{S_\wp}/I$, где $I = (A_{S_\wp} \cap \mathrm{Ker}\ \beta_k)$. Но $A_{S_\wp} = A^{'}_{S_\wp}$ по доказанному для предыдущего случая, тогда получаем, что $I = I^{'}$, следовательно, по заданию $A_{T_\wp} = A^{'}_{T_\wp}$, а значит, $X_{T_\wp} = X^{'}_{T_\wp}$ и для этого случая лемма доказана.

Вернёмся к ранее выделенному случаю, когда рассматриваемый тор простейший квазиразложимый, но для поля F не существует целого базиса над k. Как уже говорилось в пункте 3.1, в этом случае существует некоторое конечное нормальное расширение F (обозначим его $\tilde{F}$) такое, что для него существует целый базис над k. Тогда тор $R_{F/k}(G_m)$ мы можем вложить в тор $R_{\tilde{F}/k}(G_m)$, после чего справедливость утверждения леммы следует из доказательства для произвольного тора (вложение торов определяет накрытие для двойственных им объектов — соответствующих модулей характеров). Утверждение леммы доказано для всех возможных случаев и лемма доказана полностью.

Теперь, наконец, мы можем дать ответ на вопрос о совпадении стандартной и канонической моделей произвольного алгебраического тора над полем алгебраических чисел.

Теорема 3.1. В условиях ранее введённых обозначений $X_T = X_T'$.

Доказательство.

Докажем двойственное утверждение, что совпадают соответствующие алгебры Хопфа $A(\hat{T})$ и $A'(\hat{T})$. По лемме 3.3 для каждого простого идеала $\wp \lhd \mathcal{O}_k$ имеет место равенство $A(\hat{T}_\wp) = A'(\hat{T}_\wp)$, то есть совпадают слои указанных алгебр Хопфа над полем $k_\wp$. Известно, что в таком случае для совпадения алгебр Хопфа достаточно установить вложение одной из них в другую, установим его.

По определению канонической целой модели $A'(\hat{T}) = \bigcap_\wp (B_\wp \cap k[T])$, где $B_\wp = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}]$, а $x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}$ — координаты при разложении по целому базису $\omega_1^{(1)}, ..., \omega_m^{(1)}$ расширения полей $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ базисных характеров χ_i группы $\hat{T}$ и обратных им характеров χ_i^{-1}. По определению стандартной целой модели $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} — координаты при разложении соответственно χ_i и χ_i^{-1} по целому базису $\omega_1, ..., \omega_n$ расширения L/k. После пополнения для расширения полей $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ этот базис остаётся системой образующих (хотя при $m < n$ не будет базисом). Как легко проверить, выражение для стандартной целой модели равносильно $A(\hat{T}) = \bigcap_{\wp}(B'_{\wp} \cap k[T])$. Здесь $B'_{\wp} = \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{ij}, y_{ij}]$.

Выразим образующие алгебры $B'_{\wp} = \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{ij}, y_{ij}]$ через образующие алгебры $B_{\wp} = \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x^{(1)}_{ij}, y^{(1)}_{ij}]$. Если приравнять разложения одного и того же характера χ_i по базисам расширений $L_{\mathfrak{P}}/k_{\wp}$ и L/k, полученное равенство будет иметь вид $\sum_{j=1}^{m} x^{(1)}_{ij}\omega^{(1)}_j = \sum_{t=1}^{n} x_{ij}\omega_t$. В нём элементы системы $\{\omega_t\} \in L_{\mathfrak{P}}$ можно линейно выразить через элементы системы $\{\omega^{(1)}_j\}$, причём полученное выражение однозначно и определено над $\mathcal{O}_{k_{\wp}}$, так как указанная система является целым базисом расширения $L_{\mathfrak{P}}/k_{\wp}$. Подставив это выражение в соответствующее равенство системы, а затем заменив в системе каждое равенство с коэффициентами из L системой равенств с коэффициентами из k (при замене каждое равенство соответствует одному из компонентов $\omega^{(1)}_j$, преобразование корректно в силу однозначности указанного разложения), получим выражение образующих x_{it} через образующие $x^{(1)}_{ij}$. Полностью аналогичным образом можно получить выражение образующих y_{it} через образующие $y^{(1)}_{ij}$. Это означает, что $\mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{ij}, y_{ij}] \subset \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x^{(1)}_{ij}, y^{(1)}_{ij}]$, то есть $B'_{\wp} \subset B_{\wp}$. Тогда по заданию и в силу свойств операции пересечения $A'(\hat{T}) \subset A(\hat{T})$, то есть вложение одной из рассматриваемых алгебр Хопфа в другую установлено. Отсюда получаем $A(\hat{T}) = A'(\hat{T})$, утверждение теоремы доказано.

Итак, стандартная и каноническая целые модели произвольного алгебраического тора над полем алгебраических чисел совпадают. Таким образом, с этого момента при рассмотрении какой-либо из них мы можем пользоваться известными свойствами другой. В частности, прямым следствием из этой теоремы является свойство слоёв $X_{\wp}$ над локальными полями для стандартной целой модели X, позволяющее использовать эти слои в качестве начального шага при построении модели Нерона над локальным полем.

Предложение 3.3. *В условиях ранее введённых обозначений группа $\mathcal{O}_{k_{\wp}}$-точек $X(\mathcal{O}_{k_{\wp}})$ схемы $X_{\wp} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{ij}, y_{ij}]$ совпадает с максимальной компакт-*

ной подгруппой U группы $k_\wp$-точек $T_\wp(k_\wp)$ тора $T_\wp$.

Выполнение этого свойства сразу следует из теоремы 3.1, так как в силу совпадения моделей слои $X_\wp$ совпадают со слоями канонической целой модели тора T, для которых оно известно (так как они являются стандартными моделями в смысле определения 1.6).

Закончив рассмотрение интересующих нас свойств целых моделей над полями алгебраических чисел, перейдём к разбору конкретной задачи, в решении которой эти модели используются, а именно к построению модели Нерона максимального тора без аффекта в полупростой группе. Об этом будет рассказано в следующем пункте.

3.5. Модель Нерона максимальных торов без аффекта в полупростых группах для случая B_n

Рассмотрим один из случаев задачи о построении модели Нерона максимального тора без аффекта в полупростой группе. Вначале объясним постановку задачи.

