На правах рукописи

Грехов Михаил Владимирович

ГЛАДКИЕ ЦЕЛЫЕ МОДЕЛИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ульяновск — 2019

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева»

Научный руководитель:	**Панов Александр Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Осипов Денис Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, отдел алгебры, ведущий научный сотрудник
	Скрябин Сергей Маркович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», кафедра алгебры и математической логики, учебно-исследовательская лаборатория алгоритмических методов алгебры и логики, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Защита диссертации состоится 30 октября 2019 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.278.02 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ульяновский государственный университет», расположенном по адресу: 432970, г. Ульяновск, ул. Набережная реки Свияги, д. 106, корп. 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом диссертации можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа https://www.ulsu.ru, с авторефератом также на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации https://vak.minobrnauki.gov.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 432970, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан ____ ________________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Волков М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность исследования и степень разработанности темы исследования. Теория алгебраических торов — активно развивающаяся область алгебраической геометрии, которая представляет большой интерес для дальнейшего исследования. Важнейшим импульсом к её изучению был переход от рассмотрения алгебраически замкнутого поля к случаю алгебраически незамкнутого. Если над алгебраически замкнутым полем алгебраические торы имеют весьма простую структуру и, скорее, представляют интерес как структурный элемент алгебраических групп, то над незамкнутым полем структура алгебраического тора может быть и достаточно сложной, что оправдывает интерес к нему как самостоятельному объекту[1], и при таком изучении неоднократно бывали получены новые значительные результаты. В частности, одним из перспективных направлений для случая, когда поле определения рассматриваемых алгебраических торов локальное или глобальное, оказалось изучение целых моделей этих торов.

Пусть G — линейная алгебраическая группа, определённая над полем K (локальным или глобальным). Тогда целой моделью G называют такую групповую схему X, определённую над $\mathcal{O}_K \subset K$ — кольцом целых поля K, что $G \cong X \times_{\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K} \mathrm{Spec}\, K$. Классической является целая модель Нерона, подробно описанная в монографии З. Боша, В. Люткебомерта и М. Рейно[2]. Её главное достоинство в том, что всегда выполняется свойство гладкости, требуемое от целой модели как дополнительное во многих задачах. Однако модель Нерона определяется неконструктивно, вследствие чего её построение и изучение достаточно сложно. Поэтому сохраняется интерес и к альтернативным целым моделям, обладающим какими-либо полезными дополнительными свойствами. Одной из таких моделей для случая локального основного поля является стандартная целая модель (она же модель Воскресенского), впервые определённая в работах В. Е. Воскресенского и Т. В. Фоминой. Стандартная целая модель определена конструктивно, всегда строго плоская и имеет конечный тип. Однако свойство гладкости для неё, вообще говоря, может не выполняться. Это обусловило интерес к изучению взаимосвязи между стандартной целой моделью и моделью Нерона, которое производилось в работах С. Ю. Попова[3], а также Ч. Чинг-Ли и Ю. Цзю-Канга[4]. В них было доказано,

[1]Воскресенский, В.Е. Алгебраические торы / В.Е. Воскресенский. - М.: Наука, 1977. - 224 с.

[2]Bosch, S. Néron Models / S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. - Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990. - 325 pp.

[3]Popov, S.Yu. Standard Integral Models of Algebraic Tori / S.Yu. Popov. // Preprintreihe des SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik. - 2003. - 31 pp.

[4]Ching-Li, Ch. Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor / Ch. Ching-Li, Yu. Jiu-Kang. - National Center for Theoretical Science, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1999. - 30 pp.

что для случая, когда минимальное поле разложения L алгебраического тора не более чем слабо разветвлено над основным полем K, модель Нерона этого тора совпадает со стандартной целой моделью, а в оставшемся случае дикого ветвления может быть получена из неё за конечное число шагов путём применения процесса сглаживания. При рассмотрении конкретных примеров во всех вышеуказанных работах в качестве локального поля рассматривались поля p-адических чисел или их конечные расширения.

