ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОРДОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.П. ОГАРЁВА»

На правах рукописи

Язовцева Ольга Сергеевна

Исследование устойчивости решений математических моделей по части компонент на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
кандидат физико-математических наук,
доцент П. А. Шаманаев

Саранск — 2019

Оглавление

Введение

Основные положения теории устойчивости заложены А. М. Ляпуновым в его знаменитой диссертационной работе «Общая задача об устойчивости движения» [25]. В этой же работе он указал два подхода к решению этой задачи, впоследствии названными первым и вторым («прямым») методом А. М. Ляпунова.

Первый метод заключается в исследовании устойчивости решения исследуемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений по первому приближению. Этот метод развит в работах [19], [21], [27].

Второй метод заключается в построении функции Ляпунова – однозначной непрерывной скалярной или векторной функции, обладающей непрерывной в исследуемой точке знакопостоянной производной. В этом направлении основные результаты изложены в работах [4], [17]- [19], [30], [45], [50], [68], [70].

Вопросы устойчивости по первому приближению, в том числе и в критическом случае (при наличии нулевых собственных значений матрицы линейного приближения), подробно изложены в книге И. Г. Малкина [27]. Дальнейшее развитие теория устойчивости в критическом случае получила в работах Г. В. Каменкова [19], В. И. Зубова [18], В. П. Прокопьева [38].

Впервые постановка задачи об исследовании устойчивости по отношению к части переменных (частичной устойчивости) упоминается в работе А. М. Ляпунова [24].

Позже к вопросу переноса теорем об устойчивости системы в целом на случай части фазовых координат вернулся И. Г. Малкин [26]. Он указал (без доказательства) такие условия переноса. С этого момента началось интенсивное развитие теории устойчивости по части переменных.

Так, в работах В. В. Румянцева [42], [43], [44] было проведено систематическое исследование задачи для конечномерных нелинейных систем с непрерывной правой частью на основе прямого метода Ляпунова, изложены основные определения и положения теории частичной устойчивости, доказаны теоремы о частичной устойчивости и частичной асимптотической устойчивости, приведены примеры практического применения этой теории к задачам механики. В работе [36] был расширен класс уравнений, для которых справедливы теоремы из работ [42]- [44], а также показано применение теории частичной устойчивости для более сложных практических задач.

Далее теория устойчивости по части переменных развивалась в работах В. В. Румянцева [41]- [44], [43], [72], А. С. Озиранера [35], [36], [44], А. А. Шестакова [56], В. И. Воротникова [10]- [12], П. Фергола [65], Л. Сальвадори [73].

В работе [11] В. И. Воротниковым предложен метод исследования устойчивости по части переменных, заключающийся в сведении первоначальной задачи к исследованию устойчивости решений по всем переменным вспомогательной системы.

В работе А. С. Андреева был введен новый тип предельных систем, получен ряд условий асимптотической y-устойчивости нестационарной нелинейной системы [2]. Развитие данного направления представлено в работе А. А. Косова [20].

Вопрос об устойчивости относительно части переменных по первому приближению рассмотрен в работах [18], [19], [30], [35], [64].

Частичная устойчивость в критическом случае рассмотрена в работах В. Н. Щенникова [58], [59]. В частности, им получены условия устойчивости дифференциальных систем с однородными правыми частями. При исследовании используется прямой метод Ляпунова и свойства ограниченности решений.

Задача устойчивости линейных систем по части переменных также исследуется в [46], где получены условия устойчивости для определённых классов линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В [64] рассмотрено применение дифференциальных неравенств к задачам устойчивости.

Критерии устойчивости линейных систем по части переменных получены в работе В. И. Никонова [33]. Исследование устойчивости линейных систем производится на основании декомпозиции матрицы системы, что позволяет свести вопрос об устойчивости системы к задаче об устойчивости многочлена, методы решения которой известны.

В работе К. М. Чудинова [51] приведены доказательства невозможности переноса методов исследования устойчивости в целом на случай частичной устойчивости. Также исследуется вопрос о преобразованиях исследуемой системы, относительно которых частичная устойчивость инвариантна. Задача об устойчивости систем по части переменных сводится к исследованию корней характеристического уравнения, полученного путем деления характеристического многочлена матрицы системы на многочлен, полученный как характеристический многочлен системы с измененными столбцами.

Классификация множества систем обыкновенных дифференциальных уравнений и её применение к исследованию устойчивости решений восходит к А. М. Ляпунову [25]. В случае, когда исследуется асимптотическое поведение решений при $t \to \infty$, классификация носит название асимптотической эквивалентности [63], [66]. Основные результаты исследования подобных отношений отражены в работах [6], [13], [25], [28], [63], [66], [69], [75].

Одним из направлений такого подхода по исследованию устойчивости решений дифференциальных уравнений является метод, основанный на установлении асимптотической эквивалентности [63] между исследуемой системой и некоторой системой «сравнения», изложенный в работе Е. В. Воскресенского [13]. В этих работах классификация систем проводится на основе установления покомпонентной асимптотической эквивалентности по Левинсону и Брауеру относительно некоторых функций.

Если для асимптотически эквивалентных систем выполняется условие равномерности по начальной точке, то свойства устойчивости и неустойчивости решений системы «сравнения» сохраняются при переходе к исследуемой системе. Это же утверждение справедливо и для покомпонентно асимптотически эквивалентных систем. В случае когда, система «сравнения» является линейным приближением исследуемой системы, то этот подход относится к первому методу Ляпунова. В общем случае система «сравнения» вообще говоря может и не являться линейной системой.

В работах [52], [55], [60] введены понятия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру и Левинсону относительно некоторых функций. На основании этого приведены теоремы, доказывающие переход свойства устойчивости решений к нелинейной системе от ее линейного приближения, в том числе и по части переменных.

В работах [53], [54] введено понятие равномерной локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности, что обеспечивает покомпонентный перенос свойств устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости от системы линейного приближения к нелинейной системе.

Первые задачи об устойчивости возникли при исследовании механических систем. Этому посвящено большое количество работ различных авторов [16],

[39], [50], [71].

В работе [22] исследуется устойчивость положения равновесия механической системы по отношению к фазовым координатам и скоростям, получены достаточные условия его устойчивости через минимизацию потенциальной энергии. Позднее эта работа послужила основой для развития прямого метода Ляпунова и далее оформилась в теорию частичной устойчивости [42].

Устойчивость по части переменных актуальна в применении к многим задачам небесной механики, в частности к задаче трех тел. Впервые устойчивость задачи трех тел была исследована в работах А. Пуанкаре [39]. Э. Рауссом было получено условие для соотношения масс тел, при выполнении которого треугольные точки либрации круговой ограниченной задачи трех тел будут устойчивы [71]. А. М. Ляпунов обобщил данный результат, доказав, что если эксцентриситеты орбит меньше единицы, то в задаче трех тел треугольные точки либрации устойчивы в первом приближении при условии, что эксцентриситеты орбит меньше единицы и масса одной точки значительно превышает массы других точек. Далее А. П. Маркеев описал условия неустойчивости и устойчивости треугольных равновесных решений [29]. Основные результаты по устойчивости в применении к задаче трех тел приведены в работе [16]. Исследование математической модели движения космического аппарата, а также анализ устойчивости точек либрации приведены в работе Д. Е. Охоцимского и Ю. Г. Сихарулидзе [37].

Теория устойчивости играет значительную роль в математических моделях биологии и экологии [47]. Исследование вопросов математических моделей в биофизике предложено в работах А. Д. Базыкина [3]. Им проведено качественное исследование динамического поведения популяций в условиях их взаимодействия.

Также актуальные вопросы моделирования в биофизике и экологии рассмотрены в работе Г. Ю. Ризниченко [40]. В ней исследованы модели при различных параметрах, показано, что в некоторых случаях система приходит в неустойчивое состояние, что означает вымирание видов. Исследование по части переменных математических моделей, описывающих динамику популяции, является особо актуальной задачей в силу того, что различные биологические виды в разной мере оказывают влияние на биосферу, а исследование частичной устойчивости может дать ответ на вопрос о динамике популяции того или иного вида независимо от динамики остальных [9], [74].

В работе Т. А. Акрамова [1] описано применение качественной теории дифференциальных уравнений, в том числе и теории устойчивости, к физико-химическим процессам, возникающим в реакторах с учетом кинетики. В работе [7] представлено исследование устойчивости кинетических уравнений в химии и биологии на примере полиферментных биохимических цепей. Актуальным является вопрос об устойчивости режимов работы химического реактора. Исследование устойчивости математических моделей химических реакторов, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, рассмотрено в работе [8].

Задача исследования устойчивости решения задачи В. А. Стеклова о падении твердого тела в жидкость [48], в том числе и по отношению к позиционным переменным, рассмотрена в работе [5].

В работе [67] рассмотрена проблема «ухода оси гироскопа», т. е. явление, при котором движение гироскопа устойчиво по отношению к одним переменным и неустойчиво по отношению к другим. Данный процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, причем два собственных значения матрицы линейного приближения равны нулю – критический случай по Ляпунову. В работе [12] приведены условия устойчивости положения равновесия гироскопа по отношению к одной фазовой переменной и обосновано наличие неустойчивости по отношению к остальным.

Также актуальной является задача о гашении вращения космического аппарата при возникновении аварийной ситуации [11]. Математическая модель вращательного движения описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющим воздействием, отвечающих работе двигателей, и при отказе одного или нескольких двигателей требуется исследование устойчивости по части переменных, соответствующих координатам космического аппарата. Такая задача получила название устойчивости по заданному числу переменных [10].

В настоящей работе продолжается развитие идей Е. В. Воскресенского [13] о покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем по Брауеру и Левинсону относительно некоторых эталонных функций в некоторой области фазового пространства. Показано, что введенные определения позволяют исследовать устойчивость по части переменных и асимптотику решений более широкого класса нелинейных систем, чем в работах [13].

Во введении содержится краткий обзор результатов работ по теме исследования, приводится обоснование актуальности исследования, формулируется цель и ставятся задачи, раскрываются научная новизна и практическая ценность полученных результатов, приводится развернутое описание содержания работы, описываются методы исследования, используемые в работе, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе описано применение локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности к исследованию устойчивости математических моделей.

В первом параграфе первой главы содержатся основные понятия и положения теории частичной устойчивости и теории асимптотической эквивалентности, введены определения локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений по Брауеру и Левинсону, локального покомпонентного асимптотического равновесия систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во втором параграфе первой главы приведены достаточные условия частичной устойчивости тривиального решения систем на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности.

В третьем параграфе первой главы приведены оценки компонент решений линейной системы.

В четвертом параграфе первой главы приведено исследование асимптотики поведения решений математической модели брутто-реакции пиролиза этана.

Во второй главе получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости по части переменных нулевого решения систем на основе локальной асимптотической эквивалентности.

В первом параграфе второй главы приведено исследование устойчивости и неустойчивости по части переменных нелинейных систем с возмущениями в виде векторных полиномов.

Во втором параграфе второй главы получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных нелинейных систем с возмущениями в виде векторных полиномов в критическом случае.

В третьем параграфе второй главы приведены достаточные условия устойчивости и неустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем с достаточно гладкой правой частью.

В четвертом параграфе второй главы приведены примеры исследования устойчивости по части переменных нулевого решения систем на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности.

Третья глава посвящена исследованию устойчивости решений математических моделей химии, биологии и небесной механики.

В первом параграфе третьей главы рассмотрена задача устойчивости решений кинетической модели некоторых стадий компактной схемы реакции пиролиза пропана.

Во втором параграфе третьей главы исследована устойчивость решений кинетической модели реакции образования амида уксусной кислоты.

В третьем параграфе третьей главы получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости решений математической модели динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия.

В четвертом параграфе третьей главы для математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла, найдено множество параметров системы, обеспечивающее частичную устойчивость семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1.

Четвертая глава посвящена описанию численного метода установления соответствия между начальными точками локально асимптотически эквивалентных систем, дано описание комплекса программ, реализующего численный метод и приведены результаты вычислительного эксперимента на примере брутто-реакции пиролиза этана.

В первом параграфе четвертой главы описан численный метод расчета отображения, устанавливающего соответствие между начальными точками локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем.

Во втором параграфе четвертой главы описаны структуры программных модулей комплекса программ для расчета начальных точек локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем с заданной точностью.

В третьем параграфе четвертой главы приведены результаты вычислительного эксперимента на примере брутто-реакции пиролиза этана.

Актуальность работы. Во многих прикладных задачах различных научных областей, в частности небесной механики, требуется обеспечение устойчивости моделей лишь по части компонент. В то же время при исследовании, например, математических моделей химии и биологии встречаются процессы, семейство решений которых одновременно содержит устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые решения. Настоящая работа посвящена рассмотрению актуальных задач, возникающих при исследовании математических моделей в химии, биологии и небесной механике.

Одной из важнейших характеристик химического реактора является устойчивость режимов работы реактора, основанная на покомпонентной устойчивости нелинейных моделей химической кинетики. Исследование устойчивости подобных моделей проводится методами теории устойчивости дифференциальных уравнений. Подобные задачи освещены в работах Т. А. Акрамова, С. Д. Варфоломеева, А. В. Луковенкова, Б. В. Вольтера, И. Е. Сальникова.

Теория устойчивости играет значительную роль в математических моделях биофизики и экологии. Исследованию данных задач посвящены работы А. Д. Базыкина, Г. Ю. Ризниченко, Ю. М. Свирижева, Д. О. Логофета. Исследование математических моделей, описывающих динамику популяции, по части переменных, является особо актуальной задачей в силу того, что различные биологические виды в разной мере оказывают влияние на биосферу, а исследование частичной устойчивости может дать ответ на вопрос о динамике популяции того или иного вида независимо от динамики остальных.

Во второй половине XX века возросла значимость задачи трех тел в связи с необходимостью изучения движения космических аппаратов. В рамках этой задачи актуальным является исследование устойчивости траекторий космических аппаратов и положений равновесия математических моделей небесной механики. Впервые устойчивость задачи трех тел была исследована в работах А. Пуанкаре и Дж. Хилла. Далее подобные исследования проводились Э. Раусом, А. М. Ляпуновым, А. П. Маркеевым, Г. Н. Дубошиным, Д. Е. Охоцимским и др.

Вопросы устойчивости нелинейных моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, описаны в работах А. М. Ляпунова, Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина, Г. В. Каменкова, В. М. Матросова, В. В. Румянцева, А. С. Озиранера, В. И. Воротникова и др.

В настоящей диссертационной работе частичная устойчивость положений равновесия нелинейных моделей исследуется на основе первого метода Ляпунова и установлении локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности между нелинейной системой и ее первым приближением. Основные идеи такого подхода к исследованию частичной устойчивости содержатся в работах Е. В. Воскресенского. Этот подход позволяет сформулировать новые достаточные условия устойчивости по части переменных для широкого класса математических моделей и разработать численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения.

Таким образом, актуальной задачей является разработка методов исследования устойчивости нелинейных моделей по части компонент.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является разработка качественных и численных методов для иcсследования нелинейных моделей. Указанная цель обусловила следующие задачи:

1) получить новые достаточные условия частичной устойчивости нелинейных моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с возмущениями в форме векторного полинома и с достаточно гладкими правыми частями, на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности;

2) исследовать задачу частичной устойчивости кинетической модели брутто-реакции пиролиза этана;

3) исследовать задачу частичной устойчивости кинетической модели части компактной схемы химической реакции пиролиза пропана;

4) исследовать задачу частичной устойчивости кинетической модели реакции образования амида уксусной кислоты;

5) исследовать задачу частичной устойчивости математической модели динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия;

6) исследовать задачу частичной устойчивости математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла;

7) разработать численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения;

8) разработать комплекс программ для реализации указанного численного метода.

Научная новизна работы. Научная новизна исследования заключается в разработке новой методики исследования частичной устойчивости нелинейных моделей, представляющих собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и применении ее к исследованию прикладных задач, возникающих в химии, биологии и небесной механике.

В ходе диссертационного исследования получены новые достаточные условия частичной устойчивости нулевого решения нелинейных моделей с возмущениями в форме векторного полинома и с достаточно гладкими правыми частями на основе новых определений локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности.

В диссертационной работе решены задачи об исследовании частичной устойчивости положений равновесия кинетических моделей части компактной схемы химической реакции пиролиза пропана, брутто-реакции пиролиза этана и реакции образования амида уксусной кислоты.

На основе введенных определений получены новые достаточные условия частичной устойчивости решений математической модели динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия и найдено множество параметров, обеспечивающее частичную устойчивость семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1, для математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла.

В диссертационной работе реализован численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения, позволяющий рассчитать начальные точки линейного приближения через начальные точки нелинейной системы. Разработан комплекс программ, реализующий указанный численный метод.

Практическая значимость. Практическая значимость диссертационной работы заключается в применении разработанной методики к исследованию устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по части компонент положений равновесия математических моделей, описывающих процессы в химии, биологии, небесной механике и т. д.

Разработанная методика исследования частичной устойчивости моделей химии может быть применена для анализа кинетических процессов, протекающих в ходе химического взаимодействия.

Исследование устойчивости моделей биологии по части переменных позволяет прогнозировать динамику отдельных популяций в условиях межвидового взаимодействия.

Полученное при решении круговой ограниченной задачи трех тел в приближении Хилла множество параметров позволит моделировать устойчивые по части переменных траектории движения космического аппарата, что используется в задаче стабилизации движения космического аппарата.

Методология и методы исследования. Разработанные методы исследования частичной устойчивости основаны на установлении локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности между исследуемой моделью и ее линейным приближением. Для этого в банаховом пространстве строится оператор, связывающий решения нелинейной системы и ее линейного приближения, удовлетворяющий условиям принципа Шаудера о неподвижной точке. Существование построенного оператора доказывается с использованием покомпонентных оценок элементов фундаментальной матрицы линейного приближения. Оператор позволяет построить отображение, устанавливающее соотношение между начальными точками исследуемой системы и ее линейного приближения.

Основные положения, выносимые на защиту.

1) Новые достаточные условия частичной устойчивости нулевого решения нелинейных моделей обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в форме векторного полинома и с достаточно гладкими правыми частями на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности.

2) Решение задачи частичной устойчивости кинетической модели брутто-реакции пиролиза этана.

3) Решение задачи частичной устойчивости кинетической модели части компактной схемы химической реакции пиролиза пропана.

4) Решение задачи частичной устойчивости кинетической модели реакции образования амида уксусной кислоты.

5) Достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости математической модели динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия.

6) Множество параметров, обеспечивающее частичную устойчивость семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1, математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла.

7) Численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения.

8) Комплекс программ, реализующий численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нели-

нейной модели и ее линейного приближения.

Апробация работы и публикации. Основные результаты исследования были представлены на регулярных научных семинарах кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики МГУ им. Н.П. Огарёва и научных семинарах Средне-Волжского математического общества, а также на следующих конференциях:

1) Международные научные молодежные школы-семинары «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е. В. Воскресенского (г. Саранск, 12-15 июля 2016 года), (г. Саранск, 16-20 июля 2018 г.);

2) Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 6-11 июля 2018 г.);

3) Международная научная конференция «Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании» (г. Ульяновск, УлГТУ, 28-30 апреля 2016 г.);

4) II Международная конференция и молодёжная школа Информационные технологии и нанотехнологии (г. Самара, 17-19 мая 2016 г.);

5) Международные научные конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых (г. Саранск, 28-30 августа 2015 года), (г. Саранск, 12-16 июля 2017 года);

6) Семинар ИПМ им. М. В. Келдыша (г. Москва, 29 сентября 2016 г.);

7) Конференция молодых ученых МГУ им. Н.П. Огарёва (г. Саранск, 24 мая 2017 г.);

8) Международные научно-технические конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (г. Пенза, 30-31 мая 2017 г.), (г. Пенза, 4-6 декабря 2017 г.);

9) Огарёвские чтения (г. Саранск, 9 декабря 2015 г.), (г. Саранск, 20 декабря 2017 г.);

10) Международная школа-конференция «Соболевские чтения» (г. Новосибирск, 20-23 августа 2017 г.).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 110 страниц. Список литературы содержит 75 библиографических ссылок.

1. Применение локальной асимптотической эквивалентности к исследованию устойчивости математических моделей

1.1 Основные понятия и положения

Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1}$$

где $x \in R^n, f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n), T \geq 0, f(t, 0) \equiv 0.$

Будем считать, что у системы вида (1.1) из множества Ξ существует совокупность решений $x(t : t_0, x^{(0)})$, определённых при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$, где D — некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Обозначим через $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$ решения с начальными данными $(t_0, x^{(0)})$ и $(t_0, y^{(0)})$ системы дифференциальных уравнений (1.1) и системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \tag{1.2}$$

принадлежащей множеству Ξ, соответственно.

Обозначим через $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ — i-ые компоненты решений систем (1.1) и (1.2) соответственно, для которых $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, $U, V \subseteq D$ — некоторые области, содержащие окрестность нуля.

Приведем основные понятия и положения теории асимптотической эквивалентности, содержащиеся в работах [13], [28].

Определение 1.1.1. *[13] Системы* (1.1) *и* (1.2) *называются асимптотически эквивалентными по Левинсону относительно функции* $\mu(t)$*, если при*

$\forall\, t_0 \geq T_0 \geq T$ существует биекция $P : R^n \to R^n$ такая, что

$$x(t : t_0, x^{(0)}) = y(t : t_0, Px^{(0)}) + o(\mu(t)),$$

$$y(t : t_0, y^{(0)}) = x(t : t_0, P^{-1}y^{(0)}) + o(\mu(t))$$

при $t \to +\infty$ для всех решений $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$, определенных при всех $t \geq t_0$, $\mu : [T, +\infty) \to [0, +\infty)$ – фиксированная функция для всего множества Ξ.

Определение 1.1.2. *[13] Если P – гомеоморфизм, то системы* (1.1) *и* (1.2) *называются асимптотически эквивалентными по Немыцкому относительно функции μ.*

Определение 1.1.3. *[13] Системы* (1.1) *и* (1.2) *называются асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функции $\mu(t)$, если для эквивалентных уравнений* (1.1) *и* (1.2) *при всех $t_0 \geq T_0 \geq T$ существуют два отображения $P_1 : R^n \to R^n$ и $P_2 : R^n \to R^n$ такие, что*

$$x(t : t_0, x^{(0)}) = y(t : t_0, P_2x^{(0)}) + o(\mu(t)),$$

$$y(t : t_0, y^{(0)}) = x(t : t_0, P_1y^{(0)}) + o(\mu(t))$$

при $t \to +\infty$ для всех решений $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$, определенных при всех $t \geq t_0$, $\mu : [T, +\infty) \to [0, +\infty)$ – фиксированная функция для всего множества Ξ.

Пусть $N = \{1, .., n\}$ и $M_0 \subseteq N$. Не ограничивая общности, будем считать, что множество $M_0 = \{1, ..., q\}$, $q \leq n$. В случае, если M_0 состоит из произвольного набора чисел i_1, $i_2, ...,$ i_q из множества N, то можно сделать перенумерацию координат x_i, $i \in M_0$, вектора x.

Фиксируя $i \in M_0$, запишем определения устойчивости, неустойчивости, асимптотической устойчивости и притяжимости решения относительно переменной x_i из работы [44] в следующей форме.

Определение 1.1.4. *[44] Невозмущенное движение $x = 0$ системы* (1.1) *называется устойчивым относительно переменной x_i, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $||x_0|| < \delta$ следует $|x_i(t : t_0, x_0)| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.*

Определение 1.1.5. *[44] Движение $x = 0$ называется неустойчивым относительно переменной x_i, если существуют $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ такие, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точка x^* с $||x^*|| < \delta$ и момент времени $t^* > t_0$, для которых $|x_i(t^* : t_0, x^*)| \geq \varepsilon$.*

Определение 1.1.6. *[44] Движение $x = 0$ называется притягивающим относительно переменной x_i, если для любого $t_0 \geq 0$ существует $\Delta(t_0) > 0$ такое, что каждое решение $x(t : t_0, x_0)$ с $||x_0|| < \Delta$ определено для всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t : t_0, x_0)| = 0;$$

при этом будем говорить, что шар $||x|| < \Delta$ лежит в области притяжения точки $x = 0$ относительно x_i для начального момента t_0.

Определение 1.1.7. *[44] Движение $x = 0$ называется асимптотически устойчивым относительно переменной x_i, если оно является устойчивым относительно переменной x_i и притягивающим относительно переменной x_i.*

Следующие определения развивают идеи Е. В. Воскресенского о покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$ из работ [13].

Определение 1.1.8. *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) будем называть локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, если при фиксированном $t_0 \geq T$ существуют два непрерывных отображения $P^{(1)} : V \to U$ и $P^{(2)} : U \to V$, $P^{(1)} = 0$, $P^{(2)} = 0$, такие что для всех $i \in M_0$*

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)}x^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \tag{1.3}$$

$$y_i(t : t_0, y^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)}y^{(0)}) + o(\mu_i(t)) \tag{1.4}$$

при $t \to \infty$, $\mu_i \in C([T, +\infty), [0, +\infty))$, $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$.

