

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Ямалтдинова Наиля Ринатовна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕКЛАМНЫХ РАСХОДОВ С УЧЕТОМ  
ЭФФЕКТА РАСПРЕДЕЛЕННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, Лутошкин Игорь Викторович

Ульяновск 2019 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЕКЛАМЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕКЛАМНЫМИ РАСХОДАМИ.....	12
1.1 Обзор существующих математических моделей рекламы.....	12
1.1.1 Статистические модели рекламы.....	12
1.1.2 Оптимизационные модели рекламы.....	14
1.2 Постановка задач оптимального управления.....	25
1.2.1 Модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж.....	25
1.2.2 Модель управления рекламными расходами фирмы с распределенным лагом запаздывания отдачи от воздействия рекламы и точечным воздействием предыдущих продаж.....	30
1.2.3 Модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными на постоянном интервале лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы нескольких видов и предыдущих продаж.....	32
Выводы по главе 1.....	36
ГЛАВА 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ.....	37
2.1 Анализ модели управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж.....	37
2.1.1 Теоремы существования решения.....	37
2.1.2 Необходимые условия оптимальности.....	41
2.2 Анализ модели управления рекламными расходами фирмы с распределенным лагом запаздывания отдачи от воздействия рекламы и точечным воздействием предыдущих продаж.....	44
2.2.1 Теоремы существования решения.....	44
2.2.2 Необходимые условия оптимальности.....	46

2.3 Анализ модели управления рекламными расходами фирмы с распределенными на постоянном интервале лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы нескольких видов и предыдущих продаж .....	47
2.3.1 Теоремы существования решения.....	47
2.3.2 Необходимые условия оптимальности.....	50
Выводы по главе 2.....	55
<b>ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ РЕКЛАМНЫХ РАСХОДОВ. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ.....</b>	<b>56</b>
3.1 Модифицированный метод локальных вариаций .....	56
3.2 Применение метода параметризации.....	59
3.2.1 Параметризация задачи .....	61
3.2.2 Применение метода параметризации к задаче оптимизации рекламных расходов .....	62
3.3 Описание комплекса программ.....	64
3.3.1 Описание программы для решения оптимизационной задачи с помощью принципа максимума .....	64
3.3.2 Описание программы для решения оптимизационной задачи с помощью модифицированного метода локальных вариаций и принципа максимума.....	68
3.3.3 Описание реализации метода параметризации.....	71
Выводы по главе 3.....	74
<b>ГЛАВА 4. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЛАГАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ .....</b>	<b>77</b>
4.1 Вычислительный эксперимент с линейным уравнением выручки.....	77
4.2 Вычислительный эксперимент с нелинейным уравнением выручки.....	83
Выводы по главе 4.....	90
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>92</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>94</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>	<b>103</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Любая коммерческая организация вне зависимости от вида ее деятельности всегда несет значительные расходы, связанные с производством, реализацией продукции или предоставлением услуг.

Внесение изменений в процесс производства, модернизация основных средств, закупка нового сырья и оборудования с целью изменения свойств товара и, как следствие, возможного повышения привлекательности для потенциальных потребителей требуют серьезных вложений, организационных усилий, а также длительного периода окупаемости. При этом, учитывая непрекращающуюся борьбу за долю на рынке фирм, занятых производством/предоставлением взаимозаменяемых товаров/услуг, данные мероприятия могут оставаться долгое время незамеченными на фоне сформированной репутации конкурентов.

Поэтому для повышения уровня продаж товаров (предоставления услуг) с учетом возможностей фирмы и особенностей рынка необходим гибкий инструмент, нацеленный на скорейшее предоставление потребителю информации о товаре, подчеркивание его преимуществ. Очевидно, что таким инструментом является реклама. А в силу роста популярности в последние годы проектного подхода в управлении в различных сферах деятельности, в том числе и планировании маркетинговых мероприятий, можно предположить, что заданная цель может быть поставлена на конкретный период планирования.

Рекламные затраты как и любые другие статьи затрат учитываются в совокупных издержках фирмы. Однако они обладают свойством быть полностью регулируемыми и практически не зависят от выпуска, при этом рекламные затраты являются мощным инструментом воздействия на потребительские предпочтения. Поэтому эффективная стратегия управления данным видом затрат позволяет любой фирме за короткое время при

небольших издержках увеличить объем продаж даже без внесения изменений в производственный процесс.

Грамотное управление рекламой, которое может заключаться в ее оптимальном объеме, частоте рекламных сообщений, распределении рекламных затрат, использовании эффективных медиаканалов, состоит в разработке качественной рекламной стратегии. При этом помимо определения целевой аудитории, оформления самого рекламного сообщения и проведения других творческих мероприятий, разработка данной стратегии предполагает анализ данных прошлых периодов, определение характера влияния рекламных затрат и нерекламных факторов на уровень потребительского спроса.

Очевидно, что помимо рекламы существует множество других контролируемых и неконтролируемых фирмой причин изменения уровня продаж, учет которых в процессе разработки рекламной стратегии не менее важен.

Также важно отметить, что продвижение конкретного продукта может осуществляться с помощью различных по эффективности и длительности воздействия видов рекламы.

Очевидно, что рекламные сообщения редко вызывают мгновенную потребительскую реакцию. В то же время эффект рекламного воздействия может сохраняться некоторое время после выхода такого сообщения. Следовательно, при разработке рекламной стратегии должна быть учтена возможность распределенного запаздывания реакции потребителей.

На сегодняшний день существует ряд различных моделей, учитывающих рекламное воздействие на потенциальных потребителей фирмы. Выделяя подходы, основанные на математическом моделировании, можно отметить: статистические модели, статические, динамические дискретные и непрерывные оптимизационные модели.

Однако в процессе анализа открытых печатных источников, посвященных вопросам моделирования рекламы, было выяснено, что

некоторые существенные проблемы остаются нерешенными. В частности, вопрос о непрерывно распределенном запаздывании отдачи от воздействия рекламных и нерекламных факторов, вопрос об эффекте последствия таких воздействий, вопрос о влиянии длительности использования товара на отдачу от рекламы, возможность использования различных видов рекламы в моделях, учитывающих непрерывно распределенное запаздывание отдачи от факторов.

**Объектом** исследования являются динамические управляемые системы экономики, учитывающие распределенный характер управляющих воздействий и фазового состояния.

**Предметом** исследования являются математические модели, алгоритмы и программное обеспечение, обеспечивающие анализ рекламной деятельности фирмы и построение оптимальной рекламной стратегии с учетом распределенного воздействия факторов.

**Целью** исследования является разработка нового класса математических моделей экономической динамики с учетом распределенного запаздывающего эффекта от факторов воздействия, их качественный анализ, практическая реализация численных алгоритмов анализа моделей на примере управления рекламными расходами.

Исходя из поставленной цели, формулируются требующие решения следующие **задачи**:

1. исследовать математические модели рекламных воздействий с целью выявления некоторых нерешенных вопросов в области моделирования рекламной деятельности;
2. разработать математические модели экономической динамики, предлагающие решение вопроса об их оптимальном распределении на заданном периоде планирования с учетом запаздывания отдачи от факторов, на примере воздействий рекламы и предыдущих продаж;

3. сформулировать задачи оптимального управления рекламными расходами в рамках разработанных моделей и провести анализ поставленных математических проблем;

4. разработать алгоритмы численных методов решения задач оптимального управления с интегро-дифференциальными связями;

5. разработать комплекс программ для решения задач оптимального управления рекламным расходами на заданном периоде планирования с учетом запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж;

6. провести численные эксперименты для верификации разработанных моделей.

**Методы исследования.** При решении задач, поставленных в работе, использовались методы математического моделирования, методы теории оптимального управления, численные методы решения интегро-дифференциальных, интегральных уравнений, динамических оптимизационных задач, методы программирования.

**Научная новизна.** В диссертационной работе разработан новый класс математических моделей экономической динамики, в рамках предлагаемых моделей сформулированы задачи оптимального управления, для которых доказано существование решений и найдены необходимые условия их оптимальности. Также разработаны алгоритмы и комплекс программ для решения поставленных задач.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Новые математические модели экономической динамики, учитывающие на заданном временном периоде эффект распределенного запаздывания от воздействующих факторов со связями в виде уравнений Вольтерра.

2. Модификация метода локальных вариаций, позволяющая найти приближенное решение задачи оптимального управления с интегро-дифференциальными связями.

3. Теоремы, обосновывающие существование решений и необходимые условия в задачах оптимального управления, порожденных математическими моделями управления рекламными расходами.

4. Комплекс программ, позволяющий улучшить финансовый результат фирмы путем построения оптимальной рекламной стратегии, основанной на решении задач оптимального управления рекламными расходами с ограничениями в виде уравнений Вольтерра.

**Теоретическая значимость работы** определяется разработкой нового класса моделей управления рекламными расходами, позволяющего учитывать при анализе распределенный эффект рекламы и других факторов в непрерывном времени.

**Практическая значимость работы.** Практические результаты работы могут найти применение в деятельности фирм, активно проводящих рекламные кампании, заинтересованных в разработке оптимальных рекламных стратегий.

**Внедрение результатов.** Материалы диссертации используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» и отражены в учебно-методических комплексах по курсу «Реклама на рынке ИКТ» для студентов бакалавриата направления «бизнес-информатика».

Результаты работы использовались при создании модели управления инвестициями в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ №2.1816.2017/4.6 по теме «Исследование и разработка интегрированной автоматизированной системы управления производственно-технологическим планированием авиастроительного предприятия на базе цифровых технологий».

**Достоверность** результатов, приведенных в диссертационной работе, определяется корректным использованием теории моделирования, оптимального управления, численных методов и методов программирования.

**Апробация** основных положений диссертационной работы проведена на IV Международной научно-практической конференции «Математика,



статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании» (Тверской государственный университет, 2 июня 2015 г.), на VII Всероссийской научной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского с международным участием (Национальный исследовательский мордовский государственный университет, 12-15 июля 2016 г.), на V Международной научно-практической конференции «Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании» (Тверской государственный университет, 31 мая 2016 г.), на Международном молодежном симпозиуме по управлению, экономике и финансам (Казанский федеральный университет, 24-25 ноября, 2016 г.), на VI Всероссийской научной конференции с международным участием «Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы» (Ульяновский государственный университет, 2016 г.), на Всероссийской заочной научно-практической конференции «Математические методы и интеллектуальные системы в экономике и образовании» (Удмуртский государственный университет, декабрь 2017 г.), на семинаре «The Second Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2017)» (Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 10 ноября 2017 г.), на Международной научно-практической конференции ICIT-2019 «Информационно-коммуникационные технологии в науке и производстве» (Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., 7-8 февраля 2019 г.).

**Личный вклад автора.** Все основные результаты, установленные в диссертации, получены соискателем самостоятельно. При этом разработка моделей, рассмотрение вопросов существования решений поставленных задач осуществлялась совместно с научным руководителем И.В. Лутошкиным.

**Структура диссертации.** Диссертация включает в себя введение, четыре главы, заключение, список использованной литературы и три приложения.

Во **введении** раскрыта актуальность выбранной темы исследования, сформулированы цели и задачи, положения, выносимые на защиту, научная новизна, практическая значимость работы, приведены сведения об апробации результатов и публикациях.

В **первой** главе проанализированы существующие на сегодняшний день математические модели рекламы, выделены вопросы, остающиеся открытыми. Разработаны следующие математические модели рекламы:

1. модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж;

2. модель управления рекламными расходами фирмы с распределенным лагом запаздывания отдачи от воздействия рекламы и точечным воздействием предыдущих продаж;

3. модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными на постоянном интервале лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы нескольких видов и предыдущих продаж.

В рамках моделей поставлены задачи оптимального управления рекламными расходами фирмы.

Во **второй** главе доказаны теоремы существования решений этих задач. Также получены необходимые условия оптимальности рекламных стратегий на основе принципа максимума.

В **третьей** главе предложены численные методы решения задач оптимизации рекламных расходов, в частности, модифицированный метод локальных вариаций и метод параметризации.

**Четвертая** глава посвящена практической реализации моделей и разработке комплекса программ для решения задач, сформулированных в рамках предлагаемых моделей. Проведены вычислительные эксперименты

для динамической модели рекламы с линейным и нелинейным уравнениями связи между выручкой и накопленными воздействиями рекламы и предыдущих продаж. Для тестирования модели использовались статистические данные по выручке и рекламным затратам двух фирм. В главе описываются процессы выбора вида функциональных связей, оценок параметров моделей, обсуждаются примененные численные методы оптимизации и решения интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, анализируются основные результаты вычислений.

**В заключении** изложены основные результаты работы.

**Приложение 1** содержит поквартальные статистические данные фирмы по выручке и рекламным затратам за период с I квартала 2004 г. по III квартал 2013 г. в миллионах рублей.