Как уже говорилось выше, модель Нерона является канонической гладкой целой моделью алгебраического тора, чем и обусловлен интерес к ней. Но можно поставить и более узкую задачу: построение модели Нерона в случаях, когда рассматривается семейство алгебраических торов, имеющих какую-нибудь специфическую, неслучайную, но при этом нетривиальную структуру. В таких случаях можно ожидать появления заслуживающей отдельного исследования закономерности также в структуре их моделей Нерона.

В частности, к таким семействам относятся максимальные торы без аффекта в полупростых группах. Они обладают действительно неслучайной структурой и из-за того, что очень специфические условия наложены на их группы Галуа, и по самой своей конструкции. Напомним основные сведения о максимальных торах без аффекта.

Пусть G — полупростая связная алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли. В G всегда существует максимальный алгебраический тор T, пусть $\mathfrak{h}$ — соответствующая ему подалгебра в $\mathfrak{g}$ (она называется подалгеброй Картана). Каждому характеру $\chi \in \hat{T}$ можно поставить в соответствие его дифференциал, вычисленный в единице группы (обозначим его $d\chi$), это соответствие является изоморфизмом и группа характеров $\chi(T)$ тора T отображается в некоторую дискретную подгруппу $\hat{T} \subset \mathfrak{h}$, порождающую пространство $\mathfrak{h}$ и имеющую одинаковый с ним ранг. Эта подгруппа называется решёткой характеров тора T. Если взять в качестве системы корней множество R всех таких элементов $\alpha \in \hat{T}$, что $\alpha \neq 0$ и $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$, где $\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X \ \forall X \in \mathfrak{h}\}$ — инвариантное подпространство присоединённого действия характера χ тора T на $\mathfrak{g}$, то, как можно проверить, полученный объект будет удовлетворять определению системы корней (более подробно см. [19], [4]). В качестве группы Вейля для R выступает факторгруппа $W = N/T$, где N — нормализатор T в G, $T \subset N \subset G$.

Общим тором группы G называется схема H_x, определённая над полем функций $M = k(x)$, такая, что T — её специализация над полем L. Строение H_x накладывает ограничения на группы Галуа всех максимальных торов в G. Известно, что $W(R) \subset \varphi(\Pi) \subset A(R)$, где $W(R) = W$, Π — группа Галуа поля разложения H_x над основным полем, $A(R)$ — группа всех линейных преобразований $\mathfrak{h}^*$, переводящих R саму в себя, $\varphi : \Pi \to A(R)$ — гомоморфизм, определённый действием Π на R. Напомним, что $\varphi(\Pi)$ называется группой разложения тора H_x. В свою очередь, для группы Галуа Γ любого максимального k-тора T в G справедливо условие $W(R) \subset \varphi(\Gamma) \subset \varphi(\Pi)$. Максимальный k-тор T группы G называется максимальным тором без аффекта, если его группа разложения изоморфна группе разложения общего тора H_x.

С точки зрения неслучайности структуры наибольший интерес представляют те максимальные торы без аффекта в полупростой группе, у которых

$\varphi(\Pi) = W(R)$. Известно (см. [4]), что это равносильно тому, что G является внутренней k-формой.

Как было предложено ранее, чтобы построить модель Нерона исследуемого тора, необходимо построить его стандартную целую модель вида Spec $\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, затем получить из неё целые модели Spec $\mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$, где $\wp \triangleleft \mathcal{O}_k$ — произвольный простой идеал, и для каждой из этих моделей построить соответствующую модель Нерона над кольцом $\mathcal{O}_{k_\wp}$. На технической стороне реализации этих алгебр Хопфа в виде аффинных схем останавливаться не будем, этот процесс подробно описан в [14]. Применив последовательно к $\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$ все преобразования, использованные при построении моделей Нерона её слоёв над локальными полями, получим интересующую нас модель Нерона. Чтобы реализовать условие $\varphi(\Pi) = W(R)$, необходимо взять группу характеров $\hat{T}$ с базисом $\chi_1, ..., \chi_n$, где χ_i соответствуют мультипликативной записи α_i, а действие $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ на $\hat{T}$ согласовано с действием W на R. При этом сами по себе структуры объектов $\hat{T}$ и R не согласованы, но в $\mathbb{R}^n$ можно выделить подобъект, соответствующий аддитивной записи $\hat{T}$ и порождённый выбранным базисом R (он называется решёткой весов).

В качестве конкретного случая для решения этой задачи рассмотрим такой максимальный алгебраический тор без аффекта, что $R = B_n$. Система корней $B_n \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид $B_n = \{\pm\varepsilon_i; \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}$, где $i, j = \overline{1, n}$, $\{\varepsilon_i\}$ — ортонормированный базис $\mathbb{R}^n$ как векторного пространства. В качестве базиса B_n можно взять $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, ... $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, $\alpha_n = \varepsilon_n$.

Как уже говорилось выше, W действует на R перестановками. Это означает, что в $\hat{T}$ под действием G любой базисный характер χ_i переходит в характер вида либо $\chi_s^{\pm1}$, либо $\chi_s^{\pm1}\chi_t^{\pm1}$. Так как W порождено отражениями системы корней, то элемент $R \subset \mathbb{R}^n$, который можно рассматривать как элемент векторного пространства $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$, может перейти только в вектор — элемент R с такой же длиной (понятие длины в евклидовом пространстве определено). Следовательно, α_n переходит только в $\pm\varepsilon_i$, а α_j, $j < n$ — только в $\pm\varepsilon_s \pm \varepsilon_t$. С другой стороны, для любых i, j можно подобрать такой элемент W, то есть отражение или композицию отражений, что $\pm\varepsilon_i$ переходит в $\pm\varepsilon_j$: ε_i в ε_j переводит отражение $\sigma_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, ε_i в $-\varepsilon_i$ отражение σ_{ε_i}, а любые другие пары — композиция отражений такого вида. Аналогично можно подобрать элемент W, переводящий $\pm\varepsilon_{i_1} \pm \varepsilon_{j_1}$ в $\pm\varepsilon_{i_2} \pm \varepsilon_{j_2}$: $\varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{j_1}$ в $\varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{j_2}$ переводит $\sigma_{\varepsilon_{j_1}-\varepsilon_{j_2}}$, а другие пары — композиция отражений такого вида и вида σ_{ε_i}. Для $\hat{T}$ это означает, что $O_G(\chi_n) = \{\chi_n; \chi_n^{-1}; (\chi_{n-1}\chi_n), (\chi_{n-1}\chi_n)^{-1}, ..., (\chi_1...\chi_n); (\chi_1...\chi_n)^{-1}\}$ (так как $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n + \varepsilon_n = \alpha_{n-1} + \alpha_n$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+1} = \alpha_i + \varepsilon_{i+1}$). Следовательно, $|O_G(\chi_n)| = 2n$, $|\mathrm{Stab}_G(\chi_n)| = 2^{n-1} \cdot (n-1)!$. Очевидно, что перемножением элементов $O_G(\chi_n)$ можно получить все базисные характеры χ_i, следовательно, $O_G(\chi_n)$ можно использовать для построения эпиморфизма пермутационного G-модуля на $\hat{T}$. Причём характер χ_n имеет разложение с коэффициентами из $k[T]$ над некоторым полем $L_1 \subset L$ таким, что $[L_1 : k] = 2n$, и поэтому конструкция стандартной целой модели тора T такая же, как у некоторого тора T_1 с полем разложения $L_1 \subset L$ и группой характеров $\hat{T}_1 \subset \hat{T}$ такой, что существует накрытие $\varphi_1 : \hat{S}_1 \to \hat{T}_1$, где S_1 — квазиразложимый тор такой, что $\mathrm{rk}\, \hat{S}_1 = 2n$ (аналогичная ситуация ранее обсуждалась в пункте 2.4). Правда (см. [5], [17]), в случае расширения глобальных полей известно только, что целый базис существует для некоторого поля разложения, не обязательно минимального, то есть для F/k, $L \subset F$, но если мы положим $k = \mathbb{Q}$, то известно (см. [2]), что целый базис существует для любого алгебраического расширения L/k.

