На правах рукописи

Язовцева Ольга Сергеевна

Исследование устойчивости решений математических моделей по части компонент на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ульяновск — 2019

Диссертационная работа выполнена на кафедре прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики в ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»

Научный руководитель:	**Шаманаев Павел Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Бойков Илья Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет», кафедра «Высшая и прикладная математика», заведующий кафедрой
	Анкилов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет», кафедра «Высшая математика», доцент кафедры
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ»

Защита диссертации состоится 30 октября 2019 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.278.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» по адресу: 432970, г. Ульяновск, Набережная реки Свияги, д. 106, корпус 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом диссертации можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте вуза http://www.ulsu.ru, с авторефератом – на сайте Высшей аттестационной комиссии при Минобрнауки России https://vak.minobrnauki.gov.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 432970, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан «____» ________________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.278.02 Волков М. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Во многих прикладных задачах, в частности задачах небесной механики, требуется обеспечение различных асимптотических свойств математических моделей лишь по части компонент. Такими свойствами являются частичные (по части переменных) устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость и асимптотическое равновесие. В то же время при исследовании, например, моделей химии и биологии встречаются процессы, семейство решений которых обладает разными асимптотическими свойствами по разным компонентам.

В химической промышленности особую роль играет анализ протекания химических реакций, кинетические модели которых описываются нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений[1]. Наличие некоторых асимптотических свойств нелинейных кинетических моделей является одним из важнейших условий безопасности химических процессов. Исследованию устойчивости подобных моделей посвящены работы С. Д. Варфоломеева, А. В. Луковенкова, Б. В. Вольтера, И. Е. Сальникова, Т. А. Акрамова[2]. Наиболее актуальным является анализ свойств динамики концентраций отдельно взятых веществ, участвующих в реакции, что приводит к задачам исследования нелинейных моделей по части компонент.

Значительную роль в математических моделях биофизики и экологии играют асимптотические свойства численности популяций различных биологических видов. Исследованию таких задач посвящены работы А. Д. Базыкина, Ю. М. Свирижева, Д. О. Логофета, Г. Ю. Ризниченко, В. И. Воротникова[3]. Также актуальной задачей является исследование асимптотических свойств нелинейных моделей, описывающих динамику биоценоза, по части компонент, которое позволяет анализировать численность каждой популяции, входящей в биологическую систему.

Во второй половине XX века возросла значимость задачи трех тел в связи с необходимостью изучения движения космических аппаратов. Впервые устойчивость задачи трех тел была исследована в работах А. Пуанкаре и Дж. Хилла. Далее подобные исследования проводились Э. Рауссом, А. М. Ляпуновым, А. П. Маркеевым, Г. Н. Дубошиным, Д. Е. Охоцимским, А. С. Шмыровым[4] и др. В рамках этой задачи актуальным является исследование частичной устойчивости траекторий космических аппаратов и положений равновесия математических моделей небесной механики.

Вышеприведенные примеры показывают, что исследование нелинейных моделей по части компонент имеет практический, а также теоретический интерес и является актуальным.

В настоящей диссертационной работе исследование покомпонентных асимптотических свойств моделей, описываемых нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений, проводится с использованием подхода, изложенного в работах Е. В. Воскресенского. Этот подход позволяет получить новые качественные и численные методы исследования широкого класса нелинейных моделей по части компонент.

---

[1]Губайдуллин И. М. Кинетическая модель реакции газофазного пиролиза пропана на основе компактной схемы / И. М. Губайдуллин, Л. Ф. Нурисламова // Информационные и математические технологии в науке и управлении, 2015. Т. 1. С. 185–193.

[2]Акрамов Т. А. Применение качественных методов анализа дифференциальных уравнений, описывающих физико-химические процессы / Т. А. Акрамов // Химическая промышленность сегодня, 2014. № 11. С. 5–17.

[3]Воротников В. И. Основы теории частичной устойчивости и управления / В. И. Воротников, В. В. Румянцев. Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФ, 2014. 304 с.

[4]Shmyrov A. Controllable orbital motion in a neighborhood of collinear libration point / A. Shmyrov, V. Shmyrov // Applied Mathematical Sciences, 2014. No. 9–12. V. 8. P. 487-492.

Объект исследования — нелинейные модели химической кинетики, биологии и небесной механики.

Предмет исследования — покомпонентные асимптотические свойства нелинейных моделей химической кинетики, биологии и небесной механики.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является разработка новых качественных и численных методов для исследования нелинейных моделей по части компонент. Указанная цель обусловила следующие задачи:

1) получить новые качественные методы исследования асимптотических свойств (устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости и локального асимптотического равновесия по части компонент) нелинейных математических моделей химической кинетики, биологии и небесной механики;

2) исследовать асимптотические свойства динамики концентраций веществ, участвующих:

– в брутто-реакции пиролиза этана;

– в части компактной схемы химической реакции пиролиза пропана;

– в реакции образования амида уксусной кислоты;

3) исследовать асимптотические свойства динамики численности популяций в биоценозе в условиях межвидового взаимодействия; провести сравнительный анализ результатов качественного исследования с результатами вычислительных экспериментов;

4) исследовать асимптотические свойства семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1, математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла, в зависимости от параметров модели; провести сравнительный анализ результатов качественного исследования с результатами вычислительных экспериментов;

5) разработать численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения;

6) разработать комплекс программ для расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения.

Научная новизна работы. Научная новизна исследования заключается в разработке новой методики исследования по части компонент асимптотических свойств нелинейных моделей, представляющих собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и применении ее к исследованию прикладных задач, возникающих в химии, биологии и небесной механике.

В диссертационной работе исследованы асимптотические свойства динамики концентраций веществ, участвующих в брутто-реакции пиролиза этана; в части компактной схемы химической реакции пиролиза пропана; в реакции образования амида уксусной кислоты. Проведено исследование асимптотических свойств динамики численности популяций в биоценозе в условиях межвидового взаимодействия, подтвержденное вычислительным экспериментом.

В работе исследованы асимптотические свойства семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1, математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла, в зависимости от параметров модели; построены графики компонент решений при различных начальных условиях, проекция фазового портрета. Установлена согласованность результатов исследования разработанными качественными методами и вычислительных экспериментов.

В диссертационной работе разработан и реализован численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения, позволяющий рассчитать начальные точки линейного приближения через начальные точки нелинейной системы. Вычислительный эксперимент проведен на примере нелинейной модели брутто-реакции пиролиза этана.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость диссертационного исследования заключается в разработке новой методики покомпонентного исследования нелинейных моделей, основанной на полученных в работе достаточных условиях устойчивости, асимптотического равновесия, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого положения равновесия нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений по части переменных. Разработанные методы в дальнейшем могут быть адаптированы для широкого класса математических моделей.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в применении разработанной методики к исследованию асимптотических свойств по части компонент нелинейных математических моделей, описывающих процессы в химии, биологии, небесной механике и т. д.