**Приложение 2** содержит ежемесячные статистические данные по выручке и рекламным затратам фирмы, которые собраны за период с января 2009 г. по июль 2017 г. в рублях.

**Приложение 3** содержит фрагмент кода программы для реализации модифицированного метода локальных вариаций.

**Публикации.** Всего по теме диссертации опубликовано 14 работ [66-79], в том числе 2 из списка, рекомендованного ВАК [70], [71], 3 статьи в изданиях, проиндексированных в международной базе научного цитирования «Scopus» [77-79], 8 работ в других рецензируемых журналах, сборниках конференций, симпозиумов и семинаров [66-69], [72], [73], [75], [76], 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [74].

## **ГЛАВА 1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЕКЛАМЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕКЛАМНЫМИ РАСХОДАМИ**

В этой главе автором проанализированы существующие на сегодняшний день модели рекламы, обладающие наиболее высоким математическим уровнем и, по мнению автора диссертации, представляющие наибольший интерес, выделены оставшиеся открытыми вопросы в моделировании рекламных затрат фирмы.

Также для решения поставленных вопросов в главе предложены динамические непрерывные модели расходов на рекламу с использованием одного или нескольких медиаканалов для товаров длительного и недлительного срока использования с распределенным воздействием рекламы и распределенным и точечным воздействиями нерекламных факторов на уровень продаж. Задачи выбора оптимальной стратегии будут представлены в виде систем интегральных уравнений Вольтерра, что является новым подходом в моделировании рекламных затрат.

### **1.1 Обзор существующих математических моделей рекламы**

Среди существующих на сегодняшний день моделей рекламы, обладающие наибольшим математическим уровнем, условно можно выделить статистические модели и оптимизационные.

#### **1.1.1 Статистические модели рекламы**

Статистические модели посвящены выявлению особенностей взаимодействия рекламных воздействий и потребительской реакции на основе эконометрического анализа, проверке корректности предполагаемых связей, решению вопроса качества оценивания параметров.

Введем следующие обозначения:

$S_t$  – объем продаж в натуральном измерении в момент времени  $t$ ;

$PS_t$  – ценовой индекс товара в момент времени  $t$ ;

$A_t$  – количество рекламных сообщений в момент времени  $t$ ;

$PA_t$  – ценовой индекс рекламного сообщения в момент времени  $t$ .

В модели одновременности, рассмотренной Э. Берндтом [5] ставится вопрос об одновременном взаимном влиянии друг на друга рекламы и объема продаж. Структурная модель «реклама-продажи» в момент  $t$  определяются соотношениями:

$$S_t = a + bA_t + cPS_t + u_t,$$

$$A_t = d + eS_t + fPA_t + w_t,$$

где  $u_t$  и  $w_t$  – остаточные случайные величины.

Гипотеза об одновременности рекламы и продаж проверяется тестом Хаусмана [5], [49].

В модели причинности К. Грэнжера [48] проверяются гипотезы о распределенном влиянии предыдущих продаж на текущий объемы рекламы и распределенного воздействия предыдущих рекламных вложений на текущий объем продаж. В первом случае выдвигается гипотеза о независимости рекламы от предыдущих объемов продаж:

$$A_t = a_0 + \sum_{k=1}^K a_k A_{t-k} + \sum_{l=1}^L b_l S_{t-l} + \varepsilon_t,$$

где значения максимальных лагов запаздывания  $K$  и  $L$  выбираются достаточно большими,  $\varepsilon_t$  – «белый шум». Во втором случае выдвигается аналогичная гипотеза о независимости объема продаж от рекламы:

$$S_t = c_0 + \sum_{i=1}^I c_i A_{t-i} + \sum_{j=1}^J d_j A_{t-j} + \zeta_t,$$

где выбор  $I$  и  $J$  аналогичен выбору  $K$  и  $L$ ,  $\zeta_t$  – «белый шум».

Проверку гипотез,  $H_0 : b_1 = b_2 = \dots = b_L = 0$  – о равенстве соответствующих параметров модели нулю для первого случая,  $H_0 : d_1 = d_2 = \dots = d_L = 0$  – для второй модели, можно провести с помощью классических методов: теста Фишера (F-теста) или теста множителей Лангранжа (LM-теста).

В [5] рассматривалась модель *растянутых во времени эффектов* Л. Койка. В рамках модели делается предположение, что коэффициенты распределенного лага обладают свойством убывания в геометрической прогрессии, начиная с некоторого лага  $k$ , при этом текущие продажи определяются расходами на рекламу в этот же период, а также объемом продаж предыдущего периода:

$$S_t = a + b_0 A_t + b_1 A_{t-1} + \dots + b_k A_{t-k} + b_k \lambda A_{t-k-1} + b_k \lambda^2 A_{t-k-2} + \dots + \varepsilon_t,$$

где  $b_{k+m} = b_k \lambda^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

В мультипликативной модели Нерлова-Вога предполагается, что количество продукции на душу населения в год  $t$  фирмы зависит от усредненных затрат на рекламу за фиксированный период [25]:

$$S_t = k p_t^\eta y_t^\beta \alpha_t^\gamma A_t^\delta,$$

где  $p_t^\eta$  – цена товара,  $y_t^\beta$  – среднедушевой располагаемый доход потребителей,  $\alpha_t^\gamma$  – среднедушевые расходы на рекламу,  $A_t^\delta$  – усредненные затраты на рекламу за фиксированный период  $l$  в  $t$  году.

Все перечисленные модели являются дискретными относительно параметра времени.

### 1.1.2 Оптимизационные модели рекламы

Проводя обзор оптимизационных моделей, отметим, что в большинстве математических моделей рекламы в качестве единицы измерения рекламного воздействия используется количество рекламных сообщений либо затраты на

рекламу. Однако некоторые исследователи, основываясь на предположении, что отдача от фиксированного объема рекламы, распределенного на одном временном промежутке, может кардинально отличаться от отдачи того же объема, распределенного на интервале другой длины, считают, что имеет смысл рассматривать модели рекламы, где в качестве переменной, характеризующей рекламное воздействие, выступает не количество рекламных сообщений, а их частота [6], [7], [22]. В [22] в качестве отдачи от частоты рекламного воздействия могут выступать число покупателей рекламируемого товара или посетителей магазина в единицу времени или скорость продаж рекламируемого товара.

### 1.1.2.1 Модель Нерлова-Эрроу и расширения

Что касается динамических оптимизационных моделей рекламы, то здесь необходимо выделить классические модели Нерлова-Эрроу и Видаля-Вольфа, на сегодняшний день имеющие большое количество расширений.

В оригинальной модели Нэрлова-Эрроу [59] предполагается, что спрос на рекламируемый товар задается в виде некоторой функции, где одним из аргументов является благожелательное отношение потребителя:

$$S(t) = f(A(t), p(t), Z(t)).$$

Здесь  $S(t)$  – спрос на рекламируемый товар в момент  $t$ ,  $p(t)$  – цена товара в момент  $t$ ,  $Z(t)$  характеризует факторы влияния на спрос, которые не зависят от действий самой фирмы (доход потенциальных потребителей, цена товаров-дополнителей или товаров-заменителей и т.д.) в момент  $t$ ,  $A(t)$  отражает уровень благожелательного отношения к товару в момент  $t$ , который учитывает влияние прошлых и настоящих рекламных вложений на текущий спрос и определяется соотношением:

$$\dot{A}(t) = u(t) - \delta A(t), A(0) = A_0,$$

где  $\delta$  – постоянный коэффициент амортизации лояльности,  $u(t)$  – рекламные затраты.

Прибыль от продаж товара в момент  $t$  определяется соотношением

$$\pi(u(t), p(t)) = p(t)f(A(t), p(t), Z(t)) - c(f(A(t), p(t), Z(t))) - u(t),$$

где  $c(S)$  – издержки, связанные с производством товара в объеме  $S$ .

При этом целью проведения рекламной кампании является максимизация суммарной дисконтированной прибыли:

$$J(u(\cdot), p(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{-rt} \pi(u(t), p(t)) dt \rightarrow \max,$$

при ограничениях на переменные  $u(t) \geq 0$ ,  $p(t) \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq +\infty$ .

Большинство расширений модели Нерлова-Эрроу связаны с учетом дополнительных нерекламных факторов в модели и конкретизацией условий, в которых проводится рекламная кампания.

Г. Фрачтер [43] утверждает, что каждый потребитель имеет довольно большой опыт покупок различных товаров, поэтому он может отметить для себя оптимальное соотношение цены и качества товара. Таким образом, зачастую цена товара может послужить сигналом того, насколько качественным может быть неопробованный продукт. Она дополнила классическую модель также ценовой переменной:  $\dot{A}(t) = kp(t) - \rho u(t) - \delta A(t)$ , где  $p$  – регулируемая цена товара на рекламируемый продукт,  $k$  и  $\rho$  – постоянные коэффициенты, отражающие уровень влияния цены и рекламы на оценку качества бренда.

К. Занг, Дж. Занг, У. Тэнг [65] предложили модель с учетом влияния благожелательности потребителя, определяющейся в соответствии с классическим соотношением, на ценовую политику фирмы и включили переменную благожелательности в уравнение цены.

И. Котовиц и Ф. Мэтьюсон [52] вместо понятия благожелательности  $A(t)$  ввели ожидаемое качества продукта:  $\dot{Q}(t) = k(q - Q) + g(u(t))$ , где  $q$  –



фактическое качество продукции,  $Q$  – ожидаемое потребителем качество продукции,  $k \in (0;1)$  – скорость определения качества.

Обобщив исходную модель Нерлова-Эрроу, С. Моска и Б. Висколани [56] представили уравнение благожелательности в виде:  $\dot{A}(t) = f(u(t)) - \delta A(t)$ , где  $f(u)$  – возрастающая и вогнутая функция, объясняющая рост благожелательности под влиянием рекламных расходов.

А. Буратто, Л. Гроссет, Б. Висколани [31] сформулировали модель для сегментированного рынка. Они представили потребительский рынок как конечное число сегментов, каждый из которых отличается уникальной реакцией потребителя на появившийся на рынке товар, характеризуемый некоторой переменной. В другом исследовании [32] они дополнили модель учетом возможности продвижения товара посредством  $n$  медиаканалов.

Также существуют модели - расширения, описывающие деятельность нескольких участников рынка. Г. Эриксон [38], разделил функции маркетинговой и производственной деятельности предприятия, представив их в качестве конфликтующих сторон в дифференциальной игре. А. Буратто и Дж. Заккур [33] исследовали рекламные стратегии в условиях лицензионных отношений между фирмами. Они рассмотрели два вида лицензионных отношений. В первом случае лицензиат получает права на выпуск и продвижение вторичной линии бренда на основе денежной компенсации. Во втором случае лицензиат получает права на производство товара аналогичного бренда во взаимодополняющем бизнесе. П. Джованни [44] рассмотрел цепочку товарных поставок, состоящую из производства и последующей розничной продажи. Автор предположил, что производитель может отказаться от маркетинговой поддержки продавца розничного рынка и полностью направить инвестиции на улучшение производимого товара, либо выделять часть средств на рекламные за счет снижения качества продукта. Модель олигополии с учетом влияния конкурентов на спрос продукции была предложена Х. Ферштманом [40]. В модели предполагается, что

потребительский спрос определяется только уровнем лояльности к продукту каждой из фирм, другие факторы, учитываемые в классической постановке, не рассматриваются. Позже Х. Ферштман, М. Вийя и М. Эйтан [41] преобразовали функцию спроса для дуополии.

Отдельно хотелось бы выделить модель олигополии с  $n$  фирмами, разработанную У. Пауэлсом [60]:

$$\dot{A}_i(t) = \int_{-\infty}^t g(u_i(\tau)) w_i(t-\tau) d\tau - \delta A_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $g(u_i)$  – функция эффективности вложений в рекламу  $i$ -й фирмы.

Можно отметить, что оригинальная модель Нерлова-Эрроу и большинство ее расширений предполагает, что изменение лояльности потребителя к продукту зависит от текущего объема рекламы и уровня благожелательности и выражается в виде обыкновенного дифференциального уравнения. Здесь также были рассмотрены модели, разработанные рядом исследователей, где учитываются влияния на благожелательность отдельных нерекламных факторов таких, как качество [52], цена товара [34], [43]. Отметим, что в [60] были рассмотрены непрерывно распределенные эффекты только рекламных воздействий. При этом лаг запаздывания изменения благожелательности от рекламных воздействий стремится к бесконечности. Влияния других участников на рынке, также были рассмотрены многими исследователями [33], [35], [38], [40], [41], [44]. Для решения сформулированных при этом задач применялись методы теории игр.