Итак, возьмём модуль с пермутационным базисом $\hat{S} = \langle f_1, ..., f_{2n}\rangle$. Пусть под действием гомоморфизма $\varphi : \hat{S} \to \hat{T}$ каждый базисный характер f_i переходит в элемент $O_G(\chi_n)$ с номером i относительно того порядка, в котором они были ранее записаны. Возьмём произвольный элемент $f \in \mathrm{Ker}\, \varphi$. Пусть

$f = \prod_{i=1}^{2n} f_i^{a_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Выразив через известные образы базисных характеров вида $\varphi(f_i) = \prod_{j=1}^{n} \chi_j^{c_{ij}}$, $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ элемент $\varphi(f)$ в условии $\varphi(f) = 1_{\hat{T}}$, получим уравнение $\prod_{j=1}^{n} \chi_j^{\sum_{i=1}^{2n} c_{ij}a_i} = 1$. Оно равносильно системе уравнений вида $\sum_{i=1}^{2n} c_{ij}a_i = 0$, $j = \overline{1,n}$. В нашем случае данная система имеет вид $CA^t = 0$, где A — строка переменных, а $C \in \mathrm{Mat}(n \times 2n, \mathbb{Z})$ — следующая матрица:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как легко проверить, такая система уравнений равносильна системе вида $a_{2i} = a_{2i-1}$, $i = \overline{1,n}$. ФСР этой системы состоит из векторов, у которых $2i$-й и $(2i-1)$-й компоненты имеют значение 1, а остальные 0. Если перейти обратно к характерам, то получаем, что рассматриваемый тор задаётся системой уравнений вида $\varphi(f_{2i-1})\varphi(f_{2i}) = 1$. Эти уравнения соответствуют равенствам $\chi_n\chi_n^{-1} = 1$, $\chi_{n-1}\chi_n(\chi_{n-1}\chi_n)^{-1} = 1$ и т.д. Как можно заметить, левая часть каждого уравнения представляет собой произведение характера из $\hat{T}$ на обратный ему характер. По построению для любого $\varphi(f_{2i-1})$ существует элемент G, переводящий в него $\varphi(f_1)$ (они лежат в орбите одного элемента $\hat{T}$). Из свойств гомоморфизма групп следует, что $\varphi(f_2) = (\varphi(f_1))^{-1}$ тот же элемент G переводит в $\varphi(f_{2i}) = (\varphi(f_{2i-1}))^{-1}$. Это означает, что все уравнения системы сопряжены относительно действия G и рассматриваемый тор можно задать одним уравнением $\varphi(f_1)\varphi(f_2) = 1$. С учётом действия G уравнение принимает вид $\varphi(f_1)\varphi(f_1)^{\delta} = 1$, где δ — элемент G порядка 2, так как он переводит характер в обратный ему. Таким образом, это норменное уравнение второго порядка и T имеет вид $T = R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m))$, где $L_2 \subset L_1$, $[L_1 : L_2] = 2$.

Известно (см. [18]), что если существует плоский морфизм дедекиндовых схем $S' \to S$ и существует модель Нерона X'схемы $X' \times_{S'} \operatorname{Spec} K'$, где $\operatorname{Spec} K'$ — схема общих точек схемы S', то результат применения функтора Вейля $X = R_{S'/S}(X')$ существует, является S-схемой и является моделью Нерона схемы $X \times_S \operatorname{Spec} K$, где $\operatorname{Spec} K$ — схема общих точек схемы S. Наш случай соответствует этим условиям, если положить $K = k$, $K' = L_2$, $S = \mathcal{O}_k$, $S' = \mathcal{O}_{L_2}$, X — модель Нерона тора T, а X' — модель Нерона тора $T' = R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m)$. Таким образом, можно не строить далее непосредственно X, а построить X' и получить искомую модель Нерона как спуск от неё с помощью функтора Вейля.

Здесь следует заметить, что при построении с использованием стандартной целой модели над полем алгебраических чисел явное задание модели Нерона возможно не всегда. Это связано с тем, что нам необходимо определить над основным полем k такую дилатацию, определённую над его пополнением $k_\wp$, которая при этом не влияет на дискретную норму элементов поля k относительно других его пополнений $k_{\wp_i}$. Для этого необходимо, чтобы выбранный униформизующий элемент имел дискретную норму 1 относительно $k_\wp$ и 0 относительно других пополнений k. Если простой идеал $\wp$ главный, то подходящий униформизующий элемент $\pi \in k_\wp$ — порождающий элемент $\wp$, который будет лежать и в k, тогда дилатация определена. Но если $\wp$ 2-порождённый (известно, что более чем 2-порождённым идеал в поле алгебраических чисел быть не может), то есть $\wp = (\alpha, \beta)$, то $\pi \notin k$. Поэтому в нашем случае будем считать, что основное поле L_2 тора T' одноклассное, то есть в нём все простые идеалы главные (таково, например, поле $\mathbb{Q}$, но уже среди его квадратичных расширений одноклассны не все). Целый базис у расширения L_1/L_2 существует, так как известно, что для расширений степени 2 полей алгебраических чисел он существует всегда.