Для случая, когда основное поле — глобальное, построение и свойства модели Нерона изучены хуже. В качестве глобального основного поля в конкретных примерах обычно рассматривается поле алгебраических чисел. Чтобы реализовать алгоритм построения модели Нерона над полем алгебраических чисел, требуется некоторая целая модель, которая может использоваться в качестве начального шага процесса сглаживания. Известны две различным образом определяемые целые модели, каждая из которых может считаться обобщением идеи стандартной целой модели из случая локального поля для случая поля алгебраических чисел. Это стандартная целая модель, определённая и описанная в совместной работе В. Е. Воскресенского, Б. Э. Кунявского и Б. З. Мороза[5], и каноническая целая модель, определение которой впервые появляется в книге В. Е. Воскресенского[6]. Любая из этих моделей, как следует из их описания в соответствующих работах, может использоваться в качестве начальной схемы для построения модели Нерона путём сглаживания, однако при этом возникают трудности, отсутствующие в случае локального поля. Так, для канонической целой модели неизвестно явное задание, что не позволяет получить явное задание модели Нерона в конкретных примерах алгебраических торов, а для стандартной целой модели неизвестна структура её слоёв над пополнениями основного поля, что также препятствует получению явного задания модели Нерона. Кроме того, до сих пор не была изучена взаимосвязь между стандартной и канонической моделями алгебраического тора над полем алгебраических чисел.

Таким образом, рассматриваемые разделы в теории алгебраических торов обладают значительным потенциалом для дальнейшего исследования, которое и было проведено в данной работе.

Объект исследования в данной работе — алгебраические торы, определённые над локальными или глобальными полями, а также целые модели алгебраических торов.

[5] Воскресенский, В.Е. О целых моделях алгебраических торов / В.Е. Воскресенский, Б.Э. Кунявский, Б.З. Мороз. // Алгебра и анализ. - 2002. - Т. 14, выпуск 1. - С. 46-70.

[6] Воскресенский, В.Е. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп / В.Е. Воскресенский. - М.: МЦНМО, 2009. - 408 с.

Предмет исследования — следующие целые модели алгебраических торов: модель Воскресенского для случая локального основного поля, каноническая и стандартная целые модели для случая глобального основного поля, модель Нерона — а также связь между этими моделями.

Цель работы. Целями данной работы являются: доказательство для произвольного алгебраического тора, определённого над полем алгебраических чисел, совпадения его канонической и стандартной целых моделей, изучение свойств указанных моделей (что позволит использовать их при построении явного задания глобальной модели Нерона), а также построение модели Нерона в явном виде и изучение её свойств для некоторых серий частных случаев, в которых её структура приобретает дополнительные закономерности: двумерных торов и максимальных торов без аффекта в полупростых группах.

Эта цель была достигнута решением следующих **задач**:

1) Построение моделей Воскресенского и их сглаживание до получения моделей Нерона для всех типов двумерных анизотропных алгебраических торов над локальными полями.

2) Доказательство для стандартной целой модели алгебраического тора над глобальным полем свойств замкнутых вложений, конструкции в случае простейшего квазиразложимого тора.

3) Установление между стандартной и канонической целыми моделями произвольного алгебраического тора над глобальным полем изоморфизма слоёв над локальными полями и вложения.

4) Построение стандартной целой модели и её сглаживание до получения модели Нерона для максимального алгебраического тора без аффекта в полупростой группе над полем алгебраических чисел для случая системы корней B_n.

Методология и методы исследования. При исследовании аффинной реализации алгебраических торов и их целых моделей используются методы целочисленных представлений групп Галуа и классификации соответствующих целочисленных решеток. В вопросах изучения гладкости целых моделей мы часто используем дефект гладкости — величину, характеризующую меру отклонения групповой схемы от гладкой структуры. При исследовании редукции целых моделей мы используем структурную теорию алгебраических групп над совершенными полями.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты данной диссертационной работы:

• Получено явное задание модели Нерона всех двумерных анизотропных алгебраических торов над локальным полем.

• Доказаны свойства стандартной целой модели алгебраического тора над полем алгебраических чисел и её слоев над локальными полями, позволяющие использовать указанную модель для построения модели Нерона данного тора.

• Доказано совпадение стандартной и канонической целых моделей для произвольного алгебраического тора над полем алгебраических чисел.