Разработанная методика исследования моделей химии может быть применена для анализа кинетических процессов, протекающих в ходе химического взаимодействия.

Исследование покомпонентных асимптотических свойств динамики численности популяций в моделях биологии позволяет прогнозировать динамику отдельных популяций в условиях межвидового взаимодействия.

Полученное при исследовании асимптотических свойств круговой ограниченной задачи трех тел в приближении Хилла множество параметров позволит моделировать устойчивые по части переменных траектории движения космического аппарата, что используется в задаче стабилизации движения космического аппарата.

Методология и методы исследования. В настоящей диссертационной работе продолжено развитие идей Е. В. Воскресенского об исследовании покомпонентных асимптотических свойств на основе асимптотической эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработанные методы качественного исследования асимптотических свойств основаны на предположении, что между начальными точками исследуемых систем устанавливается соответствие только лишь в окрестности нулевого положения равновесия. Для этого в банаховом пространстве строится оператор, связывающий решения нелинейной системы и ее линейного приближения, удовлетворяющий условиям принципа Шаудера о неподвижной точке. Существование построенного оператора доказывается с использованием покомпонентных оценок элементов фундаментальной матрицы линейного приближения. Оператор позволяет построить отображение, устанавливающее соотношение между начальными точками исследуемой системы и ее линейного приближения.

Предложенный численный метод основан на установлении локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности между исследуемой моделью и ее линейным приближением. Реализация метода заключается в последовательном применении L-устойчивого (4,2)-метода четвертого порядка точности для решения задачи Коши для жесткой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и методе Симпсона для вычисления определенного интеграла .

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Новые качественные методы исследования асимптотических свойств (устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости и локального асимптотического равновесия по части компонент) нелинейных математических моделей химической кинетики, биологии и небесной механики.

2. Анализ асимптотических свойств динамики концентраций веществ, участвующих:

– в брутто-реакции пиролиза этана;

– в части компактной схемы химической реакции пиролиза пропана;

– в реакции образования амида уксусной кислоты.

3. Анализ асимптотических свойств динамики численности популяций в биоценозе в условиях межвидового взаимодействия.

4. Анализ асимптотических свойств семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1, математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла, в зависимости от параметров модели.

5. Численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения.

6. Комплекс программ для расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения.

Достоверность результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается вычислительными экспериментами, выполненными известными численными методами.

Апробация работы. Основные результаты исследования были представлены на регулярных научных семинарах кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики МГУ им. Н.П. Огарёва и научных семинарах Средне-Волжского математического общества, а также на следующих конференциях: Международные научные молодежные школы-семинары «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е. В. Воскресенского (г. Саранск, 12-15 июля 2016 года), (г. Саранск, 16-20 июля 2018 г.); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 6-11 июля 2018 г.); Международная научная конференция «Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании» (г. Ульяновск, УлГТУ, 28-30 апреля 2016 г.); II Международная конференция и молодёжная школа Информационные технологии и нанотехнологии (г. Самара, 17-19 мая 2016 г.); Международные научные конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых (г. Саранск, 28-30 августа 2015 года), (г. Саранск, 12-16 июля 2017 года); Семинар ИПМ им. М.В. Келдыша (г. Москва, 29 сентября 2016 г.); Конференция молодых ученых МГУ им. Н.П. Огарёва (г. Саранск, 24 мая 2017 г.); Международные научно-технические конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (г. Пенза, 30-31 мая 2017 г.), (г. Пенза, 4-6 декабря 2017 г.); Огаревские чтения (г. Саранск, 9 декабря 2015 г.), (г. Саранск, 20 декабря 2017 г.); Международная школа-конференция «Соболевские чтения» (г. Новосибирск, 20-23 августа 2017 г.).

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликовано 19 работ, в том числе 4 из списка, рекомендованного ВАК РФ, из которых 3 работы опубликованы в журналах из реферируемой международной базы zbMath, 1 работа опубликована в журнале из реферируемой международной базы Web of Science; получено одно свидетельство о регистрации программы на ЭВМ.

Личный вклад автора. Постановка задач исследования осуществлялась совместно с научным руководителем. Личный вклад автора заключается в решении задач устойчивости нелинейных моделей, разработке программного комплекса для реализации представленного численного метода.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 110 страниц. Список литературы содержит 75 библиографических ссылок, в том числе 14 зарубежных источников.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится краткий обзор результатов работ по теме исследования, приводится обоснование актуальности исследования, формулируется цель и ставятся задачи, раскрываются научная новизна и практическая ценность полученных результатов, приводится развернутое описание содержания работы, описываются методы исследования, используемые в работе, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе описано применение локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности к исследованию устойчивости математических моделей.

В первом параграфе первой главы содержатся основные понятия и положения теории частичной устойчивости нелинейных моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, введены определения локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматривается множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x \in R^n, f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n), T \geq 0, f(t, 0) \equiv 0$.

Предполагается, что у системы вида (1) из множества Ξ существует совокупность решений $x(t : t_0, x^{(0)})$, определённых при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$, где D — некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Через $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$ обозначены решения с начальными данными $(t_0, x^{(0)})$ и $(t_0, y^{(0)})$ соответственно системы дифференциальных уравнений (1) и системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \tag{2}$$

принадлежащей множеству Ξ.

Через $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ обозначены i-ые компоненты решений систем (1) и (2) соответственно, для которых $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, U, $V \subseteq D$ — некоторые области, содержащие окрестность нуля.

Пусть $N = \{1, .., n\}$ и $M_0 \subseteq N$. Не ограничивая общности, предполагаем, что множество $M_0 = \{1, ..., q\}$. В случае, если M_0 состоит из произвольного набора чисел i_1, $i_2, ...,$ i_q из множества N, то можно сделать перенумерацию координат x_i, $i \in M_0$, вектора x.

Определение 1. *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1) *и* (2) *будем называть локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, *если при фиксированном* $t_0 \geq T$ *существуют два непрерывных отображения* $P^{(1)} : V \to U$ *и* $P^{(2)} : U \to V$, $P^{(1)} = 0$, $P^{(2)} = 0$, *такие что для всех* $i \in M_0$

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)} x^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \tag{3}$$

$$y_i(t:t_0,y^{(0)}) = x_i(t:t_0,P^{(1)}y^{(0)}) + o(\mu_i(t)) \tag{4}$$

при $t\to\infty$, $\mu_i\in C([T,+\infty),[0,+\infty))$, $x^{(0)}\in U$, $y^{(0)}\in V$.