Построим X'. Тор $T' = R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m)$ — это одномерный норменный тор. Модель Нерона и стандартная модель Воскресенского такого тора неоднократно рассматривались, например, его модель Воскресенского построена в [22], а модель Нерона в [21]. Как и тор T, он задаётся одним уравнением относительно характеров вида $\varphi(f_1)\varphi(f_1)^\delta = 1$. Далее необходимо перейти к системе уравнений, определённых над L_1, а от неё — к системе над L_2. Получим $(ay_1 + by_2)(\overline{a}y_1 + \overline{b}y_2) = 1$, где $\{a; b\}$ — целый базис L_1 над L_2. Отсюда $a\overline{a}y_1^2 + (a\overline{b} + b\overline{a})y_1y_2 + b\overline{b}y_2^2 = 1$, причём все коэффициенты многочлена в левой части лежат в $\mathcal{O}_{L_2}$.

Далее нужно для каждого простого идеала $\wp \lhd \mathcal{O}_{L_2}$ рассмотреть слой $X'_\wp$ полученной модели над полем $L_{2\wp}$. Как было доказано в пункте 3.4, стандартная и каноническая целые модели произвольного тора совпадают, поэтому мы можем рассмотреть слой канонической модели тора T, представляющий собой стандартную целую модель тора $T' \otimes_{L_2} L_{2\wp}$ в смысле определения 1.6. Эта модель задаётся тем же уравнением, что и X', но так как рассматривается расширение локальных полей, то известно, что для него можно выбрать целый базис $\{1, \pi\}$, где π — униформизующий элемент $L_{1\wp}$. В этом случае, повторяя рассуждение выше для нового базиса, получаем, что $X'_\wp$ задаётся уравнением $y_1^2 - \pi^2 y_2^2 = 1$. Причём элемент $\pi^2 = c \in \mathcal{O}_{L_{2\wp}}$ является униформизующим элементом $L_{2\wp}$. Тогда редукция по модулю $\wp$ этой схемы задаётся уравнением $y_1^2 = 1$. Отсюда следует, что если $c \nmid 2$, то редукция не имеет особенностей, а если $c \mid 2$, то редукция всегда имеет особенность вида μ_2 и соответствующая алгебра Хопфа $A(\hat{T})$ содержит нильпотент вида $(y_1 + 1)^2 = 0$ (этот же результат известен из [22]). Таким образом, сглаживание необходимо произвести только в случае $c \mid 2$. Положим, что $\nu_\wp(2) = m$, $m \in \mathbb{N}$, то есть $2 = c^m \cdot r_2$, $r_2 \in \mathcal{O}_{L_{2\wp}}$, $\nu_\wp(r_2) = 0$.

Рассмотрим сглаживание в точке $y = (1, 0)$ (как легко проверить, она лежит в особом слое сглаживаемой схемы и не является гладкой). При сглаживании, как и в главе 2, вместо последовательности замен переменных с последующим сокращением уравнений после каждой из них можно рассмотреть одну замену с последующим сокращением уравнений на максимально возможную степень униформизующего элемента. Замена переменных в таком случае будет иметь вид $y_1 = c^s z_1 + 1$, $y_2 = c^s z_2$, где $s \in \mathbb{N}$ — параметр. После замены и приведения подобных уравнение принимает вид $c^{2s} z_1^2 + r_2 c^{s+m} z_1 - c^{2s+1} z_2^2 = 0$. Тогда можем положить $s = m$, после чего уравнение можно будет сократить на c^{2m}, в результате получим следующее уравнение:

$z_1^2 + r_2 z_1 + c z_2^2 = 0.$

Найдём дефект гладкости аффинного многообразия, задаваемого этим уравнением, в произвольной точке. Для этого, как и в главе 2, построим матрицу Якоби, она имеет следующий вид:

$J(y_1, y_2) = \left(\begin{smallmatrix} 2z_1 + r_2 & 2cz_2 \end{smallmatrix} \right).$

Как легко убедиться, $\min(\nu_\wp(j_{11}), \nu_\wp(j_{12})) = 0$ при любых значениях z_1, z_2, следовательно, дефект гладкости в любой точке равен 0 и полученное многообразие является моделью Нерона слоя рассматриваемого тора над локальным полем. Применив проведённые преобразования к схеме X' (как можно проверить, это будет корректно), получим модель Нерона тора T'.

Модель Нерона тора T можно получить, произведя затем в уравнении, задающем X', замену всех переменных и коэффициентов их разложением по какому-либо целому базису $\{\omega_j\}$ расширения $L_2/\mathbb{Q}$. Для краткости не будем приводить здесь явное задание результата, так как он получается путём обычной замены переменных и раскрытия скобок.

3.6. Стандартная целая модель максимальных торов без аффекта в полупростых группах для случая A_n и её особенности

Напомним, как задаётся система корней A_n. Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ с единичным базисом из векторов $\varepsilon_i = (\delta_{ij})$, где $i, j = \overline{1, n+1}$. Решётка корней A_n — подпространство $\mathbb{R}^{n+1}$, базис которого состоит из n векторов вида $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $i = \overline{1,n}$. Группа $W(A_n)$ действует на векторы ε_i перестановками, что задаёт также её действие на α_i. Зададим рассматриваемый в дальнейшем тор T следующим образом: базису системы корней A_n поставим в соответствие базис группы характеров $\hat{T} = \langle \chi_1, ..., \chi_n \rangle$ (то есть каждому α_i поставим в соответствие χ_i), а группе $W(A_n)$ — действующую на $\hat{T}$ группу Галуа $G = \mathrm{Gal}(L/k)$, где k — основное поле, а L — некоторое поле разложения T.