Определение 1.1.9. *Если в определении 1.1.8 положить $M_0 = \{1, \ldots, n\}$, то системы (1.1) и (1.2) будем называть локально асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$.*

Замечание 1.1.1. *Определение 1.1.9 обобщает определение локально асимптотически эквивалентных систем по Брауеру относительно функции* $\mu(t)$ *из работы [13]. Для этого достаточно в определении 1.1.9 положить* $\mu_i(t) \equiv \mu(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 1.1.10. *Если в определении 1.1.8 положить* $P^{(2)} = {P^{(1)}}^{-1}$ *, то системы* (1.1) *и* (1.2) *назовем локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Левинсону относительно функций* $\mu_i(t)$. *Если же кроме этого* $M_0 = \{1, \ldots, n\}$, *то системы* (1.1) *и* (1.2) *назовем локально асимптотически эквивалентными по Левинсону относительно функций* $\mu_i(t)$.

Определение 1.1.11. *Пусть в определении 1.1.8* $P^{(2)} = {P^{(1)}}^{-1}$ *и отображения* $P^{(1)}$ *и* $P^{(2)}$ *являются непрерывными. Тогда системы* (1.1) *и* (1.2) *назовем локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Немыцкому относительно функций* $\mu_i(t)$. *Если же* $M_0 = \{1, \ldots, n\}$, *то системы* (1.1) *и* (1.2) *назовем локально асимптотически эквивалентными по Немыцкому относительно функций* $\mu_i(t)$.

Определение 1.1.12. *Будем говорить, что система* (1.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по переменным* x_i, $i \in M_0$, *если каждая компонента* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, *любого решения* $x(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U$, *системы* (1.1) *обладает свойством*

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i < \infty. \tag{1.5}$$

И наоборот, для любого набора чисел b_i, $i \in M_0$, *таких, что* $(b_1, ..., b_n) \in V$, *существует решение* $x(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U$, *системы* (1.1) *для компонент* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, *которого справедливы равенства* (1.5).

Определение 1.1.13. *Если в определении 1.1.12 положить* $M_0 = \{1, \ldots, n\}$, *то будем говорить, что система* (1.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие.*

В работах [13] показано, что из покомпонентной асимптотической эквивалентности систем по Брауеру вообще говоря не следует сохранение свойств устойчивости и асимптотической устойчивости соответствующих компонент нулевого решения. Это верно и для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем по Брауеру.

Одним из условий сохранения свойств устойчивости и асимптотической устойчивости соответствующих компонент нулевого решения является требование равномерности $o(\mu_i(t))$ по начальным точкам $x^{(0)}$, $y^{(0)}$.

Пусть при фиксированном $t_0 \geq T$ для i-ых компонент решений системы (1.1) и (1.2) существуют два непрерывных отображения $P^{(1)} : V \to U$ и $P^{(2)} : U \to V$, $P^{(1)}(0) = 0$, $P^{(2)}(0) = 0$ такие, что выполняются равенства

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)}x^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t, t_0, x^{(0)}), \tag{1.6}$$

$$y_i(t : t_0, y^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)}y^{(0)}) + \mu_i(t)\gamma_i(t, t_0, y^{(0)}), \tag{1.7}$$

где $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $\gamma_i(t, t_0, y^{(0)}) \in C^{(0,0,1)}([T, +\infty) \times [T, +\infty) \times R^n, R)$, причем $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$ и $\gamma_i(t, t_0, y^{(0)})$ стремятся к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||x^{(0)}|| \to 0$, $x^{(0)} \in U$ и $||y^{(0)}|| \to 0$, $y^{(0)} \in V$ соответственно.

Определение 1.1.14. *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1.1) *и* (1.2) *будем называть равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, *если выполняются равенства* (1.6) *и* (1.7), *причем* $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$ *и* $\gamma_i(t, t_0, y^{(0)})$ *стремятся к нулю при* $t \to +\infty$ *равномерно по* $x^{(0)} \in U$ *и* $y^{(0)} \in V$ *соответственно.*

1.2 Условия частичной устойчивости нулевого решения систем на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности

В работах [52], [60] приведены условия, при выполнении которых для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем свойства устойчивости по части переменных сохраняются. Запишем эти условия в следующей форме.

Теорема 1.2.1. *Пусть для решений системы* (1.1) *и* (1.2) *справедливы равенства* (1.6) *и* (1.7).

Тогда если у одной системы существует нулевое решение, устойчивое (асимптотически устойчивое) по i-ой переменной, $i \in M_0$, и $|\mu_i(t)| \le d_i$ при всех $t \ge T$ ($\mu_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$), то вторая система имеет так же устойчивое (асимптотически устойчивое) по i-ой переменной нулевое решение, $i \in M_0$; кроме того, если одна система имеет локальное асимптотическое равновесие по i-ой переменной, $i \in M_0$, и

$$\lim_{t\to\infty} \mu_i(t)\delta_i(t, t_0, x^{(0)}) = d_i, \quad d_i \in R^1,\ x^{(0)} \in U, \tag{1.8}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mu_i(t)\gamma_i(t, t_0, y^{(0)}) = q_i, \quad q_i \in R^1,\ y^{(0)} \in V, \tag{1.9}$$

то этим же свойством будут обладать и решения второй системы.

Доказательство. Будем проводить доказательство теоремы при каждом фиксированном $i \in M_0$.

Пусть у системы (1.2) существует нулевое решение, устойчивое по переменной y_i. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и t_0 можно указать $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0)$ такое, что из $||y^{(0)}|| < \delta_0$ следует

$$|y_i(t : t_0, y^{(0)})| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ t \ge t_0.$$

Сопоставим начальным значениям $y^{(0)} \in V$ решений системы (1.2) начальные значения $x^{(0)} = P^{(1)}y^{(0)}$ соответствующих решений системы (1.1). Тогда, учитывая, что $P^{(1)}(0) = 0$ и $P^{(1)}$ является непрерывным отображением, получим, что существует достаточно малое $\delta_1 > 0$ такое, что

$$||x^{(0)}|| = ||P^{(1)}y^{(0)}|| < \delta_1.$$

Поскольку $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$ стремится к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||x^{(0)}|| \to 0$, $x^{(0)} \in U$ и $\mu_i(t)$ – ограниченная функция при всех $t \ge T$, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при $||x^{(0)}|| < \delta_2$ будет выполняться

$$\mu_i(t)|\delta_i(t : t_0, x^{(0)})| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ t \ge t_0.$$

Тогда, оценивая равенство (1.6), получим:

$$|x_i(t : t_0, x^{(0)})| \le |y_i(t : t_0, y^{(0)})| + \mu_i(t)|\delta_i(t, t_0, x^{(0)})| \le \varepsilon \quad \forall\ t \ge t_0. \tag{1.10}$$

Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, заключим, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и t_0 можно указать δ такое, что из $||x^{(0)}|| < \delta$ следует справедливость (1.10), что и доказывает устойчивость нулевого решения системы (1.1) по переменной x_i.

Учитывая оценку (1.10) и то, что $\mu_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, из асимптотической устойчивости по переменной y_i нулевого решения системы (1.2) будет следовать асимптотическая устойчивость по переменной x_i нулевого решения системы (1.1).

Пусть теперь решения системы (1.2) при $y^{(0)} \in V$ имеют локальное асимптотическое равновесие по переменной y_i. Тогда, учитывая, что

$$\lim_{t \to +\infty} y_i(t : t_0, y^{(0)}) = c_i, \ c_i \in R^1, \quad y^{(0)} \in V, \tag{1.11}$$

из (1.6) и (1.8) следует

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = c_i + d_i, \quad x^{(0)} \in U,$$

где $x^{(0)} = P^{(1)} y^{(0)}$.

Покажем теперь, что для любых чисел b_i таких, что $(b_1, ..., b_n) \in V$, существует решение $x(t : t_0, x^{(0)})$ системы (1.2) такое, что справедливо равенство (1.5).

Пусть выполняется (1.8). Зафиксируем b_i и положим $c_i = b_i - d_i$.

Так как решения системы (1.2) при $y^{(0)} \in V$ имеют локальное асимптотическое равновесие по переменной y_i, то для фиксированных чисел c_i, $i \in M_0$, таких что $(c_1, ..., c_n) \in V$, существуют компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (1.2) такие, что справедливы пределы (1.11). Тогда, переходя к пределу в равенствах (1.6) получим (1.5). Следовательно, система (1.1) имеет локальное асимптотическое равновесие по переменной x_i.

Аналогично доказывается, что при выполнении (1.7) из устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения системы (1.1) по переменной x_i следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) нулевого решения системы (1.2) по переменной y_i; кроме того, из локального асимптотического равновесия по переменной x_i системы (1.1) следует локальное асимптотическое равновесие по переменной y_i системы (1.2).

Доказательство завершено.

Теорема 1.2.2. *Пусть системы* (1.1) *и* (1.2) *локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, $P^{(1)}(0) = 0$ *и* $P^{(2)}(0) = 0$, *причем отображения* $P^{(1)}$ *и* $P^{(2)}$ *являются непрерывными в соответствующих областях определения.*

Тогда, если для функции $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, *такой что*

$$\mu_i(t) \to +\infty \quad \textit{при} \;\; t \to +\infty, \tag{1.12}$$

выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_{i,1}(t_0, y^{(0)}) \neq 0, \quad y^{(0)} \in V_1, \tag{1.13}$$

$$\underline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_{i,2}(t_0, y^{(0)}) \neq 0, \quad y^{(0)} \in V_2, \tag{1.14}$$

где V_1, $V_2 \subset V$ *– непустые подмножества, содержащие точки из сколь угодно малой проколотой окрестности нуля, то нулевые решения систем* (1.1), (1.2) *неустойчивы по каждой из переменных* x_i, y_i, $i \in M_0$, *соответственно.*

Доказательство. Зафиксируем $i \in M_0$ и проведем доказательство теоремы в предположении, что справедливо соотношение (1.13). Доказательство для соотношения (1.14) проводится аналогично.

Из определения верхнего предела следует, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует момент времени $t_1 > t_0$, начиная с которого выполняется неравенство

$$\frac{y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} < q_i(t_0, y^{(0)}) + \varepsilon_0 \quad \text{при всех } t > t_1 \tag{1.15}$$

и существует подпоследовательность $\{t_k\}$, $k = 1, 2, ...$ такая, что

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{y_i(t_k : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t_k)} = q_{i,1}(t_0, y^{(0)}) \quad \text{при } t_k \to +\infty.$$

Откуда следует, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ найдется номер $k_0 \in \mathbb{N}$ и момент времени $t_2 > t_0$, такие что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$q_{i,1}(t_0, y^{(0)}) - \varepsilon_0 < \frac{y_i(t_k : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} \quad \text{при} \;\; t_k > t_2. \tag{1.16}$$

Зафиксируем t_0 и разобьем область V на два подмножества:

$$V^{+}_{i,\,t_0} = \left\{ y^{(0)} : y^{(0)} \in V \cap V_1,\ q_{i,1}(t_0, y^{(0)}) > 0 \right\},$$
$$V^{-}_{i,\,t_0} = \left\{ y^{(0)} : y^{(0)} \in V \cap V_1,\ q_{i,1}(t_0, y^{(0)}) < 0 \right\}.$$

Фиксируя достаточно малое $\delta > 0$, выберем y^* такое, что $||y^*|| < \delta$. Возможны три случая:

1) $V^{+}_{i,\,t_0}$, $V^{-}_{i,\,t_0}$ – непустые подмножества,

2) $V^{+}_{i,\,t_0}$ – непустое подмножество, $V^{-}_{i,\,t_0}$ – пустое множество,

3) $V^{+}_{i,\,t_0}$ – пустое подмножество, $V^{-}_{i,\,t_0}$ – непустое множество.

Пусть выполняются условия 1) или 2). Учитывая (1.12), выберем $y^* \in V^{+}_{i,\,t_0}$ и момент времени $t^* > t_1$ такие, что для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ справедливо неравенство

$$\varepsilon_1 < (q_{i,1}(t_0, y^*) - \varepsilon_0)\mu_i(t^*). \tag{1.17}$$

Тогда из оценок (1.16) и (1.17) следует, что $y_i(t^* : t_0, y^*) > \varepsilon_1$. Отсюда следует неустойчивость нулевого решения $y \equiv 0$ системы (1.2) по переменной y_i.

Пусть теперь выполняются условия 1) или 3). Учитывая (1.12), выберем $y^* \in V^{-}_{i,\,t_0}$ и момент времени $t^{**} > t_1$ такие, что для некоторого $\varepsilon_2 > 0$ справедливо неравенство

$$(q_{i,1}(t_0, y^*) + \varepsilon_0)\mu_i(t^{**}) < -\varepsilon_2. \tag{1.18}$$

С учётом оценок (1.15) и (1.18) получим $y_i(t^{**} : t_0, y^*) < -\varepsilon_2$, откуда и следует неустойчивость нулевого решения $y \equiv 0$ системы (1.2) по переменной y_i.

Для доказательства неустойчивости нулевого решения $x \equiv 0$ системы (1.1) по переменной x_i запишем равенство (1.6) в виде

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{x_i(t : t_0, x^{(0)}) - y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} = 0$$

и найдем верхний предел при $t \to +\infty$ от обеих частей равенства. Учитывая (1.13), из последнего равенства получим

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{x_i(t : t_0, x^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_{i,1}(t_0,\ P^{(2)} x^{(0)}).$$

Определяя множества

$$U_{i,t_0}^{+} = \left\{ x^{(0)} : x^{(0)} \in U,\ P^{(2)}x^{(0)} \in V_1,\ q_i(t_0, P_2 x^{(0)}) > 0 \right\},$$
$$U_{i,t_0}^{-} = \left\{ x^{(0)} : x^{(0)} \in U,\ \ P^{(2)}x^{(0)} \in V_1,\ q_i(t_0, P_2 x^{(0)}) < 0 \right\},$$

проведем доказательство неустойчивости нулевого решения $x \equiv 0$ системы (1.2) по переменной x_i аналогично доказательству неустойчивости нулевого решения $y \equiv 0$ системы (1.2) по переменной y_i.

Доказательство завершено.

1.3 Оценки компонент решений линейной системы

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{1.19}$$

где $y \in R^n$, A – постоянная $(n \times n)$-матрица.

Пусть матрица A имеет $r \leq n$ различных собственных значений

$$\lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_r,$$

где каждому λ_k отвечает n_k групп решений системы (1.19) [27]. Причем число решений в каждой из n_k, $k = 1, ..., r$ групп равно

$$m_{k,1}, ..., m_{k,j}, ..., m_{k,n_k}, \quad j = \overline{1, n_k}.$$

Представим фундаментальную матрицу системы (1.19) в виде:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t) &= [\hat{Y}^{(1)}(t), ..., \hat{Y}^{(k)}(t), ..., \hat{Y}^{(r)}(t)], \\ \hat{Y}^{(k)}(t) &= [\hat{Y}_1^{(k)}(t), ..., \hat{Y}_j^{(k)}(t), ..., \hat{Y}_{n_k}^{(k)}(t)], \\ \hat{Y}_j^{(k)}(t) &= [\hat{y}_1^{(k,j)}(t), ..., \hat{y}_l^{(k,j)}(t), ..., \hat{y}_{m_{k,j}}^{(k,j)}(t)]. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Здесь $\hat{y}_l^{(k,j)}(t)$ – частные решения системы (1.19), имеющие вид

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1^{(k,j)}(t) &= e^{\lambda_k t} c_1^{(k,j)}, \\
\hat{y}_2^{(k,j)}(t) &= e^{\lambda_k t} \left(\frac{t}{1!} c_1^{(k,j)} + c_2^{(k,j)} \right), \\
&\dots \\
\hat{y}_{m_{k,j}-1}^{(k,j)}(t) &= e^{\lambda_k t} \left(\frac{t^{m_{k,j}-2}}{(m_{k,j}-2)!} c_1^{(k,j)} + \frac{t^{m_{k,j}-3}}{(m_{k,j}-3)!} c_2^{(k,j)} + \dots + \frac{t}{1!} c_{m_{k,j}-2}^{(k,j)} + c_{m_{k,j}-1}^{(k,j)} \right), \\
\hat{y}_{m_{k,j}}^{(k,j)}(t) &= e^{\lambda_k t} \left(\frac{t^{m_{k,j}-1}}{(m_{k,j}-1)!} c_1^{(k,j)} + \frac{t^{m_{k,j}-2}}{(m_{k,j}-2)!} c_2^{(k,j)} + \dots + \frac{t}{1!} c_{m_{k,j}-1}^{(k,j)} + c_{m_{k,j}}^{(k,j)} \right),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

где $c_l^{(k,j)}$ – некоторые константы, $l = \overline{1, m_{k,j}}$, $j = \overline{1, n_k}$, $k = \overline{1, r}$.

Обозначим вещественные части собственных значений матрицы A через

$$\Lambda_1 = Re\ \lambda_1,\ \dots,\ \Lambda_r = Re\ \lambda_r.$$

Нормированная фундаментальная матрица в точке $t = t_0$ имеет вид

$$Y(t - t_0) = \hat{Y}(t)\ \hat{Y}^{-1}(t_0).$$

Обозначим через $y_{ij}(t - t_0)$, $i, j = \overline{1, n}$, элементы нормированной фундаментальной матрицы $Y(t - t_0)$ и введем множества $K_i = \{j \ : \ y_{ij}(t - t_0) \equiv \equiv 0,\ \forall\ t, t_0 \geq T\}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда для элементов i-ой строки нормированной фундаментальной матрицы $Y(t - t_0)$ справедливы оценки

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq D_0 e^{\beta_i (t - t_0)} \rho^{b_i}(t - t_0), \quad t \geq t_0, \quad j \in N \backslash K_i,\ i = \overline{1, n}, \tag{1.22}$$

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq D_0 e^{\alpha_i (t - t_0)} \rho^{a_i}(t - t_0), \quad t \leq t_0, \quad j \in N \backslash K_i,\ i = \overline{1, n}, \tag{1.23}$$

где

$$\rho^{\nu}(t) = \begin{cases} 1, \text{если } |t| < 1, \\ |t|^{\nu}, \text{если } |t| \geq 1, \end{cases}$$

где $D_0 > 0$ – некоторая константа. Здесь в качестве β_i и α_i выбираются соответственно максимальное и минимальное из Λ_k, когда индекс j пробегает по всем ненулевым элементам $y_{ij}(t - t_0)$ i-ой строки нормированной фундаментальной матрицы, b_i, a_i – максимальные из степеней полиномов при ненулевых элементах жордановых клеток, соответствующих β_i и α_i.

Рассмотрим i-ую строку фундаментальной матрицы $\hat{Y}(t)$, состоящую из i-ых компонент $y_{l,i}^{(k,j)}(t)$ частных решений вида (1.21) системы (1.19). Они имеют вид

$$\hat{y}_{l,i}^{(k,j)}(t) = e^{\lambda_k t}\left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}c_{1i}^{(k,j)} + \frac{t^{l-2}}{(l-2)!}c_{2i}^{(k,j)} + ... + \frac{t}{1!}c_{l-1,i}^{(k,j)} + c_{li}^{(k,j)}\right) \qquad (1.24)$$

Будем предполагать, что среди i-ых компонент частных решений системы (1.19) существуют ненулевые, отвечающие λ_k таким, что $\Lambda_k > 0$.

Тогда полагая $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)$ и учитывая, что $\beta_i > 0$, убеждаемся в справедливости (1.12).

Предположим вначале, что собственные значения λ_k – вещественные числа. В этом случае $\Lambda_k = \lambda_k$. Тогда получим:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\hat{y}_{l,i}^{(k,j)}}{\mu_i(t)} = \hat{h}_{l,i}^{(k,j)} \neq 0, \qquad (1.25)$$

где $\hat{h}_{l,i}^{(k,j)}$ равны сумме ненулевых коэффициентов $c_{li}^{(k,j)}$ при максимальной из степеней полиномов, входящих в группы решений, отвечающих Λ_k.

Заметим, что выражение (1.25) справедливо и для элементов $y_{ij}(t-t_0)$ нормированной фундаментальной матрицы $Y(t)$. Действительно, так как элементы нормированной фундаментальной матрицы представляют собой линейные комбинации элементов $\hat{y}_{l,i}^{(k,j)}(t)$, то выражение (1.25) будет выполняться при некоторых $h_{l,i}^{(k,j)} \neq 0$. Далее, поскольку

$$y_i(t:t_0,y^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t-t_0)y_j^{(0)},\ i=\overline{1,n}, \qquad (1.26)$$

то существуют $V_0 \subset V$ и $q_i(t_0,y^{(0)})$, такие что выполняется

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y_i(t:t_0,y^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_i(t_0,y^{(0)}) \neq 0, \quad y^{(0)} \in V_0. \qquad (1.27)$$

Теперь предположим, что собственные значения λ_k – комплексные числа. В этом случае $\Lambda_k = Re\,\lambda_k$ и в качестве частных решений системы (1.19) возьмем $Re\,(\hat{y}_l^{(k,j)}(t))$. В этом случае в частных решениях будут присутствовать слагаемые, содержащие функции $\cos\left(Im\,(\lambda_k t)\right)$ и $\sin\left(Im\,(\lambda_k t)\right))$.

Тогда, проводя аналогичные рассуждения, получим справедливость хотя бы одного из утверждения (1.13) и (1.14) теоремы 1.2.2.

Учитывая неравенства (1.22) и (1.23), получим следующие оценки для элементов i-й строки фундаментальной матрицы для любого $\varepsilon > 0$:

$$|y_{ij}(t-t_0)| \le D_0 e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \ge t_0, \quad j \in N \backslash K_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{1.28}$$

$$|y_{ij}(t-t_0)| \le D_0 e^{(\alpha_i-\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \le t_0, \quad j \in N \backslash K_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{1.29}$$

1.4 Исследование асимптотики поведения решений математической модели брутто-реакции пиролиза этана

Рассмотрим брутто-реакцию пиролиза этана [15], [31]:

$$\begin{aligned} C_2H_6 &\to C_2H_4 + H_2, \\ 2C_2H_6 &\to C_2H_4 + 2CH_4. \end{aligned}$$

Математическая модель реакции имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -k_1c_1 - 2k_2c_1^2 \\ \dot{c}_2 = k_1c_1 + k_2c_1^2 \\ \dot{c}_3 = k_1c_1 \\ \dot{c}_4 = 2k_2c_1^2 \end{cases}, \tag{1.30}$$

здесь $t \ge 0$, c_i $(i = \overline{1,4})$ – концентрации веществ $C_2H_6, C_2H_4, H_2, CH_4$, соответственно, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – константы скоростей химических реакций. Так как концентрации c_i представляют собой неотрицательные величины, то поведение решений системы достаточно рассматривать при $c_i \ge 0$. Для системы (1.30) ставится задача определения положения равновесия по заданным начальным концентрациям

$$c_1(0) = c_1^{(0)}, c_2(0) = c_2^{(0)}, c_3(0) = c_3^{(0)}, c_4(0) = c_4^{(0)}.$$

Приравнивая правую часть системы (1.30) к нулю, находим, что положения равновесия образуют множество векторов вида

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

где $c_i \in R^1_+, i = \overline{2,4}$.

Фиксируя некоторые $c_i^* \neq 0$ $(i = \overline{2,4})$ и используя определения локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности, исследуем на устойчивость по части переменных ненулевое положение равновесия $c^* = colon(0, c_2^*, c_3^*, c_4^*)$, а так же асимптотику решений системы (1.30) в окрестности этого положения равновесия.

Для этого в системе (1.30) сделаем замену переменных

$$c = x + c^*. \tag{1.31}$$

Тогда система (1.30) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -k_1 x_1 - 2k_2 x_1^2 \\ \dot{x_2} = k_1 x_1 + k_2 x_1^2 \\ \dot{x_3} = k_1 x_1 \\ \dot{x_4} = 2k_2 x_1^2 \end{cases}. \tag{1.32}$$

Заметим, что вид систем (1.30) и (1.32) совпадает. Таким образом, задача сводится к исследованию асимптотики поведения решений в окрестности тривиального решения $x \equiv 0$ системы (1.32).

Так как матрица линейного приближения

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -k_1 y_1 \\ \dot{y_2} = k_1 y_1 \\ \dot{y_3} = k_1 y_1 \\ \dot{y_4} = 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

системы (1.32) имеет одно отрицательное и три нулевых собственных значения, алгебраическая и геометрическая кратность которых совпадает и равна 3, то нулевое решение системы (1.33) также будет устойчивым. Вместе с тем, согласно [27], имеет место критический случай, и, следовательно, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению неприменима [25].

Исследуем частичную устойчивость тривиального положения равновесия системы (1.32) с использованием локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру.

