

ОТЗЫВ
научного руководителя о диссертации
МИХАИЛА ВЛАДИМИРОВИЧА ГРЕХОВА
«Гладкие целые модели алгебраических торов»,
представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

В шестидесятые годы двадцатого века Андре Нерон определил универсальную гладкую целую модель абелевых многообразий над числовыми полями. Практически сразу после этого открытия Александр Гротендик предложил перевести конструкцию модели Нерона на язык схем. Существенный вклад в решение этой задачи внёс М. Райно, что позволило обобщить эту целую структуру на гораздо более широкий класс групповых схем и сделать её одним из важнейших инструментов арифметической алгебраической геометрии. Следует отметить, что, в отличие от случая абелевых многообразий, конструкция модели Нерона, перенесённая на другие групповые схемы, приобретала неожиданные недостатки. Так, даже для простейшей групповой схемы мультипликативного типа $\mathbb{G}_m$ над локальным полем её модель Нерона не имеет конечный тип. Вторым, более существенным, недостатком является отсутствие описания в явном виде зависимости структуры модели Нерона от параметров, задающих произвольную аффинную групповую схему (при условии, что она допускает модель Нерона). Например, так обстоят дела в случае алгебраических торов над полями арифметического типа: конструкция алгебраических торов хорошо известна, но при этом практически нет результатов, посвящённых описанию структуры их моделей Нерона. В то же время многие вопросы арифметики алгебраических торов требуют построения их модели Нерона в явном виде.

Задача явного описания модели Нерона для произвольного алгебраического тора даже над локальными полями является общей программой, но не конечной целью некоторого исследования, так как требует изучения арифметики поля определения и поля разложения алгебраического тора, а также структуры самого алгебраического тора. Так же как систематическое изучение алгебраических торов началось с классификации В.Е. Воскресенским двумерных торов, так и явное описание моделей Нерона естественно начать с торов малых размерностей. Мною была поставлена задача перед соискателем описать в явном виде модели Нерона двумерных алгебраических торов над локальными полями. Как известно, локальный случай – это всегда предтеча рассмотрения глобального случая. В локальном случае есть в некотором смысле универсальная целая структура алгебраических торов, которая может быть взята в качестве первого шага на пути построения модели Нерона. Речь идёт о стандартной целой модели алгебраического тора, предложенной В.Е. Воскресенским в конце девяностых годов двадцатого века. В случае же алгебраических торов над полями алгебраических чисел есть две альтернативные конструкции: стандартная целая модель была предложена в совместной работе В.Е. Воскресенского, Б.Э. Кунявского, Б.З. Мороза, каноническая модель – в монографии В.Е. Воскресенского «Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп». Обе модели могут служить первым шагом на пути построения модели Нерона в явном виде, но первая имеет недостаток в виде отсутствия явного описания локальных слоёв, а вторая не имеет явной аффинной реализации. Таким образом, вторая задача соискателя заключалась в том, чтобы найти связь между этими двумя моделями, точнее, в доказательстве их совпадения. Это позволит унифицировать процедуру получения явной конструкции модели Нерона для алгебраических торов над полями алгебраических чисел.

Таким образом, тема диссертации *актуальна*.

Безусловно, основным результатом диссертации является следующая

Теорема. Стандартная и каноническая целые модели произвольного алгебраического тора, определённого над произвольным полем алгебраических чисел, совпадают.

Доказательство этой теоремы основано на серии из нескольких лемм, каждая из которых важна и сама по себе. В частности, соискателем были доказаны такие базовые свойства стандартной (равно канонической) целых моделей, как их поведение при этальной

замене базы, замкнутые вложения целых моделей и т. д.

Следствием этого результата является появление в диссертации явного описания модели Нерона для максимальных торов без аффекта в полупростых группах типа B_n над полями алгебраических чисел, а также исследование особенностей стандартной целой модели максимальных торов без аффекта в полупростой группе типа A_n .

Наконец, следует отметить, что М.В. Грехов полностью справился и с первой поставленной перед ним задачей: он получил описание моделей Нерона всех двумерных анизотропных торов над локальными полями. Значение этого результата заключается в возможности его применения в вычислениях, связанных со слабой аппроксимацией, L -функцией Артина алгебраических торов и смежными вопросами арифметической алгебраической геометрии.

Все результаты диссертации получены М.В. Греховым самостоятельно и опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК России, и в рецензируемых изданиях, входящих в систему цитирования Scopus. С диссертацией целесообразно ознакомиться специалистам по арифметической алгебраической геометрии, теории алгебраических торов, по алгебраической и аналитической теории чисел.

При выполнении поставленных перед ним задач М.В. Грехов продемонстрировал достойные личные качества: упорство, усердие, быстроту и лёгкость освоения нового материала, большой объём и высокую эффективность самостоятельной работы.

По моему мнению, диссертация Михаила Владимировича Грехова является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задачи о конструкциях и свойствах целых моделей алгебраических торов над локальными и глобальными полями, которая имеет существенное значение для арифметической алгебраической геометрии алгебраических групп. Соискатель достоин присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор,
заведующий кафедрой
алгебры и геометрии
ФГАОУ ВО «Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»



Александр Николаевич Панов

(научная специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел)

«27» июл 2019 г.