Предполагается, что при фиксированном $t_0\ge T$ для i-ых компонент решений системы (1) и (2) существуют два непрерывных отображения $P^{(1)}:V\to U$ и $P^{(2)}:U\to V$, $P^{(1)}(0)=0$, $P^{(2)}(0)=0$ такие, что выполняются равенства

$$x_i(t:t_0,x^{(0)}) = y_i(t:t_0,P^{(2)}x^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t,t_0,x^{(0)}), \tag{5}$$

$$y_i(t:t_0,y^{(0)}) = x_i(t:t_0,P^{(1)}y^{(0)}) + \mu_i(t)\gamma_i(t,t_0,y^{(0)}), \tag{6}$$

где $\delta_i(t,t_0,x^{(0)})$, $\gamma_i(t,t_0,y^{(0)}) \in C^{(0,0,1)}([T,+\infty)\times[T,+\infty)\times R^n,R)$, причем $\delta_i(t,t_0,x^{(0)})$ и $\gamma_i(t,t_0,y^{(0)})$ стремятся к нулю равномерно по $t\in[t_0,+\infty)$ при $||x^{(0)}||\to 0$, $x^{(0)}\in U$ и $||y^{(0)}||\to 0$, $y^{(0)}\in V$ соответственно.

Определение 2. *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1) *и* (2) *будем называть равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t)$, $i\in M_0$, *если выполняются равенства* (5) *и* (6), *причем* $\delta_i(t,t_0,x^{(0)})$ *и* $\gamma_i(t,t_0,y^{(0)})$ *стремятся к нулю при* $t\to+\infty$ *равномерно по* $x^{(0)}\in U$ *и* $y^{(0)}\in V$ *соответственно.*

Во втором параграфе первой главы приведены достаточные условия частичной устойчивости и неустойчивости нулевого решения нелинейных моделей на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности.

В третьем параграфе первой главы приведены оценки компонент решений линейного приближения нелинейных моделей.

Рассматривается линейная система

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{7}$$

где $y\in R^n$, A – постоянная $(n\times n)$-матрица.

Предполагается, что матрица A имеет $r\le n$ различных собственных значений $\lambda_1,...,\lambda_k,...,\lambda_r$, где каждому λ_k отвечает n_k групп решений системы (7). Причем число решений в каждой из n_k, $k=1,...,r$ групп равно $m_{k,1},...,m_{k,j},...,m_{k,n_k}$, $\quad j=1,...,n_k$.

Вещественные части собственных значений матрицы A обозначены через $\Lambda_i = Re\ \lambda_i$, $i=\overline{1,r}$.

Через $y_{ij}(t-t_0)$, $i,j=\overline{1,n}$, обозначены элементы нормированной фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ и введем множества $K_i=\{j\ :\ y_{ij}(t-t_0)\equiv 0,\ \forall\ t,t_0\ge T\}$, $i=\overline{1,n}$. Для элементов i-ой строки нормированной фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ справедливы оценки

$$|y_{ij}(t-t_0)| \le D_0 e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0), \quad t\ge t_0, \quad j\in N\backslash K_i,\ i=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$$|y_{ij}(t-t_0)| \le D_0 e^{\alpha_i(t-t_0)}\rho^{a_i}(t-t_0), \quad t\le t_0, \quad j\in N\backslash K_i,\ i=\overline{1,n}, \tag{9}$$

где

$$\rho^{\nu}(t) = \begin{cases} 1, \text{если } |t|<1, \\ |t|^{\nu}, \text{если } |t|\ge 1, \end{cases}$$

где $D_0 > 0$ – некоторая константа. Здесь в качестве β_i и α_i выбраны соответственно максимальное и минимальное из Λ_k, когда индекс j пробегает по всем ненулевым элементам $y_{ij}(t-t_0)$ i-ой строки нормированной фундаментальной матрицы, b_i, a_i – максимальные из степеней полиномов при ненулевых элементах, соответствующих β_i и α_i.

В четвертом параграфе первой главы приведено исследование асимптотики поведения решений кинетической модели брутто-реакции пиролиза этана.

Во второй главе получены достаточные условия устойчивости решений нелинейных моделей по части компонент на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности.

В первом параграфе второй главы приведено исследование устойчивости по части переменных нелинейных моделей с возмущениями в виде векторных полиномов.

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x), \tag{10}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица;

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x), \\ \ldots, \\ P_n(x) \end{pmatrix}, \ P_j(x) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} x^{p_j}, \ x^{p_j} = x_1^{p_{j1}} x_2^{p_{j2}} \ldots x_n^{p_{jn}}, \ \sigma \geq 2,$$

$$p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn}), \quad |p_j| = p_{j1} + \ldots + p_{jn},$$

и ее линейное приближение (7).

Ставится задача об исследовании частичной устойчивости нулевого решения системы (10).

Теорема 1. *Если выполняются неравенства*

$$p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < \alpha_i, i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

по всем наборам $(p_{j1}, ..., p_{jn})$, $|p_j| = \overline{2,\sigma}$, *таким что* $d_j^{(p_j)} \neq 0, j = \overline{1,n}$, *то системы* (10) *и* (7) *являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)$, $i = \overline{1,n}$, *и нулевое решение системы* (10)

1) асимптотически устойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i < 0$;

2) устойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i = 0$, *а алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают; причем нулевое решение системы* (10) *имеет локальное асимптотическое равновесие по этой переменной;*

3) неустойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i > 0$.

Во втором параграфе второй главы получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных нелинейных моделей с возмущениями в виде векторных полиномов в критическом случае.

В третьем параграфе второй главы приведены достаточные условия частичной устойчивости и неустойчивости нулевого решения нелинейных моделей обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно гладкой правой частью.

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x), \tag{12}$$

где $x \in R^n$, A – постоянная $(n \times n)$-матрица; $f \in C^{(1)}(R^n, R^n)$; $f(0) \equiv 0$;
$f(x) = colon(f_1(x), ..., f_n(x))$;

$$|f_j(x_1, ..., x_n)| \leq \psi_j(|x_1|, ..., |x_n|), \quad \forall\, x \in U \subseteq D,\ j = \overline{1, n}, \tag{13}$$

где $\psi_j \in C(U_+, [0, +\infty))$, $U_+ = \{x :\ x \in U,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n}\}$, $\psi_j(0, ..., 0) \equiv 0$, $\psi_j(|x_1|, ..., |x_n|) \leq \psi_j(|\tilde{x_1}|, ..., |\tilde{x_n}|)$, $|x_i| \leq |\tilde{x_i}|$, $x,\ \tilde{x} \in U$.

Предполагается, что для линейного приближения системы (12) выполняются все условия третьего параграфа первой главы и $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t - t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

Сформулированы достаточные условия частичной устойчивости нулевого решения системы (12) с использованием оценок (8) и (9).

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (13) *и интегралы*

$$I_{ij}(c_0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_i s}\rho^{a_i}(s)\psi_j(c_0 e^{\beta_1 s}\rho^{b_1}(s), ..., c_0 e^{\beta_n s}\rho^{b_n}(s))ds, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{14}$$

сходятся при любом $c_0 \geq 0$, причем $I_{ij}(c_0) \to 0$ при $c_0 \to 0$. Тогда системы (12) *и* (7) *являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$ и справедливы следующие утверждения:*

1) если $\beta_i < 0$, то нулевое решение системы (12) *асимптотически устойчиво по переменной x_i;*

2) если $\beta_i = 0$, алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают, то нулевое решение системы (12) *устойчиво по переменной x_i, причем имеет локальное асимптотическое равновесие по этой переменной;*

3) если $\beta_i > 0$, неустойчиво по переменной x_i.