Используя определение 1.1.8, установим соответствие между начальными значениями $x_1(0) = x_1^{(0)}$, $x_2(0) = x_2^{(0)}$, $x_3(0) = x_3^{(0)}$, $x_4(0) = x_4^{(0)}$ решений

$$x_1(t : t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1 x_1^{(0)} e^{-k_1 t}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})},$$

$$x_2(t : t_0, x^{(0)}) = x_2^{(0)} + \frac{k_1}{4k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})\right) + \\ + \frac{x_1^{(0)}}{2} \frac{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})},$$

$$x_3(t : t_0, x^{(0)}) = x_3^{(0)} + \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})\right),$$

$$x_4(t : t_0, x^{(0)}) = x_4^{(0)} - \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})\right) + \\ + x_1^{(0)} \frac{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})}$$

нелинейной системы (1.32) и начальными значениями $y_1(0) = y_1^{(0)}$, $y_2(0) = y_2^{(0)}$, $y_3(0) = y_3^{(0)}$, $y_4(0) = y_4^{(0)}$ решений

$$\begin{aligned} y_1(t : t_0, y^{(0)}) &= y_1^{(0)} e^{-k_1 t}, \\ y_2(t : t_0, y^{(0)}) &= y_2^{(0)} + y_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t}), \\ y_3(t : t_0, y^{(0)}) &= y_3^{(0)} + y_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t}), \\ y_4(t : t_0, y^{(0)}) &= y_4^{(0)}, \end{aligned}$$

линейной системы (1.33).

Для этого определим отображения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ из условий

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x_i(t) - y_i(t)}{\mu_i(t)} = 0, \quad i = \overline{1, 4},$$

где в качестве функций $\mu_i(t)$ выбраны следующие:

$$\mu_1(t) = e^{-k_1 t}, \quad \mu_2(t) = \mu_3(t) = \mu_4(t) = 1 - e^{-k_1 t}. \tag{1.34}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&y_1^{(0)} = P_1^{(2)} x_1^{(0)} \equiv \frac{k_1 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}},\\
&y_2^{(0)} = P_2^{(2)} x_2^{(0)} \equiv x_2^{(0)} + \frac{k_1}{4k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}\right) - \frac{x_1^{(0)}}{2} \frac{k_1 - 2k_2 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}},\\
&y_3^{(0)} = P_3^{(2)} x_3^{(0)} \equiv x_3^{(0)} + \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}\right) - \frac{k_1 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}},\\
&y_4^{(0)} = P_4^{(2)} x_4^{(0)} \equiv x_4^{(0)} - \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}\right) + x_1^{(0)},\\
&P^{(2)} = colon(P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, P_4^{(2)}).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Обратное отображение $P^{(1)} = P^{(2)^{-1}}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&x_1^{(0)} = P_1^{(1)} y_1^{(0)} \equiv \frac{k_1 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}},\\
&x_2^{(0)} = P_2^{(1)} y_2^{(0)} \equiv y_2^{(0)} + \frac{k_1}{4k_2} \ln\left(1 - 2\tfrac{k_2}{k_1} y_1^{(0)}\right) + y_1^{(0)} \frac{k_2 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}},\\
&x_3^{(0)} = P_3^{(1)} y_3^{(0)} \equiv y_3^{(0)} + y_1^{(0)} + \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 - 2\frac{k_2}{k_1} y_1^{(0)}\right),\\
&x_4^{(0)} = P_4^{(1)} y_4^{(0)} \equiv y_4^{(0)} + 2y_1^{(0)} - \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 - 2\frac{k_2}{k_1} y_1^{(0)}\right) - \frac{k_1 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}},\\
&P^{(1)} = colon(P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, P_4^{(1)}).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Тогда области U и V могут быть построены следующим образом:

$$V = V_1 \times V_2 \times V_3 \times V_4, \quad V_1 = \left(-\infty, \frac{k_1}{2k_2}\right), \quad V_i = (0, +\infty), \quad i = \overline{2,4},$$

$$U = U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4, \quad U_1 = \left(\frac{k_1}{2k_2}, +\infty\right), \quad U_i = \left(\frac{k_1}{2k_2}, +\infty\right), \quad i = \overline{2,4}.$$

Величины $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i = \overline{1,4}$, имеют вид:

$$\delta_1(t, t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1 x_1^{(0)} e^{-k_1 t}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})};$$

$$\delta_2(t, t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1}{4k_2(1 - e^{-k_1 t})} \ln\left(\frac{1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})}{1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}}\right) +$$

$$+ \frac{x_1^{(0)}}{2} \frac{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})^2 + (k_1 - 2k_2 x_1^{(0)})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t}))}{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t}))};$$

$$\delta_3(t, t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1}{2k_2(1 - e^{-k_1 t})} \ln\left(\frac{1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})}{1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}}\right) +$$

$$+ \frac{k_1 x_1^{(0)} e^{-k_1 t}}{(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})(1 - e^{-k_1 t})};$$

$$\delta_4(t, t_0, x^{(0)}) = -\frac{k_1}{2k_2(1 - e^{-k_1 t})} \ln\left(\frac{1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})}{1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}}\right) +$$

$$+ x_1^{(0)} \left(\frac{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})} - \frac{1}{1 - e^{-k_1 t}}\right)$$

и удовлетворяют условиям теоремы 1.2.1.

Заметим, что системы (1.32) и (1.33) не удовлетворяют определению асимптотической эквивалентности в смысле работы [13], так как области определения отображений $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ не совпадают с пространством R^n, и, следовательно, во всем пространстве R^n не существует отображений, переводящих начальные данные одной системы в начальные данные другой так, чтобы норма разности соответствующих решений стремилась к нулю при $t \to +\infty$.

Так как $P^{(1)} = P^{(2)^{-1}}$, то системы (1.32) и (1.33) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Левинсону в смысле определения (1.1.10).

Учитывая, что отображения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ непрерывны в нуле, $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$ стремятся к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||x^{(0)}|| \to 0$, $x^{(0)} \in U$, получаем, что все условия теоремы 1.2.1 выполнены.

Поскольку нулевое решение системы (1.33) асимптотически устойчиво по первой компоненте и имеет асимптотическое равновесие по остальным компонентам, на основании теоремы 1.2.1 можно сделать вывод, что этими же свойствами обладают решения системы (1.32) в окрестности нулевого положения равновесия.

Учитывая замену переменных (1.31), можно сделать следующие выводы об асимптотическом поведении решений системы (1.30) в окрестности положения равновесия c^*:

- каждое положение равновесия c^* системы (1.30) является асимптотически устойчивым по переменной c_1;
- решения системы (1.30), начинающиеся в окрестности положения равновесия c^*, имеют асимптотическое равновесие по переменным c_2, c_3, c_4, причем при $t \to +\infty$ эти решения стремятся к нему.

Поскольку правые части систем (1.30) и (1.32) совпадают, из асимптотической эквивалентности систем (1.32) и (1.33) следует асимптотическая эквивалентность систем (1.30) и (1.33). Тогда формулы (1.35) и (1.36) остаются справедливыми, если $x_i^{(0)}$ заменить на $c_i^{(0)}$.

Построим графики решений для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных по Левинсону систем (1.30) и (1.33) относительно эталонных функций (1.34), с начальными данными, связанными отображениями $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ согласно формулам (1.35) и (1.36), где $x_i^{(0)}$ заменены на $c_i^{(0)}$. В качестве начальных значений решений выбраны $c_1^{(0)} = 1$, $c_2^{(0)} = 0$, $c_3^{(0)} = 0$, $c_4^{(0)} = 0$ и $y_1^{(0)} \approx 0.78$, $y_2^{(0)} \approx 0.16$, $y_3^{(0)} \approx 0.1$, $y_4^{(0)} \approx 0.12$. Графики построены для $k_1 = 0.51$, $k_2 = 0.07$, что соответствует протеканию брутто-реакции пиролиза этана при постоянной температуре 800K.

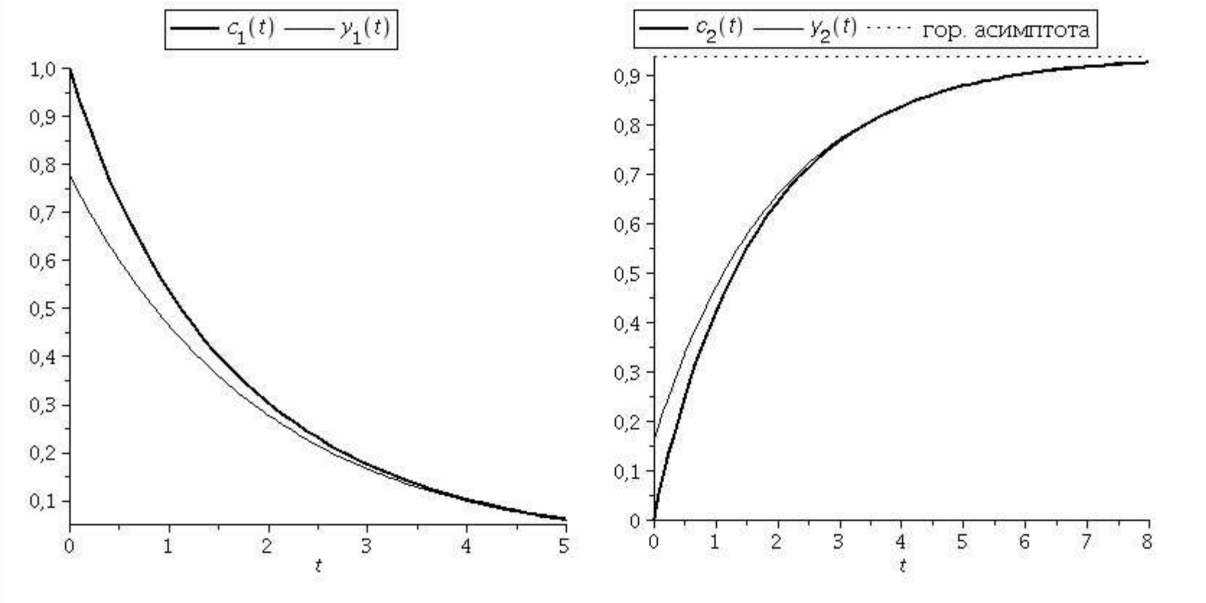

Рис. 1.1: Графики решений $c_i(t)$ и $y_i(t)$, $i = 1, 2$, между начальными значениями которых установлено взаимно-однозначное соответствие.

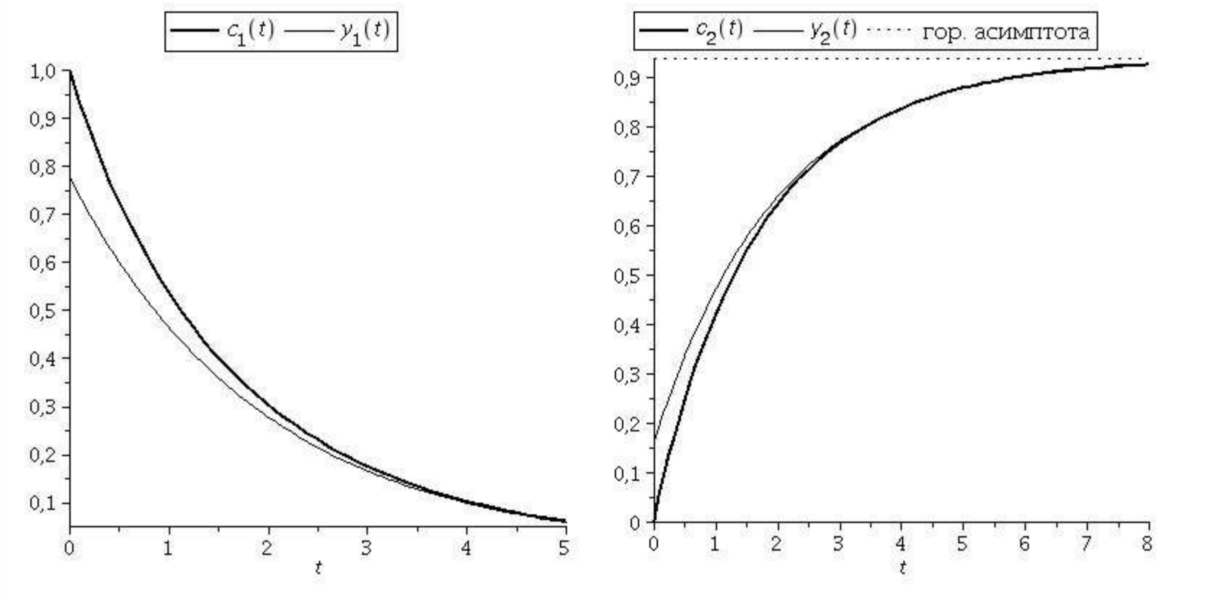

Рис. 1.2: Графики решений $c_i(t)$ и $y_i(t)$, $i = 3, 4$, между начальными значениями которых установлено взаимно-однозначное соответствие.

Положение равновесия для решений с вышеприведенными начальными значениями систем (1.30) и (1.33) совпадают и находятся по формулам

$$\lim_{t\to\infty} c_1(t : t_0, c_1^{(0)}) = \lim_{t\to\infty} y_1(t : t_0, y_1^{(0)}) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} c_2(t : t_0, c_2^{(0)}) = \lim_{t\to\infty} y_2(t : t_0, y_2^{(0)}) \approx 0.94,$$

$$\lim_{t\to\infty} c_3(t : t_0, c_3^{(0)}) = \lim_{t\to\infty} y_3(t : t_0, y_3^{(0)}) \approx 0.88,$$

$$\lim_{t\to\infty} c_4(t : t_0, c_4^{(0)}) = \lim_{t\to\infty} y_4(t : t_0, y_4^{(0)}) \approx 0.12.$$

Таким образом, на основании локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности для системы (1.30) определено положение равновесия по заданным начальным концентрациям и исследована асимптотика поведения решений в его окрестности.

2. Достаточные условия частичной устойчивости нулевого решения нелинейных систем по части переменных

2.1 Достаточные условия частичной устойчивости и неустойчивости нулевого решения нелинейных систем с возмущениями в виде векторных полиномов

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x), \tag{2.1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица, собственные значения которой определены в параграфе 1.3;

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x), \\ \dots, \\ P_n(x) \end{pmatrix},\ P_j(x) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} x^{p_j},\ x^{p_j} = x_1^{p_{j1}} x_2^{p_{j2}} \dots x_n^{p_{jn}},\ \sigma \geq 2,$$

$$p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn}), \quad |p_j| = p_{j1} + \dots + p_{jn},$$

и ее линейное приближение (1.19).

Рассмотрим задачу об исследовании частичной устойчивости нулевого решения системы (2.1).

Теорема 2.1.1. *Если выполняются неравенства*

$$p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < \alpha_i, i = \overline{1, n}, \tag{2.2}$$

по всем наборам $(p_{j1}, ..., p_{jn})$, $|p_j| = \overline{2, \sigma}$, *таким что* $d_j^{(p_j)} \neq 0, j = \overline{1, n}$, *то системы* (2.1) *и* (1.19) *являются локально покомпонентно асимптотически* *эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)$, $i=\overline{1,n}$, *и нулевое решение системы* (2.1)

1) асимптотически устойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i < 0$;

2) устойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i = 0$, *а алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают; причем нулевое решение системы* (2.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по этой переменной;*

3) неустойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i > 0$.

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([T,+\infty), R^n),\ |\varphi_i(t)| \le c_i\mu_i(t),\ t \ge t_0, c_i \ge 0,\ i=\overline{1,n}\},$$

где

$$\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0), \quad i=\overline{1,n},$$

с нормой

$$||\varphi||_\Omega = \max_{i=\overline{1,n}}\sup_{t\ge t_0}\left\{\frac{|\varphi_i(t)|}{\mu_i(t)}\right\}. \tag{2.3}$$

Определим на Ω оператор

$$L\varphi = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y(t-s)P(\varphi(s))ds, \tag{2.4}$$

где $y(t) = Y(t-t_0)y^{(0)}$.

Для компонент решения системы (1.19) справедливы оценки [6]

$$|y_i(t)| \le \sum_{j=1}^n |y_{ij}(t-t_0)|\,|y_j^{(0)}| \le De^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)||y^{(0)}||, \quad t\ge t_0,\ i=\overline{1,n}.$$

Покажем, что $L:\Omega_0 \to \Omega_0$, где $\Omega_0 = \{\varphi : ||\varphi||_\Omega \le c_0,\ c_0 \in R^1_+\}$ и c_0 достаточно мало.

Пусть $||\varphi||_\Omega \le c_0$.

Поскольку для любых наборов $(p_{j1},...,p_{jn})$, $j=\overline{1,n}$, таких что $p_{j1}+...+ p_{jn} = m$, $m=\overline{2,\sigma}$, выполняются неравенства

$$\rho^{\nu_j}(t-t_0) \le De^{\varepsilon_j(t-t_0)},\ t\ge t_0,$$

где $\nu_j = p_{j1}m_1 + ... + p_{jn}m_n$, $\varepsilon_j > 0$, и неравенства

$$e^{\alpha_i(t-t_0)}\rho^{a_i}(t-t_0) \le e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0),\ t \ge t_0,$$

$$\rho^{a_i}(t-s) \le \rho^{a_i}(s),\ s \ge t \ge 0,$$

оценка для i-ой компоненты ($i \in N$) оператора L при всех $t \ge t_0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
|(L\varphi)_i| \ &\le \ e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)\Bigg[D||y^{(0)}||\ + D\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|} \cdot \\
&\quad \cdot \int\limits_t^{+\infty} \exp\left\{(-\alpha_i + \varepsilon + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n)(s-t_0)\right\} ds\Bigg] \le \\
&\le \ e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)\Bigg[D||y^{(0)}||\ + D\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\exp\left\{(-\alpha_i + \varepsilon + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n)(t-t_0)\right\}}{\alpha_i - \varepsilon - p_{j1}\beta_1 - ... - p_{jn}\beta_n}\Bigg],
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n$.

Учитывая условие (2.2), подберем t_0 такое, что при всех $t \ge t_0$

$$\begin{aligned}
&D\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|-1} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\exp\left\{(-\alpha_i + \varepsilon + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n)(t-t_0)\right\}}{\alpha_i - \varepsilon - p_{j1}\beta_1 - ... - p_{jn}\beta_n} \le \theta < 1.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Зафиксируем $y^{(0)}$ такое, что

$$||y^{(0)}|| \le \frac{1-\theta}{D}c_0.$$

Тогда из неравенств (2.5)-(2.6) получим

$$|(L\varphi)_i| \le c_0 e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0) \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0,$$

и, следовательно,

$$||L\varphi||_{\Omega} \le c_0 \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0.$$

Отсюда следует, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$.

Покажем, что оператор L является непрерывным на Ω_0. Пусть $\{\varphi_l\}$, $l = 1, 2, ...$ – последовательность функций из Ω_0, сходящаяся к $\varphi \in \Omega_0$, то есть

$$||\varphi_l - \varphi||_\Omega \to 0 \text{ при } l \to +\infty.$$

Так как векторный полином $P(x)$ является непрерывной по x вектор-функцией, то

$$||Y(t-s)P(\varphi_l(s))||_\Omega \to 0 \text{ при } l \to +\infty,$$

при каждом фиксированном $t \geq t_0$.

Тогда, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [49] к оператору L, получим

$$||(L\varphi)_l - L\varphi||_\Omega \to 0 \text{ при } l \to +\infty.$$

Из оценок (2.5)-(2.6) следует, что множество функций

$$y = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \tag{2.7}$$

равномерно ограничено. Найдем

$$\frac{d}{dt}L\varphi(t) = Ay + P(\varphi(t)) - A\int_t^{+\infty} Y(t-s)P(\varphi(s))ds.$$

С учётом оценок (2.5)-(2.6) имеем

$$||\frac{d}{dt}L\varphi(t)||_\Omega \leq c_0$$

при всех $||\varphi||_\Omega \leq c_0$. Тогда

$$||L\varphi(t_1) - L\varphi(t_2)||_\Omega \leq c_0||t_1 - t_2||_\Omega,$$

что доказывает равностепенную непрерывность множества функций (2.7) на любом компакте из $[t_0, +\infty)$.

Следовательно, согласно теореме Арцела [49], множество функций (2.7) является компактным, а оператор L является вполне непрерывным на Ω_0.

Таким образом, все условия принципа Шаудера [49] о существовании неподвижной точки оператора L выполнены и

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \tag{2.8}$$

где φ – неподвижная точка оператора L.

Учитывая (2.4), приведём уравнение (2.8) к следующему виду

$$x(t) = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y(t-s)P(x(s))ds. \tag{2.9}$$

Оператор L построен таким образом, что, если решение $x(t:t_0, x^{(0)})$ системы (2.1) с начальными данными $x^{(0)} = x(0)$ берется в качестве $x(t)$ в уравнении (2.9), то $y(t)$ будет решением системы (1.19) с начальными данными $y^{(0)} = y(0)$. Справедливо и обратное, если $y(t)$ является решением (1.19), то $x(t)$ будет решением (2.1). Поскольку через $x^{(0)}$ проходит только одно решение $x(t:t_0, x^{(0)})$ системы (2.1), то существует только одна неподвижная точка уравнения (2.8).

Из уравнения (2.9) следует, что отображение

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t_0-s)P(x(s:t_0, x^{(0)}))ds$$

устанавливает соответствие между начальными точками решений $x(t:t_0, x^{(0)})$ и $y(t:t_0, y^{(0)})$ систем (2.1) и (1.19).

Следовательно, в качестве отображения $P^{(2)}$ можно взять

$$P^{(2)}x^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t_0-s)P(x(s:t_0, x^{(0)}))ds. \tag{2.10}$$

Отображение $P^{(1)}$ существует, что доказывается аналогично работе [13].

Покомпонентая запись уравнения (2.9) имеет вид

$$x_i(t:t_0, x^{(0)}) = y_i(t:t_0, y^{(0)}) - \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s)P_j(x(s:t_0, x^{(0)}))ds, \ i = \overline{1, n}. \tag{2.11}$$

Из (2.5) и (2.9) получим

$$|x_i(t:t_0,x^{(0)})-y_i(t:t_0,y^{(0)})|\le c_0e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0),\quad t\le t_0, \tag{2.12}$$

где $i\in N$ и справедливо $y^{(0)}=P^{(2)}x^{(0)}$.

Сопоставляя равенства (1.6) и (2.11), получим

$$\mu_i(t)\delta_i(t,t_0,x^{(0)})=-\sum_{j=1}^{n}\int_t^{+\infty}y_{ij}(t-s)P_j(x(s:t_0,x^{(0)}))ds,$$

откуда

$$\delta_i(t,t_0,x^{(0)})=-\frac{1}{\mu_i(t)}\sum_{j=1}^{n}\int_t^{+\infty}y_{ij}(t-s)P_j(x(s:t_0,x^{(0)}))ds.$$

Далее, учитывая оценки (2.5) и (2.6), заключим, что

$$|\delta_i(t:t_0,x^{(0)})|\le D\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p_j|=2}^{\sigma}d_j^{(p_j)}D^{|p_j|}c_0^{|p_j|-1}\cdot$$
$$\cdot\frac{\exp\left\{\left(-\alpha_i+\varepsilon+p_{j1}\beta_1+...+p_{jn}\beta_n\right)(t-t_0)\right\}}{\alpha_i-\varepsilon-p_{j1}\beta_1-...-p_{jn}\beta_n},$$

откуда следует, что $\delta_i(t,t_0,x^{(0)})$ стремится к нулю равномерно по $t\in[t_0,+\infty)$ при $||x^{(0)}||\to 0$ и стремится к нулю при $t\to+\infty$ равномерно по $x^{(0)}\in U$.

Аналогично, сопоставляя равенства (1.7) и соотношение (2.11), получим

$$\mu_i(t)\gamma_i(t,t_0,y^{(0)})=-\sum_{j=1}^{n}\int_t^{+\infty}y_{ij}(t-s)f_j(x(s:t_0,P^{(1)}y^{(0)}))ds,$$

и, следовательно, $\gamma_i(t,t_0,y^{(0)})$ стремится к нулю равномерно по $t\in[t_0,+\infty)$ при $||y^{(0)}||\to 0$ и стремится к нулю при $t\to+\infty$ равномерно по $y^{(0)}\in V$.

Справедливость соотношений (1.6) и (1.7) вытекает из соотношения (2.10) и неравенств (2.12). Таким образом, системы (2.1) и (1.19) равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)=e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0), i\in N$.

Таким образом, все условия теоремы 1.2.1 выполнены, и, следовательно, нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво по переменной x_i,

$i \in N$, для которой $\beta_i < 0$; устойчиво по переменной x_i, $i \in N$, для которой $\beta_i = 0$ и алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают, причем нулевое решение системы (2.1) имеет локальное асимптотическое равновесие по этой переменной.

Поскольку для линейных систем справедливы условия (1.13) и (1.14), то условия теоремы 1.2.2 выполнены, а следовательно, нулевое решение системы (2.1) неустойчиво по переменной x_i, $i \in N$, для которой $\beta_i > 0$.

Доказательство завершено.

2.2 Достаточные условия частичной устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейных систем с возмущениями в виде векторных полиномов в критическом случае

Приведем достаточные условия равномерной локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем (2.1) и (1.19) по Брауеру.