Определим структуру тора T, описав его аффинную реализацию, что, позволит сразу определить и стандартную целую модель этого тора. Вначале необходимо найти подходящий эпиморфизм $\varphi : \hat{S} \to \hat{T}$, где S — квазиразложимый тор. Будем последовательно находить орбиты элементов базиса $\{\chi_i\}$ под действием G. Произвольный элемент $\sigma \in W(A_n)$, действуя на элемент базиса группы корней $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, так как на все ε_j он действует как элемент группы перестановок, может перевести его в любой элемент группы корней вида $\sigma(\alpha_i) = \varepsilon_t - \varepsilon_u$, где $t, u \in \{1, ..., n+1\}$, $t \neq u$. Если $u > t$, то такой элемент можно представить как $\sigma(\alpha_i) = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+1} - ... + \varepsilon_{u-1} - \varepsilon_u = \alpha_t + \alpha_{t+1} + ... + \alpha_{t+u-t}$. Если же $u < t$, аналогично получаем $\sigma(\alpha_i) = -(\alpha_u + \alpha_{u+1} + ... + \alpha_{u+t-u})$. То есть любой базисный элемент может перейти в произведение любого количества от 1 до n любых последовательных базисных элементов или обратных к ним. Для χ это означает, что орбита характера χ_i имеет вид $O(\chi_i) = \{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n, \chi_1^{-1}, \chi_2^{-1}, ..., \chi_n^{-1}, \chi_1\chi_2, \chi_2\chi_3, ..., \chi_{n-1}\chi_n, \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}, \chi_2^{-1}\chi_3^{-1}, ..., \chi_{n-1}^{-1}\chi_n^{-1}$, $..., \chi_1\chi_2...\chi_n, \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}...\chi_n^{-1}\}$. Так как эта орбита содержит все χ_i и χ_i^{-1}, то орбиты произвольного базисного характера (например, χ_1) достаточно для порождения $\hat{T}$. Как легко вычислить, $|O(\chi_i)| = 2(n + (n-1) + ... + 1)) = n(n+1)$, $|G| = |S_{n+1}| = (n+1)!$ и $|\mathrm{Stab}\ \chi_1| = (n-1)!$ (число всех перестановок упорядоченного множества (ε_i), действующих на ε_1 и ε_2 тождественно).

Итак, положим $\mathrm{rk}\ \hat{S} = n(n+1)$. Пусть $\{f_1, ..., f_{n(n+1)}\}$ — базис $\hat{S}$. Зададим накрытие $\varphi : \hat{S} \to \hat{T}$ следующим образом: $f_1 \mapsto \chi_1$, ..., $f_n \mapsto \chi_n$, $f_{n+1} \mapsto \chi_1^{-1}$,

..., $f_{2n} \mapsto \chi_n^{-1}$, $f_{2n+1} \mapsto \chi_1\chi_2$, ..., $f_{3n-1} \mapsto \chi_{n-1}\chi_n$, $f_{3n} \mapsto \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}$, ..., $f_{4n-2} \mapsto \chi_{n-1}^{-1}\chi_n^{-1}$, ..., $f_{n(n+1)-1} \mapsto \chi_1\chi_2...\chi_n$, $f_{n(n+1)} \mapsto \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}...\chi_n^{-1}$. Далее, рассмотрим общий вид элемента ядра φ, он задаётся равенством $\prod_{i=1}^{n(n+1)} \varphi(f_i)^{t_i} = 1$, $t_i \in \mathbb{Z}$. После выражения всех векторов $\varphi(f_i)$ через базис $\{\chi_j\}$ группы $\hat{T}$ равенство примет некоторый вид $\prod_{j=1}^{n} \chi_j^{\sum_{i_j \in I_j} t_{i_j} - \sum_{l_j \in J_j} t_{l_j}} = 1$. Здесь I_j, J_j — подмножества множества индексов $\{1, ..., n(n+1)\}$, соответствующие тем элементам орбиты $O(\chi_1)$, в которых один из сомножителей соответственно характер χ_j или χ_j^{-1}.

Такое равенство будет эквивалентно системе из n уравнений относительно переменных $t_i \in \mathbb{Z}$, $t_i \geqslant 0$ вида $\sum_{i_j \in I_j} t_{i_j} - \sum_{l_j \in J_j} t_{l_j} = 0$, $j = \overline{1, n}$. Чтобы получить искомую систему уравнений, задающих Ker φ, нужно найти базис $\mathbb{Z}$-модуля решений системы относительно t_i. Из задания системы легко видеть, что все уравнения однородные, каждый коэффициент из множества $\{-1, 0, 1\}$.

Для получения базиса Ker φ можно выразить переменные $t_{n+1}, ..., t_{2n}$ (степени характеров $\chi_1^{-1}, ..., \chi_n^{-1}$) через остальные, а затем взять в качестве базиса решения, в которых одной независимой переменной придаётся единичное значение, а остальным нулевые. Ненулевая переменная может соответствовать характеру вида либо $\prod_{i \in I} \chi_i$, либо $\prod_{i \in I} \chi_i^{-1}$. В первом случае для тех χ_i, которые входят в это произведение, переменные t_i примут значение 1, а для остальных 0, во втором случае аналогично -1 и 0. Таким образом, система уравнений относительно характеров χ_i будет состоять из уравнений вида $\prod_{i=t}^{t+m} \chi_i \prod_{i=t}^{t+m} \chi_i^{-1} = 1$.

Рассмотрим, как можно упростить систему, задающую T. Рассмотрим уравнение вида $(\chi_s...\chi_{s+t})^{-1}(\chi_s^{-1})^{-1}...(\chi_{s+t}^{-1})^{-1} = 1$, $s = \overline{1, n-1}$, $t = \overline{1, n-s}$, оно, очевидно, эквивалентно уравнению $(\chi_s^{-1}...\chi_{s+t}^{-1})\chi_s...\chi_{s+t} = 1$. В группе корней A_n и в аддитивной записи левой части этого уравнения соответствует сумма вида $(\varepsilon_s - \varepsilon_{s+1}) + (\varepsilon_{s+1} - \varepsilon_{s+2}) + ... + (\varepsilon_{s+t} - \varepsilon_{s+t+1}) + (\varepsilon_{s+1} - \varepsilon_s + \varepsilon_{s+2} - \varepsilon_{s+1} + ... + \varepsilon_{s+t+1} - \varepsilon_{s+t})$. После действия на неё морфизмом группы корней, действующим на ε_i как перестановка вида $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & ... & s-1 & s & s+1 & ... & s+t & s+t+1 & s+t+2 & ... & n+1 \\ 1 & 2 & ... & s-1 & s+t+1 & s+t & ... & s+1 & s & s+t+2 & ... & n+1 \end{smallmatrix}\right)$, получится сумма $(\varepsilon_{s+t+1}-\varepsilon_{s+t})+(\varepsilon_{s+t}-\varepsilon_{s+t-1})+...+(\varepsilon_{s+1}-\varepsilon_s)-(\varepsilon_{s+t+1}-\varepsilon_{s+t}+\varepsilon_{s+t}-\varepsilon_{s+t-1}+...+\varepsilon_{s+1}-\varepsilon_s)$, которая (с учётом упрощения) соответствует уравнению $(\chi_s...\chi_{s+t})\chi_s^{-1}...\chi_{s+t}^{-1}=1$. Следовательно, полученное уравнение сопряжено с исходным с помощью действия некоторого $\delta \in G$.