• Полностью описано построение модели Нерона максимального алгебраического тора без аффекта в полупростой группе над полем алгебраических чисел для случая системы корней B_n.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми. Построены модели Нерона для всех 10 типов двумерных анизотропных алгебраических торов, определённых над локальными полями. Доказаны основные свойства стандартной целой модели алгебраического тора, аналогичные свойствам канонической целой модели. Установлен изоморфизм между стандартной и канонической целыми моделями произвольного алгебраического тора, определённого над полем алгебраических чисел. Построена модель Нерона максимального алгебраического тора без аффекта в полупростой группе над полем алгебраических чисел для случая системы корней B_n.

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты, полученные автором лично. Совместно с научным руководителем были определены область исследования, цели и задачи работы. Далее научным руководителем осуществлялось общее руководство, производились методическая помощь и обсуждение полученных результатов. Все этапы исследования: формулировка и доказательство утверждений, построение и обоснование моделей — проведены автором лично.

Степень достоверности результатов. Достоверность всех основных результатов данной диссертационной работы подтверждается полными и подробными математическими доказательствами, изложенными в работе.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Основные результаты представляют собой решение задач, имеющих существенное значение для арифметики алгебраических торов над локальными полями и полями алгебраических чисел, и могут представлять интерес для специалистов по алгебре и теории чисел Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургского государственного университета, Самарского университета, Саратовского университета, ПОМИ РАН.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры алгебры и геометрии Самарского государственного университета, на III Международной конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Тольятти, 2012 г.), на XI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Саратов, 2013 г.), на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева ПОМИ РАН (руководитель проф. А. И. Генералов) и на V Международной конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, 2015 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 6 работах, в том числе 2 публикации — в изданиях, рекомендованных ВАК России, 1 публикация — в рецензируемых изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования.

Структура и объём работы. Диссертация изложена на 102 страницах и состоит из введения, трёх глав и списка литературы, содержащего 25 наименований. Каждая глава разделена на пункты, в пределах главы теоремы, предложения, леммы и формулы охвачены единой нумерацией в порядке их следования в тексте.

Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность данной диссертационной работы, а также сформулированы цели и задачи работы и дан обзор используемых методов и основных результатов диссертации.

Глава 1 носит подготовительный характер. В ней приводится необходимый материал из теории функторов и групповых схем, а также арифметики алгебраических торов, используемый в дальнейшем. Глава содержит краткое изложение необходимых сведений, касающихся аффинных схем, форм и одномерных когомологий алгебраических многообразий, а также целых моделей алгебраических торов.

В частности, в этой главе даётся определение двух основных объектов исследования настоящей работы. Первый из них — алгебраический тор, рассматриваемый как аффинная схема. Алгебраическим тором T, определённым над полем k и диагонализируемым (разложимым) над его расширением L, являющимся расширением Галуа, называют схему $T = \mathrm{Spec}\ (L[\mathbb{Z}^n])^G$ такую, что группа Галуа $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ действует диагонально на алгебре Хопфа $L[\mathbb{Z}^n]$. Как видно из этого определения, категория L-разложимых алгебраических k-торов и категория G-модулей конечного $\mathbb{Z}$-ранга без кручения (решеток Галуа) двойственны. При этом каждому тору T соответствует его G-модуль характеров $\hat{T}$. В условиях данных обозначений для тора T поле k также называют основным полем, а L — полем разложения. Вообще говоря, поле разложения для данного тора может быть не единственным; известно, что минимальное поле разложения всегда является конечным расширением основного поля. Второй основной объект исследования — целая модель X алгебраического тора T, представляющая собой такую групповую схему над $\mathcal{O}_k$ — кольцом целых элементов поля k, что $X \times_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k} \mathrm{Spec}\ k \cong T$.

Самый простой пример алгебраического тора — диагональная группа (она называется k-разложимым тором). Следующий по сложности структуры тип торов — квазиразложимые. Они обладают тем важнейшим свойством, что произвольный алгебраический тор может быть реализован как подтор некоторого квазиразложимого тора. Во всех исследованиях данной работы в качестве первого шага мы рассматриваем случай квазиразложимого тора, а затем переносим результаты на случай произвольного тора или объясняем препятствия для такого переноса. В силу описанной выше двойственности торов и их модулей характеров вместо явного построения квазиразложимого надтора для изучаемого алгебраического тора мы строим точную последовательность[7] вида $0 \to \hat{R} \to \hat{S} \to \hat{T} \to 0$. Здесь $\hat{T}$, $\hat{R}$ и $\hat{S}$ — G-модули характеров алгебраических торов, определённых над k и разложимых (диагонализируемых) над L, причём тор S квазиразложим над k и поэтому $\hat{S}$ — пермутационный G-модуль.