Теорема 2.2.1. *Если выполняются неравенства*

$$p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < \alpha_i, \quad i \in M_0, \tag{2.13}$$

$$p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < \beta_i, \quad i \in N \setminus M_0, \tag{2.14}$$

по всем наборам $(p_{j1}, ..., p_{jn})$, $|p_j| = \overline{2, \sigma}$, *таким что* $d_j^{(p_j)} \neq 0, j = \overline{1, n}$, *то системы* (2.1) *и* (1.19) *являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t) = e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}$, $i \in M_0$.

Доказательство. Изложение доказательства будем проводить согласно работе [13].

Построим банахово пространство

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([T, +\infty), R^n),\ |\varphi_i(t)| \le c_i e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)},\ t \ge t_0,\ c_i \ge 0,\ i = \overline{1, n}\}.$$

В пространстве Ω введем норму

$$||\varphi||_\Omega = \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\geq t_0} \left\{ |\varphi_i(t)| e^{-(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \right\}. \tag{2.15}$$

Определим на Ω оператор

$$L\varphi = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y_1(t-s)P(\varphi(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} Y_2(t-s)P(\varphi(s))ds, \tag{2.16}$$

где $y(t) = Y(t-t_0)y^{(0)}$,

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \quad Y_1(t) = Y(t)I_1 \equiv \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1(t) \\ O_1 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = Y(t)I_2 \equiv \begin{bmatrix} O_2 \\ \tilde{Y}_2(t) \end{bmatrix}$$

где I_1, I_2 – операторы, обнуляющие элементы матрицы $Y(t)$ с $(q+1)$-ую по n-ую и с 1-ой по q-ую строки соответственно; $\tilde{Y}_1(t)$ – матрица размерности $(q\times n)$, $\tilde{y}_1^{ij}(t) \equiv y_{ij}(t),\ i=\overline{1,q},\ j=\overline{1,n}$; $\tilde{Y}_2(t)$ – матрица размерности $(n-q)\times n$,$\tilde{y}_2^{ij}(t) \equiv y_{ij}(t),\ i=\overline{q+1,n},\ j=\overline{1,n}$; O_1, O_2 – нулевые матрицы размерности $(n-q)\times n$ и $(q\times n)$ соответственно.

Запишем оценки компонент решения системы (1.19) с учетом (1.28)

$$|y_i(t)| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_{ij}(t-t_0)|\ |y_j^{(0)}| \leq De^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}||y^{(0)}||, \quad t\geq t_0,\ i=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим шар

$$\Omega_0 = \{\varphi : ||\varphi||_\Omega \leq c_0,\ c_0 \in R_+^1\}$$

с достаточно малым c_0 и покажем, что $L:\Omega_0 \to \Omega_0$.

Пусть $||\varphi||_\Omega \leq c_0$. Тогда с учетом (1.29) справедлива следующая оценка для i-х компонент ($i \in M_0$) оператора L при всех $t \geq t_0$

$$|(L\varphi)_i| \leq e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \left[D||y^{(0)}|| \ + D \sum_{j=1}^{n} \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|} \quad \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_{t}^{+\infty} \exp\left\{ \left(-\alpha_i + \varepsilon + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n\right)(s-t_0) \right\} ds \right]. \quad (2.17)$$

Аналогично для индексов $i \in N \setminus M_0$ выполняется оценка при всех $t \geq t_0$

$$|(L\varphi)_i| \leq e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \left[D||y^{(0)}|| \ + D \sum_{j=1}^{n} \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|} \quad \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_{t_0}^{t} \exp\left\{ \left(-\beta_i + \varepsilon + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n\right)(s-t_0) \right\} \ ds \right]. \quad (2.18)$$

Учитывая условия (2.13) и (2.14), подберем t_0 такое, что при всех $t \geq t_0$

$$D \sum_{j=1}^{n} \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|-1} \cdot$$

$$\cdot \int_{t}^{+\infty} \exp\left\{ \left(-\alpha_i + \varepsilon + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n\right)(s-t_0) \right\} ds \leq \theta_1,$$

$$D \sum_{j=1}^{n} \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|-1} \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} \exp\left\{ \left(-\beta_i + \varepsilon + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n\right)(s-t_0) \right\} ds \leq \theta_2. \quad (2.19)$$

Выберем $y^{(0)}$ такое, что

$$||y^{(0)}|| \leq \frac{1-\theta}{D} c_0, \quad \text{где } \theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}.$$

Тогда, учитывая (2.17)-(2.19), получим

$$||L\varphi|| \le c_0 e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0,$$

и, следовательно,

$$||L\varphi||_\Omega \le c_0 \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0.$$

Отсюда следует, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$.

Покажем, что оператор L является непрерывным на Ω_0. Пусть $\{\varphi_l\}, l = 1, 2, ...$ – последовательность функций из Ω_0, сходящаяся к $\varphi \in \Omega_0$, то есть

$$||\varphi_l - \varphi||_\Omega \to 0 \text{ при } l \to +\infty.$$

Так как векторный полином $P(x)$ является непрерывной по x вектор-функцией, то

$$||Y_k(t-s)P(\varphi_l(s)) - Y_k(t-s)P(\varphi(s))||_\Omega \to 0 \text{ при } l \to +\infty,$$

$k = 1, 2$ при каждом фиксированном $t \ge t_0$.

Тогда, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [49] к оператору L, получим

$$||(L\varphi)_l - L\varphi||_\Omega \to 0 \text{ при } l \to +\infty.$$

Из оценок (2.17) и (2.18) следует, что множество функций

$$y = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \tag{2.20}$$

равномерно ограничено.

Найдем

$$\frac{d}{dt}L\varphi(t) = Ay + P(\varphi(t)) - A\left[\int\limits_t^{+\infty} Y_1(t-s)P(\varphi(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} Y_2(t-s)P(\varphi(s))ds\right].$$

С учётом оценок (2.17) и (2.18) имеем

$$||\frac{d}{dt}L\varphi(t)||_\Omega \le c_0$$

при всех $||\varphi||_\Omega \le c_0$. Тогда

$$||L\varphi(t_1) - L\varphi(t_2)||_\Omega \le c_0||t_1 - t_2||_\Omega,$$

что доказывает равностепенную непрерывность множества функций (2.20) на любом компакте из $[t_0, +\infty)$.

Следовательно, согласно теореме Арцела [49], множество функций (2.20) является компактным, а оператор L является вполне непрерывным на Ω_0.

Таким образом, все условия принципа Шаудера [49] о существовании неподвижной точки оператора L выполнены и

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \tag{2.21}$$

где φ – неподвижная точка оператора L.

С учётом (2.16) уравнение (2.21) имеет вид

$$x(t) = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y_1(t-s)P(x(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} Y_2(t-s)P(x(s))ds. \tag{2.22}$$

Из построения оператора L следует, что если в уравнении (2.22) в качестве $x(t)$ взять решение $x(t : t_0, x^{(0)})$ системы (2.1) с начальными данными $x^{(0)} = x(0)$, то $y(t)$ является решением системы (1.19) с начальными данными $y^{(0)} = y(0)$. И наоборот, если $y(t)$ является решением (1.19), то $x(t)$ является решением (2.1).

Из уравнения (2.22) следует, что отображение

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y_1(t_0 - s)P(x(s : t_0, x^{(0)}))ds$$

существует и устанавливает соответствие между начальными точками решений $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$ систем (2.1) и (1.19).

Следовательно, можно взять $U = \{u : u \in R^n, ||u|| \le \varepsilon_1 < c_0\}$, $V = \{v :$

$v \in R^n, ||v|| \leq \varepsilon_2 < \dfrac{1-\theta}{D} c_0\}$, а в качестве отображения $P^{(2)}$

$$P^{(2)} x^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y_1(t_0 - s) P(x(s : t_0, x^{(0)})) ds.$$

Существование отображения $P^{(1)}$ доказывается аналогично рассуждениям из работы [13].

Запишем уравнение (2.22) по компонентам $i \in M_0$

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) - \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s) P_j(x(s : t_0, x^{(0)})) ds. \qquad (2.23)$$

Далее, учитывая оценки (2.5) и (2.6), заключим, что

$$|\delta_i(t, t_0, x^{(0)})| \leq D \sum_{j=1}^{n} \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|-1} \cdot$$
$$\cdot \frac{\exp\left\{\left(-\alpha_i + \varepsilon + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n\right)(t - t_0)\right\}}{\alpha_i - \varepsilon - p_{j1}\beta_1 - ... - p_{jn}\beta_n},$$

откуда следует, что $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$ стремится к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||x^{(0)}|| \to 0$ и стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)} \in U$.

Тогда из последнего неравенства следует справедливость соотношений (1.6) и (1.7) и, следовательно, системы (2.1) и (1.19) равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций $\mu_i(t) = e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, i \in M_0$.

Доказательство завершено.

Следствие 2.2.1. *Если неравенства* (2.13) *выполняются для всех* $i \in N$, *то системы* (2.1) *и* (1.19) *являются равномерно локально асимптотически эквивалентными по Брауеру по всем переменным относительно функций* $\mu_i(t) = e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}$.

Теорема 2.2.2. *Пусть вещественные части собственных значений матрицы* A *удовлетворяют условию*

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < ... < \Lambda_m < \Lambda_{m+1} = ... = \Lambda_r = 0, \quad 1 \leq m \leq r \ (\Lambda_{r+1} = 0), \qquad (2.24)$$

причем алгебраические и геометрические кратности собственных значений матрицы A с нулевыми вещественными частями совпадают. Тогда, если справедливы неравенства (2.13) *и* (2.14), *то нулевое решение системы* (2.1) *асимптотически устойчиво по переменным x_i, $i = \overline{1,m}$ и устойчиво по переменным x_i, $i = \overline{m+1,r}$.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве Ω из теоремы 2.2.1 операторное уравнение

$$x = \xi + Jx, \tag{2.25}$$

где $x = x(t : t_0, x^{(0)})$,

$$\xi = Y(t - t_0)x^{(0)},$$
$$Jx = \int\limits_{t_0}^{t} Y(t-s)P(x(s))ds.$$

Представим решение системы (2.1) в интегральной форме.

Поскольку алгебраические и геометрические кратности собственных значений матрицы A с нулевыми вещественными частями совпадают по условию теоремы, из определения нормы в пространстве Ω (2.15) следует:

$$|x_i(t)| \leq ||x||_\Omega e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad i = \overline{1,n},$$

причем $x(t) \in \Omega_0$, как только $||x||_\Omega \leq c_0$.

Оценим компоненты оператора J, учитывая неравенства (2.17)-(2.19). Получим:

$$|(Jx)_i| \leq \theta ||x||_\Omega e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad i = \overline{1,n},$$

Отсюда:

$$||Jx||_\Omega \leq \theta ||x||_\Omega.$$

Здесь вещественное положительное число θ определяется из условия

$$D\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|}||x||_{\Omega}^{|p_j|-1}\cdot$$

$$\cdot\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\left(-\beta_i+\varepsilon+p_{j1}\beta_1+...+p_{jn}\beta_n\right)(s-t_0)\right\}ds\le\theta<1.$$

Выбирая $x^{(0)}$, удовлетворяющее

$$||x^{(0)}||\le\frac{1-\theta}{D}c_0,$$

с учетом (2.24), оценим ξ,

$$||\xi||\le(1-\theta)c_0.$$

В этом случае уравнение (2.25) имеет единственное решение [6] и имеет место оценка

$$||x(t)||\le D_1||x^{(0)}||,\quad t\ge t_0,\quad D_1=\frac{D}{1-\theta}. \tag{2.26}$$

Условия теорем 2.2.1 и 1.2.1 выполняются, и следовательно, тривиальное решение системы (2.1) асимптотически устойчиво по переменным x_i, $i=\overline{1,m}$ и устойчиво по переменным x_i, $i=\overline{m+1,r}$.

Доказательство завершено.

2.3 Достаточные условия частичной устойчивости нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно гладкой правой частью

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(x), \tag{2.27}$$

где $x \in R^n$, A – постоянная $(n \times n)$-матрица; $f \in C^{(1)}(R^n, R^n)$; $f(0) \equiv 0$; $f(x) = colon(f_1(x), ..., f_n(x))$;

$$|f_j(x_1, ..., x_n)| \le \psi_j(|x_1|, ..., |x_n|), \quad \forall\, x \in U \subseteq D,\ j = \overline{1, n}, \tag{2.28}$$

где $\psi_j \in C(U_+, [0, +\infty))$, $U_+ = \{x:\ x \in U,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1, n}\}$, $\psi_j(0, ..., 0) \equiv 0$, $\psi_j(|x_1|, ..., |x_n|) \le \psi_j(|\tilde{x}_1|, ..., |\tilde{x}_n|)$, $|x_i| \le |\tilde{x}_i|$, $x,\ \tilde{x} \in U$.

Будем предполагать, что для линейного приближения системы (2.27) выполняются все условия параграфа 1.3 и $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t - t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

Сформулируем достаточные условия частичной устойчивости нулевого решения системы (2.27) с использованием оценок (1.22) и (1.23).

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняется условие* (2.28) *и интегралы*

$$I_{ij}(c_0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_i s}\rho^{a_i}(s)\psi_j(c_0 e^{\beta_1 s}\rho^{b_1}(s), ..., c_0 e^{\beta_n s}\rho^{b_n}(s))ds, \quad i,\ j = \overline{1, n}, \tag{2.29}$$

сходятся при любом $c_0 \ge 0$, причем $I_{ij}(c_0) \to 0$ при $c_0 \to 0$. Тогда системы (2.27) *и* (1.19) *являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$ и справедливы следующие утверждения:*

1) если $\beta_i < 0$, то нулевое решение системы (2.27) *асимптотически устойчиво по переменной x_i;*

2) если $\beta_i = 0$, алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают, то нулевое решение системы (2.27) *устойчиво по переменной x_i, причем имеет локальное асимптотическое равновесие по этой переменной;*

3) если $\beta_i > 0$, неустойчиво по переменной x_i.

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([T, +\infty), R^n),\ |\varphi_i(t)| \le c_0\mu_i(t),\ t \ge t_0, c_0 \ge 0,\ i = \overline{1, n}\},$$

где

$$\mu_i(t) \ = \ e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t - t_0), \quad i = \overline{1, n},$$

с нормой

$$||\varphi||_\Omega = \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t \ge t_0} \left\{ \frac{|\varphi_i(t)|}{\mu_i(t)} \right\}.$$

Пусть на Ω определен оператор

$$L\varphi = y(t) - \int\limits_{t}^{+\infty} Y(t-s) f(\varphi(s)) ds, \qquad (2.30)$$

где $y(t) = Y(t-t_0)y^{(0)}$.

Воспользуемся методикой из работы [6] для оценки компонент решения системы (1.19)

$$|y_i(t)| \le \sum_{j=1}^{n} |y_{ij}(t-t_0)|\, |y_j^{(0)}| \le D_0 e^{\beta_i(t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0) ||y^{(0)}||, \ t \ge t_0, \ i = \overline{1,n}.$$

Покажем, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$, где $\Omega_0 = \{\varphi : ||\varphi||_\Omega \le c_0, \ c_0 \in R^1_+\}$. Пусть $||\varphi||_\Omega \le c_0$. Тогда $|\varphi_i(t)| \le c_0 \mu_i(t), \ t \ge t_0$.

Очевидно, что выполняются неравенства

$$\rho^{\nu_j}(t-t_0) \le D_1 e^{\varepsilon_j (t-t_0)}, \ t \ge t_0,$$

где $D_1 > 0$ – константа, $\nu_j > 0$, $\varepsilon_j > 0$.

С учетом оценки (1.23) и неравенств

$$e^{\alpha_i(t-t_0)} \rho^{a_i}(t-t_0) \le e^{\beta_i(t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0), \ t \ge t_0,$$

$$\rho^{a_i}(t-s) \le \rho^{a_i}(s), \ s \ge t \ge 0.$$

для i-ой компоненты оператора L получим оценку при всех $t \ge t_0$

$$|(L\varphi)_i| \le e^{\beta_i(t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0) \Big[D_0 ||y^{(0)}|| +$$
$$+ D_0 \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} e^{-\alpha_i s} \rho^{a_i}(s) \psi_j(c_0 e^{\beta_1 s} \rho^{b_1}(s), ..., c_0 e^{\beta_n s} \rho^{b_n}(s)) ds \Big], \quad (2.31)$$

где $i = \overline{1,n}$.

Учитывая сходимость интегралов (2.29) при любом $c_0 \ge 0$ и условие $I_{ij}(c_0) \to 0$ при $c_0 \to 0$, подберем t_0 и достаточно малое c_0 такие, что при всех $t \geq t_0$

$$D_0 \sum_{j=1}^{n} \left(\int_t^{+\infty} e^{-\alpha_i s} \rho^{a_i}(s) \psi_j(c_0 e^{\beta_1 s} \rho^{b_1}(s), ..., c_0 e^{\beta_n s} \rho^{b_n}(s)) ds \right) \leq \theta < 1. \qquad (2.32)$$

Зафиксируем $y^{(0)}$ такое, что

$$||y^{(0)}|| \leq \frac{c_0 - \theta}{D_0}. \qquad (2.33)$$

Тогда из неравенств (2.31)-(2.33) для всех $\varphi \in \Omega_0$ получим

$$|(L\varphi)_i| \leq c_0 e^{\beta_i (t-t_0)} \rho^{b_i}(t - t_0), \quad \forall\ t \geq t_0, \qquad (2.34)$$

и, следовательно,

$$||L\varphi||_\Omega \leq c_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \Omega_0.$$

Отсюда следует, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$.

Аналогично параграфу 2.2 показывается, что оператор L является вполне непрерывным на Ω_0, и следовательно, удовлетворяет всем условиям принципа Шаудера [49] о существовании неподвижной точки для уравнения

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \qquad (2.35)$$

где φ – неподвижная точка оператора L.

Учитывая (2.30), запишем уравнение (2.35) в следующем виде:

$$\varphi(t) = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y(t-s) f(\varphi(s)) ds. \qquad (2.36)$$

Оператор L построен таким образом, что если в качестве $\varphi(t)$ в уравнении (2.36) взять решение $x(t : t_0, x^{(0)})$ системы (2.27) с начальными данными $x^{(0)}$, удовлетворяющими соотношению

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t_0 - s) f(x(s : t_0, x^{(0)})) ds, \qquad (2.37)$$

то $y(t)$ в уравнении (2.36) будет решением системы (1.19) с начальными данными $y^{(0)}$, вычисляемым так же по формуле (2.37). Справедливо и обратное: если $y(t)$ является решением системы (1.19), то $x(t)$ будет решением системы (2.27), причем их начальные данные будут связаны соотношением (2.37).

Правая часть соотношения (2.37) является отображением $P^{(2)}$:

$$P^{(2)}x^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t_0 - s)f(x(s : t_0, x^{(0)}))ds.$$

Существование отображения $P^{(1)}$ такого, что $x^{(0)} = P^{(1)}y^{(0)}$ доказывается аналогично работе [13].

Покомпонентая запись уравнения (2.36) имеет вид

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) - \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t - s)f_j(x(s : t_0, x^{(0)}))ds, \ i = \overline{1, n}. \tag{2.38}$$

Из (2.31) и (2.36) получим

$$|x_i(t : t_0, x^{(0)}) - y_i(t : t_0, y^{(0)})| \le \theta e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t - t_0), \quad t \le t_0, \tag{2.39}$$

где $i \in N$ и справедливо $y^{(0)} = P^{(2)}x^{(0)}$.

Покажем справедливость соотношений (1.6) и (1.7). Сопоставляя равенства (1.6) и соотношение (2.38), получим

$$\delta_i(t, t_0, x^{(0)}) = -\frac{1}{\mu_i(t)} \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t - s)f_j(x(s : t_0, x^{(0)}))ds.$$

Поскольку формулы (2.31)-(2.36) справедливы при $t \ge t_0$, то, положив $t = t_0$, получим:

$$||x^{(0)}|| \le ||Lx^{(0)}|| \le c_0. \tag{2.40}$$

Учитывая формулы (2.33) и (2.40), заключим, что $||y^{(0)}|| \to 0$ и $||x^{(0)}|| \to 0$ при $c_0 \to 0$.

Далее, учитывая оценки (2.39) и сходимость интегралов (2.29) при любом

c_0, заключим, что

$$|\delta_i(t,t_0,x^{(0)})| \ \le \ D_0 \sum_{j=1}^{n} \left(\int_t^{+\infty} e^{-\alpha_i s} \rho^{a_i}(s) \psi_j(c_0 e^{\beta_1 s} \rho^{b_1}(s), ..., c_0 e^{\beta_n s} \rho^{b_n}(s)) ds \right),$$

откуда следует, что $\delta_i(t,t_0,x^{(0)})$ стремится к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||x^{(0)}|| \to 0$ и стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)} \in U$.

Аналогично, сопоставляя равенства (1.7) и соотношение (2.38), получим

$$\mu_i(t)\gamma_i(t,t_0,y^{(0)}) = -\sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s) f_j(x(s:t_0, P^{(1)} y^{(0)})) ds,$$

и, следовательно, учитывая (2.33), $\gamma_i(t,t_0,y^{(0)})$ стремится к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||y^{(0)}|| \to 0$ и стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $y^{(0)} \in V$.

Тогда, согласно определению 1.1.14, системы (2.27) и (1.19) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t) \ = \ e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0), i = \overline{1,n}$.

Таким образом, все условия теоремы 1.2.1 выполнены, и, следовательно, нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво по переменной x_i, $i = \overline{1,n}$, для которой $\beta_i < 0$; устойчиво по переменной x_i, $i = \overline{1,n}$, для которой $\beta_i = 0$ и алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают, причем нулевое решение системы (2.1) имеет локальное асимптотическое равновесие по этой переменной.

Поскольку для линейных систем справедливы условия (1.13) и (1.14), то условия теоремы 1.2.2 выполнены, и следовательно, нулевое решение системы (2.1) неустойчиво по переменной x_i, $i = \overline{1,n}$, для которой $\beta_i > 0$.

Доказательство завершено.

2.4 Примеры исследования частичной устойчивости нулевого решения нелинейных систем

Приведём примеры, иллюстрирующие применение теорем 2.1.1 и 2.3.1 к исследованию устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия.

Пример 2.4.1. *Для системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^4 z, \\ \dot{y} = x^3 z, \\ \dot{z} = 2z, \end{cases} \tag{2.41}$$

ставится задача об исследовании устойчивости нулевого решения системы по части переменных.

Решение системы (2.41) с начальными данными $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ имеет вид

$$x(t:0, x_0) = \frac{x_0 e^{-t}}{[1 - 3x_0^3 z_0 (1 - e^{-t})]^{\frac{1}{3}}},$$
$$y(t:0, y_0) = y_0 + \ln \frac{1}{[1 - 3x_0^3 z_0 (1 - e^{-t})]^{\frac{1}{3}}},$$
$$z(t:0, z_0) = z_0 e^{2t}.$$

Полученные аналитические решения системы являются продолжимыми вправо при всех $t > 0$, если начальные данные удовлетворяют условию

$$x_0^3 z_0 < \frac{1}{3(1 - e^{-t_0})}.$$

Из вида решений системы следует, что нулевое положение равновесия исследуемой системы обладает следующими свойствами:

– асимптотически устойчиво по переменной x;

– устойчиво по переменной y, причем по переменной y имеет локальное асимптотическое равновесие;

– неустойчиво по переменной z.

Покажем, что результат, полученный при помощи теоремы 2.1.1, совпадает с вышеизложенными выводами. Учитывая, что фундаментальная матрица для линейного приближения нелинейной системы имеет вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

найдём

$$\beta_1 = -1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 2, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 2.$$

Определим наборы обобщенных степеней первой компоненты векторного полинома $p_1 = (4, 0, 1)$. Подставляя полученные значения в неравенства (2.2), убеждаемся в их справедливости. Поскольку $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0$ и $\beta_3 = 2$, из теоремы 2.1.1 следует, что нулевое решение исследуемой нелинейной системы асимптотически устойчиво по переменной x, устойчиво по переменной y, неустойчиво по переменной z, причем по переменной y имеет локальное асимптотическое равновесие.

Пример 2.4.2. *[12] Для системы*

$$\begin{cases} \dot{y_1} = ay_1 + by_1^2 z_1 \\ \dot{z_1} = cy_1 + dz_1 + e \end{cases} \tag{2.42}$$

рассмотрим задачу об исследовании устойчивости по части переменных положения равновесия

$$y_1 = 0, z_1 = -\frac{e}{d}.$$

Сделав замену

$$y_1 = x_1, z_1 = x_2 - \frac{e}{d},$$

сведём задачу к исследованию устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = ax_1 + bx_1^2 x_2 - \dfrac{be}{d} x_1^2 \\ \dot{x_2} = cx_1 + dx_2 \end{cases} . \tag{2.43}$$

Учитывая, что собственными значениями для матрицы линейного приближения системы (2.43) являются $\lambda_1 = a, \lambda_2 = d$, рассмотрим два случая:

$$1)\ a \neq d, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{a-d}{c} \mathrm{e}^{at} & 0 \\ \mathrm{e}^{dt} & \mathrm{e}^{at} \end{pmatrix}; \quad 2)\ a = d, \quad Y(t) = \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $Y(t)$ – фундаментальная матрица линейного приближения нелинейной системы (2.43). Проверим выполнение условия (2.2) теоремы 2.1.1. Для этого определим наборы обобщенных степеней вида (p_{11}, p_{12}) первой компоненты векторного полинома. Этими наборами будут являться $(2, 1)$ и $(2, 0)$.