Далее, покажем, что все уравнения системы с одинаковым числом сомножителей в левой части сопряжены. Возьмём уравнение $\chi_1...\chi_{1+t}(\chi_1^{-1}...\chi_{1+t}^{-1})=1$. Если рассмотреть соответствующий элемент A_n, то, как можно проверить, под действием перестановки $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & ... & n & n+1\\ 2 & 3 & ... & n+1 & 1\end{smallmatrix}\right)^{s-1}$ он перейдёт в элемент, соответствующий левой части уравнения $\chi_s...\chi_{s+t}(\chi_s^{-1}...\chi_{s+t}^{-1})=1$. Таким образом, эти уравнения сопряжены. Так как сопряжённые уравнения эквивалентны, из них в системе достаточно оставить одно, тогда система принимает следующий вид:

$$\begin{cases}\chi_1\chi_1^{-1}=1,\\ \chi_1\chi_2(\chi_1^{-1}\chi_2^{-1})=1,\\ ...\\ \chi_1\chi_2...\chi_n(\chi_1^{-1}\chi_2^{-1}...\chi_n^{-1})=1.\end{cases}$$

Покажем, что все уравнения данной системы норменные. Каждое уравнение системы имеет вид $\chi_1...\chi_{1+t}(\chi_1^{-1}...\chi_{1+t}^{-1})=1$, где $0\leqslant t\leqslant (n-1)$. Элемент A_n, соответствующий левой части этого уравнения, имеет вид $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+...+(\varepsilon_t-\varepsilon_{1+t})+(\varepsilon_{1+t}-\varepsilon_1)=0$. Как легко проверить, перестановка элементов ε_i, записываемая в виде цикла как $(1\ ...\ t+1)$, каждое слагаемое этой суммы, кроме последнего, переводит в следующее, а последнее в первое. Это означает, что уравнение относительно характеров можно записать в виде $\chi_1...\chi_1^{\delta^t}\chi_1^{\delta^{t+1}}=1$, где δ — соответствующий указанной перестановке элемент G и $\delta^{t+2}=1$. Итак, система состоит из n норменных уравнений порядка от 2 до $(n+1)$.

В частности, в случае $n=1$ система задаёт одномерный норменный тор, а в случае $n=2$ — двумерный тор, рассмотренный в главе 2, а именно тор типа 9). Это означает, что доказано следующее утверждение:

Утверждение 3.1. *Пусть T — максимальный тор без аффекта в полупростой группе, определённый над полем алгебраических чисел k, с группой Галуа вида $W(A_n)$. Пусть X' — стандартная целая модель тора T, $X'_\wp$ — её слои над пополнениями поля k по простым идеалам $\wp$. Тогда выполняются следующие свойства:*

1) При $n = 1$ слои $X'_\wp$ гладкие, если $\wp \nmid (2)$, и их редукция имеет единственную особенность вида μ_2, если $\wp \mid (2)$;

2) При $n = 2$ слои $X'_\wp$ гладкие, если $\wp \nmid (2)$, $\wp \nmid (3)$, и их редукция имеет две особенности вида α_2, если $\wp \mid (2)$, или одну особенность вида α_3, если $\wp \mid (3)$;

Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда $n \geqslant 3$. Так как в пункте 3.4 мы доказали, что стандартная и каноническая целые модели произвольного тора совпадают, для исследования особенностей редукции стандартной целой модели X тора T мы можем пользоваться свойствами их обеих. Будем рассматривать слои модели X над локальными полями, получаемые из определения стандартной целой модели. В таком случае они получаются из исходной модели путём расширения кольца констант с $\mathcal{O}_k$ до $\mathcal{O}_{k_\wp}$ и задаются теми же уравнениями, что и сама модель X, рассматриваемыми над локальным полем $k_\wp$. Это позволяет обойти тот факт, что группа Галуа расширения L/k в нашем случае изоморфна группе перестановок S_{n+1} и, вообще говоря, не может быть реализована как группа Галуа расширения локальных полей.

Исследуем особенности редукции слоёв $X_\wp$ модели X. Известно (см. [4], [6]), что редукция произвольного алгебраического тора может быть представлена в виде $\overline{X}_\wp = R \times_{r_k} U$, где R — мультипликативная часть, U — унипотентная часть, причём в нашем случае (так как расширение L/k вполне разветвлено) для двойственных указанным схемам алгебр Хопфа имеет место равенство $r_k \otimes_{\mathcal{O}_k} A_\wp = r_k[\hat{T}/I\hat{T}] \otimes_{r_k} r_k[M_k]$. Здесь $A_\wp$ — такая алгебра Хопфа, что $X_\wp = \mathrm{Spec}\ A_\wp$, r_k — поле вычетов кольца $\mathcal{O}_k$, $I = \langle g - 1, g \in G\rangle$ — идеал аугментации кольца $\mathbb{Z}[G]$, M_k — некоторая алгебра Хопфа.

Далее, пусть $\psi : \hat{T} \to \hat{T}$ — гомоморфизм, определяемый соотношением $\psi(t) = \prod_{g\in G} t^g$, пусть также $\hat{T}_1 = \mathrm{Ker}\ \psi$, $0 \to \hat{T}_1 \to \hat{T} \to \hat{T}_2 \to 0$ — точная последовательность. Тогда известно (см. [4]), что модули $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ не имеют кручения и кольцо инвариантов $(r_k[\hat{T}/I\hat{T}])^G$ — алгебра Хопфа групповой схемы R мультипликативного типа, связная компонента которой представляет собой r_k-тор R_0, определяемый G-модулем $\hat{T}_2$, и фактор R/R_0 дуален модулю $\hat{T}_1/I\hat{T}$ (причём $\hat{T}_1/I\hat{T} \cong H^{-1}(G, \hat{T})$). По заданию выше $\hat{T}_1/I\hat{T} = \mathrm{Ker}\ \psi/I\hat{T}$. Определим, какой вид имеет этот объект для исследуемого тора.