Далее описываются конструкции основных целых моделей, наиболее часто используемых при исследовании арифметики алгебраических торов. Первой из них является стандартная целая модель (известная также как каноническая модель или модель Воскресенского) алгебраического тора над локальным полем. Напомним, как она определяется.

В условиях ранее введённых обозначений известно, что $k[T] = L[\hat{T}]^G$, где $L[\hat{T}]$ — групповое кольцо $\hat{T}$, $k[T]$ — координатное кольцо T. Пусть $[L:k] = n$, $\mathrm{rk}\ \hat{T} = d$. Из определения алгебраического тора как связной алгебраической k-группы, диагонализируемой над L, следует изоморфизм $T \times_{\mathrm{Spec}\ k} \mathrm{Spec}\ L \cong \mathbb{G}^d_{m,L}$. Для объектов, двойственных участвующим в этом изоморфизме, имеет место аналогичный изоморфизм $L[\hat{T}] \cong L \otimes L[\hat{T}]^G \cong \bigoplus_{i=1}^n (L[\hat{T}]^G \omega_i)$, где $\{\omega_i\}$ — какой-либо базис расширения L/k. Отсюда можно получить разложение по базису $\{\omega_i\}$ любого характера из $\hat{T}$. В частности, для базисных характеров $\hat{T}$ имеет место некоторое разложение $\chi_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}\omega_j$, $i = \overline{1,d}$, а для обратных им — разложение $\chi_i^{-1} = \sum_{j=1}^n y_{ij}\omega_j$. Известно[3], что $L[\hat{T}]^G$ как k-алгебра порождена над k элементами x_{ij}, y_{ij}, это формально обозначают $L[\hat{T}]^G = k[x_{ij}, y_{ij}]$. Причём в случае, если поля k и L локальные, базис $\{\omega_i\}$ всегда можно выбрать целым. Тогда моделью Воскресенского называется схема $X = \mathrm{Spec}\ B$, где

[7] Крутиков, Ю.Ю. Аффинные представления трехмерных алгебраических торов / Ю.Ю. Крутиков. // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. - 2007. - № 7 (57). - С. 92-106.

$B = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$.

Вторая из основных целых моделей — модель Нерона. Напомним, что целая модель X тора T называется моделью Нерона, если она гладкая, приведённая и удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любой гладкой $\mathcal{O}_k$-схемы Y любой k-морфизм $u_k : Y \times \mathrm{Spec}\ k \to X \times \mathrm{Spec}\ k$ единственным образом продолжается до $\mathcal{O}_k$-морфизма $u : Y \to X$.

Основные недостатки модели Нерона[2] — для произвольной аффинной k-схемы X, где k — локальное поле или глобальное поле характеристики 0, модель Нерона может не существовать, если X содержит подгруппу типа $\mathbb{G}_a$, или не иметь конечного типа, если X содержит подгруппу типа $\mathbb{G}_m$.

Заметим, что построения модели Нерона требуют многие вопросы арифметики алгебраических торов как над локальными, так и над глобальными полями, но, к сожалению, явной конструкции, в отличие от модели Воскресенского, модель Нерона не имеет. Известно лишь, что она является аффинной групповой схемой конечного типа для k-анизотропных алгебраических торов и только для них. Следуя общей рекомендации[2], получить модель Нерона для произвольного алгебраического тора можно с помощью процесса сглаживания, применённого к некоторой целой модели, которая выступает в качестве первого шага. Известно, что для случая локального поля в качестве первого шага в этом алгоритме может быть использована[4] любая аффинная групповая схема конечного типа над кольцом целых $\mathcal{O}_k$, обладающая тем экстремальным свойством, что $X(\mathcal{O}_k) = U$, где $U \subset T(k)$ — максимальная компактная подгруппа группы k-точек тора T. В частности, подходящими свойствами обладает[3] упомянутая ранее целая модель Воскресенского.