В случае 1) вычислим $\alpha_1 = \beta_1 = a$. Для α_2 и β_2 возможны два варианта: а) $a < d$, б) $a > d$.

а) при $a < d$ получим $\alpha_2 = a$, $\beta_2 = d$.

Тогда условие (2.2) теоремы 2.1.1 примут вид

$$a + d < 0, \quad a < 0.$$

б) при $a > d$ получим $\alpha_2 = d$, $\beta_2 = a$.

В данном случае условия (2.2) теоремы 2.1.1 имеют следующий вид

$$a < 0.$$

В случае 2) получим $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = a$ и условия теоремы примут вид

$$a < 0.$$

Таким образом, согласно теореме 2.1.1, для нулевого положения равновесия системы (2.43), а, следовательно, и для ненулевого положения равновесия системы (2.42), справедливы утверждения:

1) при $a < 0, d < 0$ положение равновесия системы (2.42) асимптотически устойчиво;

2) при $a < 0, d = 0$ положение равновесия системы (2.42) асимптотически устойчиво по переменной y_1 и устойчиво по переменной z_1;

3) при $a + d < 0, d > 0$ положение равновесия системы (2.42) асимптотически устойчиво по переменной y_1 и неустойчиво по переменной z_1.

Пример 2.4.3. *Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Ставится задача об исследовании устойчивости тривиального решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -2x_1 + 3x_1^2 x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_3 - x_4 + 4x_1^3 x_3 x_4 \\ \dot{x_3} = 2x_1 - x_3 + x_4 + x_1^3 x_4^3 \\ \dot{x_4} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 6x_1^2 \end{cases}.$$

Собственными значениями для матрицы линейного приближения являются

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1.$$

Фундаментальная матрица для линейного приближения нелинейной системы имеет вид

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 6\,\mathrm{e}^{-2\,t} & 0 & 0 & 0 \\ 4\,\mathrm{e}^{-2\,t} & -\mathrm{e}^{-t} & -2 & -1/2\,\mathrm{e}^{t} \\ -13\,\mathrm{e}^{-2\,t} & \mathrm{e}^{-t} & 1 & 1/2\,\mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-2\,t} & 0 & 1 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}.$$

Определим α_i, β_i, $(p_{j1}, ..., p_{jn})$.

$$\beta_1 = -2,\ \alpha_1 = -2,\ (p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}) = (2, 1, 0, 0).$$

$$\beta_2 = 1,\ \alpha_2 = -2,\ (p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}) = (3, 0, 1, 1).$$

$$\beta_3 = 1,\ \alpha_3 = -2,\ (p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34}) = (3, 0, 0, 3).$$

$$\beta_4 = 1,\ \alpha_4 = -2,\ (p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{44}) = (2, 0, 0, 0).$$

Подставляя полученные значения в условия теоремы, убеждаемся в их справедливости. Таким образом, нулевое положение равновесия исследуемой нелинейной системы асимптотически устойчиво по переменной x_1 и неустойчиво по переменным x_2, x_3 и x_4.

Приведём пример, для которого условия теоремы 2.1.1 являются необходимым и достаточным условием устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных тривиального решения системы.

Пример 2.4.4. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^q y, \quad q > 1, \quad \alpha - q + 1 \neq 0, \\ \dot{y} = \alpha y. \end{cases}$$

Ставится задача об исследовании устойчивости тривиального решения системы.

Решение системы с начальными данными $x(0) = x^{(0)}$, $y(0) = y^{(0)}$ имеет вид

$$x(t : t_0, x_0) = \frac{x_0 e^{-t}}{\left[1 + \frac{q-1}{\alpha-q+1} x_0^{q-1} y_0 (1 - e^{(\alpha-q+1)t})\right]^{\frac{1}{q-1}}},$$

$$y(t : t_0, y_0) = y_0 e^{\alpha t}.$$

Из вида решений системы следует, что нулевое положение равновесия исследуемой системы обладает следующими свойствами:

1) асимптотически устойчиво по переменным x и y при $\alpha < 0$, $\alpha - q + 1 < 0$;

2) асимптотически устойчиво по x и устойчиво по y при $\alpha = 0$;

3) асимптотически устойчиво по x и неустойчиво по y при $\alpha > 0$, $\alpha - q + 1 < 0$.

Условия, перечисленные в 1)–3), являются необходимыми и достаточными.

Покажем, что условия теоремы 2.1.1 совпадают с условиями, перечисленными в свойствах 1)–3). Учитывая, что фундаментальная матрица для линейного приближения нелинейной системы имеет вид

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix},$$

найдём

$$\beta_1 = -1, \quad \beta_2 = \alpha, \quad \alpha_1 = -1.$$

Определим наборы обобщенных степеней вида $(q, 1)$. Тогда условия теоремы 2.1.1 примут вид

$$\alpha - q + 1 < 0.$$

Таким образом, согласно теореме 2.1.1, тривиальное решение исследуемой нелинейной системы обладает свойствами 1)–3). Условие теоремы 2.1.1

совпадает с условиями, перечисленными в свойствах 1)–3), то есть является и необходимым условием.

Пример 2.4.5. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -7x_1 + 3x_2 + 3x_1x_2^2x_4^2 \\ \dot{x_2} = -x_1 - 3x_2 - 2x_1x_3^2 \\ \dot{x_3} = -12x_1 + 12x_2 - x_2^2x_4^2 \\ \dot{x_4} = 8x_1 - 24x_2 + 7x_1x_3x_4 \end{cases}. \tag{2.44}$$

Собственными значениями матрицы линейного приближения нелинейной системы являются

$$\lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 0.$$

Фундаментальная матрица для линейного приближения нелинейной системы имеет вид:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-6\,t} & \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,t} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-6\,t} & \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,t} & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{-6\,t} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-4\,t} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверим условия выполнения теоремы 2.2.1. В данном случае исследование будем проводить по всем переменным, т. е. $M_0 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Учитывая неравенства (1.22) и (1.23) и вид нелинейной части исследуемой системы, определим

$$\beta_1 = -4,\ \alpha_1 = -6,\ (p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}) = (1, 2, 0, 2);$$

$$\beta_2 = -4,\ \alpha_2 = -6,\ (p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}) = (1, 0, 2, 0);$$

$$\beta_3 = 0,\ \alpha_3 = -6,\ (p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34}) = (0, 2, 0, 2);$$

$$\beta_4 = 0,\ \alpha_4 = -4,\ (p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{44}) = (1, 0, 1, 1).$$

Тогда условие (2.2) теоремы 2.2.1 выполнено. Поскольку $\beta_1 < 0$, $\beta_2 < 0$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = 0$, нулевое решение системы (2.44) асимптотически устойчиво по переменным x_1 и x_2 и устойчиво по переменным x_3 и x_4.

Пример 2.4.6. *Для системы третьего порядка*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -\dfrac{xy}{1+(z+1)^2} \\ \dot{z} = z \end{cases}, \tag{2.45}$$

где x, y, $z \in R$, ставится задача об исследовании устойчивости нулевого положения равновесия системы по части переменных.

Собственными значениями матрицы линейного приближения системы (2.45) являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

Фундаментальная матрица линейного приближения системы (2.45) имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Для проверки выполнения условий теоремы 2.3.1 покажем сходимость интегралов (2.29). Используя оценки (1.22) и (1.23), из вида фундаментальной матрицы вычислим $\alpha_1 = \beta_1 = -1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\alpha_3 = \beta_3 = 1$.

Учитывая, что

$$f_1(x,y,z) \equiv 0, \quad f_2(x,y,z) = -\frac{xy}{1+(z+1)^2}, \quad f_3(x,y,z) \equiv 0.$$

из оценок (2.28) находим

$$\psi_1(|x|,|y|,|z|) \equiv 0, \quad \psi_2(|x|,|y|,|z|) = |x||y|, \quad \psi_3(|x|,|y|,|z|) \equiv 0.$$

Все несобственные интегралы (2.29) равны нулю кроме интеграла:

$$I_{22} = \int\limits_0^{+\infty} c_0 e^{-s} ds.$$

Из сходимости интеграла $I_{22}(c_0)$ при любом $c_0 \geq 0$ и условия $I_{22}(c_0) \to 0$ при $c_0 \to 0$ на основании теоремы 2.3.1 можно сделать вывод, что нулевое положение равновесия системы (2.45) асимптотически устойчиво по переменной x и устойчиво по переменной y. Кроме того, по переменной y оно имеет локальное асимптотическое равновесие.

Пример 2.4.7. *Для системы третьего порядка*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{(x+1)^2(2z^2+z+8)}{z^2+3}, \\ \dot{y} = \dfrac{(x+1)^3(z+2)}{z^2+3}, \\ \dot{z} = z+2+\dfrac{(x+1)y}{z^2+3}, \end{cases} \tag{2.46}$$

где $x, y, z \in R$, ставится задача об исследовании устойчивости положений равновесия системы по части переменных.

Положения равновесия системы (2.46) в пространстве R^3 образуют множество точек с координатами $(-1, c, -2)^T$, где $c \in R$.

Заменой

$$x = x_1 - 1, y = x_2 + c, z = x_3 - 2 \tag{2.47}$$

перейдем к исследованию нулевого положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -2x_1 - \dfrac{x_1^2 x_3}{(x_3-2)^2+3}, \\ \dot{x_2} = \dfrac{{x_1}^3 x_3}{(x_3-2)^2+3}, \\ \dot{x_3} = x_3 + \dfrac{x_1(x_2+c)}{(x_3-2)^2+3}. \end{cases} \tag{2.48}$$

Линейным приближением для системы (2.48) будет система

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -2y_1, \\ \dot{y_2} = 0, \\ \dot{y_3} = y_3. \end{cases} .$$

Собственные значения матрицы в линейной части системы (2.48) равны $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, и, следовательно, фундаментальная матрица системы линейного приближения примет вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Проверим условия выполнения теоремы 2.3.1 Для этого, используя оценки (1.22) и (1.23), вычислим $\alpha_1 = \beta_1 = -2$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\alpha_3 = \beta_3 = 1$.

Учитывая, что

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 x_3}{(x_3 - 2)^2 + 3},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{{x_1}^3 x_3}{(x_3 - 2)^2 + 3},$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1(x_2 + c)}{(x_3 - 2)^2 + 3},$$

из оценок (2.28) найдем

$$\psi_1(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = |x_1|^2 |x_3|,$$

$$\psi_2(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = |x_1|^3 |x_3|,$$

$$\psi_3(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = |x_1| \ |x_2 + c|.$$

Ненулевые интегралы (2.29) примут вид:

$$I_{11} = \int\limits_0^{+\infty} e^{2s} c_0^2 e^{-4s} c_0 e^s ds = \int\limits_0^{+\infty} c_0^3 e^{-s} ds,$$

$$I_{22} = \int\limits_0^{+\infty} c_0^2 e^{-6s} c_0 e^s ds = \int\limits_0^{+\infty} c_0^3 e^{-5s} ds,$$

$$I_{33} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s} c_0 e^{-2s} (c_0 + c) ds = \int\limits_0^{+\infty} c_0 (c_0 + c) e^{-3s} ds.$$

Поскольку интегралы $I_{11}(c_0)$, $I_{22}(c_0)$, $I_{33}(c_0)$ сходятся при любом $c_0 \geq 0$ и выполняются условия $I_{11}(c_0) \to 0$, $I_{22}(c_0) \to 0$, $I_{33}(c_0) \to 0$ при $c_0 \to 0$, то условия теоремы 2.3.1 выполнены. Тогда с учетом замены (2.47) каждое из положений равновесия $(-1, c, -2)^T$, $c \in R$ системы (2.46) является асимптотически устойчивым по переменной x и имеет локальное асимптотическое равновесие по переменной y.

Пример 2.4.8. *Для системы*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -k_1x_1 - x_1^3\sqrt[3]{1+x_2} \\ \dot{x_2} = x_1^3\sqrt[5]{1+x_1^2} \\ \dot{x_3} = k_3x_3 - x_1x_3\sqrt{1+x_2} \end{cases}, \; k_1 > 0, \; k_3 > 0, \tag{2.49}$$

где $x_i \in R$, $i = \overline{1,3}$, $t \geq 0$, ставится задача об исследовании устойчивости нулевого положения равновесия по части переменных.

Собственными значениями матрицы линейного приближения системы (2.49) являются $\lambda_1 = -k_1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = k_3$.

Фундаментальная матрица для линейного приближения системы (2.49) имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-k_1t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{k_3t} \end{pmatrix}.$$

Для проверки условий теоремы 2.3.1 вычислим α_i и β_i:

$$\alpha_1 = \beta_1 = -k_1, \; \alpha_2 = \beta_2 = 0, \; \alpha_3 = \beta_3 = k_3.$$

Тогда $\mu_1(t) = e^{-k_1t}$, $\mu_2(t) = 1$, $\mu_3(t) = e^{k_3t}$.

Найдем ψ_j, $j = \overline{1,3}$, удовлетворяющие условию (2.28):

$$\psi_1(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = |x_1|^3\sqrt[3]{1+|x_2|},$$

$$\psi_2(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = |x_1|^3\sqrt[5]{1+|x_1|^2},$$

$$\psi_3(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = |x_1|\,|x_3|\sqrt{1+|x_2|}.$$

Ненулевые интегралы (2.29) примут вид:

$$I_{11} = \int\limits_0^{+\infty} e^{k_1s}c_0^3e^{-3k_1s}\sqrt[3]{1+c_0}\,ds = \frac{c_0^3\sqrt[3]{1+c_0}}{k_1} < +\infty.$$

$$I_{22} = \int\limits_{0}^{+\infty} c_0^3 e^{-3k_1 s} \sqrt[5]{1 + c_0^2 e^{-2k_1 s}}\, ds \le \frac{c_0^3 \sqrt[5]{1 + c_0^2}}{3} < +\infty.$$

$$I_{33} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-k_3 s} c_0 e^{-k_1 s} c_0 e^{k_3 s} \sqrt{1 + c_0}\, ds = \frac{c_0^2 \sqrt{1 + c_0}}{k_1} < +\infty.$$

Таким образом, все условия теоремы 2.3.1 выполнены нулевое положение равновесия системы (2.49) асимптотически устойчиво по переменной x_1, устойчиво по переменной x_2 и неустойчиво по переменной x_3.

3. Исследование частичной устойчивости положений равновесия математических моделей

3.1 Частичная устойчивость положений равновесия кинетической модели некоторых стадий компактной схемы реакции пиролиза пропана

Рассмотрим кинетическую модель некоторых стадий компактной схемы реакции пиролиза пропана [34]:

$$
\begin{aligned}
C_3H_8 &\rightarrow C_2H_5 \cdot + CH_3 \cdot \\
C_2H_5 \cdot &\rightarrow C_2H_4 + H_2 \cdot \\
C_3H_8 + C_2H_5 \cdot &\rightarrow C_2H_6 + n - C_3H_7 \cdot
\end{aligned}
$$

Математическая модель реакции имеет вид:

$$
\begin{cases}
\dot{c_1} = -k_1c_1 - k_3c_1c_2 \\
\dot{c_2} = k_1c_1 - k_2c_2 - k_3c_1c_2 \\
\dot{c_3} = k_1c_1 \\
\dot{c_4} = k_2c_2 \\
\dot{c_5} = k_2c_2 \\
\dot{c_6} = k_3c_1c_2 \\
\dot{c_7} = k_3c_1c_2
\end{cases}, \qquad (3.1)
$$

здесь $t \geq 0$, c_i $(i = \overline{1,7})$ – концентрации пропана C_3H_8, этила $C_2H_5\cdot$, метила $CH_3\cdot$, этилена C_2H_4, водорода H_2, этана C_2H_6, 1-пропила $n - C_3H_7\cdot$, соответственно, $k_i > 0$ $(i = \overline{1,3})$ – константы скоростей химических реакций. Так как концентрации c_i представляют собой неотрицательные величины, то поведение решений системы достаточно рассматривать при $c_i \geq 0$. Не теряя общности, предположим, что $k_1 > k_2$.

Приравнивая правую часть системы (3.1) к нулю, находим, что положения равновесия образуют множество точек в пространстве R^7 вида

$$c^* = colon(0, 0, c_3^*, c_4^*, c_5^*, c_6^*, c_7^*),$$

где $c_i^* \in R_+^1, i = \overline{3,7}$.

Фиксируя некоторые c_i^*, $i = \overline{3,7}$, исследуем на устойчивость по части переменных некоторое ненулевое положение равновесия $c^* = colon(0, 0, c_3^*, c_4^*, c_5^*, c_6^*, c_7^*)$ [44], а также асимптотику решений системы (3.1) в окрестности этого положения равновесия.

В системе (3.1) сделаем замену переменных

$$c = x + c^*. \tag{3.2}$$

Тогда система (3.1) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -k_1 x_1 - k_3 x_1 x_2 \\ \dot{x_2} = k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_1 x_2 \\ \dot{x_3} = k_1 x_1 \\ \dot{x_4} = k_2 x_2 \\ \dot{x_5} = k_2 x_2 \\ \dot{x_6} = k_3 x_1 x_2 \\ \dot{x_7} = k_3 x_1 x_2 \end{cases}, \tag{3.3}$$

или, в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} -k_3 x_1 x_2 \\ -k_3 x_1 x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_3 x_1 x_2 \\ k_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача сводится к исследованию асимптотики поведения решений в окрестности тривиального решения $x \equiv 0$ системы (3.3).

Линейное приближение системы (3.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -k_1 y_1 \\ \dot{y_2} = k_1 y_1 - k_2 y_2 \\ \dot{y_3} = k_1 y_1 \\ \dot{y_4} = k_2 y_2 \\ \dot{y_5} = k_2 y_2 \\ \dot{y_6} = 0 \\ \dot{y_7} = 0 \end{cases} . \tag{3.4}$$

Все собственные числа матрицы A являются вещественными числами $\lambda_1 = \Lambda_1 = -k_1$, $\lambda_2 = \Lambda_2 = -k_2$, $\lambda_3 = \Lambda_3 = 0$, причем алгебраическая и геометрическая кратности λ_3 равны 5. Отсюда следует, что нулевое решение системы (3.4) устойчиво. Заметим, что так как матрица A имеет нулевые собственные значения, то имеет место критический случай согласно работе [27], и, следовательно, теоремы Ляпунова [25] об устойчивости по первому приближению нулевого положения равновесия нелинейной системы (3.3) неприменимы.

Для исследования устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия нелинейной системы (3.3) и установления локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру между системами (3.3) и (3.4) по всем переменным проверим справедливость условий теоремы 2.2.2 В этом случае $M_0 = N \equiv \{1, ..., 7\}$.

Нормированная фундаментальная матрица системы (3.4) имеет вид:

$$Y(t-s) = \begin{pmatrix} e^{-k_1(t-s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{k_1-k_2}[e^{-k_1(t-s)} - e^{-k_2(t-s)}] & e^{-k_2(t-s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-k_1(t-s)} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{1}{k_1-k_2}[k_2 e^{-k_1(t-s)} - k_1 e^{-k_2(t-s)}] & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{1}{k_1-k_2}[k_2 e^{-k_1(t-s)} - k_1 e^{-k_2(t-s)}] & 1 - e^{-k_2(t-s)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из вида фундаментальной матрицы следует, что нулевое положение равновесия системы (3.4) асимптотически устойчиво по y_1 и y_2 и имеет асимптотическое равновесие по остальным компонентам.

Оценивая элементы фундаментальной матрицы $Y(t-s)$ по строкам, определим α_i, β_i и p_j, $j = 1, 2$:

$$\alpha_1 = \beta_1 = -k_1,$$

$$\alpha_2 = -k_1, \beta_2 = -k_2,$$

$$\alpha_i = \beta_i = 0,\ i = \overline{3, 7},$$

$$p_j = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Условие (2.13) будет иметь вид

$$p_{j1}\beta_1 + p_{j2}\beta_2 < \alpha_i, \quad i = \overline{1, 7}, \quad j = \overline{1, 2}. \tag{3.5}$$

Условия (3.5), а следовательно, и условия (2.13) теоремы 2.2.1 выполнены. Таким образом, нулевое решение системы (3.3) асимптотически устойчиво по переменным x_i, $i = \overline{1, 2}$ и устойчиво по переменным x_i, $i = \overline{3, 7}$.

Учитывая замену переменных (3.2), можно сделать следующие выводы об асимптотическом поведении решений системы (3.1) в окрестности положения равновесия c^*:

- системы (2.1) и (1.19) равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру;
- каждое положение равновесия c^* системы (3.1) является асимптотически устойчивым по компонентам c_1 и c_2;
- решения системы (3.1), начинающиеся в окрестности положения равновесия c^*, имеют асимптотическое равновесие по компонентам c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, причем при $t \to \infty$ эти решения стремятся к нему.

3.2 Частичная устойчивость положений равновесия кинетической модели реакции образования амида уксусной кислоты

Рассмотрим систему, описывающую кинетическую модель реакции образования амида уксусной кислоты:

$$\begin{cases} \dot{c_1} = -k_1c_1c_2 \\ \dot{c_2} = -k_1c_1c_2 \\ \dot{c_3} = -k_2c_3 + k_1c_1c_2 \\ \dot{c_4} = k_2c_3 \\ \dot{c_5} = k_2c_3 \end{cases}, \tag{3.6}$$

где $c_i \geq 0$, $i = \overline{1,5}$, – концентрации уксусной кислоты, аммиака, ацетата аммония, амида уксусной кислоты и воды соответственно; $k_j > 0$, $j = \overline{1,3}$, – константы скоростей стадий химического превращения.

Данная система имеет два семейства положений равновесия: $(0, c_2^*, 0, c_4^*, c_5^*)$ и $(c_1^*, 0, 0, c_4^*, c_5^*)$. Исследуем фиксированное положение равновесия первого вида при условии $c_2 > c_1$.

Учитывая соотношения

$$c_2 = c_1 + b_1, \quad c_5 = c_4 + b_2, \tag{3.7}$$

где $b_1 \in R^1_+$, $b_2 \in R^1$, и, вводя обозначения $c_1 = x_1, c_3 = x_2, c_4 = x_3$, понизим порядок системы (3.6). Получим

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -b_1k_1x_1 - k_1x_1^2 \\ \dot{x_2} = -b_1k_1x_1 - k_1x_1^2 + k_2x_2 \\ \dot{x_3} = k_2x_2 \end{cases}. \tag{3.8}$$

Приравнивая правую часть к нулю и учитывая, что $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,3}$, находим, что положения равновесия образуют множество точек в пространстве R^3 вида

$$x^* = (0, 0, x_3),$$

где $x_3 \in R^1_+$.

Фиксируя некоторое x_3^*, исследуем на устойчивость по части переменных ненулевое положение равновесия $x^* = (0, 0, x_3^*)$, а также асимптотику решений системы (3.8) в окрестности этого положения равновесия. Поскольку правая часть системы не зависит от x_3, то при переносе положения равновесия x^* в начало координат вид системы (3.8) не изменится. Таким образом задача сводится к исследованию асимптотики поведения решений в окрестности тривиального положения равновесия системы (3.8).

Вещественные части собственных значений матрицы линейного приближения системы (3.8) равны $\Lambda_1 = -b_1 k_1$, $\Lambda_2 = -k_2$, $\Lambda_3 = 0$ (критический случай по Ляпунову).

Определим α_i и β_i при $M_0 = N \equiv \{1, 2, 3\}$:

$$\alpha_1 = \beta_1 = -b_1 k_1,$$

$$\alpha_2 = -b_1 k_1, \quad \beta_2 = -k_2,$$

$$\alpha_3 = -b_1 k_1, \quad \beta_3 = 0.$$

Тогда условия теоремы 2.1.1 примут вид

$$2\beta_1 < \alpha_1, \quad 2\beta_1 < \alpha_2$$

и будут выполняться при условии $-b_1 k_1 < -k_2$.

Из выполнения условий теоремы 2.1.1 с учетом переноса положения равновесия в начало координат можно сделать вывод, что исследуемое положение равновесия x^* системы (3.8) асимптотически устойчиво по переменным x_1 и x_2 и устойчиво по переменной x_3.

Таким образом, учитывая замену (3.7), каждое из положений равновесия вида $(0, c_2^*, 0, c_4^*, c_5^*)$, где $c_2^*, c_4^*, c_5^* \in R^1_+$, системы (3.6)

1) асимптотически устойчиво по переменным c_1 и c_3;

2) устойчиво по переменным c_2, c_4 и c_5.

Заметим, что, так как выполняются условия теоремы 2.1.1, каждое из положений равновесия вида $(0, c_2^*, 0, c_4^*, c_5^*)$ системы (3.6) имеет асимптотическое равновесие по компонентам c_2, c_4 и c_5.