### 1.1.2.2 Модель Видаля-Вольфа и расширения

Другая классическая динамическая модель рекламы – модель Видаля-Вольфа [64]. Она является одной из первых моделей, отвечающих требованиям рассмотрения рекламы как комплексного явления. Особенность

этой модели состоит в учете затухающего со временем влияния рекламы на будущие продажи и ограниченности максимального охвата рынка фирмой.

Изменение уровня продаж характеризуется следующим соотношением:

$$\dot{S}(t) = \eta u(t) \left( 1 - \frac{S(t)}{M} \right) - \lambda S(t), \quad S(0) = S_0,$$

$M$  – максимально возможный уровень насыщения рынка рекламируемым товаром,  $\eta$  – коэффициент отдачи от инвестиций в рекламу.

Ставится цель максимизации дисконтированной прибыли

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T e^{-rt} (p(t)S(t) - u(t)) dt \rightarrow \max.$$

Ограничения могут накладываться в виде максимальной величины рекламного потока:

$$u(t) \leq b \text{ или } u(t) \leq \alpha S(t),$$

а также в виде ограниченного рекламного бюджета  $B$  на планируемый период  $[0; T]$ :

$$\int_0^T u(t) dt \leq B.$$

Если обозначить долю рынка, охваченную продукцией фирмы за  $x(t) = \frac{S(t)}{M}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , то функционал и уравнение спроса можно модифицировать:

$$\dot{x}(t) = \tilde{\eta} u(t) (1 - x(t)) - \lambda x(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta}{M}, \quad x_0 = \frac{S_0}{M}, \quad \tilde{p}(t) = Mp(t).$$

Ряд исследователей расширили оригинальную модель Видаля-Вольфа, рассмотрев нелинейный вид зависимости динамики объема продаж относительно рекламных вложений. Х. Месак, Т. Эллис [54] при этом также предположили подвижность максимально возможного охвата рынка.

В исследованиях В. Махаяна и Е. Мюллера [57], а также Х. Месака [55] рассматривалась модель со степенной функцией рекламной отдачи

$f(u) = u^\delta$  вместо  $u$  и постоянным значением максимального объема продаж  $M$ .

С. Сетхи [63] предложил логарифмическую функцию отдачи от рекламы:  $f(u) = \ln u$ , однако не стал учитывать воздействие неохваченной доли рынка. Позже также была рассмотрена модель, согласно которой фирма регулирует как рекламные вложения, так и ценовую политику [62].

Также оригинальная модель была модифицирована исследователями для рассмотрения взаимного влияния нескольких участников рынка. Р. Мукуданом [58] предполагается, что две фирмы полностью насыщают рынок своей продукцией. В модели К. Дила [37] это условие не выполняется, совокупный выпуск не достигает максимально возможного спроса. Г. Литманн и В. Шмитендорф [53] включили в модель не только влияние собственной рекламы фирмы, но также рекламной деятельности ее конкурента. Г. Фейхтингер [39] предположил, что структура отдачи от рекламы одинакова для двух конкурирующих фирм, т.к. потребители мало различают качество их продукции и реагируют только на объем вложений в рекламу. Х. Хи, А. Кришнамурти, А. Празад и С. Сетхи [50] исследовали схему сотрудничества производителя и продавца розничной торговли, который конкурирует с другим независимым продавцом, реализующим взаимозаменяемый продукт. Их модель предполагает, что степень сотрудничества производителя в рамках рекламных кампаний продавца зависит от его инвестиций в рекламу. Х. Цзян и Ц. Ма [51] рассмотрели затухающий со временем эффект рекламных воздействий в совокупности с эффектом от других маркетинговых мероприятий в интернет-продажах на уровень спроса. При этом предполагается, что единовременные розыгрыши, акции, скидки, бонусные программы и т.д. мгновенно увеличивают объем продаж.

В классической модели Видаля-Вольфа и ее расширениях отдельно не рассматривается функция благожелательности. Эффект рекламных

воздействий заключается в их прямом влиянии на изменение уровня продаж. При этом текущий уровень продаж определяется согласно обыкновенному дифференциальному уравнению. Таким образом, здесь не рассматривается распределенное запаздывание потребительской реакции на воздействие рекламы, и предполагается, что изменение спроса происходит под влиянием текущих объемов рекламы и продаж. При этом модель Видаля-Вольфа имеет большее количество расширений, в которых рассматривается возможность нелинейного рекламного воздействия. Также в них, как и в классической модели, учитывается ограниченность потребительского рынка, не позволяющая фирмам бесконечно наращивать товарооборот. Деятельность нескольких участников рынка в рамках рассмотренных моделей представляется в виде дифференциальных игр, для которых исследователями найдены ситуации равновесия по Нэшу и Штакельбергу.

Также стоит отметить, что в своей работе П.В. Редди, С. Вразжек, Дж. Заккур [61] интегрируют переменную управления – качество – в модели Нерлова-Эрроу и Видаля-Вольфа, полагая, что решения по улучшению качества могут быть приняты только в некоторые экзогенно заданные моменты времени.

### **1.1.2.3 Модели, предложенные отечественными исследователями**

Помимо перечисленных моделей, необходимо упомянуть ряд отечественных исследователей, посвятивших свои работы разработке и анализу моделей рекламы для страховых компаний.

Д.Д. Ахмедова, А.Ф. Терпугов [3] предложили модель с учетом расходов на рекламу  $u(t)$ , когда они пропорциональны капиталу в текущий момент времени  $K(t)$ , т.е. отсутствует эффект последствия рекламы и она забывается сразу после окончания рекламной кампании. В [4] предполагается, что доля денег, выделяемых на рекламу, изменяется со временем.

В работе Е.В. Астафьевой и А.Ф. Терпугова [2] проанализирован эффект «надоедания» рекламы. Здесь обозначим функцию, характеризующую степень влияния рекламы на финансовый результат как  $v(t)$ , тогда изменение  $v(t)$  описывается соотношением:

$$\dot{v}(t) + k(t)v(t) = k_0 u(t),$$

где  $k(t)$  является показателем скорости снижения интереса к рекламе.

В [1] рассмотрены нелинейные случаи зависимости объема продаж от  $v(t)$  и функции  $v(t)$  от рекламных затрат.

В.М. Кац и К.И. Лившиц [16], [17] учитывали в моделях непрерывно распределенный лаг запаздывания:

$$v(t) = \int_0^t h(t - \tau) K(\tau) \alpha(\tau) d\tau,$$

где за единицу времени на рекламу расходуется часть капитала  $K(\tau)\alpha(\tau)$ .

При такой форме воздействия, а также в предположении о неизменности отчислений на рекламу со временем  $\alpha(\tau) = \alpha$ , было проанализировано влияние рекламных затрат на средний капитал страховой компании. Также была сформулирована задача оптимального управления рекламой для простейшего случая соотношения функций  $v(t)$  и  $K(t)$ :  $k\dot{v}(t) + v(t) = K(\tau)\alpha(\tau)$ . При этом предполагалось, что процесс изменения среднего капитала линейно зависим от функции влияния рекламы с запаздыванием  $\tau$ .

В каждой из этих работ решается задача оптимального распределения затрат на рекламу во времени. В качестве критерия оптимальности выступает прибыль в единицу времени или на отрезке планирования. Модель, рассмотренная в [2], предполагает, что степень рекламного влияния  $v$  в момент времени  $t$  зависит от накопленного воздействия рекламных затрат, влияющих в каждый прошлый момент времени с постоянной интенсивностью  $k_0$ , и прошлых значений функции  $v$ , влияющих с фиксированными интенсивностями, определяемыми функцией  $k$ . При этом

зависимость от временного лага в модели отсутствует. В [16] оптимизационная задача формулируется для модели, где интенсивности воздействий прошлых рекламных затрат на  $v$  и функции  $v$  с лагом  $\tau$  на текущий капитал постоянны.

Таким образом, на основании обзора существующих на сегодняшний день моделей рекламы, можно сделать следующие выводы:

1) помимо рекламы существует множество причин изменения спроса на продукцию фирмы. В упомянутых моделях помимо рекламы учитываются такие нерекламные факторы, как ценовая политика [43], [62], [28] качество товара [52], [61], деятельность других производителей и продавцов на рынке [33], [37-41], [44], [50], [53], [58], ограниченность наращивания товарооборота (модель Видала-Вольфа и расширения). Также в [15] была предложена модель с учетом сезонности спроса. Очевидно, что помимо перечисленного, на уровень продаж фирмы могут повлиять и другие, зависящие и независящие от самой фирмы, факторы. Учесть влияние на спрос каждого из них в рамках одной модели на практике невозможно. Функциональные связи между различными факторами и результатом хозяйственной деятельности фирмы не всегда однозначны. Возможно, для учета множества условий, влияющих на потребительский спрос, в процессе разработки рекламной стратегии следует учитывать универсальную составляющую, отвечающую за их опосредованное совокупное влияние.

Если предположить, что нерекламные факторы не меняются достаточно быстро, то такой составляющей может быть выбрано совокупное влияние предыдущих продаж, которые также могут иметь распределенное воздействие на текущие продажи. При этом интенсивность воздействия предыдущих продаж меняется со временем. В ряде рассмотренных моделей, где учитывается распределенное влияние предыдущих продаж (оригинальная модель Видала-Вольфа и расширения, работы отечественных исследователей), предполагается, что их интенсивность воздействия не зависит от близости к текущему моменту времени;

2) интенсивность влияния рекламных затрат, как правило, непостоянна. Воздействие прошлого рекламного сообщения на потребительский спрос скорее всего будет меняться в зависимости от того, сколько времени прошло после запуска этого рекламного сообщения до текущего момента времени. В [60] был рассмотрен распределенный эффект с последствием только для рекламного воздействия, при этом длина интервала воздействия рассматривается бесконечной. В [16] также был рассмотрен случай непостоянной интенсивности только рекламного воздействия, но оптимизационная задача формулировалась для упрощенной линейной модели;

3) в рассмотренных дискретных и динамических моделях, учитывающих распределенное воздействие рекламы, предполагается, что данное воздействие распределено вплоть до текущего момента времени, либо с самого начала процесса наблюдения или запуска рекламной кампании. Согласно анализу деятельности ряда фирм современного российского рынка [24], был сделан вывод о том, что длительность использования продукта или услуги может оказывать сильное влияние на быстроту реакции потребителей на рекламу. При разработке моделей для блага краткосрочного использования, особенно для товаров первой необходимости, нет смысла рассматривать интервалы длительного воздействия факторов на спрос. В этом случае отдача в текущий момент времени от достаточно давнего рекламного воздействия, скорее всего, будет носить случайный характер, как и отдача от текущей рекламы, поэтому учет влияния факторов при таких лагах запаздывания будет противоречить экономическому смыслу;

4) часто фирмы для рекламирования своего товара привлекают несколько медиаканалов. Модель, учитывающая рекламные инвестиции в различные каналы рассмотрена в [32] без учета распределенного воздействия и для случая линейной зависимости благожелательности от накопленных рекламных воздействий каждого медиаканала. Однако влияние разных видов рекламы может быть по-разному распределено во времени, что также стоит



учесть при разработке стратегии для фирмы, желающей максимально выгодно вложиться в продвижение продукта.

В предлагаемых далее моделях предлагается учесть эти замечания.

## **1.2 Постановка задач оптимального управления**

### **1.2.1 Модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания от воздействий рекламы и предыдущих продаж**

Настоящая модель оптимизации рекламных затрат на некотором планируемом периоде может быть предложена фирме, имеющей достаточный опыт продаж на рынке, располагающая статистическими данными по продажам и рекламным затратам для анализа влияния рекламы и нерекламных факторов на потребительский спрос.

Обозначим через  $y(t)$  выручку фирмы, которая является денежным выражением величины спроса на рекламируемый товар и через  $u(t)$  – величину рекламных затрат в момент времени  $t$ . Пусть задан период планирования  $t \in [t_0; T]$ . Не ограничивая общности, считаем,  $t_0 = 0$ .

В дальнейшем будем предполагать, что

- экономическая ситуация на анализируемом рынке стабильна,
- только возможности фирмы ограничивают уровень спроса,
- влияние конкурентов на периоде планирования не имеет существенных изменений.

На практике, как правило, фирма заинтересована в анализе рекламных и нерекламных воздействий на уровень продаж, который начался с какого-то конкретного прошлого момента времени, например, с момента запуска рекламной кампании. Обозначим за  $v(t)$  – функцию накопленного рекламного воздействия к моменту  $t$ , за  $w(t)$  – функцию накопленного воздействия

предыдущих продаж к моменту  $t$ . Запишем следующие соотношения, определяющие накопленные воздействия рекламы и предыдущих продаж:

$$v(t) = \int_0^{t+\lambda} G_u(\tau) u(t-\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

$$w(t) = \int_0^{t+\lambda} G_y(\tau) y(t-\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

где  $G_u(\tau)$ ,  $G_y(\tau)$  – функции, определяющие весовой характер (интенсивность) воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж соответственно,  $\tau$  – лаг запаздывания реакции потребителей на рекламные и нерекламные воздействия,  $\lambda$  – максимальное учитываемое запаздывание в момент  $t_0$ .