В четвертом параграфе второй главы приведены примеры исследования устойчивости по части переменных нулевого решения систем на основе локальной покомпонентой асимптотической эквивалентности.

Третья глава посвящена исследованию устойчивости решений нелинейных моделей химии, биологии и небесной механики.

В первом параграфе третьей главы рассмотрена задача частичной устойчивости решений кинетической модели некоторых стадий компактной схемы реакции пиролиза пропана, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{c_1} = -k_1 c_1 - k_3 c_1 c_2 \\ \dot{c_2} = k_1 c_1 - k_2 c_2 - k_3 c_1 c_2 \\ \dot{c_3} = k_1 c_1 \\ \dot{c_4} = k_2 c_2 \\ \dot{c_5} = k_2 c_2 \\ \dot{c_6} = k_3 c_1 c_2 \\ \dot{c_7} = k_3 c_1 c_2 \end{cases}, \tag{15}$$

здесь $t \geq 0$, c_i $(i = \overline{1,7})$ – концентрации пропана C_3H_8, этила $C_2H_5\cdot$, метила $CH_3\cdot$, этилена C_2H_4, водорода H_2, этана C_2H_6, 1-пропила $n - C_3H_7\cdot$, соответственно, $k_i > 0$ $(i = \overline{1,3})$ – константы скоростей химических реакций. Так как концентрации c_i представляют собой неотрицательные величины, то поведение решений системы достаточно рассматривать при $c_i \geq 0$. Не теряя общности, предположим, что $k_1 > k_2$.

Получены следующие выводы об асимптотическом поведении решений системы (15) в окрестности положения равновесия c^*:

1) системы (15) и (7) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру;

2) каждое положение равновесия c^* системы (15) является асимптотически устойчивым по компонентам c_1 и c_2;

3) решения системы (15), начинающиеся в окрестности положения равновесия c^* имеют асимптотическое равновесие по компонентам c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, причем при $t \to \infty$ эти решения стремятся к нему.

Таким образом, начиная с некоторого момента времени, концентрации пропана и этила стремятся к нулю, а концентрации остальных веществ, участвующих в химическом превращении, стремятся к некоторым фиксированным значениям.

Во втором параграфе третьей главы исследована устойчивость решений кинетической модели реакции образования амида уксусной кислоты:

$$\begin{cases} \dot{c_1} = -k_1c_1c_2 \\ \dot{c_2} = -k_1c_1c_2 \\ \dot{c_3} = -k_2c_3 + k_1c_1c_2 \ , \\ \dot{c_4} = k_2c_3 \\ \dot{c_5} = k_2c_3 \end{cases} \tag{16}$$

где $c_i \geq 0$, $i = \overline{1,5}$, – концентрации уксусной кислоты, аммиака, ацетата аммония, амида уксусной кислоты и воды соответственно; $k_j > 0$, $j = \overline{1,3}$, – константы скоростей стадий химического превращения.

Каждое из положений равновесия вида $(0, c_2^*, 0, c_4^*, c_5^*)$, где $c_2^*, c_3^*, c_4^* \in R_+^1$, системы (16)

1) асимптотически устойчиво по переменным c_1 и c_3;

2) устойчиво по переменным c_2, c_4 и c_5.

Таким образом, уксусная кислота и ацетат аммония полностью расходуются с течением времени, а остальные вещества, участвующих в реакции, имеют ненулевой выход.

В третьем параграфе третьей главы получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости решений нелинейной модели динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_i}{dt} = v_i\left(a_i - \sum\limits_{j=1}^{M} a_{ij}w_j\right), \quad i = \overline{1,N}, \\ \dfrac{dw_k}{dt} = w_k\left(-b_k + \sum\limits_{j=1}^{N} b_{kj}v_j\right), \quad k = \overline{1,M}. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь $v_i(t)$, $i = \overline{1,N}$ – численность популяции i-ого вида первой группы живых организмов; $w_k(t)$, $k = \overline{1,M}$ – численность популяции k-ого вида второй группы живых организмов; a_i и b_k

– разность между рождаемостью и смертностью i-ого вида первой группы и k-ого вида второй группы соответственно в предположении, что он предоставлен сам себе; a_{ij} – коэффициент, характеризующий изменение i-ого вида первой группы за счет j-ого вида второй группы, $a_{ij} > 0$; b_{kj} – коэффициент, характеризующий изменение k-ого вида второй группы за счет j-ого вида первой группы, $b_{kj} > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$a_i < 0,\ i = \overline{1, N},\ b_k \geq 0\ (k = \overline{1, M}), \tag{18}$$

или

$$a_i = 0,\ i = \overline{1, N},\ b_k > 0\ (k = \overline{1, M}). \tag{19}$$

Тогда системы (17) *и* (7) *являются локально асимптотически эквивалентными по Брауеру и нулевое решение системы* (17) *обладает свойствами: 1) в случае выполнения* (18) *асимптотически устойчиво по компонентам* v_i*,* $i = \overline{1, N}$*, асимптотически устойчиво по тем компонентам* w_k*, для которых* $b_k > 0$*, устойчиво по тем компонентам* w_k*, для которых* $b_k = 0$*, причем по этим компонентам* w_k *система имеет локальное асимптотическое равновесие,* $k = \overline{1, M}$*;*

2) в случае выполнения (19) *устойчиво по компонентам* v_i*,* $i = \overline{1, N}$*, и асимптотически устойчиво по компонентам* w_k*,* $k = \overline{1, M}$*, причем по компонентам* v_i *система имеет локальное асимптотическое равновесие.*

Разработанный метод применен к исследованию нелинейной модели вида (17) в случае, когда два вида оказывают влияние на третий:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 - a_{11} v_1 w_1 - a_{12} v_1 w_2, \\ \dfrac{dw_1}{dt} = -b_1 w_1 + b_{11} w_1 v_1, \\ \dfrac{dw_2}{dt} = -b_2 w_2 + b_{21} w_2 v_1. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь a_1, b_1, b_2 удовлетворяют условиям (18) и (19); a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{21} – положительны.

На основании теоремы 3 для модели (20) получены следующие выводы об асимптотических свойствах динамики численности популяций сосуществующих видов.