Аналогичным способом исследуется на устойчивость по части переменных положение равновесия вида $(c_1^*, 0, 0, c_4^*, c_5^*)$, где $c_1^*, c_4^*, c_5^* \in R^1_+$ при условии

$c_1 > c_2$. Каждое фиксированное положение равновесия вида $(c_1^*, 0, 0, c_4^*, c_5^*)$ системы (3.6)

1) асимптотически устойчиво по переменным c_2 и c_3;

2) имеет асимптотическое равновесие по компонентам c_1, c_4 и c_5.

3.3 Частичная устойчивость положений равновесия математической модели динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия

Математическое моделирование динамики численности популяций является одной из основных проблем математической экологии. Ввиду многофакторности биотических и абиотических воздействий на биоценоз, разработка модели представляет собой нетривиальную задачу.

Важнейшей характеристикой математических моделей, описывающих динамику численности биологических популяций, является наличие устойчивого или неустойчивого положения равновесия.

Одной из широко известных биологических моделей является модель динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия [62]:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_i}{dt} = v_i\left(a_i - \sum\limits_{j=1}^{M} a_{ij}w_j\right), \quad i = \overline{1, N}, \\ \dfrac{dw_k}{dt} = w_k\left(-b_k + \sum\limits_{j=1}^{N} b_{kj}v_j\right), \quad k = \overline{1, M}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Здесь $v_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ – численность популяции i-ого вида первой группы живых организмов; $w_k(t)$, $k = \overline{1, M}$ – численность популяции k-ого вида второй группы живых организмов; a_i и b_k – разность между рождаемостью и смертностью i-ого вида первой группы и k-ого вида второй группы соответственно в предположении, что он предоставлен сам себе; a_{ij} – коэффициент, характеризующий изменение i-ого вида первой группы за счет j-ого вида второй группы, $a_{ij} > 0$; b_{kj} – коэффициент, характеризующий изменение k-ого вида второй группы за счет j-ого вида первой группы, $b_{kj} > 0$.

Учитывая, что численность популяции является неотрицательной величиной, рассмотрим систему (3.9) при условии, что $v_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, $w_k \geq 0$,

$k = \overline{1, M}$.

Поскольку фазовые переменные данной системы отвечают численности различных видов популяций, то вывод о динамике численности каждой из популяций можно сделать на основании исследования устойчивости положения равновесия системы по соответствующим переменным.

В статье рассматривается вопрос об устойчивости по части переменных тривиального положения равновесия системы (3.9) при условии, что рождаемость биологических видов не превышает смертности. Это условие может быть записано в виде:

$$a_i \leq 0,\ i = \overline{1, N},\ b_k \geq 0,\ k = \overline{1, M}.$$

Заметим, что в случае, когда $a_i = 0$, $i = \overline{1, N}$ или $b_k = 0$, $k = \overline{1, M}$, матрица линейного приближения системы (3.9) имеет нулевые собственные значения, что, согласно работе [27], соответствует критическому случаю. Таким образом вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия по первому приближению остается открытым. Для решения поставленной задачи применяется подход [13], [52], [55], [60], основанный на установлении локальной асимптотической эквивалентности между решениями исследуемой системой и ее линейным приближением.

В параграфе 2.1 получены достаточные условия устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности. Система (3.9) относится к указанному классу систем. Запишем ее в виде:

$$\frac{dx}{dx} = Ax + P(x), \tag{3.10}$$

где $x \in R^n$, $x = colon(v, w)$, $v = colon(v_1, ..., v_N)$, $w = colon(w_1, ..., w_M)$, A – диагональная $(n \times n)$-матрица вида

$$A = diag(a_1, \ldots, a_N, -b_1, ..., -b_M),$$

$$P(x) = colon(P_1(x), ..., P_n(x)),$$

$$P_i(x) = -\sum_{j=1}^{M} a_{ij}\ v_i\ w_j, \quad i = \overline{1, N},$$

$$P_{N+k}(x) = \sum_{j=1}^{N} b_{kj}\, w_k\, v_j, \quad k = \overline{1, M}.$$

Вместе с тем для систем вида (3.10) условия устойчивости нулевого положения равновесия могут быть ослаблены.

Сформулируем достаточные условия локальной асимптотической эквивалентности системы (3.10) и ее линейного приближения

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{3.11}$$

и на основании этих условий исследуем вопрос о частичной устойчивости нулевого решения системы (3.10).

Теорема 3.3.1. *Пусть выполняются условия*

$$a_i < 0,\ i = \overline{1, N},\ b_k \geq 0\ (k = \overline{1, M}), \tag{3.12}$$

или

$$a_i = 0,\ i = \overline{1, N},\ b_k > 0\ (k = \overline{1, M}). \tag{3.13}$$

Тогда системы (3.10) *и* (3.11) *являются локально асимптотически эквивалентными по Брауеру и нулевое решение системы* (3.10) *обладает свойствами:*

1) в случае выполнения (3.12) *асимптотически устойчиво по переменным v_i, $i = \overline{1, N}$, асимптотически устойчиво по тем переменным w_k, для которых $b_k > 0$, устойчиво по тем переменным w_k, для которых $b_k = 0$, причем по этим переменным w_k система имеет локальное асимптотическое равновесие, $k = \overline{1, M}$;*

2) в случае выполнения (3.13) *устойчиво по переменным v_i, $i = \overline{1, N}$, и асимптотически устойчиво по переменным w_k, $k = \overline{1, M}$, причем по переменным v_i система имеет локальное асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Построим банахово пространство

$$\Omega = \{x : x \in C([T, +\infty), R^n),\ |v_i(t)| \leq ce^{\beta_i t}, |w_k(t)| \leq ce^{\beta_{N+k} t},$$
$$t \geq 0, c \in R^1_+, i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}\}$$

с нормой

$$||x||_\Omega = \max_{i=\overline{1,N}k=\overline{1,M}} \sup_{t\geq 0} \left\{ |v_i(t)|ce^{-\beta_i t}, |w_k(t)|ce^{-\beta_{N+k} t} \right\},$$

где при справедливости условия (3.12) полагаем

$$\beta_i = a_i + \varepsilon,\ i = \overline{1,N},\ \beta_{N+k} = \begin{cases} 0,\ b_k = 0 \\ -b_k,\ b_k > 0 \end{cases},\ k = \overline{1,M};$$

а при справедливости условия (3.13):

$$\beta_i = 0,\ i = \overline{1,N},\ \beta_{N+k} = -b_k + \varepsilon,\ k = \overline{1,M}.$$

Здесь ε – достаточно малое положительное число, которое выбирается таким образом, что $a_i + \varepsilon < 0$ при условии (3.12) и $-b_{N+k} + \varepsilon < 0$ при условии (3.13). В банаховом пространстве Ω рассмотрим операторное уравнение

$$x = Lx, \tag{3.14}$$

где $L = colon((Lx)_1, ..., (Lx)_n)$, причём при выполнении условия (3.12) компоненты оператора L имеют вид:

$$(Lx)_i = e^{a_i t} y_i^{(0)} - \sum_{j=1}^{M} a_{ij} \int\limits_0^t e^{a_i(t-s)} v_i(s) w_j(s) ds,\ i = \overline{1,N},$$

$$(Lx)_{N+k} = e^{-b_k t} y_{N+k}^{(0)} - \sum_{j=1}^{N} b_{kj} \int\limits_t^{+\infty} e^{-b_k(t-s)} w_k(s) v_j(s) ds,\ k = \overline{1,M},$$

а при выполнении условия (3.13):

$$(Lx)_i = e^{a_i t} y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{M} a_{ij} \int\limits_t^{+\infty} e^{a_i(t-s)} v_i(s) w_j(s) ds,\ i = \overline{1,N},$$

$$(Lx)_{N+k} = e^{-b_k t} y_{N+k}^{(0)} + \sum_{j=1}^{N} b_{kj} \int\limits_0^t e^{-b_k(t-s)} w_k(s) v_j(s) ds,\ k = \overline{1,M}.$$

Из построения оператора L следует, что решение $x(t)$ операторного уравнения (3.14), является также решением системы (3.10), причем начальные данные решений систем (3.10) и (3.11) при условии (3.12) связаны соотношениями

$$x_i^{(0)} = y_i^{(0)},\ i = \overline{1,N},$$
$$x_{N+k}^{(0)} = y_{N+k}^{(0)} - \sum_{j=1}^{N} \int_{0}^{+\infty} w_k(s)v_j(s)ds,\ k = \overline{1,M},$$

при выполнении (3.13):

$$x_i^{(0)} = y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{M} a_{ij} \int_{0}^{+\infty} v_i(s)w_j(s)ds,\ i = \overline{1,N},$$
$$x_{N+k}^{(0)} = y_{N+k}^{(0)},\ k = \overline{1,M}.$$

Покажем, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$, где $\Omega_0 = \{x : ||x||_\Omega \leq c_0, c_0 \in R^1_+\}$ для некоторого достаточного малого c_0.

Пусть $||x||_\Omega \leq c_0$. Тогда для компонент оператора L в случае выполнения условия (3.12) справедливы оценки:

$$|(Lx)_i| \leq e^{(a_i+\varepsilon)t} \left[|y_i^{(0)}| + c_0^2 \sum_{j=1}^{M} a_{ij} d_j \right],\ i = \overline{1,N}; \tag{3.15}$$
$$|(Lx)_{N+k}| \leq e^{-b_k t} \left[|y_{N+k}^{(0)}| + c_0^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{(a_j+\varepsilon)t}}{-(a_j+\varepsilon)} b_{kj} \right],\ k = \overline{1,M},$$

где

$$d_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon},\ \text{если } b_j = 0, \\ \dfrac{1}{b_j - \varepsilon},\ \text{если } b_j > 0. \end{cases}$$

В случае выполнения условия (3.13) получим:

$$|(Lx)_i| \leq |y_i^{(0)}| + c_0^2 \sum_{j=1}^{M} \frac{e^{-b_j t}}{b_j} a_{ij},\ i = \overline{1,N}; \tag{3.16}$$
$$|(Lx)_{N+k}| \leq e^{(-b_k+\varepsilon)t} \left[|y_{N+k}^{(0)}| + \frac{c_0^2}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{N} b_{kj} \right],\ k = \overline{1,M}.$$

В случае выполнения (3.12) выберем c_0 такое, что справедливы следующие оценки:

$$\theta_1 = c_0 \max_{i=\overline{1,N}} \left\{ \sum_{j=1}^{N} a_{ij} d_j \right\} < 1,\ \theta_2 = c_0 \max_{k=\overline{1,M}} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \frac{b_{kj}}{-(a_j+\varepsilon)} \right\} < 1.$$

Если выполняется (3.13), то выберем c_0 так, что верны следующие оценки:

$$\theta_1 = c_0 \max_{i=\overline{1,N}} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{d_j} \right\} < 1,\ \theta_2 = \frac{c_0}{\varepsilon} \max_{k=\overline{1,M}} \left\{ \sum_{j=1}^{N} b_{kj} \right\} < 1. \tag{3.17}$$

Выберем $y_i^{(0)}$ и $y_{N+k}^{(0)}$ такие, что

$$|y_i^{(0)}| \le (1-\theta_1)c_0,\ i=\overline{1,N}; \tag{3.18}$$

$$|y_{N+k}^{(0)}| \le (1-\theta_2)c_0,\ k=\overline{1,M}. \tag{3.19}$$

Тогда при выполнении условия (3.12) из оценок (3.15) и (3.18) следует:

$$|(Lx)_i| \le c_0 e^{(a_i+\varepsilon)t},\ i=\overline{1,N};$$

$$|(Lx)_{N+k}| \le c_0 e^{\beta_{N+k} t},\ k=\overline{1,M}.$$

Если же выполняется условие (3.13), то из оценок (3.16) и (3.18) получим:

$$|(Lx)_i| \le c_0,\ i=\overline{1,N};$$

$$|(Lx)_{N+k}| \le c_0 e^{(-b_k+\varepsilon)t},\ k=\overline{1,M}.$$

Следовательно, $||Lx||_\Omega \le c_0$ при всех $x \in \Omega_0$.

Аналогично параграфу 2.2 доказывается, что оператор L является вполне непрерывным на Ω_0, и следовательно, удовлетворяет всем условиям принципа Шаудера [49] о существовании неподвижной точки для уравнения (3.14).

Учитывая оценки (3.15)-(3.17) в случае справедливости условия (3.12) и $b_k = 0$ при всех $t \ge 0$, получим

$$|x_i(t:0,x^{(0)}) - y_i(t:0,y^{(0)})| \le \theta_1 c_0 e^{(a_i+\varepsilon)t},\ i=\overline{1,N};$$

$$|x_{N+k}(t:0,x^{(0)}) - y_{N+k}(t:0,y^{(0)})| \le \theta_2 c_0 e^{(a_0+\varepsilon)t},\ k=\overline{1,M},$$

где $a_0 = \max_{i=\overline{1,N}} a_i$; при $b_k > 0$ при всех $t \geq 0$ имеем

$$|x_i(t:0,x^{(0)}) - y_i(t:0,y^{(0)})| \leq \theta_1 c_0 e^{a_i t},\ i = \overline{1,N};$$

$$|x_{N+k}(t:0,x^{(0)}) - y_{N+k}(t:0,y^{(0)})| \leq \theta_2 c_0 e^{-b_k t},\ k = \overline{1,M}.$$

Если же выполняются условия (3.13), то при всех $t \geq 0$

$$|x_i(t:0,x^{(0)}) - y_i(t:0,y^{(0)})| \leq \theta_1 c_0 e^{-b_0 t},\ i = \overline{1,N};$$

$$|x_{N+k}(t:0,x^{(0)}) - y_{N+k}(t:0,y^{(0)})| \leq \theta_2 c_0 e^{(-b_k+\varepsilon)t},\ k = \overline{1,M},$$

где $b_0 = \min_{k=\overline{1,M}} b_k$.

Поскольку $a_i + \varepsilon < 0$, $i = \overline{1,N}$, $-b_k + \varepsilon < 0$, $k = \overline{1,M}$, то

$$||x(t:0,x^{(0)}) - y(t:0,y^{(0)})|| \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

равномерно по $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

Так как системы (3.10) и (3.11) являются локально асимптотически эквивалентными по Брауеру и выполняются условия теоремы 2.1.1, то свойство устойчивости и асимптотической устойчивости компонент решений системы (3.10) полностью определяются поведением соответствующих компонент решений системы (3.11). Отсюда следует, что нулевое решение системы (3.10) обладает свойствами 1) и 2), приведенными в формулировке теоремы.

Доказательство завершено.

В качестве примера рассмотрим модель вида (3.9) в случае, когда два вида оказывают влияние на третий [45]:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 - a_{11} v_1 w_1 - a_{12} v_1 w_2, \\ \dfrac{dw_1}{dt} = -b_1 w_1 + b_{11} w_1 v_1, \\ \dfrac{dw_2}{dt} = -b_2 w_2 + b_{21} w_2 v_1. \end{cases} \tag{3.20}$$

Здесь a_1, b_1, b_2 удовлетворяют условиям (3.12) и (3.13); a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{21} – положительны.

В этом случае у системы (3.20) существует только нулевое положение равновесия. Исследуем его на устойчивость по части переменных. Из выполнения условий теоремы, можно сделать следующие выводы об устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия нелинейной системы (3.20):

1) при $a_1 < 0$, $b_1 > 0$, $b_2 = 0$ асимптотически устойчиво по переменным v_1, w_1 и устойчиво по переменной w_2, причем по переменной w_2 имеется локальное асимптотическое равновесие;

2) при $a_1 < 0$, $b_1 = 0$, $b_2 > 0$ асимптотически устойчиво по переменным v_1, w_2 и устойчиво по переменной w_1, причем по переменной w_1 имеется локальное асимптотическое равновесие;

3) при $a_1 < 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ асимптотически устойчиво по переменной v_1 и устойчиво по переменным w_1, w_2, причем по переменным w_1 и w_2 имеется локальное асимптотическое равновесие;

4) при $a_1 = 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ устойчиво по переменной v_1 и асимптотически устойчиво по переменным w_1, w_2, причем по переменной v_1 имеется локальное асимптотическое равновесие.

Для проведения численного моделирования выбраны три группы коэффициентов рождаемости и смертности a_1, b_1, b_2 (см. рисунки 3.1–3.3), соответствующие условиям 2)-4). Графики решений для случая 1) соответствуют случаю 2), если в системе (3.20) переменные w_1 и w_2 поменять местами. В качестве значений параметров a_{ij}, b_{ij} были выбраны следующие: $a_{11} = 0.03$, $a_{12} = 0.02$, $b_{11} = 0.2$, $b_{21} = 0.1$. Начальные значения численностей популяций определены следующим образом: $v_1(0) = 4$, $w_1(0) = 5$, $w_2(0) = 7$.

Приведем графики, отражающие динамику численности популяций в исследуемой модели.

Как видно из рис. 3.1, численности популяций второго вида второй группы и одного вида первой группы живых организмов убывают, а численность первого вида второй группы – увеличивается до определенного предела, что подтверждается полученными аналитическими результатами. Таким образом, если рождаемость и смертность одного вида второй группы живых организмов равны, у второго вида второй группы и одного вида первой группы смертность превышает рождаемость, то независимо от значений остальных параметров произойдет стабилизация численности первой популяции и вымирание двух других.

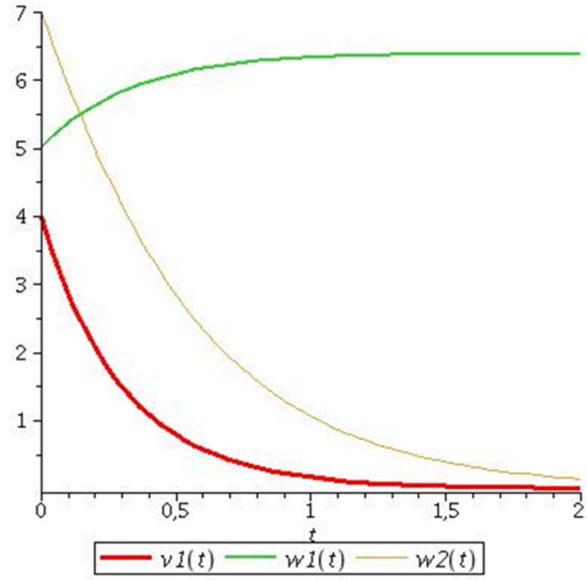

Рис. 3.1: Графики компонент решений системы (3.20) при $a_1 = -3$, $b_1 = 0$, $b_2 = 2$.

На рис. 3.2 численность одного вида первой группы стремится к нулевому значению, а численности популяций видов второй группы с течением времени приходят к постоянному значению. Действительно, если коэффициент смертности больше коэффициента рождаемости для первого вида, но при этом рождаемость и смертность видов второй группы равны, то происходит вымирание первого вида и стабилизация численности остальных.

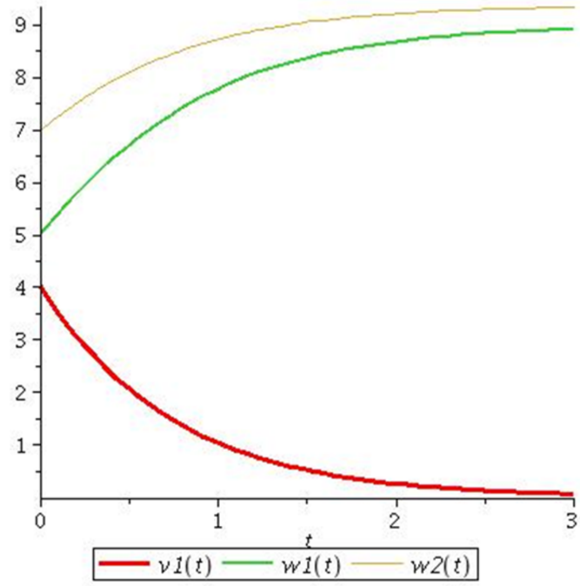

Рис. 3.2: Графики компонент решений системы (3.20) при $a_1 = -1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$.

Из рис. 3.3 видно, что если смертность двух популяций, влияющих на третью, превышает рождаемость, а рождаемость и смертность третьей популяции равны, то независимо от значений остальных параметров численность популяции вида первой группы и первой популяции второй группы с течением времени убывают, а численность другой популяции второй группы стабилизируется.

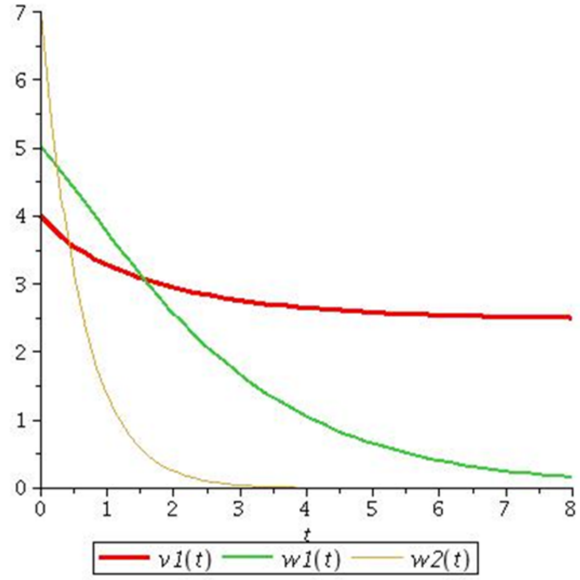

Рис. 3.3: Графики компонент решений системы (3.20) при $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$.

3.4 Частичная устойчивость семейства положений равновесия математической модели движения космического аппарата

Рассмотрим математическую модель движения космического аппарата, представляющую собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла [39], [57]

$$
\begin{cases}
\dot{v}_1 = w_1 + v_2 \\
\dot{v}_2 = w_2 - v_1 \\
\dot{w}_1 = -\dfrac{3v_1}{(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{3}{2}}} + 2v_1 + w_2 + u(v, w) \\
\dot{w}_2 = -\dfrac{3v_2}{(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{3}{2}}} - v_2 - w_1
\end{cases}, \tag{3.21}
$$

где $v = (v_1, v_2)^T$ – вектор положения космического аппарата, $w = (w_1, w_2)^T$ – вектор импульсов. Выбором параметров k_i в управлении

$$u(v,w) = \frac{3v_1}{(v_1^2+v_2^2)^{\frac{3}{2}}} - 2v_1 - w_2 + k_1v_1 + k_2v_2 + k_3w_1 + k_4w_2 + k_5, \tag{3.22}$$

где k_i, $i = \overline{1,5}$ – постоянные величины, $k_1 + k_4 + k_5 = 0$, можно добиться асимптотической устойчивости точки либрации $(1,0,0,1)$ [57].

Рассмотрим систему (3.21) с управлением (3.22) при условиях

$$k_1 + k_4 = 0,\ \ k_5 = 0. \tag{3.23}$$

Выбирая управление в виде (3.22) с учетом (3.23), исследуем устойчивость по части переменных семейства положений равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{v_1} = w_1 + v_2 \\ \dot{v_2} = w_2 - v_1 \\ \dot{w_1} = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3w_1 + k_4w_2 \\ \dot{w_2} = -\dfrac{3v_2}{(v_1^2+v_2^2)^{\frac{3}{2}}} - v_2 - w_1 \end{cases}. \tag{3.24}$$

Система (3.24) имеет семейство положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$, $c_4^* \in R\backslash\{0\}$. Заметим, что точка либрации также принадлежит этому семейству положений равновесия.

Ставится задача об исследовании частичной устойчивости семейства положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ системы (3.24).

Заменой $v_1 = x_1 + c_4^*$, $v_2 = x_2$, $w_1 = x_3$, $w_2 = x_4 + c_4^*$ сведем задачу к исследованию частичной устойчивости нулевого положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + x_3, \\ \dot{x_2} = x_4 - x_1, \\ \dot{x_3} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4, \\ \dot{x_4} = -x_2 - x_3 - \dfrac{3x_2}{((x_1+c_4^*)^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Линейное приближение системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = y_2 + y_3, \\ \dot{y_2} = y_4 - y_1, \\ \dot{y_3} = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + k_4 y_4, \\ \dot{y_4} = -y_2 - y_3. \end{cases} \tag{3.26}$$

Приведем систему (3.25) к виду (2.27), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{3x_2}{((x_1 + c_4^*)^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

Для определения множеств параметров k_i, $i = \overline{1,4}$, при которых нулевое решение системы (3.26) будет устойчиво по переменным y_1 и y_4 и асимптотически устойчиво по переменным y_2 и y_3 применим методику, описанную в [33].

Исследуем устойчивость нулевого решения системы (3.26) по переменной y_1. Для этого декомпозируем матрицу A следующим образом:

$$a = (0),\ B = (1, 1, 0),\ C = (-1, k_1, 0)^T,$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k_2 & k_3 & k_4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицы

$$K_s = \begin{pmatrix} b \\ bD \\ ... \\ bD^s \end{pmatrix}, s = \overline{0,3},$$

из условий теоремы 2 в работе [33]:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k_2 & k_3 & k_4+1 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k_2 & k_3 & k_4+1 \\ -1+k_3k_2-k_4 & -1+k_3^2-k_4 & k_2+k_3k_4 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k_2 & k_3 & k_4+1 \\ -1+k_3k_2-k_4 & -1+k_3^2-k_4 & k_2+k_3k_4 \\ k_{41}^{(3)} & k_{42}^{(3)} & k_{43}^{(3)} \end{pmatrix},$$

где $k_{41}^{(3)} = (-1+k_3^2-k_4)k_2 - k_2 - k_3k_4$, $k_{42}^{(3)} = (-1+k_3^2-k_4)k_2 - k_2 - k_3k_4$, $k_{43}^{(3)} = -1+k_3k_2-k_4+(-1+k_3^2-k_4)k_4$.