Также здесь будем полагать, что известны фактические данные по рекламе и выручке до начала планируемого периода  $\tilde{u}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$ :  $\tilde{u}(t)$  – кусочно-непрерывная функция,  $\tilde{y}(t)$  – непрерывная функция при  $t < 0$ , т.е.  $u(t) = \tilde{u}(t)$  и  $y(t) = \tilde{y}(t)$ , для всех  $t < 0$ .

Выручка в момент времени  $t$  определяется соотношением:

$$y(t) = f(v(t), w(t)). \quad (1.3)$$

Анализ вида функций  $f(v, w)$ ,  $G_u(\tau)$ ,  $G_y(\tau)$  происходит на уровне эконометрического анализа проблемы, при этом учитывается вид продукции, производимой фирмой (или вид предоставляемых ею услуг), воздействия конкурентов, ограниченность спроса, ситуацию на рынке в целом и т. д.

Введем несколько предположений относительно этих функций и выручки  $f(v, w)$ :

1) Пока рынок не насытился продукцией фирмы, и реклама позитивно воспринимается потребителем, функция выручки монотонно возрастает по  $v$  и  $w$ . Однако отдача от рекламы убывает со временем, т.е. рост вложений в рекламу сопровождается замедлением роста функции  $f(v, w)$ , такое качество соответствует ее вогнутости по  $v$ . Также вследствие перенасыщаемости

рынка и (или) производственных ограничений убывает отдача от воздействия предыдущих продаж, что дает основание требовать вогнутость  $f(v, w)$  по  $w$ .

2) В ретроспективе по мере увеличения лага запаздывания до определенного  $\tau_u^*$  реклама вызывает увеличение спроса, после чего воздействие рекламы начинает ослабевать, пока вовсе не исчезнет. Тогда функция  $G_u(\tau)$  – неотрицательная, имеет один локальный, в то же время глобальный, максимум. При этом в точке максимума в виде выручки определяется наибольшее воздействие рекламных расходов. Таким образом, для непрерывной функции  $G_u(\tau)$  выполняются условия:

$$G_u(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [0; +\infty); \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_u(\tau) = 0,$$

$$G_u'(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [0; \tau_u^*); \quad G_u'(\tau) \leq 0, \quad \tau \in [\tau_u^*; +\infty).$$

Типичным графиком функции  $G_u(\tau)$  может быть следующий:

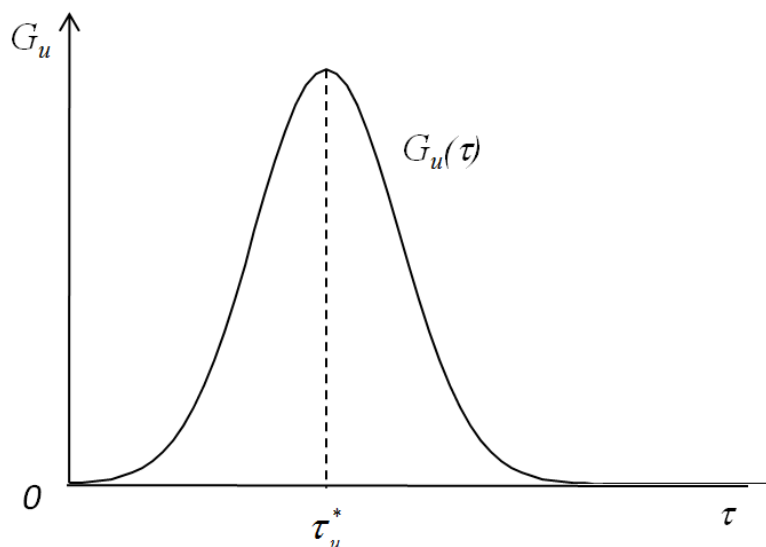


Рисунок 1.1 График функции  $G_u(\tau)$

Конечно, при наблюдении за отдачей в непрерывном режиме, всегда есть возможность проследить рост отдачи после запуска рекламной кампании. Однако при коротком интервале такого роста относительно периодичности анализируемой статистической отчетности это сделать

невозможно. В этом случае допускается считать, что эффект рекламного воздействия почти мгновенный.

3) При положительном опыте использования товара покупатели могут повторить покупки и посоветовать его другим потенциальным покупателям. В этом случае предыдущие покупки стимулируют текущий спрос и функция  $G_y(\tau)$  возрастает. Однако совокупный потребительский опыт предыдущих покупок постепенно забывается, уступая место текущему впечатлению от товара. Поэтому функция  $G_y(\tau)$  обладает такими же свойствами:

$$G_y(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [0; +\infty); \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_y(\tau) = 0,$$

$$G_y'(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [0; \tau_y^*); \quad G_y'(\tau) \leq 0, \quad \tau \in [\tau_y^*; +\infty).$$

Здесь  $\tau_y^*$  - точка максимальной отдачи от эффекта бренда.

Предполагаемый график функции  $G_y(\tau)$  аналогичен графику функции  $G_u(\tau)$ .

Почти мгновенная отдача от воздействия предыдущих продаж здесь так же возможна.

Будем предполагать, что свойства функций  $f(v, w)$ ,  $G_u(\tau)$ ,  $G_y(\tau)$  в следующих рассматриваемых моделях сохраняются.

При планировании рекламных инвестиций всегда выделяется фиксированный бюджет. Фирмы по-разному подходят к определению рекламного бюджета. Например, можно ограничить поток расходов на рекламу:

$$0 \leq u(t) \leq b, \quad t \in [0; T],$$

или совокупный бюджет, выделяемый на весь планируемый период:

$$0 \leq \int_0^T u(t) dt \leq B.$$

В дальнейшем будем полагать, что выбрана первая стратегия. Введем множество  $U_b$ , ограничивающее поток инвестиций в рекламу и множество рекламных стратегий  $U$ :

$$\begin{aligned} U_b &= \{u \in R : 0 \leq u \leq b\}, \\ U &= \{u(\cdot) : u(t) \in U_b, \quad t \in [0; T]\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Предположим, что совокупные издержки компании состоят из рекламных затрат и затрат  $c$ , связанных с производством товара. В этом случае, текущую прибыль  $\pi(t)$  в момент времени  $t$  можно определить соотношением:

$$\pi(y(t), u(t)) = y(t) - c(y(t), t) - u(t),$$

где  $c(y(t), t) = c_1(y(t)) + c_2(t)$ ,  $c(y(t), t)$  – совокупные издержки за исключением рекламных затрат,  $c_1(y)$  – переменные издержки, зависящие от объема произведенного товара (предоставленных услуг),  $c_2$  – постоянные издержки, не зависящие от него.

Накопленную прибыль за планируемый период  $[0; T]$  можно определить:

$$\Pi(T) = \int_0^T \pi(y(t), u(t)) dt. \quad (1.5)$$

Отметим, что функция  $c(y, t)$  может оцениваться как эконометрически, так и на основе некоторых предположений. В частности, переменные издержки логично рассматривать в прямой зависимости от выпуска (при этом если исходить из условия равновесия на рынке, то переменные издержки находятся в прямой зависимости и от продаж) с постоянным коэффициентом  $\mu$ , где  $\mu$  – норма издержек на единицу выпуска:  $c_1(y) = \mu y$ .

В этом случае прибыль в момент времени  $t$  определяется:

$$\pi(y(t), u(t)) = (1 - \mu)f(v(t), w(t)) - u(t) - c_2(t).$$

Величина постоянных издержек не зависит от управляемой переменной  $u$ , поэтому максимизация совокупной прибыли (1.5) эквивалентна поиску максимального значения (1.6) при  $t = T$ :

$$\bar{\Pi}(t) = \int_0^t ((1 - \mu)f(v(s), w(s)) - u(s)) ds. \quad (1.6)$$

$$\bar{P}(T) \rightarrow \max_{u \in U} . \quad (1.7)$$

Следовательно, задача оптимального управление рекламными расходами для случая фиксированного момента начала их воздействия задается системой (1.1), (1.2), (1.4), (1.6), (1.7).

Введем кусочно-непрерывные функции  $\phi_u(t)$  и  $\phi_y(t)$  такие, что:

$$\phi_u(t) = \int_{-\lambda}^0 G_u(t-s) \tilde{u}(s) ds, \quad (1.8)$$

$$\phi_y(t) = \int_{-\lambda}^0 G_y(t-s) \tilde{y}(s) ds. \quad (1.9)$$

Следовательно (1.1) и (1.2) могут быть преобразованы:

$$v(t) = \phi_u(t) + \int_0^t G_u(t-s) u(s) ds, \quad (1.10)$$

$$w(t) = \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s) f(v(s), w(s)) ds. \quad (1.11)$$

Таким образом, система (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11) представляет задачу оптимального управления рекламными расходами с ограничением в виде интегрального уравнения Вольтерра (1.11).

### **1.2.2 Модель управления рекламными расходами фирмы с распределенным лагом запаздывания отдачи от воздействия рекламы и точечным воздействием предыдущих продаж**

Такого рода модель может быть применима для фирмы, находящейся на стадии запуска нового продукта (особенно с длительным периодом использования), активно проводящая рекламную кампанию для его продвижения, но пока еще не имеющая внушительного опыта по продажам данного продукта. Соответственно, фирма не имеет возможности проанализировать распределенный эффект воздействия предыдущих продаж на потребителя из-за отсутствия данных. Однако очевидно, что и в данной ситуации существует множество нерекламных факторов, влияющих на спрос,

воздействие которых необходимо учесть. Если предположить, что нерекламные факторы не меняются достаточно быстро, то в качестве их совокупного опосредованного влияния может выступить некоторая функция от предыдущих продаж.

В этом случае запаздывающее воздействие предыдущих продаж точечное, а не распределенное во времени:

$$w(t) = g(y(t-1)). \quad (1.12)$$

Представим  $w(t)$  в виде интегрального уравнения Вольтерра. При этом  $v(t)$  сохранит представление (1.10),  $\bar{\Pi}(t)$  - представление (1.6).

Определим функцию  $\phi_y(t)$  в виде:

$$\phi_y(t) = \begin{cases} g(\tilde{y}(t-1)), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \geq 1, \end{cases}$$

где  $g(\tilde{y})$  – непрерывна по  $\tilde{y}$ , при этом  $g(y(0)) = g(\tilde{y}(0))$ .

Также введем функцию:

$$\bar{\delta}(s-t+1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ \delta(s-t+1), & t \geq 1, \end{cases}$$

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака.

Тогда  $w(t)$  определяется уравнением:

$$w(t) = \phi_y(t) + \int_0^t \bar{\delta}(s-t+1)g(f(v(s), w(s)))ds. \quad (1.13)$$

В этом случае оптимизационная задача представляется системой (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.13).

### 1.2.3 Модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными на постоянном интервале лагами запаздывания от воздействий рекламы нескольких видов и предыдущих продаж

Представим, что фирма может диверсифицировать рекламные расходы между  $n \geq 1$  медиаканалами или видами рекламы. Пусть  $u_i(t)$  – величина рекламных затрат в  $i$ -й медиаканал,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Определение величин  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  представляет собой управленческое решение фирмы. В этом случае  $u(t)$  можно считать управляющей вектор-функцией  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ ,  $u(t) \in R_+^n$ .

Рассмотрим модель, подходящую для оптимизации рекламных расходов фирмы, реализующей товар (услуги) с недлительным (краткосрочным) сроком использования. В этом случае можно предположить, что будет иметь случайный характер зависимость текущего объема продаж от давнего и начального рекламных воздействий, т.к. учет этих интервалов запаздывания в модели противоречит экономическому смыслу.

Тогда накопленное воздействие рекламных затрат к моменту времени  $t$  можно сформулировать в виде:

$$v(t) = \begin{pmatrix} \int_{\tau_{1u_1}}^{\tau_{2u_1}} G_{u_1}(\tau) a_1(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \dots, u_n(t-\tau)) d\tau \\ \int_{\tau_{1u_2}}^{\tau_{2u_2}} G_{u_2}(\tau) a_2(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \dots, u_n(t-\tau)) d\tau \\ \dots \\ \int_{\tau_{1u_n}}^{\tau_{2u_n}} G_{u_n}(\tau) a_n(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \dots, u_n(t-\tau)) d\tau \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

накопленное воздействие предыдущих продаж:



$$w(t) = \int_{\tau_{1y}}^{\tau_{2y}} G_y(\tau) y(t-\tau) d\tau. \quad (1.15)$$

где  $[\tau_{1u_i}; \tau_{2u_i}]$  – интервал лагов запаздывания, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие от использования  $i$ -го медиаканала,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $[\tau_{1y}; \tau_{2y}]$  – интервал лагов запаздывания, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж.