Таким образом, проблема построения модели Нерона в явном виде для k-анизотропного тора сведена к следующей самостоятельной задаче: изучить особенности редукции модели Воскресенского исследуемого тора и указать последовательность их разрешения и её реализацию. Ранее данная задача была поставлена и решена только для одного частного случая[8] (семейства норменных алгебраических торов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям), мы же решили эту задачу для всех двумерных алгебраических торов над локальными полями в **главе 2**.

Воспользовавшись известной классификацией двумерных алгебраических торов, мы выбрали из 13 типов двумерных торов 10 анизотропных и для представителя каждого из них построили модель Воскресенского в явном виде. С учётом общих свойств стандартной це-

[8]Liu, Q. Special fibers of Néron models and wild ramification / Q. Liu, D. Lorenzini. // Preprint. - 1999. - 40 pp.

лой модели, таких как этальная замена базы и гладкость модели в случае не более чем ручного ветвления поля разложения L над основным полем k, мы свели задачу к случаю, когда L вполне и дико разветвлено над k, а поле вычетов имеет характеристику 2 или 3. Во всех рассмотренных случаях редукция стандартной целой модели оказалась неприведённой групповой схемой, особенности в каждом конкретном случае с учётом кратности приведены в таблице 1 (торы тех типов, номера которых отсутствуют в таблице, не являются k-анизотропными).

При разрешении особенностей с помощью дилатации на каждом шаге мы проверяли гладкость полученной групповой схемы. Вычисляя на каждом шаге дефект гладкости, за конечное число шагов мы получали его нулевое значение, что означало гладкость целой модели. В результате мы для каждого случая построили аффинную групповую схему над кольцом целых основного поля k, которая является моделью Нерона соответствующего алгебраического тора. Это и есть основной результат главы 2.

Номер типа тора	$[L : k]$	$\operatorname{char} r_k = 2$	$\operatorname{char} r_k = 3$
3	2	μ_2	—
5	3	—	μ_3
6	4	μ_2, α_2	—
7	4	μ_2, μ_2	—
8	4	μ_2, α_2	—
9	6	α_2, α_2	α_3
10	6	α_2, α_2	α_3
11	6	—	μ_3
12	8	μ_2, α_2	—
13	12	α_2, α_2	α_3

Таблица 1. Особенности двумерных анизотропных алгебраических торов

Глава 3 посвящена вопросам построения модели Нерона алгебраических торов над полями алгебраических чисел. Для случая, когда k — глобальное поле характеристики 0, известен[2] следующий результат: целая модель X алгебраического тора T является моделью Нерона тогда и только тогда, когда каждая модель $X \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_\wp}$ является моделью Нерона тора $T_\wp = T \times \operatorname{Spec} k_\wp$ (здесь $\wp \triangleleft \mathcal{O}_k$ — простой идеал, $k_\wp$ — пополнение k по $\wp$-адическому показателю, $\mathcal{O}_{k_\wp}$ — кольцо целых элементов $k_\wp$). Это позволяет построить модель Нерона тора T косвенным способом: если взять такую модель X' этого тора, что для её слоёв $X' \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_\wp}$ известен результат построения модели Нерона, то модель Нерона X

тора T можно получить, применив к модели X' все преобразования, которые используются для построения моделей Нерона её локальных слоёв.

Такая модель известна, это так называемая каноническая целая модель[6]. Напомним её определение. Пусть k — поле алгебраических чисел. Для каждого простого идеала $\wp \triangleleft \mathcal{O}_k$ можно рассмотреть пополнение поля k по соответствующему $\wp$-адическому показателю, оно будет локальным полем (обозначим его $k_\wp$). Тогда для каждого тора $T_\wp = T \times \operatorname{Spec} k_\wp$ определена ранее описанная конструкция модели Воскресенского над локальным полем. Пусть $B_\wp$ — такая алгебра Хопфа, что $X_\wp = \operatorname{Spec} B_\wp$ — соответствующая модель Воскресенского.

Определение 1. В условиях обозначений выше схема вида $X = \operatorname{Spec} C$, где $C = \bigcap\limits_{\wp \triangleleft \mathcal{O}_k} C_\wp$, $C_\wp = B_\wp \bigcap k[T]$, называется канонической целой моделью тора T.