Заметим, что для любого анизотропного тора $\mathrm{Ker}\ \psi = \hat{T}$. В самом деле, если $s \in \mathrm{Im}\ \psi$, то $s = \prod_{g\in G} t^g \in \hat{T}^G$, так как для любого $h \in G$ будет выполняться $s^h = \prod_{g\in G} t^{gh} = \prod_{g\in G} t^g = s$. Но если тор T анизотропный, то по определению $\hat{T}^G = \{e\} = \mathrm{Im}\ \psi = \hat{T}/\mathrm{Ker}\ \psi$, то есть $\mathrm{Ker}\ \psi = \hat{T}$.

Покажем, что рассматриваемый тор анизотропный. Пусть $\chi \in \hat{T}$ — произвольный характер, тогда он имеет некоторое разложение по базису $\{\chi_i\}$ вида $\chi = \prod_{i=1}^n \chi_i^{a_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$. В группе A_n это разложение будет соответствовать равенству $\varepsilon = \sum_{i=1}^n a_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) = a_1\varepsilon_1 + (\sum_{i=2}^n \varepsilon_i(a_i - a_{i-1})) - a_n\varepsilon_{n+1}$. Условие $\chi \in \hat{T}^G$ для соответствующего элемента $\varepsilon \in A_n$ означает, что элемент ε должен сохраняться при действии перестановок с записью в виде цикла $\delta_i = (i\ i+1)$, $i = \overline{1, n+1}$. В полученном выражении для ε действие перестановки δ_i переводит друг в друга ε_i и ε_{i+1}, а все остальные компоненты не изменяет. Отсюда условие $\varepsilon^{\delta_i} = \varepsilon$ равносильно системе условий $a_1 = a_2 - a_1$, $a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i$, $i = \overline{2, n}$, $a_n = -(a_n - a_{n-1})$. Таким образом, если обозначить $a_1 = c$, $c \in \mathbb{Z}$, то из первого равенства следует $a_2 = 2c$, из равенств со второго по n-е следует $a_3 = 3c$, ..., $a_n = nc$. Но из $(n+1)$-го равенства следует $a_n = -c$. Отсюда $nc = -c$, что выполняется только при $c = 0$. Следовательно, $a_i = 0$, $i = \overline{1, n+1}$, а это значит, что единственным инвариантным характером из $\hat{T}$ является $\chi = \prod_{i=1}^n \chi_i^0 = 1_{\hat{T}}$.

Следовательно, рассматриваемый тор анизотропный и Ker $\psi = \hat{T}$.

Выясним теперь, что в нашем случае представляет собой модуль $I\hat{T}$. По заданию $I\hat{T} = \langle t^{g-1}, t \in \hat{T}, g \in G \rangle = \langle t^g/t, t \in \hat{T}, g \in G \rangle$. Покажем, что для рассматриваемого тора при значениях n, больших некоторого минимального, будет выполняться $I\hat{T} = \hat{T}$.

Рассмотрим характер $t \in O_G(\chi_i) \subset \hat{T}$. Как уже говорилось выше, в системе корней A_n он будет соответствовать элементу вида $t = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+v}$ либо $t = \varepsilon_{i+v} - \varepsilon_i$, $1 \leqslant v \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant (n-v)$, и действием перестановок, соответствующих элементам G, из элемента t можно получить любой элемент вида $t^g = \varepsilon_j - \varepsilon_u$, $1 \leqslant j, u \leqslant n+1$, $j \neq u$, при этом элемент t^g/t будет соответствовать элементу A_n вида $\varepsilon_j - \varepsilon_u + \varepsilon_{i+v} - \varepsilon_i$ или соответственно $\varepsilon_j - \varepsilon_u + \varepsilon_i - \varepsilon_{i+v}$. Пусть $n \geqslant 2$, тогда для любого $i \leqslant n-1$ можем положить $t = \varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i$, $j = i+2$, $u = i+1$, тогда $t^g/t = \varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2} + \varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$. Этот элемент соответствует базисному характеру χ_i модуля $\hat{T}$. Также при $n \geqslant 2$ можем положить $t = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_1$, $j = n$, $u = 1$, тогда $t^g/t = \varepsilon_n - \varepsilon_1 - \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_1 = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$, что соответствует базисному характеру χ_n. Таким образом, получили, что при $n \geqslant 2$ модуль $I\hat{T}$ содержит среди порождающих элементов все базисные характеры из модуля $\hat{T}$, а так как $I\hat{T} \subset \hat{T}$, то $I\hat{T} = \hat{T}$.

С учётом вышедоказанного при $n \geqslant 2$ выполняется $\hat{T}_1/I\hat{T} = \text{Ker } \psi/I\hat{T} = \hat{T}/\hat{T} = \{1_{\hat{T}}\}$, то есть мультипликативная часть редукции каждого слоя $X_\wp$ над локальным полем $k_\wp$ стандартной целой модели X алгебраического тора T, а значит, и всей модели X, не имеет особенностей. Этим рассуждением было доказано следующее утверждение:

Утверждение 3.2. *В условиях ранее введённых обозначений при $n \geqslant 3$ мультипликативная часть редукции модели X не имеет особенностей.*

Исследуем теперь унипотентную часть редукции модели X. Воспользуемся следующим известным фактом (см. [22]). Пусть T_1, T_2 — алгебраические

$k_\wp$-торы с полем разложения $L_\mathfrak{P}$ такие, что определён мономорфизм модулей характеров $\alpha : \hat{T}_1 \to \hat{T}_2$, причём модули $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ имеют одинаковый $\mathbb{Z}$-ранг. Тогда известно, что если $m = [\hat{T}_2 : \alpha(\hat{T}_1)]$ взаимно просто с $p = \operatorname{char} r_{k_\wp}$ (где $r_{k_\wp}$ — поле вычетов $\mathcal{O}_{k_\wp}$), то унипотентные части редукций стандартных целых моделей торов T_1 и T_2 изоморфны.