В общем случае величины  $\tau_{1u_i}$ ,  $\tau_{2u_i}$ ,  $\tau_{1y}$ ,  $\tau_{2y}$  являются функциями времени  $t$ , при этом  $0 \leq \tau_{1y} < \tau_{2y}$ ,  $0 \leq \tau_{1u_i} < \tau_{2u_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Если аудитория  $i$ -го медиаканала практически не получает воздействие от других медиаканалов, то функция  $a_i(u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)) \equiv a_i(u_i(s))$ , а в простейшем случае можно полагать  $a_i(u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)) \equiv u_i(s)$ .

Свойства функций  $G_{u_i}(\tau)$  и  $G_y(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , аналогичны свойствам в рассмотренных выше одноканальных моделях.

Что касается свойств  $a_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , предполагается, что они непрерывны по всем аргументам,  $a_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \geq 0$  для любых  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . В точке  $u_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и некоторой окрестности нулевых рекламных затрат  $O_{\varepsilon_1} = \{u \in R_+^n : \|u\| < \varepsilon_1\}$  отдача от рекламы не дает эффекта, что дает основание сделать предположение:  $a_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ ,  $u \in O_{\varepsilon_1}$ .

Начиная с некоторого суммарного воздействия, аудитория начинает реагировать на рекламу позитивно при соответствующих рекламных затратах, что можно выразить в следующем виде: существует  $O_{\varepsilon_2} = \{u \in R_+^n : \|u\| < \varepsilon_2\}$ , для любых  $u^1, u^2 \in O_{\varepsilon_2}$ ,  $u^1 < u^2$ ,  $a_i(u^1) \leq a_i(u^2)$ . При дальнейшем увеличении рекламы положительный эффект может смениться на отрицательный, т.е. рост рекламного воздействия будет приводить к уменьшению отдачи от нее.

Анализ вида функций  $a_i(u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , является проблемой эконометрического анализа, учитывающей возможные воздействия одних медиаканалов на эффективность других.

Как и в предыдущих моделях, будем предполагать, что известны фактические данные по рекламе до начала планируемого периода  $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_n(t))$  и выручке  $\tilde{y}(t)$ .

Пусть поток рекламного бюджета, выделяемого на использование  $n$  медиаканалов, ограничен некоторой суммой  $B$ . Введем множество  $U_B$ , ограничивающее поток инвестиций в рекламу, и множество рекламных стратегий  $U$ :

$$U_B = \left\{ u \in R^n : \sum_{i=1}^n u_i \leq B, \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (1.16)$$

$$U = \{ u(\cdot) : u(t) \in U_B, \quad t \in [0; T] \}.$$

В этом случае  $\bar{\Pi}(t)$  имеет вид:

$$\bar{\Pi}(t) = \int_0^t \left( (1 - \mu) f(v(s), w(s)) - \sum_{i=1}^n u_i(s) \right) ds. \quad (1.17)$$

Преобразуем ограничения (1.14) и (1.15).

Введем кусочно-непрерывные функции  $\bar{G}_{u_i}(t-s)$ ,  $\bar{G}_y(t-s)$ ,  $\phi_{u_i}(t)$ ,  $\phi_y(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $t-s = \tau$ , такие, что:

$$\bar{G}_{u_i}(t-s) = \begin{cases} G_{u_i}(t-s), & \tau_{1u_i} \leq t-s \leq \tau_{2u_i}, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\bar{G}_y(t-s) = \begin{cases} G_y(t-s), & \tau_{1y} \leq t-s \leq \tau_{2y}, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\phi_{u_i}(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau_{2u_i}}^{t-\tau_{1u_i}} G_{u_i}(t-s) a_i(\tilde{u}(s)) ds, & 0 \leq t < \tau_{1u_i}, \\ \int_{t-\tau_{2u_i}}^0 G_{u_i}(t-s) a_i(\tilde{u}(s)) ds, & \tau_{1u_i} \leq t < \tau_{2u_i}, \\ 0, & t \geq \tau_{2u_i}; \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\phi_y(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau_{2y}}^{t-\tau_{1y}} G_y(t-s) \tilde{y}(s) ds, & 0 \leq t < \tau_{1y}, \\ \int_{t-\tau_{2y}}^0 G_y(t-s) \tilde{y}(s) ds, & \tau_{1y} \leq t < \tau_{2y}, \\ 0, & \tau_{2y} \geq t. \end{cases} \quad (1.21)$$

Тогда накопленные воздействия рекламных затрат (1.14) и предыдущих продаж (1.15) можно представить:

$$v(t) = \begin{pmatrix} \phi_{u_1}(t) + \int_0^t \overline{G}_{u_1}(t-s) a_1(u(s)) ds \\ \phi_{u_2}(t) + \int_0^t \overline{G}_{u_2}(t-s) a_2(u(s)) ds \\ \dots \\ \phi_{u_n}(t) + \int_0^t \overline{G}_{u_n}(t-s) a_n(u(s)) ds \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

$$w(t) = \phi_y(t) + \int_0^t \overline{G}_y(t-s) f(v(s), w(s)) ds. \quad (1.23)$$

Таким образом, задача оптимального распределения рекламных расходов представляет из себя систему из ограничений (1.7), (1.16), (1.17), (1.22), (1.23).

## Выводы по главе 1

В 1 главе проведен обзор математических моделей рекламы, относительно которых был высказан ряд замечаний.

Предложенные модели предлагают учитывать ряд особенностей, появляющихся в процессе разработки рекламной стратегии, которые до сегодняшнего дня не рассматривались исследователями:

- 1) непрерывно распределенные во времени воздействия как рекламных, так и нерекламных факторов на уровень продаж фирмы;
- 2) зависимость интенсивности воздействия рекламных и нерекламных факторов от дальности от текущего момента времени;
- 3) длительности использования продвигаемого продукта в моделях с распределенными воздействиями рекламных и нерекламных факторов;
- 4) возможность продвижения товара с помощью нескольких медиканалов в моделях с распределенными воздействиями рекламных и нерекламных факторов.

В частности были предложены следующие модели распределения рекламных расходов, в рамках которых были поставлены задачи оптимального управления с ограничениями в виде интегральных уравнений Вольтерра:

- модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж;
- модель управления рекламными расходами фирмы с распределенным лагом запаздывания отдачи от воздействий рекламы и точечным воздействием предыдущих продаж;
- модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы нескольких видов и предыдущих продаж.

## ГЛАВА 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В настоящей главе сформулированы и доказаны теоремы существования решений задач, поставленных в рамках моделей, предложенных в главе 1, найдены необходимые условия оптимальности рекламных стратегий.

### 2.1 Анализ модели управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж

#### 2.1.1 Теоремы существования решения

Рассмотрим вопрос существования решения задачи (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11).

Так как  $G_u(\tau)$  - непрерывна, то и  $v(t)$  непрерывна на отрезке  $[0; T]$ . Следовательно, с учетом (1.4), (1.10) можно утверждать, что существует такое значение  $b_1 > 0$ , что:

$$0 \leq \phi_u(t) + \int_0^t G_u(t-s)u(s)ds \leq \max_{0 \leq t \leq T} \left( \phi_u(t) + \int_0^t G_u(t-s)b ds \right) \leq b_1.$$

То есть накопленное к моменту  $t$  воздействие рекламных затрат  $0 \leq v(t) \leq b_1$  для любой рекламной стратегии (1.4).

**Теорема 2.1** Пусть функции  $G_u(\tau) \in C([0; t + \lambda])$ ,  $G_y(\tau) \in C([0; t + \lambda])$ , функция  $f(v, w)$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной  $w$  для всех  $w$ , тогда для любой кусочно-непрерывной функции  $u(\cdot) \in U$  существует непрерывная единственная на этом отрезке функция  $w(t)$ , удовлетворяющая (1.11).

*Доказательство.* В [18] приведена схема доказательства существования решение линейного интегрального уравнения Вольтерра, здесь будем опираться на эту схему для обоснования решения интегрального уравнения (1.11). По условию функция  $f(v, w)$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $w$ , т.е. существует константа  $L$ , для которой выполняется неравенство  $|f(v, w_1) - f(v, w_2)| \leq L|w_1 - w_2|$ ,  $\forall w_1, w_2$ .

Введем оператор  $A$ :

$$Aw(t) \equiv \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s)f(v(s), w(s))ds.$$

Очевидно, существует конечное число  $M = \max_{0 \leq \tau \leq t+\lambda} G_y(\tau)$ . С учетом введенных предположений для любых непрерывных функций  $w_1, w_2$  верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |Aw_1(t) - Aw_2(t)| &= \left| \int_0^t G_y(t-s)(f(v(s), w_1(s)) - f(v(s), w_2(s)))ds \right| \leq \\ &\leq MLt \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|. \end{aligned}$$

Обозначим через  $A^k$   $k$ -кратное последовательное применение оператора  $A$ , т.е.  $A^2 y \equiv A(Aw)$ ,  $A^k w \equiv A(A^{k-1} w)$ . В этом случае:

$$\begin{aligned} |A^2 w_1(t) - A^2 w_2(t)| &= \left| \int_0^t G_y(t-s)(f(v(s), Aw_1(s)) - f(v(s), Aw_2(s)))ds \right| \leq \\ &\leq ML \int_0^t |Aw_1(s) - Aw_2(s)| ds \leq \frac{(MLt)^2}{2} \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать:

$$|A^k w_1(t) - A^k w_2(t)| \leq \frac{(MLt)^k}{k!} \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|.$$

Используя метрику в пространстве непрерывных функций

$$\rho(w_1, w_2) = \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|,$$

получаем соотношение:

$$\rho(A^k w_1, A^k w_2) \leq \frac{(MLt)^k}{k!} \rho(w_1, w_2).$$

Очевидно, что существует  $k$ :  $\frac{(MLt)^k}{k!} < 1$ . Это означает, что оператор  $A^k$  является сжимающим, следовательно, решение  $w(t)$  существует и единственно на отрезке  $[0; T]$ . При этом  $w(t)$  непрерывна на этом отрезке.  $\square$

Теорема 2.1 дает условия существования глобального решения уравнения (1.11).

**Замечание 2.1** Если функция  $f(v, w)$  неотрицательна, вогнута и монотонно не убывает по переменной  $w$ , существует и конечна частная производная  $f'_w$  при  $w = 0$ , тогда функция  $f(v, w)$  удовлетворяет условию Липшица по  $w$  для любого  $w$ . В этом случае существует неотрицательное решение уравнения (1.11) на отрезке  $[0; T]$ .

Перейдем к вопросу существования решения оптимизационной проблемы: (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11).

Значение совокупной прибыли  $\Pi(T)$  является функционалом от  $u(\cdot)$ . Введем  $J(u(\cdot)) \equiv \bar{\Pi}(T)$ . Можно сформулировать теорему существования решения оптимизационной динамической проблемы.

**Теорема 2.2** Пусть выполнены предположения теоремы 2.1, функция  $f(v, w)$  монотонно не убывает по  $v$ , тогда имеет место одна из следующих альтернатив:

1. Существует допустимое управление  $u^*(\cdot) \in U$ , соответствующие данному управлению решения уравнений (1.6), (1.10), (1.11)  $\{v^*(t), w^*(t), \bar{P}^*(t), 0 \leq t \leq T\}$  и число  $J(u^*(\cdot)) \geq J(u(\cdot))$  для любого  $u(\cdot) \in U$ .

2. Существует последовательность допустимых управляющих функций  $u^s(\cdot) \in U$  и такое число  $\bar{J}$ :  $J(u^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}$  при  $s \rightarrow \infty$ , что  $J(u(\cdot)) \leq \bar{J}$  для любого  $u(\cdot) \in U$ .

*Доказательство.* Проведем оценку уравнения (1.11).

$$\begin{aligned}
w(t) &= \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s)f(v(s), w(s))ds \leq \\
&\leq \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s)f(b_1, w(s))ds = w_{b_1}(t).
\end{aligned}$$

Здесь  $w_{b_1}(t)$  – решение уравнения (1.11) при  $v(s) \equiv b_1$ .

Следовательно, для любой рекламной стратегии (1.4) функция накопленного воздействия предыдущих продаж  $w(t)$  ограничена некоторым значением  $K$ :  $w(t) \leq K = \max_{0 \leq t \leq T} w_{b_1}(t)$ .

Покажем ограниченность функционала  $\bar{\Pi}(T)$  в оптимизационной задаче:

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}(T) &= \int_0^T (1 - \mu)(f(v(s), w(s)) - u(s))ds \leq \\
&\leq \int_0^T f(v(s), w(s))ds \leq T \max_{(v,y) \in D} f(v, w),
\end{aligned}$$

где  $D = \{(v, w) : 0 \leq v \leq b_1, 0 \leq w \leq K\}$ .