Основным недостатком такой модели является отсутствие явного задания. Этого недостатка не имеет другая возможная модель — стандартная целая модель[5]. Напомним её определение (такое определение корректно благодаря результату М. В. Бондарко[9]).

Определение 2. Стандартной целой моделью тора T называется $\mathcal{O}_k$-схема вида $X' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} — координаты (координатные функции) при разложении базисных характеров модуля $\hat{T}$ и обратных им по целому базису расширения L/k, где L — такое поле разложения T, что оно обладает целым базисом над k.

Недостатком этой модели была неизученность свойств её локальных слоёв: если для канонической модели X тора T по определению слои $X_\wp$ представляют собой модели Воскресенского торов $T_\wp$, но при этом неизвестно явное задание самой X, то для стандартной модели X' тора T по определению известно явное задание, но её слои $X'_\wp$ представляют собой некоторые целые модели торов $T_\wp$, из задания которых не следует, что они совпадают с моделями Воскресенского этих торов. Чтобы использовать стандартную модель для построения модели Нерона, требуется доказать, что её локальные слои удовлетворяют необходимым для этого свойствам. Кроме того, возникает вопрос о том, в каких случаях стандартная и каноническая модели совпадают, а в каких различны. Именно эти вопросы решаются в данной главе диссертации.

Основные результаты настоящей главы следующие. Главным результатом всего нашего исследования является теорема о совпадении стандартной и канонической моделей.

Теорема 1. *Пусть X и X' — соответственно каноническая и стандартная целые модели тора T, определённого над полем алгебраических чисел k. Тогда $X = X'$.*

[9]Bondarko, M.V. Ideals in an extension of a number field as modules over the ring of integers in a ground field / M.V. Bondarko. // Proceedings of the Session in analytic number theory and Diophantine equations (ed. by D.R. Heath-Brown and B.Z. Moroz), Bonner Math. Schriften. - 2003. - Vol. 360.

Также в данной главе были доказаны свойства стандартной модели, необходимые для построения в явном виде модели Нерона и самой стандартной целой модели. Результат заключён в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть S, T — алгебраические торы такие, что они оба определены над полем алгебраических чисел k и имеют поле разложения L. Пусть $G = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, $\hat{S}$ и $\hat{T}$ — модули характеров соответственно S и T, $X_S = \mathrm{Spec}\ A(\hat{S})$ и $X_T = \mathrm{Spec}\ A(\hat{T})$ — стандартные целые модели S и T. Наконец, пусть определён G-эпиморфизм G-модулей характеров $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Пусть $k_\wp$ — пополнение поля k по простому идеалу $\wp$, $\mathcal{O}_{k_\wp}$ — его кольцо целых. Пусть $X_\wp$ — слой схемы X_T над кольцом $\mathcal{O}_{k_\wp}$. Пусть алгебра Хопфа $A(\hat{T})$ имеет вид $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$. Тогда группа $\mathcal{O}_{k_\wp}$-точек $X_\wp(\mathcal{O}_{k_\wp})$ схемы $X_\wp = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$ совпадает с максимальной компактной подгруппой U группы $k_\wp$-точек $T_\wp(k_\wp)$ тора $T_\wp = T \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\ k_\wp$.

2) Алгебра Хопфа $A(\hat{T})$ может быть получена как $A(\hat{S})/I$, где $I = A(\hat{S}) \cap \mathrm{Ker}\,\beta_k$, $\beta_k : k[S] \to k[T]$ — морфизм колец регулярных функций, индуцированный β. Идеал I при этом имеет вид $I = A(\hat{S}) \cap J$, где J — идеал в алгебре Хопфа $k[S]$, порождённый элементами $(x_{ij} - c_j)$, где $c_j \in \mathcal{O}_k$ — коэффициенты при разложении элемента 1_L по целому базису L/k, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $I \equiv J$ по модулю π-кручения.