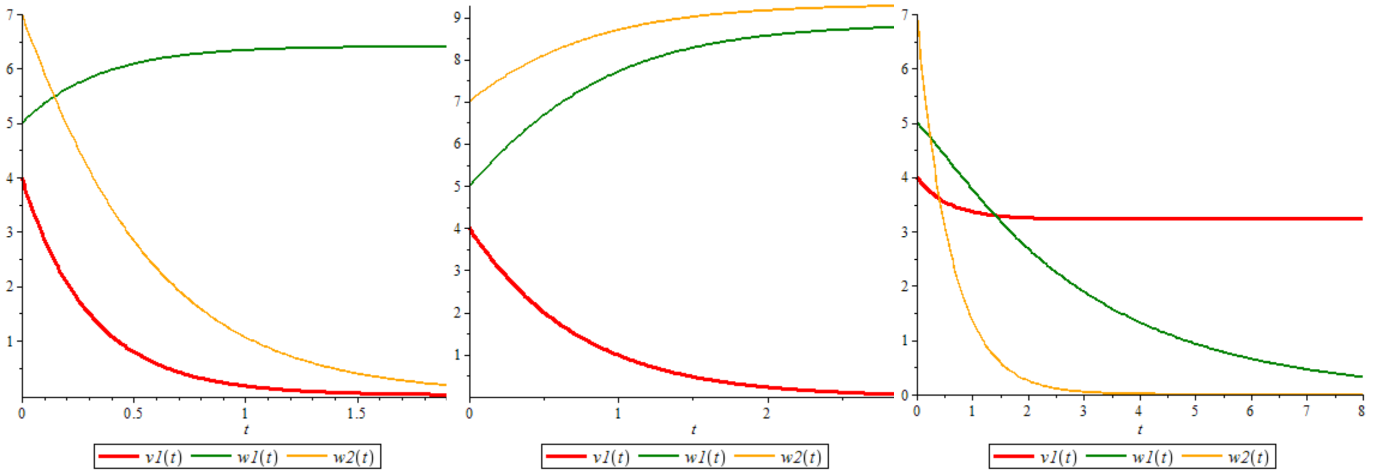
При $a_1 < 0$, $b_1 = 0$, $b_2 > 0$ ($a_1 < 0$, $b_1 > 0$, $b_2 = 0$) нулевое решение системы (20) асимптотически устойчиво по переменным v_1, w_2 (w_1) и устойчиво по переменной w_1 (w_2), причем по переменной w_1 (w_2) имеется локальное асимптотическое равновесие. Таким образом, если рождаемость и смертность одного вида второй группы живых организмов равны, у второго вида второй группы и одного вида первой группы смертность превышает рождаемость, то независимо от значений остальных параметров произойдет стабилизация численности первой популяции и вымирание двух других.

При $a_1 < 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ нулевое решение системы (20) асимптотически устойчиво по переменной v_1 и устойчиво по переменным w_1, w_2, причем по переменным w_1 и w_2 имеется локальное асимптотическое равновесие. Следовательно, если коэффициент смертности больше коэффициента рождаемости для первого вида, но при этом рождаемость и смертность видов второй группы равны, то происходит вымирание первого вида и стабилизация численности остальных.

При $a_1 = 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ нулевое решение системы (20) устойчиво по переменной v_1 и асимптотически устойчиво по переменным w_1, w_2, причем по переменной v_1 имеется локальное асимптотическое равновесие. откуда следует, что если смертность двух популяций, влияющих на третью, превышает рождаемость, а рождаемость и смертность третьей популяции равны, то независимо от значений остальных параметров численность популяции вида первой группы и первой популяции второй группы с течением времени убывают, а численность другой популяции второй группы стабилизируется.

Для проведения численного моделирования были выбраны три группы коэффициентов рождаемости и смертности a_1, b_1, b_2 (см. рисунки 1–3), соответствующие условиям из выводов качественного анализа. В качестве значений параметров a_{ij}, b_{ij} были выбраны следующие: $a_{11} = 0.03$, $a_{12} = 0.02$, $b_{11} = 0.2$, $b_{21} = 0.1$. Начальные значения численностей популяций определены следующим образом: $v_1(0) = 4$, $w_1(0) = 5$, $w_2(0) = 7$.

Приведем графики, отражающие динамику численности популяций в исследуемой модели.



a) b) c)

Рис. 1: Графики компонент решений системы (20) при a) $a_1 = -3$, $b_1 = 0$, $b_2 = 2$; b) $a_1 = -1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$; c) $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$.

Из графиков хорошо видно, что результаты качественного исследования и вычислительных экспериментов полностью согласуются.

В четвертом параграфе третьей главы проведен анализ асимптотических свойств семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1, математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла, в зависимости от параметров модели, найдено множество параметров системы, обеспечивающее устойчивость семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1.

Рассматривается математическая модель движения космического аппарата, представляющую собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = w_1 + v_2 \\ \dot{v}_2 = w_2 - v_1 \\ \dot{w}_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 w_1 + k_4 w_2 \\ \dot{w}_2 = -\dfrac{3v_2}{(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{3}{2}}} - v_2 - w_1 \end{cases} . \tag{21}$$

Система (21) имеет семейство положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$.

Ставится задача об исследовании частичной устойчивости семейства положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ системы (21).

Множество параметров, обеспечивающих частичную устойчивость семейства положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$, имеет вид:

$$k_1 = -k_4,\ k_3 < 0,\ k_3 < k_2,\ k_4 > -\frac{k_2}{k_3}. \tag{22}$$

Теорема 4. *Пусть параметры k_i, $i = \overline{1,4}$, удовлетворяют условию* (22)*. Тогда каждая точка из семейства положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ системы* (21)

1) асимптотически устойчива по переменным v_2 и w_1;

2) устойчива по переменным v_1 и w_2, причем имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным.

Для иллюстрации результатов исследования было проведено численное моделирование задачи. Для расчетов выбраны параметры, соответствующие множеству (22): $k_1 = -1,\ k_2 = -3,\ k_3 = -5,\ k_4 = 1$.

Моделирование проведено при различных значениях начальных данных:

$$v_1(0) = 1.5,\ v_2(0) = 0.5,\ w_1(0) = 0.3,\ w_2(0) = 0. \tag{23}$$

$$v_1(0) = 0.8,\ v_2(0) = 0.3,\ w_1(0) = 0.5,\ w_2(0) = -0.1. \tag{24}$$

$$v_1(0) = 0.9,\ v_2(0) = -0.5,\ w_1(0) = 0.8,\ w_2(0) = 0.3. \tag{25}$$

На рис. 2-3 изображены графики компонент решений системы (21) v_i и w_i, $i = \overline{1,2}$, при различных начальных данных. Кривые a), b) и c) являются графиками компонент решений при начальных данных (23)-(25) соответственно.