Таким образом, множество значений функционала  $J(u(\cdot))$  в задаче (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11) ограничено, обозначим это множество как  $L$ .

Пусть  $\bar{J} = \sup L$ . Очевидно, что  $\bar{J}$  существует и конечно.

Если  $\bar{J} \in L$ , то выполняется первая альтернатива теоремы, в противном случае вторая альтернатива [26].  $\square$

**Замечание 2.2** Если выполняется вторая альтернатива теоремы 2.2, то существует приближенное относительно значения целевого функционала решение в задаче (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11). Действительно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует управляющая функция  $u_\varepsilon(\cdot) \in U$  и соответствующие данному управлению решения (1.6), (1.10), (1.11) такие, что  $\bar{J} - J(u_\varepsilon(\cdot)) < \varepsilon$ .



## 2.1.2 Необходимые условия оптимальности

Рассмотрим необходимые условия оптимальности рекламной стратегии в задаче (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11).

Классический принцип максимума применяется для решения задач оптимального управления с фазовой функцией в виде обыкновенного дифференциального уравнения. Задачи оптимального управления с интегральными уравнениями были рассмотрены также различными авторами [13], [29], [30], [36], [42]. На основе принципа максимума сформулируем необходимые условия для построения оптимальной рекламной стратегии для задачи (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11). Для этого преобразуем вид этой задачи.

Введем вектор-функции  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  и  $F(t, s, x(s), u(s))$ .

При этом

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v(t) - \phi_u(t), \\ x_2(t) &= w(t) - \phi_y(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$x_3(t) = \bar{P}(t),$$

$$F(t, s, x(s), u(s)) = \begin{pmatrix} G_u(t-s)u(s)ds \\ G_y(t-s)f(\phi_u(s) + x_1(s), \phi_y(s) + x_2(s)) \\ (1-\mu)(f(\phi_u(s) + x_1(s), \phi_y(s) + x_2(s)) - u(s)) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$x(t) = \int_0^t F(t, s, x(s), u(s))ds, \quad (2.3)$$

$$x_3(T) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in U}. \quad (2.4)$$

Тогда исходная задача (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11) эквивалентна задаче (1.4), (2.1) (2.2), (2.3), (2.4).

**Теорема 2.3** Пусть  $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$  – оптимальный процесс для задачи (1.4), (2.1) (2.2), (2.3), (2.4), тогда найдутся такие функции  $h(s)$ ,  $p_1(s)$  и  $p_2(s)$ :

$$h(s) = p_1(s)G_u(0) - 1 + \int_s^T \left( p_1(t) \frac{\partial G_u(t, s)}{\partial t} \right) dt, \quad (2.5)$$

$$\dot{p}_1(s) = -\frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left( 1 - \mu + p_2(t)G_y(0) + \int_s^T \left( p_2(t) \frac{\partial G_y(t, s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad (2.6)$$

$$p_1(T) = 0,$$

$$\dot{p}_2(s) = -\frac{\partial f(v, w)}{\partial w} \left( 1 - \mu + p_2(t)G_y(0) + \int_s^T \left( p_2(t) \frac{\partial G_y(t, s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad (2.7)$$

$$p_2(T) = 0,$$

что оптимальное распределение рекламных расходов будет иметь вид:

$$u(s) = \begin{cases} b, & h(s) > 0, \\ 0, & h(s) < 0, \\ \bar{u}, & h(s) = 0, \quad 0 \leq \bar{u} \leq b. \end{cases} \quad (2.8)$$

*Доказательство:* Введем модифицированную функцию Гамильтона-Понтрягина [13]:

$$H(s, x, u, p) = p(s)F(s, s, x, u) + \int_s^T p(t) \frac{\partial F(t, s, x, u)}{\partial t} dt, \quad (2.9)$$

где  $p(s)$  – вектор сопряженных переменных:

$$\frac{dp_i(s)}{ds} = -\frac{\partial H(s, x, u)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Также введем терминальную функцию Лагранжа:

$$L(x(0), x(T)) = \sum_{k=1}^3 \beta_k x_k(0) - \beta_4 x_3(T). \quad (2.11)$$

Краевые условия для сопряженных переменных определяются из соотношений:

$$p_i(0) = \frac{\partial L(x(0), x(T))}{\partial x_i(0)}, \quad p_i(T) = -\frac{\partial L(x(0), x(T))}{\partial x_i(T)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

соответственно

$$\begin{aligned} p_i(0) &= \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ p_1(T) &= p_2(T) = 0, \quad p_3(T) = \beta_4. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если  $\beta_4 = 0$ , то решение однородной системы интегро-дифференциальных уравнений (2.10) в точке  $T$  равно тривиальному вектору, что влечет тривиальность решения системы (2.10), следовательно, и тривиальность чисел  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ . Таким образом,  $\beta_4$  можно положить равным любому положительному числу. Положим  $\beta_4 = 1$ .

Принимая во внимание (2.2), получим следующее представление функции  $H$ :

$$\begin{aligned} H(s, x, u, p) = & p_1(s)G_u(0)u + p_2(s)G_y(0)f(\phi_u + x_1, \phi_y + x_2) + \\ & + p_3(s)(1 - \mu)f(\phi_u + x_1, \phi_y + x_2) - u + \\ & + \int_s^T \left( p_1(t) \frac{\partial G_u(t-s)}{\partial t} u + p_2(t) \frac{\partial G_y(t-s)}{\partial t} f(\phi_u + x_1, \phi_y + x_2) \right) dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Так как,  $\frac{dp_3(s)}{ds} = 0$ ,  $p_3(T) = 1$ , то  $p_3(s) \equiv 1$  при  $s \in [0; T]$ .

Отметим, что функция Гамильтона-Понтрягина (2.13) является линейной по управлению  $u$ , тогда максимум функции достигается на границе ограничений управления, и имеет смысл рассматривать множитель при переменной  $u$ , который можно назвать функцией переключения управления. Обозначим эту функцию за  $h(s)$ . Тогда  $h(s)$  определяет релейный характер управления, и на основе знака этой функции можно рассчитать оптимальные вложения в рекламу. Легко увидеть, что вид функции  $h(s)$  будет определяться соотношением (2.5).

В этом случае оптимальное управление находится из условия (2.8), а сопряженные функции  $p_1(s)$  и  $p_2(s)$  – в соответствии с (2.6) и (2.7).  $\square$

**Замечание 2.3** Отдельный интерес представляет случай, когда функция  $f(v, w)$  линейна по переменным  $v$  и  $w$ , т.е.  $f(v, w) = \alpha_1 v + \alpha_2 w$ . Тогда (2.6), (2.7) не зависят от управления, и сопряженные переменные для оптимальной стратегии могут быть найдены непосредственно из системы:

$$\dot{p}_1(s) = -\alpha_1 \left( 1 - \mu + p_2(s)G_y(0) + \int_s^T p_2(t) \frac{\partial G_y(t-s)}{\partial t} dt \right), \quad p_1(T) = 0,$$

$$\dot{p}_2(s) = -\alpha_2 \left( 1 - \mu + p_2(s)G_y(0) + \int_s^T p_2(t) \frac{\partial G_y(t-s)}{\partial t} dt \right), \quad p_2(T) = 0.$$

Отметим, что система сопряженных функций (2.6), (2.7) в общем случае не имеет аналитического решения, поэтому здесь требуется применение численных методов решения интегро-дифференциальных уравнений.

## 2.2 Анализ модели управления рекламными расходами фирмы с распределенным лагом запаздывания отдачи от воздействия рекламы и точечным воздействием предыдущих продаж

### 2.2.1 Теоремы существования решения

Рассмотрим проблему существования решения задачи (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.13).

**Теорема 2.4** Пусть  $u(t)$  – кусочно-непрерывна справа на интервале  $[0; T]$ ,  $G_u(\tau) \in C([0; t + \lambda])$ , тогда функция точечного воздействия предыдущих продаж  $w(t)$  ограничена на  $[0; T]$ .

*Доказательство.* Непрерывность и ограниченность функции  $v(t)$  утверждается исходя из выводов, полученных в параграфе 2.1.1, т.е.  $0 \leq v(t) \leq b_1$  для всех рекламных стратегий (1.4).

Рассмотрим уравнение (1.13). Учитывая (1.12), для  $0 \leq t < 1$   $w(t)$  определяется как  $g(\tilde{y}(t-1))$ , следовательно  $w(t)$  непрерывна на  $t \in [0; 1)$  в соответствии со свойствами функции  $\tilde{y}(t-1)$ .

При этом  $g(y(0)) = g(\tilde{y}(0))$ . Тогда функция  $f(v(t), w(t))$  непрерывна и на  $0 \leq t \leq 1$ .

Аналогично,  $f(v(t), w(t))$  непрерывна на  $1 < t \leq 2$  в силу непрерывности  $v(t)$  и  $g(f(v(t), w(t)))$  и т.д.

Таким образом, для любой рекламной стратегии (1.4) функция воздействия предыдущих продаж  $w(t)$  является непрерывной функцией на всем периоде планирования. Следовательно, найдется такое число  $K$  :

$$w(t) \leq K = \max_{0 \leq t \leq T} w(t),$$

т.е. функция  $w(t)$  ограничена на отрезке планирования  $[0; T]$ .  $\square$

Введем множество значений функционала  $J(u(\cdot)) \equiv \bar{J}(T)$ .

**Теорема 2.5** Пусть выполнены предположения теоремы 2.4, функция  $f(v, w)$  монотонно не убывает по  $v$ , тогда имеет место одна из следующих альтернатив:

1. Существует допустимое управление  $u^*(\cdot) \in U$ , соответствующие данному управлению, решения уравнений (1.6), (1.10), (1.13)  $\{v^*(t), w^*(t), \bar{P}^*(t), 0 \leq t \leq T\}$  и число  $J(u^*(\cdot)) \geq J(u(\cdot))$  для любого  $u(\cdot) \in U$ .

2. Существует последовательность допустимых управляющих функций  $u^s(\cdot) \in U$  и такое число  $\bar{J}$  :  $J(u^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}$  при  $s \rightarrow \infty$ , что  $J(u(\cdot)) \leq \bar{J}$  для любого  $u(\cdot) \in U$ .

*Доказательство.* Доказательство теоремы может проводиться по аналогичной схеме доказательства теоремы 2.2 с учетом доказанной в теореме 2.4 ограниченности функции  $w(t)$ .

**Замечание 2.4** Если выполняется вторая альтернатива теоремы 2.5, то существует приближенное относительно значения целевого функционала решение в задаче (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.13).

Действительно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует управляющая функция  $u_\varepsilon(\cdot) \in U$  и соответствующие данному управлению решения (1.6), (1.10), (1.13) такие, что  $\bar{J} - J(u_\varepsilon(\cdot)) < \varepsilon$ .

## 2.2.2 Необходимые условия оптимальности

На основе принципа максимума сформулируем необходимые условия решения построения оптимальной рекламной стратегии для задачи (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.13).

Представим вектор-функцию  $F(t, s, x(s), u(s))$  в виде:

$$F(t, s, x(s), u(s)) = \begin{pmatrix} G_u(t-s)u(s)ds \\ \bar{\delta}(s-t+1)f(\phi_u(s)+x_1(s), \phi_y(s)+x_2(s)) \\ (1-\mu)f(\phi_u(s)+x_1(s), \phi_y(s)+x_2(s)) - u(s) \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

при этом  $x(t)$  определяется согласно (2.3), функционал - (2.4).

То есть задача (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.13) эквивалентна задаче (1.4), (2.1), (2.3), (2.4), (2.14).

**Теорема 2.6** Пусть  $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$  - оптимальный процесс для задачи (1.4), (2.1), (2.3), (2.4), (2.14), тогда найдутся такие функции  $h(s)$ ,  $p_1(s)$ ,  $p_2(s)$ :

$$h(s) = p_1(s)G_u(0) - 1 + \int_s^T \left( \frac{\partial G_u(t-s)}{\partial t} p_1(t) \right) dt, \quad (2.15)$$

$$\dot{p}_1(s) = -\frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left( 1 + \frac{dp_2(s+1)}{d(s+1)} \right), \quad p_1(T) = 0, \quad (2.16)$$

$$\dot{p}_2(s) = -\frac{\partial f(v, w)}{\partial w} \left( 1 + \frac{dp_2(s+1)}{d(s+1)} \right), \quad p_2(T) = 0, \quad (2.17)$$

что оптимальное распределение рекламных расходов будет иметь вид (2.8).

*Доказательство:* Введем модифицированную функцию Гамильтона-Понтрягина (2.9), векторы сопряженных переменных (2.10), терминальную функцию Лагранжа (2.11), при этом выполняется (2.12).