Таким образом, было доказано, что мы можем использовать стандартную модель над полем алгебраических чисел как первый шаг при построении модели Нерона. Но, как и в главе 2, в таком случае возникает задача построения модели Нерона в явном виде в каждом конкретном случае. В качестве серий алгебраических торов для решения этой задачи мы выбрали максимальные алгебраические торы без аффекта в полупростых группах. Для случая системы корней B_n была построена стандартная целая модель и изучены её особенности. Результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть T — максимальный тор без аффекта в полупростой группе, определённый над полем алгебраических чисел k, с группой Галуа вида $W(B_n)$. Тогда $T = R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m))$, где $k \subset L_2 \subset L_1 \subset L$, $[L_2 : k] = n$, $[L_1 : L_2] = 2$. Если $\wp \nmid (2)$, то слои $X'_\wp$ стандартной модели X' тора T гладкие, если $\wp \mid (2)$, то редукции слоёв $X'_\wp$ имеют единственную особенность вида μ_2.*

Затем было описано сглаживание найденных особенностей и полностью описана последовательность преобразований, позволяющих получить явное задание модели Нерона тора T.

Для случая A_n была построена стандартная целая модель и частично описаны её особенности, результат сформулирован в следующем утверждении.

Утверждение 1. *Пусть T — максимальный тор без аффекта в полупростой группе, определённый над полем алгебраических чисел k, с группой Галуа вида $W(A_n)$. Пусть X' — стандартная целая модель тора T, $X'_\wp$ — её слои над пополнениями поля k по простым идеалам $\wp$. Тогда выполняются следующие свойства:*

1) При $n = 1$ слои $X'_\wp$ гладкие, если $\wp \nmid (2)$, и их редукция имеет единственную особенность вида μ_2, если $\wp \mid (2)$;

2) При $n = 2$ слои $X'_\wp$ гладкие, если $\wp \nmid (2)$, $\wp \nmid (3)$, и их редукция имеет две особенности вида α_2, если $\wp \mid (2)$, или одну особенность вида α_3, если $\wp \mid (3)$;

3) При $n \geqslant 3$ редукция слоёв $X'_\wp$ не имеет мультипликативных особенностей для любых $\wp$;

4) При $n \geqslant 3$ редукция слоёв $X'_\wp$ не имеет унипотентных особенностей, если $\wp \nmid (n+1)$.

Основные результаты диссертации

В данной диссертационной работе были получены следующие основные результаты:

1) Получено явное задание модели Нерона всех двумерных анизотропных алгебраических торов над локальным полем.

2) Доказаны свойства стандартной целой модели алгебраического тора над полем алгебраических чисел и её слоев над локальными полями, позволяющие использовать указанную модель для построения модели Нерона данного тора.

3) Доказано совпадение стандартной и канонической целых моделей для произвольного алгебраического тора над полем алгебраических чисел.

4) Полностью описано построение модели Нерона максимального алгебраического тора без аффекта в полупростой группе над полем алгебраических чисел для случая системы корней B_n.

Список основных публикаций по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

[1] Грехов, М.В. Модель Нерона двумерных анизотропных алгебраических торов над локальными полями / М.В. Грехов. // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. - 2012. - № 9 (100). - С. 31-40.

[2] Грехов, М.В. Целые модели алгебраических торов над полями алгебраических чисел / М.В. Грехов. // Записки научных семинаров ПОМИ. - 2014. - Т. 430. - С. 114-135.

Публикация в рецензируемом издании, входящем в международную реферативную базу данных и систему цитирования Scopus:

[3] Грехов, М.В. О совпадении стандартной и канонической целых моделей алгебраического тора / М.В. Грехов. // Сибирские электронные математические известия. - 2017. - Т. 14 - С. 1017-1029.

Другие публикации:

[4] Грехов, М.В. Целые модели Нерона двумерных алгебраических торов над локальными полями / М.В. Грехов. // Третья международная школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", посвященная 75-летию Э. Б. Винберга (Тольятти, Россия, 25-30 июня 2012 г.): тезисы докладов. - Тольятти: Изд-во ТГУ, 2012. - С. 19-20.

[5] Грехов, М.В. Модель Нерона анизотропного алгебраического тора / М.В. Грехов, С.Ю. Попов. // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тезисы докладов XI Международной конференции. - Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2013. - С. 22-23.

[6] Грехов, М.В. Модель Нерона максимальных алгебраических торов без аффекта в полупростых группах / М.В. Грехов. // Пятая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов" (22-27 июня 2015 г., Самара, Россия): тезисы докладов. - Самара: Издательство "Самарский университет", 2015. - С. 19-21.