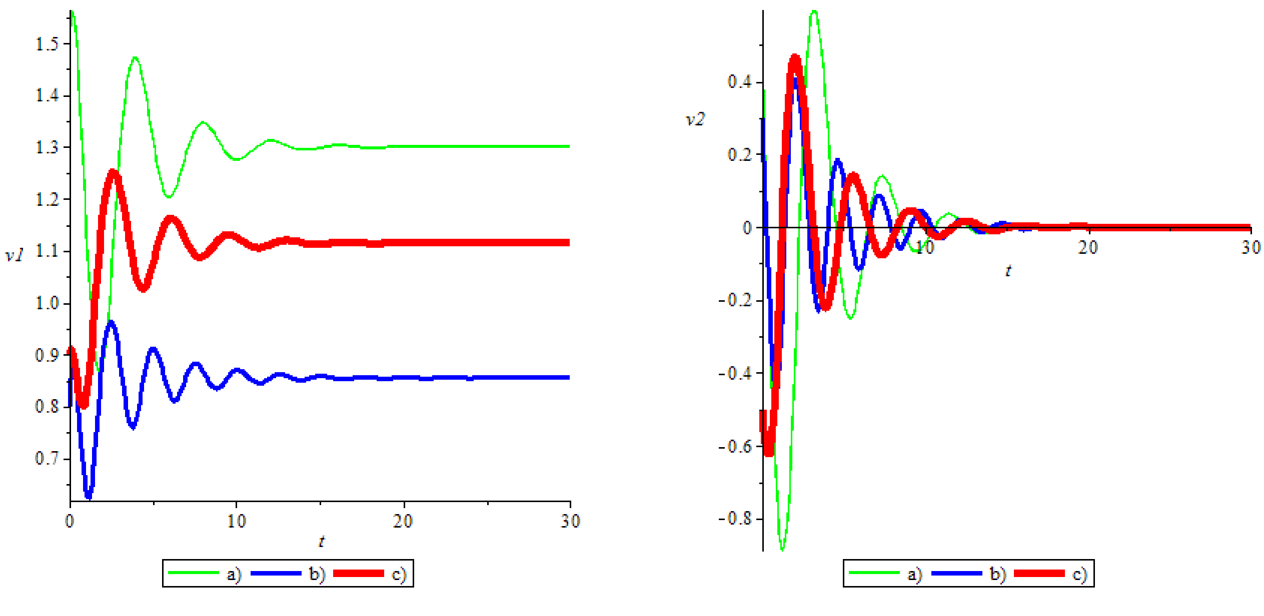


Рис. 2: Графики компонент $v_1(t)$ и $v_2(t)$ решения системы (21) при условиях (23)-(25).

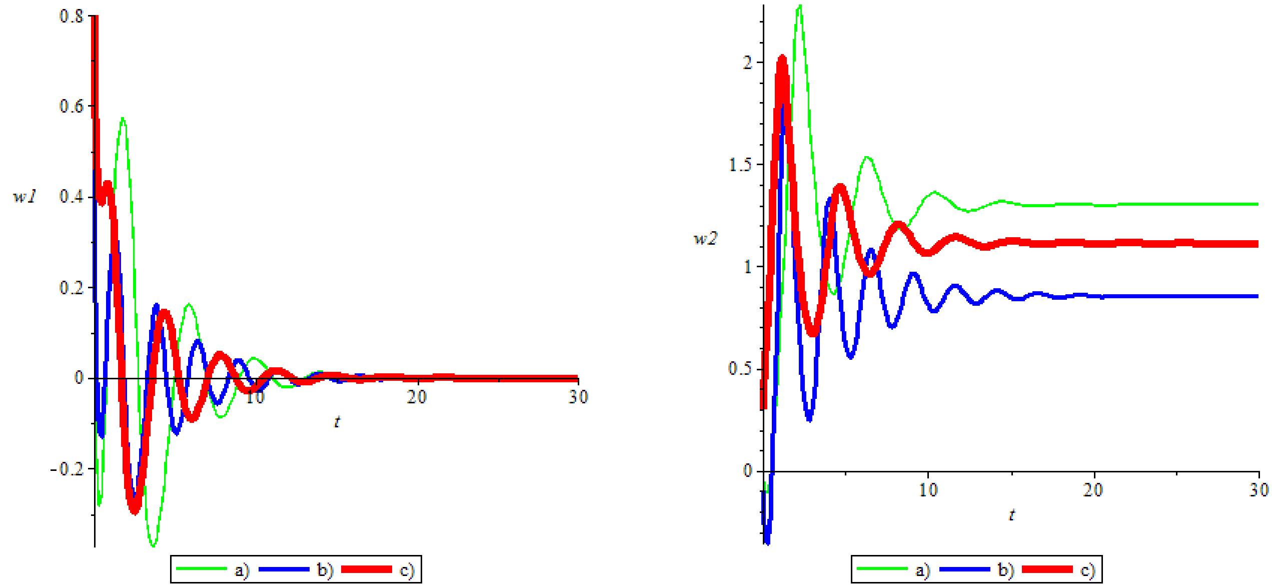


Рис. 3: Графики компонент $w_1(t)$ и $w_2(t)$ решения системы (21) при условиях (23)-(25).

Как видно из рис. 2-3 при выбранных параметрах k_i, $i = \overline{1,4}$, динамика компонент решений представляет собой затухающие колебания. При этом фазовые переменные v_1 и w_2 стремятся к константам, что иллюстрирует наличие локального асимптотического равновесия по данным переменным. Переменные v_2 и w_1 стремятся к нулю, что соответствует выводу о наличии асимптотической устойчивости по этим переменным.

На рис. 4 изображена проекция фазового портрета системы (21) на плоскость Ov_1v_2 фазового пространства $Ov_1v_2w_1w_2$.

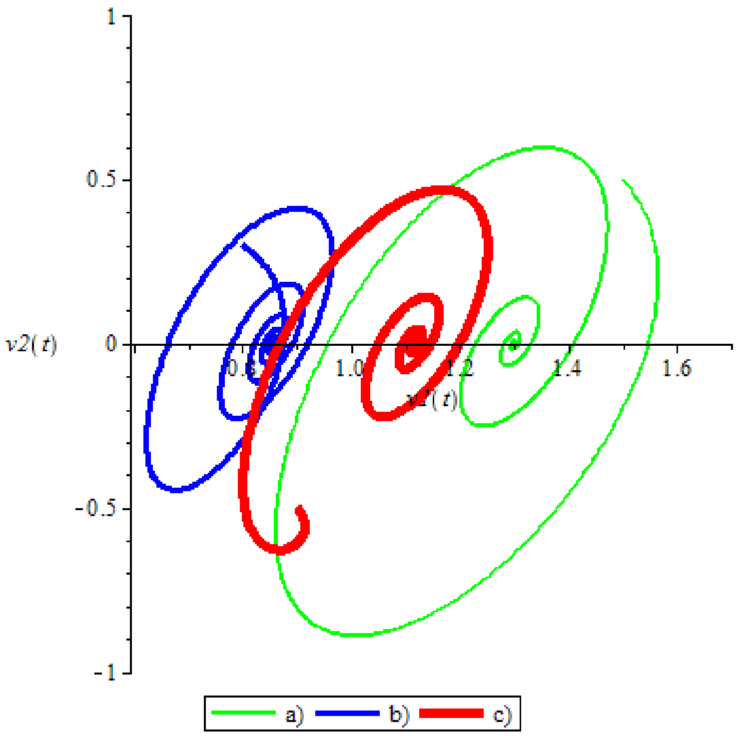


Рис. 4: Графики проекций фазовых траекторий системы (21) на плоскость Ov_1v_2 при условиях (23)-(25).