Напомним, что аддитивная запись решётки характеров исследуемого тора $\hat{T}$ в обозначениях системы корней имеет вид $\hat{T} = \langle \varepsilon_1 - \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \rangle$ (сейчас мы рассматриваем её как решётку характеров слоя $T_\wp$ тора T над полем $k_\wp$). Рассмотрим решётку характеров с аддитивной записью $\hat{T}_2 = \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_{n+1} \rangle \oplus \hat{T}$. Она соответствует тору вида $T_2 = G_m \times T_\wp$, известно (см. [22]), что унипотентная часть редукции стандартной целой модели в этом случае такая же, как у самого тора $T_\wp$. Пусть $\hat{T}_1 = \langle \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n+1} \rangle \cong \mathbb{Z}^{n+1}$. Такая решётка характеров соответствует тору вида $T_1 = R_{F/k_\wp}(G_m)$, где F — некоторое подходящее поле. Как легко проверить, $\hat{T}_1 = \mathbb{Z}^{n+1} \supseteq \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n \rangle \oplus \hat{T} = \hat{T}_2$, причём $\mathbb{Z}$-ранги у $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ равны. Следовательно, если выполняется условие взаимной простоты m и p, то унипотентные части редукции их стандартных целых моделей изоморфны. Но известно (см. [22]), что для торов вида $R_{F/k_\wp}(G_m)$ унипотентная часть редукции стандартной целой модели не имеет особенностей, следовательно, если условие выполняется, то унипотентная часть редукции стандартной целой модели тора T_2, а значит, и тора $T_\wp$ не имеет особенностей. Остаётся выяснить, при каких условиях m и p взаимно просты.

Известно, что значение m по лемме Гурвица можно вычислить как модуль определителя матрицы перехода между базисами $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$. В нашем случае получаем $[\hat{T}_1 : \hat{T}_2] = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & ... & -1 \end{vmatrix} = n+1$. Итак, унипотентная часть стандартной целой модели тора $T_\wp$, а значит, слоя $X_\wp$ стандартной модели тора T над полем $k_\wp$, не имеет особенностей, если p взаимно просто с $n+1$. Так как p простое, то это эквивалентно тому, что $p \nmid n+1$, в более общем виде это можно записать как $\wp \nmid (n+1)$. Итак, было доказано следующее утверждение:

Утверждение 3.3. *В условиях ранее введённых обозначений при* $n \geqslant 3$ *унипотентная часть редукции слоя* $X_\wp$ *модели* X *над полем* $k_\wp$ *не имеет особенностей, если* $\wp \nmid (n+1)$.

Таким образом, на данный момент мы определили возможные точки негладких редукций стандартной целой модели алгебраического тора T.

Список литературы

[1] Борель, А. Линейные алгебраические группы / А. Борель. - М.: Мир, 1972.

[2] Боревич, З.И. Теория чисел / З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. - 504 с.

[3] Воскресенский, В.Е. Алгебраические торы / В.Е. Воскресенский. - М.: Наука, 1977. - 224 с.

[4] Воскресенский, В.Е. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп / В.Е. Воскресенский. - М.: МЦНМО, 2009. - 408 с.

[5] Воскресенский, В.Е. О целых моделях алгебраических торов / В.Е. Воскресенский, Б.Э. Кунявский, Б.З. Мороз. // Алгебра и анализ. - 2002. - Т. 14, выпуск 1. - С. 46-70.

[6] Воскресенский, В.Е. Целые структуры в алгебраических торах / В.Е. Воскресенский, Т.В. Фомина. // Изв. РАН, серия матем. - 1995. - Т. 59:5. - С. 3-18.

[7] Грехов, М.В. Модель Нерона двумерных анизотропных алгебраических торов над локальными полями / М.В. Грехов. // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. - 2012. - № 9 (100). - С. 31-40.

[8] Грехов, М.В. Целые модели алгебраических торов над полями алгебраических чисел / М.В. Грехов. // Записки научных семинаров ПОМИ. - 2014. - Т. 430. - С. 114-135.

[9] Грехов, М.В. О совпадении стандартной и канонической целых моделей алгебраического тора / М.В. Грехов. // Сибирские электронные математические известия. - 2017. - Т. 14 - С. 1017-1029.

[10] Грехов, М.В. Целые модели Нерона двумерных алгебраических торов над локальными полями / М.В. Грехов. // Третья международная школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", посвященная 75-летию Э. Б. Винберга (Тольятти, Россия, 25-30 июня 2012 г.): тезисы докладов. - Тольятти: Изд-во ТГУ, 2012. - С. 19-20.

[11] Грехов, М.В. Модель Нерона анизотропного алгебраического тора / М.В. Грехов, С.Ю. Попов. // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тезисы докладов XI Международной конференции. - Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2013. - С. 22-23.

[12] Грехов, М.В. Модель Нерона максимальных алгебраических торов без аффекта в полупростых группах / М.В. Грехов. // Пятая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов" (22-27 июня 2015 г., Самара, Россия): тезисы докладов. - Самара: Издательство "Самарский университет", 2015. - С. 19-21.

[13] Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса и А. Фрёлиха. - М.: Мир, 1969. - 484 с.

[14] Крутиков, Ю.Ю. Аффинные представления трехмерных алгебраических торов / Ю.Ю. Крутиков. // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. - 2007. - № 7 (57). - С. 92-106.

[15] Платонов, В.П. Алгебраические группы и теория чисел / В.П. Платонов, А.С. Рапинчук. - М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. - 656 с.

[16] Хамфрис, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. / Дж. Хамфрис. Перев. с англ. Б.Р. Френкина. - М.: МЦНМО, 2003. - 216 с.

[17] Bondarko, M.V. Ideals in an extension of a number field as modules over the ring of integers in a ground field / M.V. Bondarko. // Proceedings of the Session in

analytic number theory and Diophantine equations (ed. by D.R. Heath-Brown and B.Z. Moroz), Bonner Math. Schriften. - 2003. - Vol. 360.

[18] Bosch, S. Néron Models / S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. - Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990. - 325 pp.

[19] Ching-Li, Ch. Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor / Ch. Ching-Li, Yu. Jiu-Kang. - National Center for Theoretical Science, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1999. - 30 pp.

[20] Grothendieck, A. Schemas en groupes. I / A. Grothendieck, M. Demazure. - Berlin: Springer, 1977. - 565 pp.

[21] Liu, Q. Special fibers of Néron models and wild ramification / Q. Liu, D. Lorenzini. // Preprint. - 1999. - 40 pp.

[22] Popov, S.Yu. Standard Integral Models of Algebraic Tori / S.Yu. Popov. // Preprintreihe des SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik. - 2003. - 31 pp.

[23] Serre, J.-P. Local Fields / J.-P. Serre. - New York: Springer-Verlag New York Inc., 1979. - 241 pp.

[24] Voskresenskii, V.E. Hopf algebras of algebraic tori / V.E. Voskresenskii. // Abstracts of Talks, Kurosh Algebraic Conference'98. - Moscow: MSU, 1998. - p. 129-130.

[25] Voskresenskii, V.E. Algebraic groups and their birational invariants. Translations of Math. Monograph. Vol. 179. / V.E. Voskresenskii. - AMS. - 1998.