Исследуем случай $s=3$. При этом $rang(K_2) = rang(K_3) = 3$, что справедливо при $k_2 \neq k_3$, $k_4 \neq -1$.

В этом случае исследование устойчивости нулевого решения системы (3.26) по переменной y_1 сводится к исследованию устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения

$$y'''' - k_3y''' + (2+k_4-k_1)y'' + (2k_2-2k_3)y' = 0. \tag{3.27}$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 - k_3\lambda^3 + (2+k_4-k_1)\lambda^2 + (2k_2-2k_3)\lambda = 0. \tag{3.28}$$

Заметим, что один из корней характеристического многочлена уравнения (3.28) нулевой. Исключив нулевой корень уравнения (3.28) и исследуя полученный многочлен с использованием критерия Гурвица, получим, что решение уравнения (3.27) будет устойчиво при

$$k_3 < 0,\ k_3 < k_2,\ k_4 > -\frac{k_2}{k_3}, \tag{3.29}$$

что определяет множество параметров для устойчивости нулевого решения системы (3.26) по переменной y_1.

Аналогично, проводя исследование устойчивости нулевого решения системы (3.26) по переменной y_4, получим множество параметров, удовлетворяющее (3.29).

Исследуем устойчивость нулевого решения системы (3.26) по переменной y_2. Для этого декомпозируем матрицу A следующим образом:

$$a = (0),\ B = (-1, 0, 1),\ C = (1, k_2, -1)^T,$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_3 & k_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай $s = 2$. При этом $rang(K_1) = rang(K_2) = 2$, что справедливо при $k_4 = -k_1$.

В этом случае исследование устойчивости нулевого решения системы (3.26) по переменной y_2 сводится к исследованию устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения

$$y''' - k_3 y'' + (2 + 2k_4)y' + (2k_2 - 2k_3)y = 0. \tag{3.30}$$

Исследуя характеристический многочлен (3.30) с использованием критерия Гурвица, получим, что решение уравнения (3.30) будет асимптотически устойчиво при

$$k_1 = -k_4,\ k_3 < 0,\ k_3 < k_2,\ k_4 > -\frac{k_2}{k_3}, \tag{3.31}$$

что определяет множество параметров для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.26) по переменной y_2.

Аналогично, проводя исследование асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.26) по переменной y_3, получим множество параметров, удовлетворяющее (3.31).

Пересечением множеств параметров, описываемых условиями (3.23), (3.29) и (3.31), будет множество параметров, удовлетворяющее условию (3.31).

При значениях параметров, выбранных в соответствии с условиями (3.31), система (3.26) имеет одно нулевое и три собственных значения с отрицательной вещественной частью:

$$\Lambda_i < 0,\ i = \overline{1,3},\ \Lambda_4 = 0.$$

Заметим, что если алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения с отрицательной вещественной частью не совпадают, то максимальная степень векторного полинома, входящего в частное решение линейной системы (3.26), отвечающее этому собственному значению, не превышает 2.

Обозначим через $c^{(4)}$ собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_4 = 0$ матрицы системы (3.26). Тогда фундаментальная матрица имеет вид:

$$Y_1(t) = \left[y^{(1)}(t),\ y^{(2)}(t),\ y^{(3)}(t),\ c^{(4)}\right],$$

где $y^{(j)}(t) = e^{\lambda_j t} P^{(j)}(t)$, $P^{(j)}(t)$ – векторный полином, степень которого по переменной t не превышает 2.

Нормируем матрицу $Y_1(t)$ в точке $t = 0$. Тогда для нормированной матрицы

$$Y(t) = Y_1(t)\ Y^{-1}(0)$$

справедливы оценки (1.28) при $t \geq s$

$$\begin{gathered} |y_{1j}(t-s)| \leq D_0, \\ |y_{2j}(t-s)| \leq D_0 e^{(\beta+\varepsilon_0)(t-s)}, \\ |y_{3j}(t-s)| \leq D_0 e^{(\beta+\varepsilon_0)(t-s)}, \\ |y_{4j}(t-s)| \leq D_0, \end{gathered} \tag{3.32}$$

где $\beta = \max(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$, $j = \overline{1,4}$, $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малое вещественное число.

При этом собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению, имеет вид:

$$c^{(4)} = \left(c_1^{(4)}, 0, 0, c_4^{(4)}\right)^T.$$

Теорема 3.4.1. *Пусть параметры* k_i, $i = \overline{1,4}$, *удовлетворяют условию* (3.31). *Тогда каждая точка из семейства положений равновесия вида* $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ *системы* (3.24)

1) асимптотически устойчива по переменным v_2 *и* w_1*;*

2) устойчива по переменным v_1 *и* w_2*, причем имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным.*

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([0,+\infty), R^n),\ |\varphi_i(t)| \le c_i\mu_i(t),\ t \ge 0, c_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}\},$$

где

$$\mu_1(t) = \mu_4(t) \equiv 1, \quad \mu_2(t) = \mu_3(t) = e^{(\beta+\varepsilon_0+\varepsilon)t}, \quad \varepsilon > 0,$$

с нормой

$$||\varphi||_\Omega = \max_{i=\overline{1,4}} \sup_{t \ge t_0} \left\{ \frac{|\varphi_i(t)|}{\mu_i(t)} \right\}.$$

Определим на Ω оператор

$$L\varphi = y(t) + \int\limits_0^t Y(t-s) f(\varphi(s)) ds, \tag{3.33}$$

где $y(t) = Y(t)y^{(0)}$.

С учетом вида $f(x)$ покомпонентная запись оператора L имеет вид:

$$(L\varphi)_i = y_i(t) + \int\limits_0^t y_{i4}(t-s) f_4(\varphi(s)) ds, \tag{3.34}$$

где $i = \overline{1,4}$.

Для компонент решения системы (3.26) воспользуемся оценками из работы [6]

$$|y_i(t)| \le \sum_{j=1}^{4} |y_{ij}(t)|\ |y_j^{(0)}|,\ i = \overline{1,4}.$$

Покажем, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$, где $\Omega_0 = \{\varphi : ||\varphi||_\Omega \le c_0,\ c_0 \in R_+^1\}$. Пусть $||\varphi||_\Omega \le c_0$.

Учитывая оценку (3.32), получим оценки для i-ой компоненты оператора

L при всех $t \geq 0$

$$|(L\varphi)_i| \leq 4D_0||y^{(0)}|| + 3D_0 \int\limits_0^t \frac{|\varphi_2(s)|}{(\varphi_1(s)+c_4^*)^3} ds \leq$$
$$\leq 4D_0||y^{(0)}|| + \frac{3D_0c_0}{|c_4^*-c_0|^3}\left(-\frac{1}{\beta+\varepsilon+\varepsilon_0}\right)\left[1-e^{(\beta+\varepsilon+\varepsilon_0)t}\right] \leq$$
$$\leq 4D_0||y^{(0)}|| + \frac{3D_0c_0}{|c_4^*-c_0|^3}\left(-\frac{1}{\beta+\varepsilon+\varepsilon_0}\right) \text{ для } i = 1,\ 4; \quad (3.35)$$

$$|(L\varphi)_i| \leq e^{(\beta+\varepsilon_0)t}\left[4D_0||y^{(0)}|| + 3D_0 \int\limits_0^t \frac{|\varphi_2(s)|}{(\varphi_1(s)+c_4^*)^3} ds\right] \leq$$
$$\leq e^{(\beta+\varepsilon_0)t}\left[4D_0||y^{(0)}|| + \frac{3D_0c_0}{|c_4^*-c_0|^3}\frac{1}{\varepsilon}\left[e^{\varepsilon t}-1\right]\right] \leq$$
$$\leq e^{(\beta+\varepsilon_0+\varepsilon)t}\left[4D_0||y^{(0)}|| + \frac{3D_0c_0}{\varepsilon|c_4^*-c_0|^3}\right] \text{ для } i = 2,\ 3; \quad (3.36)$$

где $c_0 < c_4^*$.

Учитывая условия (3.35)-(3.36), подберем $c_0 > 0$ такое, что

$$\frac{3c_0\ D_0\ D_i}{|c_4^*-c_1|^3} \leq \theta < 1, \tag{3.37}$$

где

$$D_i = \begin{cases} -\dfrac{1}{\beta+\varepsilon_0+\varepsilon}, & i = 1,\ 4, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & i = 2,\ 3. \end{cases}$$

Заметим, что $-\dfrac{1}{\beta+\varepsilon_0+\varepsilon} > 0$, поскольку $\beta < 0$, а ε выбирается достаточно малым.

Зафиксируем $y^{(0)}$ такое, что

$$||y^{(0)}|| \leq \frac{c_0-\theta}{4D_0}. \tag{3.38}$$

Тогда из неравенств (3.37)-(3.38) получим:

$$|(L\varphi)_i| \leq c_0\mu_i(t) \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0,$$

и, следовательно,

$$||L\varphi||_\Omega \le c_0 \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0.$$

Отсюда следует, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$.

Аналогично параграфу 2.2 показывается, что оператор L является вполне непрерывным на Ω_0, и следовательно, удовлетворяет всем условиям принципа Шаудера [49] о существовании неподвижной точки для уравнения

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \tag{3.39}$$

где φ – неподвижная точка оператора L.

Из построения оператора L следует, что если в уравнении (3.39) в качестве $x(t)$ взять решение $x(t : 0, x^{(0)})$ системы (3.25) с начальными данными $x^{(0)} = x(0)$, то $y(t)$ является решением системы (3.26) с начальными данными $y^{(0)} = y(0)$. И наоборот, если $y(t)$ является решением (3.26), то $x(t)$ является решением (3.25), причем в силу вида оператора L $x^{(0)} = y^{(0)}$.

Покомпонентная запись уравнения (3.39) в случае, когда вместо φ берется решение $x(t : 0, x^{(0)})$ системы (3.25), имеет вид:

$$x_i(t : 0, x^{(0)}) = y_i(t : 0, y^{(0)}) + \int\limits_0^t y_{i4}(t - s) f_4(x(s)) ds, \tag{3.40}$$

где $i = \overline{1, 4}$.

В этом случае отображение $P^{(2)}$ имеет вид:

$$P^{(2)} x^{(0)} = x^{(0)} - \int\limits_0^t Y(-s) f(x(s : 0, x^{(0)})) ds.$$

Справедливость соотношений (1.6) и (1.7) следует из оценок (3.35)-(3.36) и равенств

$$\mu_i(t)\delta_i(t, 0, x^{(0)}) = \int\limits_0^t y_{i4}(t - s) f_4(x(s : 0, x^{(0)})) ds,$$

где $i = \overline{1, 4}$.

Учитывая (3.35)-(3.36), заключим, что $\delta_i(t, 0, x^{(0)})$ стремится к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||x^{(0)}|| \to 0$.

Аналогично, сопоставляя равенства (1.7) и соотношение (3.40), получим

$$\mu_i(t)\gamma_i(t,0,y^{(0)}) = -\int\limits_0^t y_{i4}(t-s) f_4(x(s:0,P^{(1)}y^{(0)}))ds,$$

и, следовательно, учитывая (3.38), $\gamma_i(t,0,y^{(0)})$ стремится к нулю равномерно по $t \in [0,+\infty)$ при $||y^{(0)}|| \to 0$. Здесь $x^{(0)} = P^{(1)}y^{(0)}$. Существование отображения $P^{(1)}$ доказывается аналогично теореме 2.3.1.

Таким образом, все условия теоремы 1.2.1 выполнены, следовательно, нулевое решение системы (3.25) устойчиво по переменным x_1 и x_4 и асимптотически устойчиво по переменным x_2 и x_3.

В силу замены переменных семейство положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ системы (3.24) обладает следующими свойствами:

1) асимптотически устойчиво по переменным v_2 и w_1;

2) устойчиво по переменным v_1 и w_2, причем имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным.

Доказательство завершено.

Для иллюстрации результатов исследования было проведено численное моделирование задачи. Для расчетов выбраны параметры, соответствующие множеству (3.31):

$$k_1 = -1,\ k_2 = -3,\ k_3 = -5,\ k_4 = 1.$$

Моделирование проведено при различных значениях начальных данных:

$$v_1(0) = 1.5,\ v_2(0) = 0.5,\ w_1(0) = 0.3,\ w_2(0) = 0. \tag{3.41}$$

$$v_1(0) = 0.8,\ v_2(0) = 0.3,\ w_1(0) = 0.5,\ w_2(0) = -0.1. \tag{3.42}$$

$$v_1(0) = 0.9,\ v_2(0) = -0.5,\ w_1(0) = 0.8,\ w_2(0) = 0.3. \tag{3.43}$$

На рисунках 3.4-3.7 изображены графики компонент решений системы (3.24) v_i и w_i, $i = \overline{1,2}$, при различных начальных данных. Кривые a), b) и c) являются графиками компонент решений при начальных данных (3.41)-(3.43) соответственно.

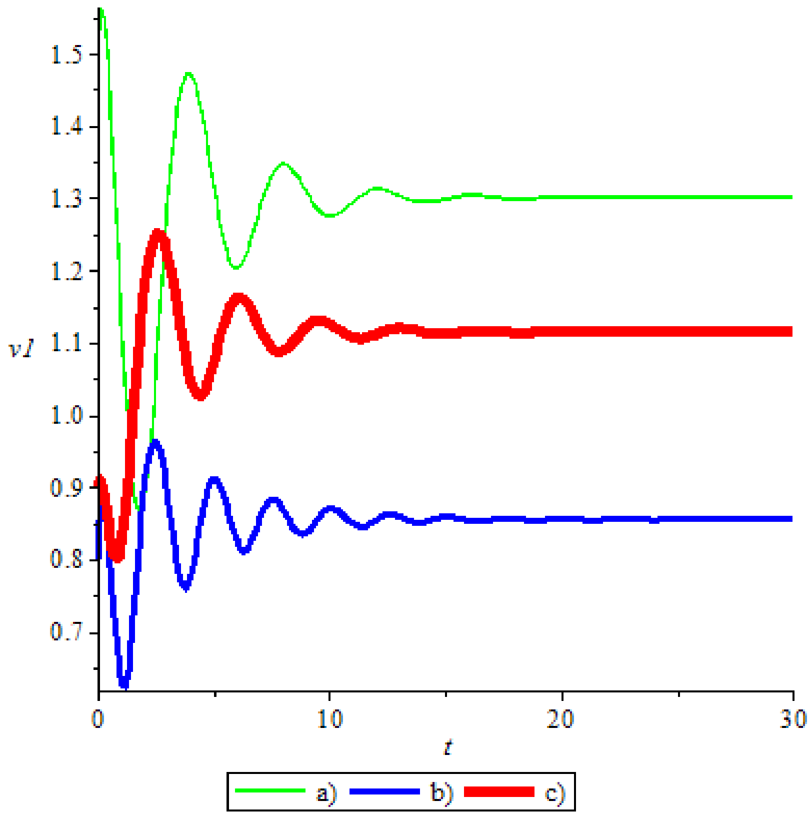

Рис. 3.4: Графики компоненты $v_1(t)$ решения системы (3.24) при начальных данных (3.41)-(3.43).

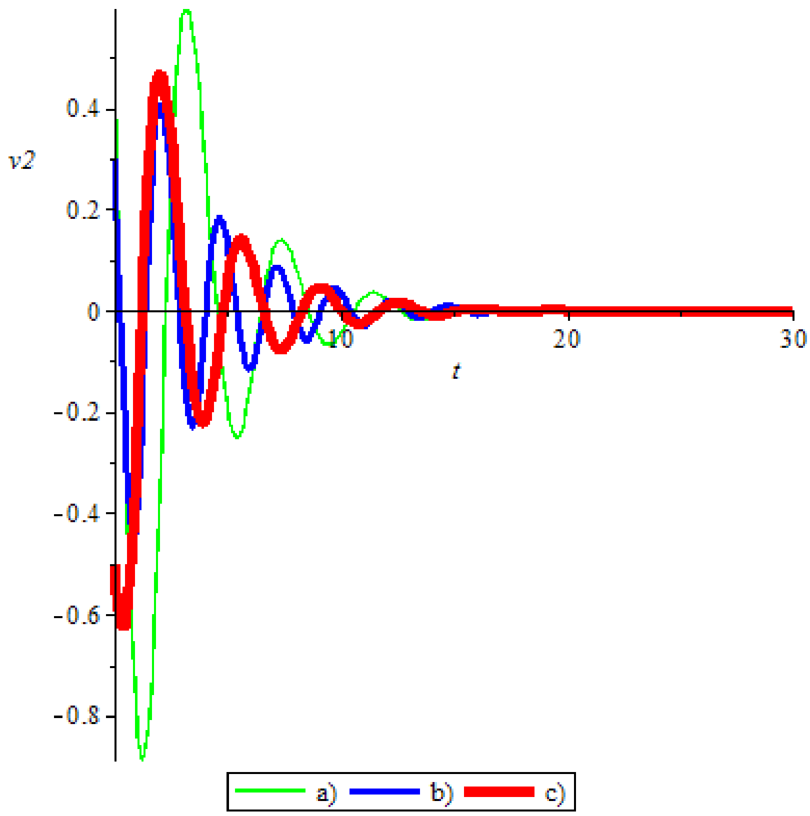

Рис. 3.5: Графики компоненты $v_2(t)$ решения системы (3.24) при начальных данных (3.41)-(3.43).

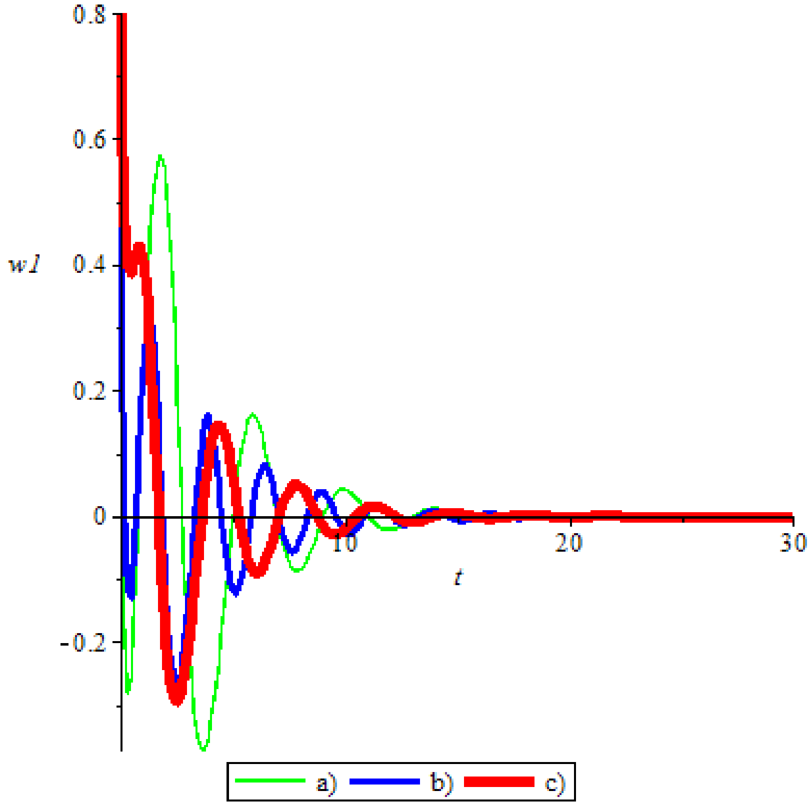

Рис. 3.6: Графики компоненты $w_1(t)$ решения системы (3.24) при начальных данных (3.41)-(3.43).

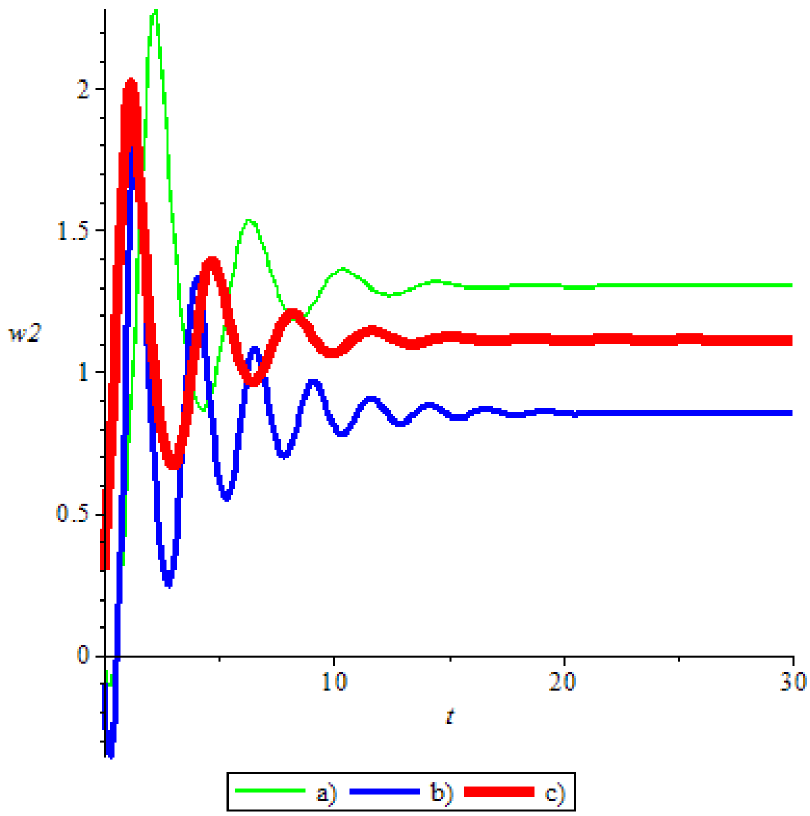

Рис. 3.7: Графики компоненты $w_2(t)$ решения системы (3.24) при начальных данных (3.41)-(3.43).

Как видно из рисунков 3.4-3.7 при выбранных параметрах k_i, $i = \overline{1,4}$, динамика компонент решений представляет собой затухающие колебания. При этом фазовые переменные v_1 и w_2 стремятся к константам, что иллюстрирует наличие локального асимптотического равновесия по данным переменным. Переменные v_2 и w_1 стремятся к нулю, что соответствует выводу о наличии асимптотической устойчивости по этим переменным.

На рисунке 3.8 изображена проекция фазового портрета системы (3.24) на плоскость Ov_1v_2 фазового пространства $Ov_1v_2w_1w_2$.

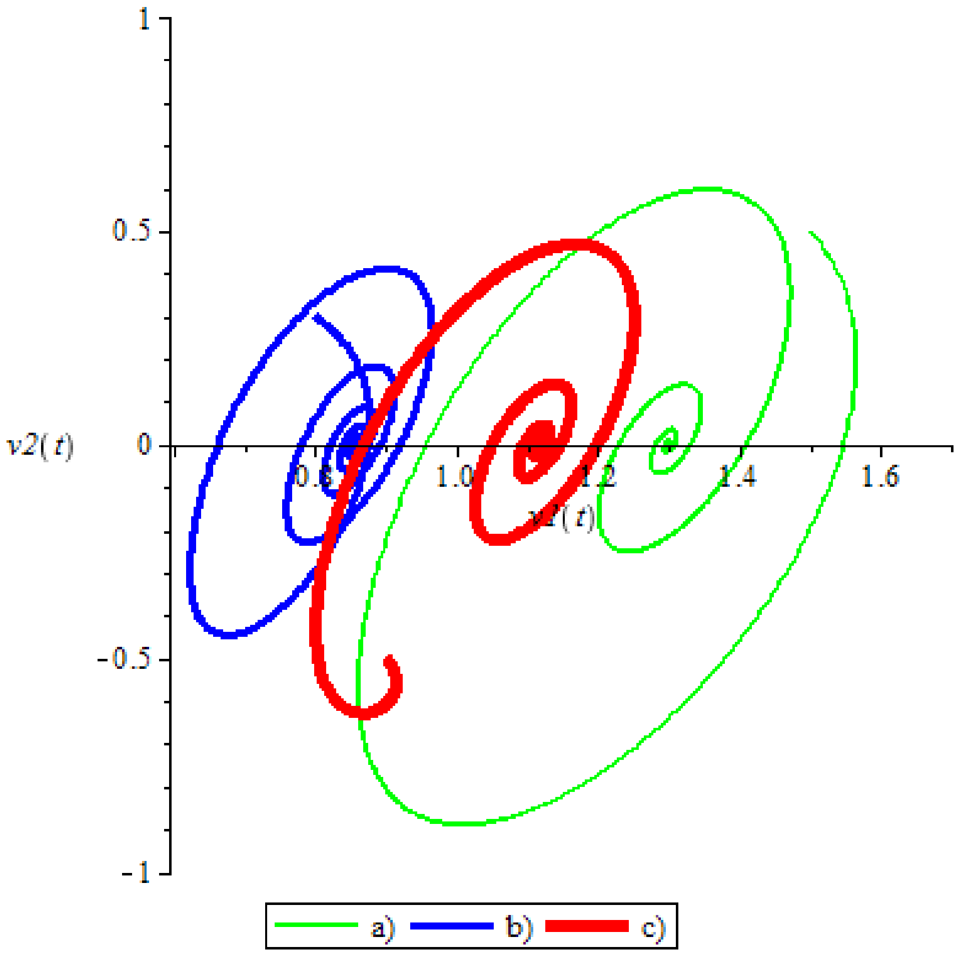

Рис. 3.8: Графики проекций фазовых траекторий системы (3.24) на плоскость Ov_1v_2 при начальных данных (3.41)-(3.43).