Из построенной проекции фазового портрета видно, что при выбранных параметрах k_i,

$i = \overline{1,4}$, траектории системы (21) стремятся к точкам оси Ov_1, которые принадлежат семейству положений равновесия вида $c^* = (c_4^*, 0, 0, c_4^*)$ системы (21).

Четвертая глава посвящена разработке комплекса программ для исследования нелинейных моделей на основании локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности.

В первом параграфе четвертой главы приведен численный метод установления соответствия между начальными точками локально асимптотически эквивалентных систем. По начальным точкам нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений были рассчитаны начальные точки ее линейного приближения, которые обеспечивают локальную покомпонентную асимптотическую эквивалентность систем.

Во втором параграфе первой главы построено отображение, устанавливающее соотношение между начальными точками исследуемой системы (10) и ее линейного приближения (7) в смысле локально покомпоненто асимптотической эквивалентности:

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_0^{+\infty} Y(-s)P(x(s))ds, \tag{26}$$

где $x(t) = x(t : 0, x^{(0)})$ – решение системы (10), проходящее в момент времени $t = 0$ через точку $x^{(0)}$, $y(t) = Y(t)y^{(0)}$, $Y(t)$ – нормированная в нуле фундаментальная матрица линейного приближения.

Отображение (26) в координатной форме имеет следующий вид:

$$y_i^{(0)} = x_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{+\infty} y_{ij}(-s)P_j(x(s))ds, \quad i = \overline{1,n}, \tag{27}$$

где $y_{ij}(t)$ – элементы фундаментальной матрицы $Y(t)$.

Тогда формулы для приближенного вычисления начальных точек решений линейной системы (7) с точностью ε имеют вид

$$\tilde{y}_i^{(0)} = x_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{b_0} y_{ij}(-s)P_j(x(s))ds. \tag{28}$$

Здесь для фиксированного $\varepsilon > 0$ верхний предел интегрирования b_0 выбирается в соответствии с теоремой 1. Для численного нахождения решения $x(t : 0, x^{(0)})$ системы (10) в соотношениях (28) применялся L-устойчивый (4,2)-метод четвертого порядка точности.

Второй параграф четвертой главы содержит описание комплекса программ для расчета начальных точек локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем. Разработанный комплекс состоит из двух программных модулей. Первый модуль предназначен для вычисления фундаментальной матрицы линейного приближения нелинейной модели. Разработанный модуль определяет собственные значения матрицы линейной системы и соответствующие им собственные и присоединенные векторы. Далее на основании полученных результатов строится фундаментальная матрица.

Второй программный модуль реализует численный метод для расчета отображения, устанавливающего соответствие между начальными точками локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем на языке C++. В нем реализованы алгоритмы: L-устойчивый (4,2)-метод четвертого порядка точности, метод Симпсона, численный расчет отображения, устанавливающего соответствие между начальными точками локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем.

В третьем параграфе четвертой главы проведен вычислительный эксперимент на примере брутто-реакции пиролиза этана при температуре 1000 К. По начальным данным нелинейной модели обыкновенных дифференциальных уравнений были рассчитаны начальные точки ее линейного приближения, которые обеспечивают локальную покомпонентную асимптотическую эквивалентность систем.

На рис. 5 приведены графики концентраций веществ, участвующих в брутто-реакции пиролиза этана, и компонент решений системы линейного приближения модели, между начальными значениями которых установлено соотношение в соответствии с формулой (28), при значениях k_1 и k_2, соответствующих температуре $T = 1000$ К.

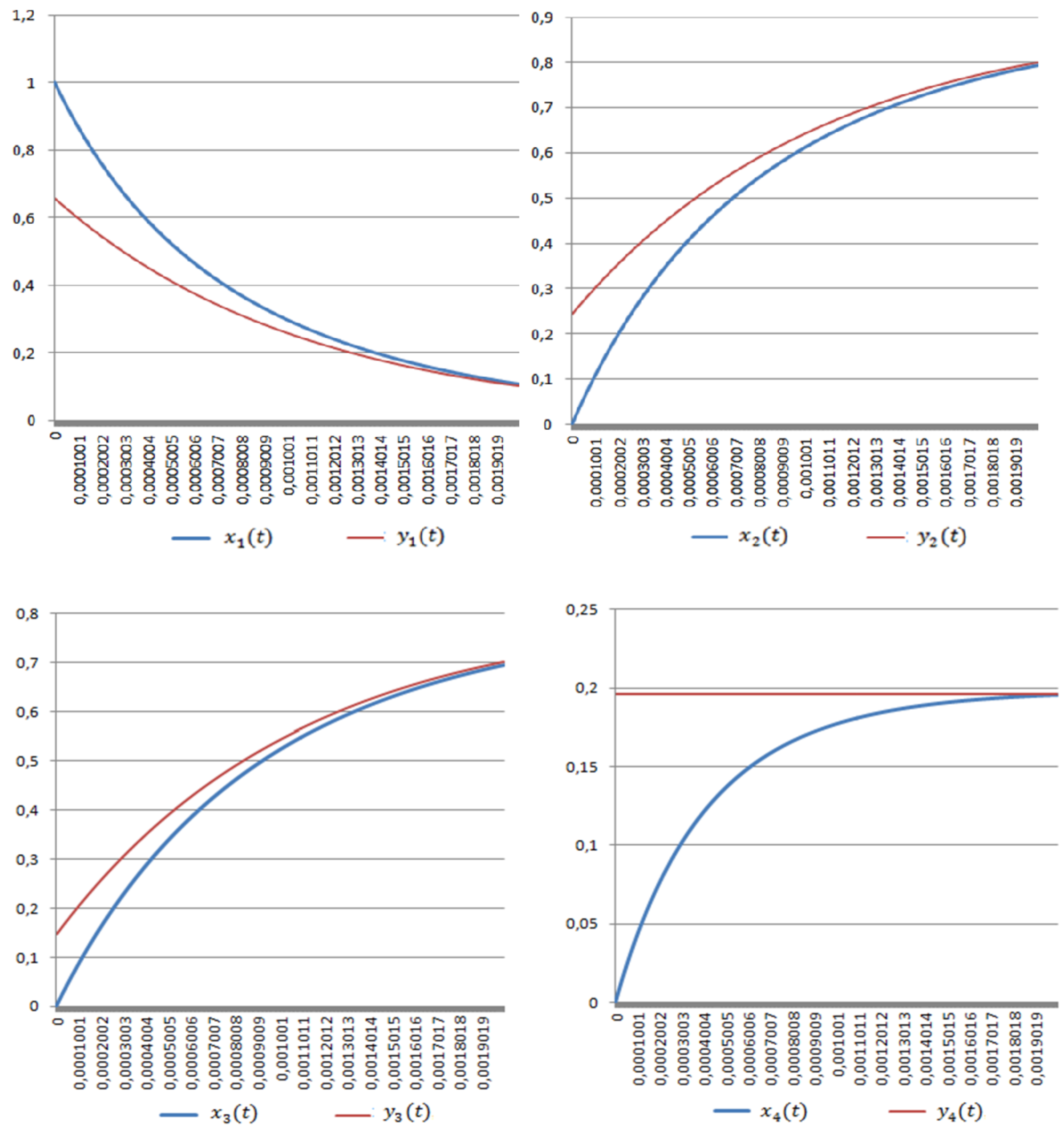


Рис. 5: Графики решений $x_i(t)$ и $y_i(t)$, между начальными значениями которых установлено взаимно-однозначное соответствие.