Исходя из вида функции  $F(t, s, x(s), u(s))$  получаем:

$$H(s, x, u, p) = p_1(s)G_u(0) + p_3(s)(f(\phi_u(s)+x_1(s), \phi_y(s)+x_2(s)) - u(s)) + \int_s^T \left( p_1(t) \frac{\partial G_u(t-s)}{\partial t} u(s) \right) dt + f(\phi_u(s)+x_1(s), \phi_y(s)+x_2(s)) \frac{dp_2(s+1)}{d(s+1)}. \quad (2.18)$$

Положим  $p_3(s) \equiv 1$  (см. док-во теоремы 2.3). Так как функция (2.18) является линейной по управлению  $u$ , то максимум функции достигается на границе ограничений управления. Определим функцию  $h(s)$  как множитель при  $u$ . Очевидно, что вид функции  $h(s)$  здесь определяется соотношением (2.15). В этом случае оптимальное управление находится из условия (2.18).

Так как при этом  $p_3(s) \equiv 1$ , то  $p_1(s)$  и  $p_2(s)$  находятся из (2.16) и (2.17), соответственно.  $\square$

**Замечание 2.5** В случае линейности функции  $f(v, w)$  по переменным  $v$  и  $w$ , т.е. когда  $f(v, w) = \alpha_1 v + \alpha_2 w$ , (2.16), (2.17) не зависит от управления, и сопряженные переменные для оптимальной стратегии могут быть найдены непосредственно из системы:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(s) &= -\alpha_1 \left( 1 + \frac{dp_2(s+1)}{d(s+1)} \right), & p_1(T) &= 0, \\ \dot{p}_2(s) &= -\alpha_2 \left( 1 + \frac{dp_2(s+1)}{d(s+1)} \right), & p_2(T) &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что система сопряженных функций в общем случае не имеет аналитического решения, поэтому здесь требуется применение численных методов решения интегро-дифференциальных уравнений.

## **2.3 Анализ модели управления рекламными расходами фирмы с распределенными на постоянном интервале лагами запаздывания от воздействий рекламы нескольких видов и предыдущих продаж**

### **2.3.1 Теоремы существования решения**

Рассмотрим вопрос о существовании решения (1.7), (1.16), (1.17), (1.22), (1.23). Пусть функции рекламных затрат  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , кусочно-

непрерывны справа на интервале  $[0; T]$ . Функции  $G_{u_i}(\tau) \in C([\tau_{1u_i}; \tau_{2u_i}])$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $G_y(\tau) \in C([\tau_{1y}; \tau_{2y}])$ , исходя из их предполагаемых свойств.

Если  $G_{u_i}(\tau)$  непрерывная функция, а соответственно,  $\bar{G}_{u_i}(\tau)$  - кусочно-непрерывная, то  $v_i(t)$  непрерывна на отрезке  $[0; T]$ . Следовательно, с учетом (1.16), (1.22) можно утверждать, что существуют такие числа  $B_i$ :  $B_i = \max_{u \in U} a_i(u)$ . Тогда существует число  $\tilde{B}$ :

$$0 \leq \phi_{u_i}(t) + \int_0^t \bar{G}_{u_i}(t-s) g_i(u(s)) ds \leq \max_{0 \leq t \leq T} \left( \phi_{u_i}(t) + \int_0^t \bar{G}_{u_i}(t-s) B_i ds \right) \leq \tilde{B},$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

То есть для любой рекламной стратегии, удовлетворяющей условию (1.16), выполняется  $0 \leq v_i(t) \leq \tilde{B}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Теорема 2.7** Пусть функции  $G_{u_i}(\tau) \in C([\tau_{1u_i}; \tau_{2u_i}])$ ,  $G_y(\tau) \in C([\tau_{1y}; \tau_{2y}])$ , функция  $f(v, w)$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной  $w$  для всех  $w$ , тогда для любой кусочно-непрерывной функции  $u(\cdot) \in U$  существует непрерывная единственная на этом отрезке функция  $w(t)$ , удовлетворяющая (1.23).

*Доказательство.* Так как существует конечное число  $M = \max_{0 \leq \tau \leq t+\lambda} G_y(\tau)$ , то в силу построения  $G_y(\tau)$ ,  $\bar{G}_y(\tau) \leq M$ ,  $\forall \tau \geq 0$ . Схема доказательства теоремы 2.7 при условии рассмотрения функции  $\bar{G}_y(\tau)$  и вектор-функции  $v(t)$  аналогична схеме доказательства теоремы 2.1 и дает условия существования глобального решения уравнения (1.23).

**Замечание 2.6** Если функция  $f(v, w)$  неотрицательна, вогнута и монотонно не убывает по переменной  $w$ , существует и конечна частная производная  $f'_w$  при  $w = 0$ , тогда функция  $f(v, w)$  удовлетворяет условию Липшица по  $w$  для любого  $w$ . В этом случае существует неотрицательное решение уравнения (1.23) на отрезке  $[0; T]$ .



Перейдем к вопросу существования решения оптимизационной проблемы (1.7), (1.16), (1.17), (1.22), (1.23).

Введем  $J(u(\cdot)) \equiv \bar{P}(T)$ . Можно сформулировать теорему существования решения оптимизационной динамической проблемы.

**Теорема 2.8** Пусть выполнены предположения теоремы 2.7, функция  $f(v, w)$  монотонно не убывает по всем  $v_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , тогда имеет место одна из следующих альтернатив:

1. Существует допустимая вектор-функция управлений  $u^*(\cdot) \in U$ , соответствующие данному управлению решения уравнений (1.17), (1.22), (1.23)  $\{v^*(t), w^*(t), \bar{P}^*(t), 0 \leq t \leq T\}$  и значение функционала  $J(u^*(\cdot)) \geq J(u(\cdot))$  для любой  $u(\cdot) \in U$ .

2. Существует последовательность допустимых управляющих вектор-функций  $u^s(\cdot) \in U$  и такое число  $\bar{J}$ :  $J(u^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}$  при  $s \rightarrow \infty$ , что  $J(u(\cdot)) \leq \bar{J}$  для любой  $u(\cdot) \in U$ .

*Доказательство.* Проведем оценку уравнения (1.23).

$$\begin{aligned} w(t) &= \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s) f(v(s), w(s)) ds \leq \\ &\leq \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s) f(B_1, B_2, \dots, B_n, w(s)) ds = w_B(t). \end{aligned}$$

Здесь  $w_B(t)$  - решение уравнения (1.23) при рекламной стратегии  $u(t) \equiv (B_1, B_2, \dots, B_n)$ .

Следовательно, для любой рекламной стратегии (1.16) функция накопленного воздействия предыдущих продаж  $w(t)$  ограничена некоторым значением  $K$ :  $w(t) \leq K = \max_{0 \leq t \leq T} w_B(t)$ .

Покажем ограниченность функционала  $\bar{P}(T)$  в оптимизационной задаче:

$$\begin{aligned}\bar{P}(T) &= \int_0^T (1 - \mu)(f(v(s), w(s)) - \sum_{i=1}^n u_i(s)) ds \leq \\ &\leq \int_0^T f(v(s), w(s)) ds \leq T \max_{(v, y) \in D} f(v, w),\end{aligned}$$

где  $D = \{(v, w) : 0 \leq v_i \leq B_i, 1 \leq i \leq n, 0 \leq w \leq K\}$ .

Таким образом, множество  $L$  значений функционала  $J(u(\cdot))$  в задаче (1.7), (1.16), (1.17), (1.22), (1.23) ограничено.

Пусть  $\bar{J} = \sup L$ . Очевидно, что  $\bar{J}$  существует и конечно.

Если  $\bar{J} \in L$ , то выполняется первая альтернатива теоремы, в противном случае вторая альтернатива.  $\square$

**Замечание 2.7** Если выполняется вторая альтернатива теоремы 2.8, то существует приближенное относительно значения целевого функционала решение в задаче решения (1.7), (1.16), (1.17), (1.22), (1.23).

Действительно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует управляющая вектор-функция  $u_\varepsilon(\cdot)$  и соответствующие данному управлению (1.17), (1.22), (1.23) такие, что  $\bar{J} - J(u_\varepsilon(\cdot)) < \varepsilon$ .

### 2.3.2 Необходимые условия оптимальности

Сформулируем необходимые условия построения оптимальной рекламной стратегии для задач (1.7), (1.16), (1.17), (1.22), (1.23).

Определим  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t), x_{n+2}(t))^T$  :

$$x_1(t) = v_1(t) - \phi_{u_1}(t),$$

$$x_2(t) = v_2(t) - \phi_{u_2}(t),$$

...

$$x_n(t) = v_n(t) - \phi_{u_n}(t),$$

$$x_{n+1}(t) = w(t) - \phi_y(t),$$

$$x_{n+2}(t) = \bar{P}(t),$$

(2.19)

и  $F(t, s, x(s), u(s))$ :

$$F(t, s, x(s), u(s)) = \begin{pmatrix} \bar{G}_{u_1}(t-s)a_1(u) \\ \bar{G}_{u_2}(t-s)a_2(u) \\ \dots \\ \bar{G}_{u_n}(t-s)a_n(u) \\ \bar{G}_y(t-s)f(\phi_{u_1}(s) + x_1(s), \dots, \phi_{u_n}(s) + \\ + x_n(s), \phi_y(s) + x_{n+1}(s)) \\ (1-\mu)f(\phi_{u_1}(s) + x_1(s), \dots, \phi_{u_n}(s) + \\ + x_n(s), \phi_y(s) + x_{n+1}(s)) - \sum_{i=1}^n u_i \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

При этом  $x(t)$  соответствует представлению (2.3), функционал имеет вид:

$$x_{n+2}(T) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in U}. \quad (2.21)$$

Следовательно, задача оптимального управления эквивалентна системе (1.16), (2.3), (2.19), (2.20), (2.21).

**Теорема 2.9** Пусть  $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$  - оптимальный процесс для задачи (1.16), (2.3), (2.19), (2.20), (2.21), тогда найдутся такие  $h_i(s)$ ,  $p_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,

$$h_i(s) = p_i(s)\bar{G}_{u_i}(0) + \int_s^T \left( p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_{u_i}(t-s)}{\partial t} \right) dt, \quad (2.22)$$

$$\dot{p}_i(s) = -\frac{\partial f(v^*, w^*)}{\partial v_i} \left( p_{n+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T \left( p_{n+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad (2.23)$$

$$\dot{p}_{n+1}(s) = -\frac{\partial f(v^*, w^*)}{\partial w} \left( p_{n+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T \left( p_{n+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad (2.24)$$

с конечными условиями  $p_i(T) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , что оптимальное распределение рекламных расходов при всех  $s \in [0; T]$  будет являться решением задачи:

$$u^*(s) = \arg \max_{u \in U} \sum_{i=1}^n (a_i(u)h_i(s) - u_i). \quad (2.25)$$

*Доказательство:* Введем модифицированную функцию Гамильтона-Понтрягина для задачи с интегральными уравнениями (2.18). Здесь  $p(s) = (p_1(s), p_2(s), \dots, p_n(s), p_{n+1}(s), p_{n+2}(s))$  – вектор сопряженных переменных:

$$\frac{dp_i(s)}{ds} = -\frac{\partial H(s, x, u)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+2. \quad (2.26)$$

Также введем терминальную функцию Лагранжа:

$$L(x(0), x(T)) = \sum_{k=1}^{n+2} \beta_k x_k(0) - \beta_{n+3} x_{n+2}(T), \quad \beta_{n+3} \geq 0. \quad (2.27)$$

Краевые условия для сопряженных переменных определяются из соотношений:

$$p_i(0) = \frac{\partial L(x(0), x(T))}{\partial x_i(0)}, \quad p_i(T) = -\frac{\partial L(x(0), x(T))}{\partial x_i(T)}, \quad i = 1, 2, \dots, n+2.$$

Исходя из (2.27), краевые условия принимают вид:

$$\begin{aligned} p_i(0) &= \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+2, \\ p_i(T) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \\ p_{n+2}(T) &= \beta_{n+3}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Если  $\beta_{n+3} = 0$ , то решение однородной системы интегро-дифференциальных уравнений (2.26) в точке  $T$  равно тривиальному вектору, что влечет тривиальность решения системы (2.26), следовательно, тривиальность чисел  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+3}$ . То есть  $\beta_{n+3}$  можно положить равным любому положительному числу. Положим  $\beta_{n+3} = 1$ .