Из построенной проекции фазового портрета видно, что при выбранных параметрах k_i, $i = \overline{1,4}$, траектории системы (3.24) стремятся к точкам оси Ov_1, которые принадлежат семейству положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ системы (3.24).

4. Численный метод и комплекс программ для расчета начальных точек локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем

4.1 Численный метод расчета начальных данных для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем

При проведении численного моделирования химических процессов зачастую приходится сталкиваться с проблемой решения жестких по части компонент нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи Коши для таких систем требует применения особых методов, но даже использование специализированных методик не дает приемлемого сокращения временных затрат при проведении численного эксперимента. В данном случае удобно использовать систему, локально асимптотически эквивалентную исследуемой. В качестве такой системы можно использовать линейное приближение. Такой подход изложен в работах [13], [52], [55], [60], где приведены достаточные условия асимптотической эквивалентности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Расмотрим задачу Коши с начальными данными $x^{(0)}$ для исследуемой системы (2.1). Поставим задачу о нахождении соотвествующего решения с начальными данными $y^{(0)}$ линейной системы (1.19), являющейся локально покомпоненто асимптотически эквивалентной системе (2.1).

В параграфе 2.1 построено отображение, устанавливающее соотношение между начальными точками исследуемой системы (2.1) и ее линейного приближения (1.19) в смысле локальной покомпонентой асимптотической эквивалентности:

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int_0^{+\infty} Y(-s)P(x(s))ds, \tag{4.1}$$

где $x(t) = x(t : 0, x^{(0)})$ – решение системы (2.1), проходящее в момент времени $t = 0$ через точку $x^{(0)}$, $y(t) = Y(t)y^{(0)}$, $Y(t)$ – нормированная в нуле фундаментальная матрица линейного приближения.

Отображение (4.1) в координатной форме имеет следующий вид:

$$y_i^{(0)} = x_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{+\infty} y_{ij}(-s)P_j(x(s))ds, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.2}$$

где $y_{ij}(t)$ – элементы фундаментальной матрицы $Y(t)$.

Для вычисления несобственных интегралов в выражении (4.2) с заданной точностью $\varepsilon > 0$ представим выражение (4.2) в виде:

$$y_i^{(0)} = x_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{b_{ij}} y_{ij}(-s)P_j(x(s))ds + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{b_{ij}}^{+\infty} y_{ij}(-s)P_j(x(s))ds,\ i = \overline{1, n},$$

где с учетом оценок (2.5) и (2.6) числа b_{ij} определяются из условий

$$D \sum_{j=1}^{n} \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} D^{|p_j|} c_0^{|p_j|-1} \frac{\exp\left\{(-\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n)\, b_{ij}\right\}}{\alpha_i - p_{j1}\beta_1 - ... - p_{jn}\beta_n} < \varepsilon. \tag{4.3}$$

При этом справедливость условий (4.3) достигается за счет выбора достаточно малого $c_0 > 0$.

Выберем шаг τ и $l_0 = 2l$ так, что $b_0 = l_0\tau \geq b$, где $b = \max\{b_{ij}\}$. Введем обозначения $t_j = j\tau$, $x^j = x(t_j)$, $j = \overline{0, l_0}$.

Тогда формулы для приближенного вычисления начальных точек решений линейной системы (1.19) с точностью ε имеют вид

$$\tilde{y}_i^{(0)} = x_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{b_0} y_{ij}(-s)P_j(x(s))ds. \tag{4.4}$$

Для численного нахождения решения $x(t : 0, x^{(0)})$ системы (2.1) в соотношениях (4.4) применялся L-устойчивый (4,2)-метод четвертого порядка точности [14].

Обозначая правую часть системы (2.1) через

$$F(x) = Ax + f(x),$$

запишем разностную схему (4,2)-метода для $(j+1)$-ого приближения вектора решений:

$$x^{j+1} = x^j + \sum_{i=1}^{4} p_i k^{(i)}, \quad j = \overline{0, l_0},$$

$$D_j k^{(1)} = \tau F(x^j),$$

$$D_j k^{(2)} = k^{(1)},$$

$$D_j k^{(3)} = \tau F(x^j + \beta_{31} k^{(1)} + \beta_{32} k^{(2)}) + \alpha_{32} k^{(2)},$$

$$D_j k^{(4)} = k^{(3)} + \alpha_{42} k^{(2)},$$

$$D_j = E - a\tau F'_j,$$

где τ – шаг интегрирования, x^j – приближенное решение при $t = t_j$; E – единичная матрица размерности j; $F'_j = \dfrac{\partial F(x^j)}{\partial y}$ – матрица Якоби векторной функции $F(x)$; a, p_i, α_{ij}, β_{ij} – вещественные коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости (m,k)-метода; $x^j = colon(x_1^j, ..., x_n^j)$; $k^{(i)} = colon(k_1^{(i)}, ..., k_n^{(i)})$.

Коэффициенты a, p_i, α_{l2}, β_{3k}, $i = \overline{1,4}$, $l = \overline{3,4}$, $k = \overline{1,2}$ были подобраны так, чтобы добиться четвертого порядка точности, и имеют следующие значения [14]:

$$a = 0.57281606248213, \ p_1 = 1.27836939012447,$$

$$p_2 = 1.00738680980438, \ p_3 = 0.92655391093950,$$

$$p_4 = 0.33396131834691, \beta_{31} = 1.00900469029922,$$

$$\beta_{32} = 0.25900469029921, \ \alpha_{32} = 0.49552206416578,$$

$$\alpha_{42} = 1.28777648233922.$$

Для приближенного вычисления определенного интеграла

$$\int_0^{b_0} g(t)dt$$

в соотношении (4.4) использовался метод Симпсона:

$$\int_0^{b_0} g(t)dt \approx \frac{h}{3}\left[g_0 + g_{2l} + 4\sum_{i=1}^{l} g_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{l-1} g_{2i}\right],$$

где $g_j = g(t_j)$, $j = \overline{0, l_0}$.

4.2 Описание комплекса программ для расчета начальных точек локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем

Приведем описание комплекса программ для расчета начальных точек локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем с заданной точностью. Разработанный комплекс состоит из двух программных модулей:

1. Программный модуль вычисления фундаментальной матрицы линейной системы.

2. Программный модуль для вычисления отображения, устанавливающего соответствие между начальными точками локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем.

Программный модуль вычисления фундаментальной матрицы линейной системы реализован в математическом пакете Maple.

Разработанный модуль определяет собственные значения матрицы линейной системы и соответствующие им собственные и присоединенные векторы. Далее на основании полученных результатов строится фундаментальная матрица системы по формулам (1.20).

Программный модуль для вычисления отображения, устанавливающего соответствие между начальными точками локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем написан на языке C++. В нем реализованы алгоритмы: L-устойчивый (4,2)-метод четвертого порядка точности, метод Симпсона, численный расчет отображения, устанавливающего соответствие между начальными точками локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем.

Программный код оформлен в виде набора функций, которые можно разделить на несколько групп.

1) Функции, реализующие векторные и матричные операции:

– функция Mult в зависимости от входных данных возвращает результат умножения числа на вектор, матрицы на матрицу, числа на матрицу и матрицы на вектор;

– функция Add в зависимости от входных данных возвращает результат сложения векторов или матриц;

– функция CGInversion реализует метод Гаусса с поиском минимального элемента;

– функция LUInversion реализует метод нахождения обратной матрицы с помощью LU-разложения.

2) Вспомогательные функции:

– функция f возвращает значение правой части системы ОДУ в заданной точке;

– функция Ar возвращает матрицу коэффициентов линейной составляющей системы;

– функция P возвращает вектор нелинейной части системы в заданной точке;

– функция Jacobian возвращает значение матрицы Якоби для функций из правой части рассматриваемой системы ОДУ в заданной точке;

– функция Y возвращает значение фундаментальной матрицы системы ОДУ с матрицей коэффициентов, соответствующей матрице Ar.

3) Функция mkMethod, реализующая (4,2)-метод, позволяет добиться требуемой точности и задать нужный временной отрезок.

4) Функция Simpson, реализующая метод Симпсона для вычисления определенного интеграла.

В основной программе организован ввод начальных параметров, вызов функций и вывод приближенного значения начальной точки линейной системы.

4.3 Вычислительный эксперимент на примере брутто-реакции пиролиза этана

Рассмотрим систему (1.32), соответствующую кинетической модели брутто-реакции пиролиза этана после переноса начала координат в фиксированную точку ненулевого положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -k_1 x_1 - 2k_2 x_1^2 \\ \dot{x_2} = k_1 x_1 + k_2 x_1^2 \\ \dot{x_3} = k_1 x_1 \\ \dot{x_4} = 2k_2 x_1^2 \end{cases}. \tag{4.5}$$

Ставится задача о нахождении начальных данных для линейного приближения системы (4.5) через известные начальные данные системы (4.5).

В векторной форме данная система имеет вид:

$$\dot{x} = Ax + P(x),$$

где $x = colon(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} -2k_2 x_1^2 \\ k_2 x_1^2 \\ 0 \\ 2k_2 x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Ее линейное приближение имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -k_1 y_1 \\ \dot{y_2} = k_1 y_1 \\ \dot{y_3} = k_1 y_1 \\ \dot{y_4} = 0 \end{cases}. \tag{4.6}$$

Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность для систем (4.5) и (4.6) показана в параграфе 1.4.

Для системы (4.6) нормированная в нуле фундаментальная матрица имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-k_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-k_1 t} & 1 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-k_1 t} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расчет начальных точек системы (4.6) проведен по формуле (4.4) для различных значений констант скоростей химических реакций k_1 и k_2, которые соответствуют протеканию реакции пиролиза этана при различных температурах и рассчитаны из уравнения Аррениуса [15]. Результаты, рассчитанные с точностью $\varepsilon = 0.001$, представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1: Результат численного эксперимента

T, K	800	900	1000	1200
k_1	0.503	32.832	928.979	139822
k_2	0.073	6.625	244.927	55056.8
$\tilde{y}_1^{(0)}$	0.777	0.875	0.790	0.989
$\tilde{y}_2^{(0)}$	0.169	0.091	0.150	0.005
$\tilde{y}_3^{(0)}$	0.115	0.058	0.090	0.000
$\tilde{y}_4^{(0)}$	0.121	0.069	0.118	0.010

На рис. 4.1 приведены графики решений систем (4.5) и (4.6), между начальными значениями которых установлено соотношение в соответствии с формулой (4.4), при значениях k_1 и k_2, соответствующих температуре $T = 1000$ K.

Таким образом, по начальным точкам нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений были рассчитаны начальные точки ее линейного приближения, которые обеспечивают локальную покомпонентную асимптотическую эквивалентность систем, согласно формуле (4.4).

Из численного эксперимента видно, что поведение решений системы (4.5), начиная с момента времени, равного 0,002 с, мало отличается от поведения решений системы (4.6). Это обуславливается достаточно большими значениями констант скоростей химических реакций при температуре 1000 K, а следовательно, высокой скоростью протекания стадий химического превращения.

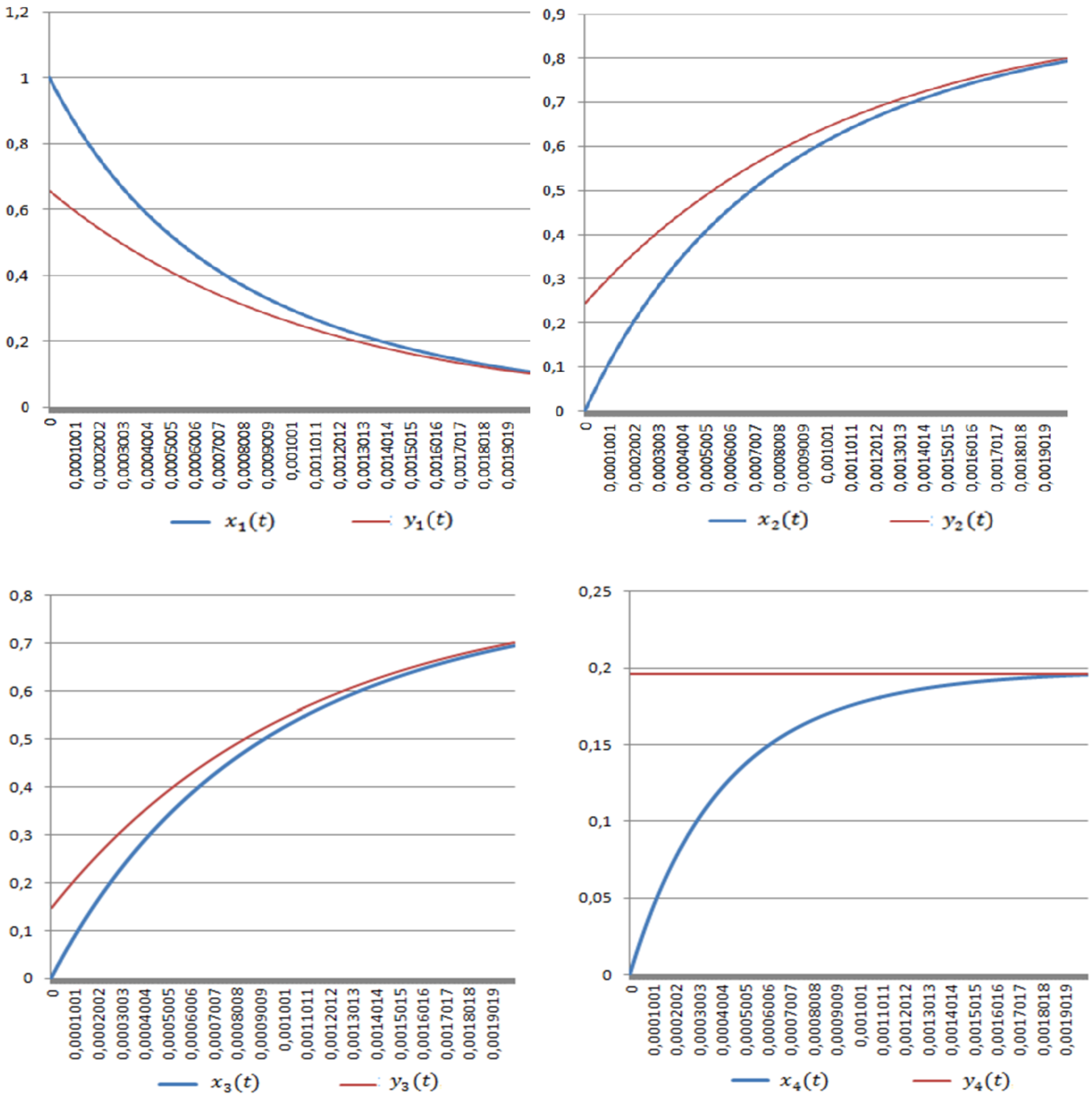

Рис. 4.1: Графики решений $x_i(t)$ и $y_i(t)$, между начальными значениями которых установлено взаимно-однозначное соответствие.

Данная методика позволяет при проведении расчетов использовать вместо численного решения жесткой системы аналитическое решение ее линейного приближения, что значительно сокращает требования к вычислительным мощностям и повышает точность расчетов.

Заключение

В ходе диссертационного исследования была разработана новая методика исследования частичной устойчивости математических моделей, представляющих собой нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С использованием полученных теорем проведено исследование нескольких прикладных задач.

В работе получены новые достаточные условия частичной устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в форме векторного полинома и систем с достаточно гладкими правыми частями на основе новых определений локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности.

В диссертационной работе решены задачи об исследовании частичной устойчивости положений равновесия кинетических моделей части компактной схемы химической реакции пиролиза пропана, брутто-реакции пиролиза этана и реакции образования амида уксусной кислоты, математической модели динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия.

Для математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла, найдено множество параметров, обеспечивающее частичную устойчивость семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1.

В диссертационной работе разработан численный метод расчета начальных данных для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем, позволяющий рассчитать начальные точки линейного приближения через начальные точки нелинейной системы. Разработан комплекс программ, реализующий указанный численный метод и алгоритм нахождения фундаментальной матрицы.

Список литературы

[1] Акрамов Т. А. Применение качественных методов анализа дифференциальных уравнений, описывающих физико-химические процессы // Химическая промышленность сегодня. – 2014. – № 11. – С. 5–17.

[2] Андреев А. С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // ПММ. – 1987. – Т. 51, вып. 2. – С. 253–260.

[3] Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.

[4] Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.

[5] Борисов А. В., Козлов В. В., Мамаев И. С. Асимптотическая устойчивость и родственные задачи динамики падающего тяжелого твердого тела // Нелинейная динамика. – 2007. – Т. 3, № 3. – С. 255–296.

[6] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

[7] Варфоломеев С. Д., Луковенков А. В. Устойчивость в химических и биологических системах. Многостадийные полиферментные реакции. // Журнал физической химии. – 2010. – Т. 84, № 8. – С. 1448–1457.

[8] Вольтер Б.В., Сальников И.Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов. – М. Химия, 1972. – 192 с.

[9] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

[10] Воротников В. И. Об устойчивости по заданному числу переменных // Прикладная математика и механика. – 1986. – Т. 50, вып. 3. – С. 353–359.

[11] Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1991. – 288 с.

[12] Воротников В. И., Румянцев В. В. Основы теории частичной устойчивости и управления. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФ, 2014. – 304 с.

[13] Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. – Саранск: СВМО, 2000. – 300 с.

[14] Галанин М. П., Ходжаева С. Р. Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2013. – № 98. – 29 с.

[15] Губайдуллин И. М., Пескова Е. Е., Язовцева О. С. Математическая модель динамики многокомпонентного газа на примере брутто-реакции пиролиза этана [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2016. – № 20. – Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/matematicheskaya-model-dinamiki-mnogokomponentnogogaza-na-primere-brutto-reakcii-piroliza-etana.

[16] Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука. – 1968. – 800 с.

[17] Зубов В. И. Методы А.М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во ЛГУ. – 1957. – 240 с.

[18] Зубов В. И. Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. – М.: Высш. шк., 1973. – 271 с.

[19] Каменков Г. В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. – Избранные труды. Т. 2. – М.: Наука, 1972. – 215 с.

[20] Косов А. А. К задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1988. – С. 195–203.

[21] Красовский Н. Н. Об устойчивости по первому приближению // ПММ. – 1955. – Т. 19. – С. 516–530.

[22] Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. В 2-х т. – М.: Гостехиздат, 1950. – Т. 1. 596 с.; Т. 2. – 440 с.

[23] Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М., Л.: Гостехиздат, 1951. – 216 с.

[24] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. – 116 с.

[25] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – М., Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.

[26] Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Мат. сб., 1949. – Т. 3(61), № 1. – С. 63–100.

[27] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 533 с.

[28] Мамедова Т. Ф. Асимптотические методы для части компонент решений дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Н.Новгород, 1993. – 14 с.

[29] Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных точек либрации в эллиптической ограниченной задаче трех тел // Прикладная математика и механика, 1970. – Т. 34, вып. 2. – С. 227.

[30] Матросов В. М. Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости // Тр. 2-го съезда по теоретич. и прикл. механике. Обзорные доклады. Вып. 1. – М.: Наука, 1965. – С. 112–125

[31] Мухина Т. Н., Барабанов Н. Л., Бабаш С. Е. и др. Пиролиз углеводородного сырья. – М.: Химия, 1987. – 240 с.

[32] Назаров В. И., Пескова Е. Е., Язовцева О. С. Численное моделирование жестких систем с использованием (4,2)-метода [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2017. – № 13. – Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/chislennoe-modelirovanie-zhestkix-sistem-s-ispolzovaniem-42-metoda.

[33] Никонов В. И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2011. – Т. 13, № 2. – С. 95–99.

[34] Нурисламова Л. Ф. Кинетическая модель реакции газофазного пиролиза пропана на основе компактной схемы/ Губайдуллин И. М., Нурисламова Л. Ф. // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2015. – Т. 1. – С. 185–193.

[35] Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т. 37, вып. 4. – С. 659–665.

[36] Озиранер А. С., Румянцев В. В. Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прик.мат. и мех. – 1972. – Т.36, 2. – С. 364–383.

[37] Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с.

[38] Прокопьев В. П. Об устойчивости невозмущенного движения в критическом случае двух нулевых и пары чисто мнимых корней. // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 2009–2013.

[39] Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. – М.: Наука, 1965. – 572 с.

[40] Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003 –. 184 с.

[41] Румянцев В. В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, вып.1. – С. 147–152.

[42] Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Моск. ун-та, сер. мат., мех., астроном., физ., хим. – 1957. – № 4. – С. 9–16.

[43] Румянцев В. В. Одна теорема об устойчивости движения // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 1. – С. 47–54.

[44] Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных –. М.: Наука, 1987. – 253 с.

[45] Руш П., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова и теория устойчивости. – М. Мир, 1980. – 304 с.

[46] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Ин. лит., 1953. – 346 с.

[47] Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

[48] Стеклов В. А. Работы по механике 1902-1909 гг.: Переводы с французского. – М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. – 492 с.

[49] Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 249 с.

[50] Четаев Н. Г. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965. – 176 с.

[51] Чудинов К. М. Критерий устойчивости по части переменных автономной системы дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 4. – С. 67–72.

[52] Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2017. – Т. 19, № 1. – С. 102–115.

[53] Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2018. – Т. 20, № 3. – С. 304–317.

[54] Шаманаев П. А., Язовцева О. С. О частичной устойчивости положений равновесия динамических систем // Препринт СВМО. – 2018. – № 127. – 20 с.

[55] Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Применение локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности к исследованию устойчивости по части переменных решений динамических систем // Аналитические и численные

методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. Материалы XII Международной научно-технической конференции. – Пенза: Пензенский государственный университет. – 2017. – С. 17–22.

[56] Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: УРСС. 2007. – 320 с.

[57] Шмыров А. С., Шмыров В. А. Об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2009. – № 4. – С. 250–257.

[58] Щенников В. Н. Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 9. – С. 1645–1649.

[59] Щенников В. Н. О частичной устойчивости в критическом случае 2k чисто мнимых корней // Дифференциальные и интегральные уравнения: Методы топологической динамики. – 1985. – С. 46–50.

[60] Язовцева О. С. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2017. – № 13. – Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

[61] Язовцева О. С., Мамедова Т. Ф., Губайдуллин И. М. Исследование устойчивости некоторого решения системы кинетических уравнений химической реакции // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 152–158.

[62] Bailey J. E. Ollis D. F. Biochemical Engineering fundamentals. II Edition. New York: McGraw-Hill Internal Edition. 1986. 984 p.

[63] Brauer F. Asymptotic equivalence and asymptotic behavior of linear systems // Michigan Math. J. 1962. Vol. 9. P. 33–43.

[64] Corduneanu C. Some problems concerning partial stability // Meccanica Non-lineare. Stability. 1971. Vol. 6. P. 141–154.

[65] Fergola P., Moauro V. On partial stability // Ricerche Mat. 1970. Vol. 19. № 2. P. 185–207.

[66] Levinson N. The asymptotic behaviour of a system of linear differential equations. Amer. J. Math. 1946. Vol. 63. P. 1–6.

[67] Magnus K. Beitrage zur Dynamik des Kreftefrein Kordansc gelagerten Kreisels // ZAMM. 1955. Vol.35. №1/2. P. 23–34.

[68] Massera J. L. On Liapounoff's condition of stability. Annals of Mathematics. 1949. Vol. 50, № 3. P. 705–721.

[69] Onuchic N. Asymptotic relationship at infinity between the solutions of two systems of ordinary differential equations // J. Differential Eqs. 3. 1967. P. 47–58.

[70] Peiffer K., Rouche N. Liapounov's second method applied to partial stability // J. Mecanique. 1969. Vol.8. № 2. P. 323–334.

[71] Routh E. J. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, Particularly Steady Motion, London: MacMillan Co., 1877. 108 p.

[72] Rumyantsev V. V. On the stability with respect to a part of the variables // Symp. Math. Vol.6. Meccanica non-lineare. Stability. 23–26 febbrario, 1970. P. 243–265. New York: Acad. Press.

[73] Salvadori L. Some contributions to asymptotic stability theory // Ann. Soc. Scient. Bruxelle. Ser.I. 1974. Vol.88. № 2. P. 183–194.

[74] Verhulst P. F. Natice sur la loi que la population suit dans son accoroissement // Corr. math, et phys, 1838. Vol. 10. P. 113–121.

[75] Wintner A. Linear variation of constants // Am. J. Math. 1946. Vol. 68. P. 185–213.