Из численного эксперимента видно, что поведение решений нелинейной модели, начиная с момента времени, равного 0,002 с, мало отличается от поведения решений системы ее линейного приближения. Это обуславливается достаточно большими значениями констант скоростей химических реакций при температуре 1000 K, а следовательно, высокой скоростью протекания стадий химического превращения.

В заключении приведен краткий обзор результатов исследования.

Основные результаты диссертационного исследования:

1. Получены новые качественные методы исследования асимптотических свойств (устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости и локального асимптотического равновесия по части компонент) нелинейных математических моделей химической кинетики, биологии и небесной механики.

2. Исследованы асимптотические свойства динамики концентраций веществ, участвующих:
– в брутто-реакции пиролиза этана;
– в части компактной схемы химической реакции пиролиза пропана;
– в реакции образования амида уксусной кислоты.

3. Исследованы асимптотические свойства динамики численности популяций в биоценозе в условиях межвидового взаимодействия; проведен сравнительный анализ результатов качественного исследования с результатами вычислительных экспериментов.

4. Исследованы асимптотические свойства семейства положений равновесия, содержащего точку либрации L_1, математической модели движения космического аппарата, представляющей собой круговую ограниченную задачу трех тел в приближении Хилла, в зависимости от параметров модели; проведен сравнительный анализ результатов качественного исследования с результатами вычислительных экспериментов.

5. Численный метод расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения.

6. Комплекс программ для расчета начальных данных для установления соответствия между начальными данными нелинейной модели и ее линейного приближения.

РАБОТЫ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях, рекомендованных перечнем ВАК РФ и включенных в международную реферативную базу данных:

1) Шаманаев П. А. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия / П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева // Вестник Мордовского университета, 2018. № 3. Т. 28. С. 321–332. (Web of Science)

2) Шаманаев П. А. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева // Журнал Средневолжского математического общества, 2018. № 3. Т. 20. С. 304–317. (zbMATH)

3) Шаманаев П. А. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных / П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева // Журнал Средневолжского математического общества, 2017. № 1. Т. 19. С. 102-115. (zbMATH)

4) Язовцева О. С. Исследование устойчивости некоторого решения системы кинетических уравнений химической реакции / О. С. Язовцева, Т. Ф. Мамедова, И. М. Губайдуллин // Журнал Средневолжского математического общества, 2016. № 4. Т. 18. С. 152-158. (zbMATH)

В прочих изданиях:

5) Шаманаев П. А. О частичной устойчивости положений равновесия динамических систем / П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева // Препринт СВМО, 2018. № 127. 20 с.

6) Шаманаев П. А. Об устойчивости по части переменных положения равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений / П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева // Материалы Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 6–11 июля 2018 г. С. 219-221.

7) Назаров В. И. Численный метод установления соответствия между начальными точками локально асимптотически эквивалентных систем / В. И. Назаров, О. С. Язовцева // Огарев-online, 2018. № 14. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/chislennyj-metod-ustanovleniya-sootvetstviya-mezhdu-nachalnymi-tochkami-lokalno-asimptoticheski-ekvivalentnyx-sistem.

8) Шаманаев П. А. Локальная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных / П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева // Доклады Международной школы-конференции «Соболевские чтения». 20–23 августа 2017 г. С. 106-107.

9) Шаманаев П. А. Применение локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности к исследованию устойчивости по части переменных решений динамических систем / П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева // Материалы XII Международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем». Пенза. 4–6 декабря 2017 г. С. 17-22.

10) Вельмисов П. А. Исследование устойчивости решения математической модели динамики трубопровода / П. А. Вельмисов, П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева // Материалы XIII Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании». Саранск. 12–16 июля 2017 г. С. 26-31.

11) Вельмисов П. А. Об устойчивости колебаний трубопровода / П. А. Вельмисов, И. А. Дегтярев, О. С. Язовцева // Материалы XIII Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании». Саранск. 12–16 июля 2017 г. С. 476-482.

12) Мурюмин С. М. Асимптотическая эквивалентность разностных схем для решения задачи Коши / С. М. Мурюмин, О. С. Язовцева // Материалы XIII Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании». Саранск. 12–16 июля 2017 г. С. 491-497.

13) Назаров В. И. Численное моделирование жестких систем с использованием (4,2)-метода / В. И. Назаров, Е. Е. Пескова, О. С. Язовцева // Огарев-online, 2017.

№13. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/chislennoe-modelirovanie-zhestkix-sistem-s-ispolzovaniem-42-metoda.

14) Язовцева О. С. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных / О. С. Язовцева // Огарев-online, 2017. №13. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

15) Язовцева О. С. Исследование устойчивости математических моделей химических реакций асимптотическими методами / О. С. Язовцева, Т. Ф. Мамедова, И. М. Губайдуллин // Материалы VII Всероссийской научной молодежной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского с международным участием «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Саранск. 16–20 июля 2018 г. С. 110-112.

16) Язовцева О. С. Исследование устойчивости математической модели реакции пиролиза пропана асимптотическими методами / О. С. Язовцева, Т. Ф. Мамедова, И. М. Губайдуллин // Материалы X Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем». Пенза. 23–27 мая 2016 г. С. 256-260.

17) Язовцева О. С. Анализ устойчивости кинетической модели пиролиза пропана по части переменных / О. С. Язовцева, Т. Ф. Мамедова, И. М. Губайдуллин // Материалы Международной конференции и молодёжной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2016). Самара. 17–19 мая 2016 г. С. 742-748.

18) Губайдуллин И. М. Математическая модель динамики многокомпонентного газа на примере брутто-реакции пиролиза этана / И. М. Губайдуллин, Е. Е. Пескова, О. С. Язовцева // Огарев-online, 2016. №20. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/matematicheskaya-model-dinamiki-mnogokomponentnogo-gaza-na-primere-brutto-reakcii-piroliza-etana.

Свидетельства о регистрации программы на ЭВМ:

19) Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Моделирование химико-технологических процессов в реакторах с использованием схем высокого порядка точности» № 2017612056 от 14.02.2017 г. / Р. В. Жалнин, В. И. Назаров, Е. Е. Пескова, О. С. Язовцева.