Подставив (2.20) в функцию Гамильтона-Понтрягина (2.18), получим:

$$\begin{aligned}
H(s, x, u) = & \sum_{i=1}^n p_i(s) \bar{G}_{u_i}(0) a_i(u) + p_{n+1}(s) \bar{G}_y(0) f(\phi_{u_1}(s) + x_1, \dots, \phi_{u_n}(s) + x_n, \phi_y(s) + x_{n+1}) \\
& + p_{n+2}(s) \left( (1 - \mu) f(\phi_{u_1}(s) + x_1, \dots, \phi_{u_n}(s) + x_n, \phi_y(s) + x_{n+1}) - \sum_{i=1}^n u_i \right) + \\
& + \int_s^T \left( \sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_{u_i}(t-s)}{\partial t} g_i(u) + \right. \\
& \left. + p_{n+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} f(\phi_{u_1}(s) + x_1, \dots, \phi_{u_n}(s) + x_n, \phi_y(s) + x_{n+1}) \right) dt. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Так как  $\frac{dp_{n+2}}{ds} = 0$ ,  $p_{n+2}(T) = 1$ , то  $p_{n+2}(s) \equiv 1$  при  $s \in [0; T]$ .

Обозначим через  $h(s, x, u)$  слагаемые функции (2.29), зависящие от управления  $u$ .

$$h(s, x, u) = \sum_{i=1}^n p_i(s) \bar{G}_{u_i}(0) a_i(u) - p_{n+2}(s) \sum_{i=1}^n u_i + \int_s^T \left( \sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_{u_i}(t-s)}{\partial t} a_i(u) \right) dt.$$

Максимизация функции (2.29) эквивалентна максимизации функции  $h(s, x, u)$ . Очевидно, что

$$h(s, x, u) = \sum_{i=1}^n \left( a_i(u) \left( p_i(s) \bar{G}_{u_i}(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_{u_i}(t-s)}{\partial t} dt \right) - u_i \right).$$

Так как  $h_i(s, x, u) = p_i(s) \bar{G}_{u_i}(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_{u_i}(t-s)}{\partial t} dt$ , то оптимальное управление в задаче (1.16), (2.3), (2.19), (2.20), (2.21) удовлетворяет при любом  $s$  решению задачи нелинейного программирования:

$$\sum_{i=1}^n (a_i(u) h_i(s) - u_i) \rightarrow \max_{u \in U_B}. \quad (2.30)$$

Последнее означает выполнение условия (2.25). При этом переменные  $p_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , удовлетворяют задаче Коши (2.23), (2.24).  $\square$

**Замечание 2.8** Если фирма проводит рекламную политику достаточно долгое время, то реакция потребителей имеет устойчивый характер, который выражается в эффект убывающей дополнительной отдачи. При моделировании данного свойства можно потребовать вогнутость и

монотонное возрастание функции  $a_i(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . В этом случае задача (2.25) становится задачей выпуклого программирования, для которой условие седловой точки является необходимым и достаточным условием:

$$\begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n u_i - B \right) \lambda, & \lambda \geq 0, \\ u_j \left( \lambda + 1 - h_i(s) \frac{\partial a_i(u)}{\partial u_j} \right) = 0, & u_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

**Замечание 2.9** Если функция  $f(v, w)$  является линейной по своим аргументам  $v$  и  $w$ , то система сопряженных переменных (2.23), (2.24) не зависит от фазовых переменных  $v$ ,  $w$  и управления  $u$ , следовательно, решение  $p^*(s)$  задачи Коши (2.23), (2.24) будет соответствовать оптимальному процессу  $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$ . В этом случае оптимальное управление может быть найдено непосредственно из последовательности решения задачи (2.25) после подстановки  $p^*(s)$ .

## **Выводы по главе 2**

В главе 2 были сформулированы и доказаны теоремы существования решений задач оптимального управления рекламными расходами, сформулированных в рамках моделей, предложенных в главе 1. В частности для каждой из поставленных задач оптимального управления рекламными расходами было доказано существование и единственность решения уравнения Вольтерра, выступающего в качестве ограничения, а также существование и единственность решения оптимизационной динамической задачи. Также на основе принципа максимума для задач с интегральными уравнениями были найдены необходимые условия оптимальности рекламной стратегии в оптимизационной динамической задаче.

Из-за сложности использования для решения задач такого типа аналитических подходов, здесь требуется применение специальных численных методов решения, которые будут рассмотрены в следующей главе.

### ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ РЕКЛАМНЫХ РАСХОДОВ. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ

В настоящей главе рассмотрим численные методы решения, которые могут быть применены к задачам оптимизации рекламных расходов (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11); (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.13); (1.7), (1.16), (1.17), (1.22), (1.23).

#### 3.1 Модифицированный метод локальных вариаций

Численный метод локальных вариаций был предложен в [27] для решения задач вариационного исчисления. Однако в прямом виде к поставленным в предыдущей главе задачам он не применим. Поэтому автором работы предлагается его модификация. Рассмотрим применение метода к задаче с одним управлением. При необходимости рассмотрения многомерного случая общая схема метода сохраняется.

Пусть  $N \in \mathbb{N}$ , зафиксируем его значение и введем величину  $\Delta t = \frac{T - t_0}{N}$ .

Построим равномерное разбиение отрезка  $[t_0; T]$  на  $N$  равных частей:

$$t_i = t_0 + i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Обозначим управление в узлах равномерной сетки как  $U = (u_0, u_1, \dots, u_N)$ , где  $u_i = u(t_i)$ , и соответствующие данному управлению  $Y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$ , где  $y_i = y(t_i)$ , которые находятся в соответствии с (1.3), (1.10), (1.11), (1.13), (1.22), (1.23), и  $\bar{P} = (\bar{\pi}_0, \bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_N)$ , где  $\bar{\pi}_i = \bar{\pi}(t_i)$ , которые соответствуют подынтегральным выражениям в (1.6), (1.17),  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Для определения  $Y$ , а затем  $\bar{P}$ , учитывая представления этих функций, их значения при некотором  $U$  могут быть найдены с помощью численных методов интегрирования.



Зная значения вектора  $\bar{P}$ , становится возможным определить функционал  $\bar{P}(T)$ .

Установим некоторое начальное приближение для вектора  $U^0 = (u_0^0 \ u_1^0 \ \dots \ u_N^0)$ .

Будем считать, что приближение  $U^{k-1}$  построено, а также определены первые  $(m-1)$  элементов приближения  $U^k$ . Необходимо определить значение  $u_m^k$ .

Введем обозначения  $U_m^k, U_{m+}^k, U_{m-}^k$  такие, что:

$$\begin{aligned} U_m^k &= (u_0^k \ u_1^k \ \dots \ u_m^k \ \dots \ u_N^k), \\ U_{m+}^k &= (u_0^k \ u_1^k \ \dots \ u_m^k + h \dots u_N^k), \\ U_{m-}^k &= (u_0^k \ u_1^k \ \dots \ u_m^k - h \dots u_N^k). \end{aligned}$$

где  $u_i^k = u_i^{k-1}$ ,  $h$  – шаг варьирования управления,  $i = m, m+1, \dots, N$ .

Отметим также, что если  $u_m^k + h$  или  $u_m^k - h$  выходят за границы допустимой области (1.4) или (1.16), то их значения возвращаются равными граничным.

Определим соответствующие предложенным управлениям значения векторов  $Y_m^k, \bar{P}_m^k, Y_{m+}^k, \bar{P}_{m+}^k, Y_{m-}^k, \bar{P}_{m-}^k$  и значения функционала  $\bar{P}_m^k, \bar{P}_{m+}^k, \bar{P}_{m-}^k$ .

Новое значение  $u_m^k$  определяется исходя из соотношения:

$$u_m^k = \arg \max \{ \bar{P}_m^k, \bar{P}_{m+}^k, \bar{P}_{m-}^k \}.$$

Операция повторяется до  $m = N$  включительно.

Фиксируется построенное приближение  $U^k$  и максимальное значение функционала для  $k$ -го приближения

$$\bar{P}^k = \max \{ \bar{P}_N^k, \bar{P}_{N+}^k, \bar{P}_{N-}^k \}.$$

Для следующих приближений процедура повторяется.

Условием остановки итерационного процесса на данном приближении является достижение установленной точности  $\varepsilon$ :

$$|\bar{\Pi}^j - \bar{\Pi}^{j-1}| < \varepsilon.$$

На рис. 3.1 представлен фрагмент алгоритма решения задачи оптимизации, описывающий реализацию метода.

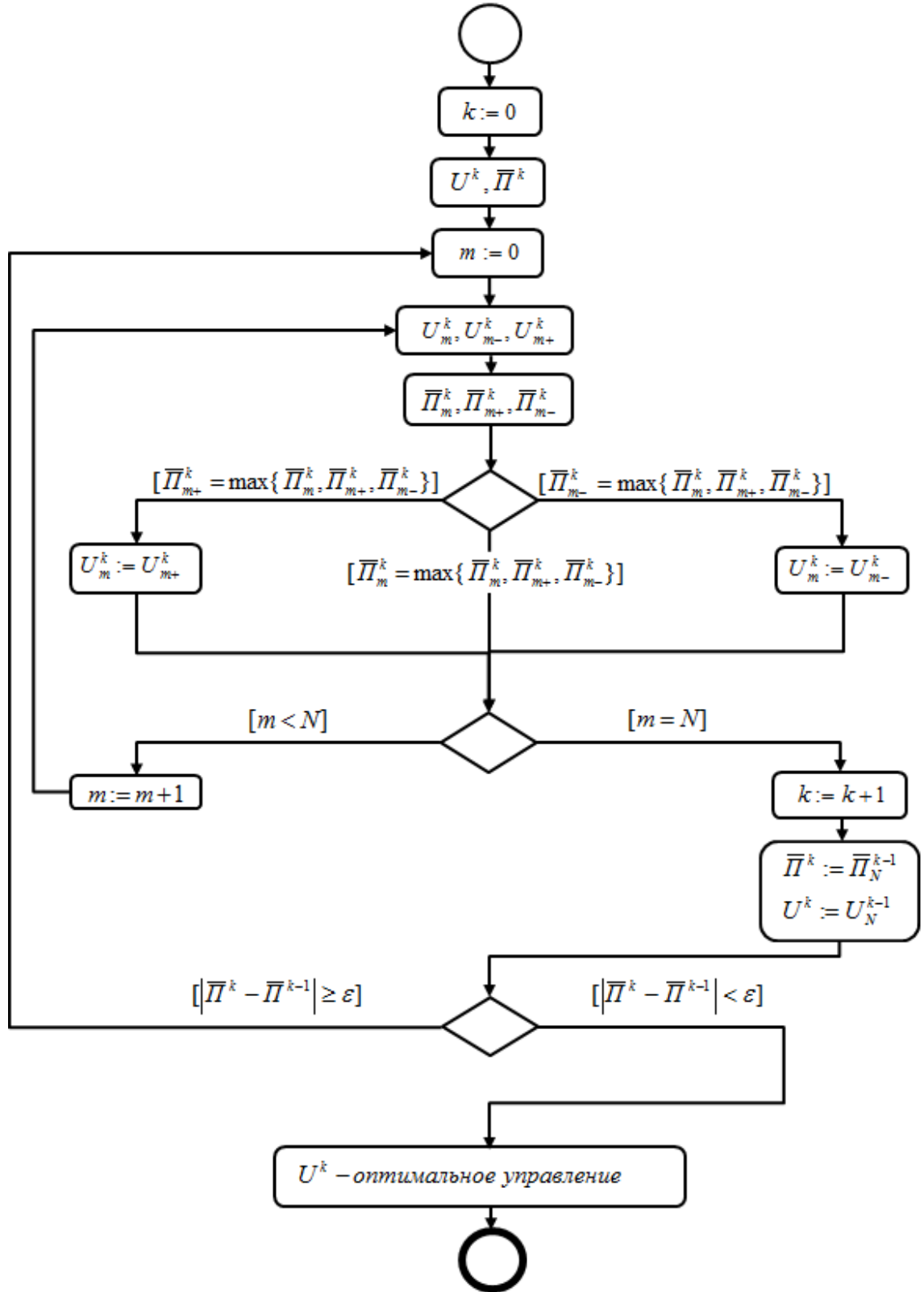


Рисунок 3.1 Алгоритм модифицированного метода локальных вариаций

Стоит отметить, что в случае линейности функции Гамильтона-Понтрягина  $H$  по  $u$ , оптимальное управление принимает краевые значения допустимого множества (см. теоремы об условиях необходимости в главе 2), что позволяет в качестве шага варьирования использовать заданный рекламный бюджет:  $h = b$ .

### 3.2 Применение метода параметризации

Горбуновым В.К. был предложен метод параметризации в [9], [11]. Изначально рассматривалась задача оптимального управления с динамикой фазового состояния в виде обыкновенного дифференциального уравнения с терминальными условиями. Данный метод получил развитие в работах [12], [45-47]. Позже метод решения оптимизационной проблемы был распространен на задачи с точечным запаздыванием в [20], на случай распределенного запаздывания с линейным представлением интегральной компоненты в [21]. В [23] применен метод параметризации для задач, содержащих связи, определяемые интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра, которые нелинейным образом входят в постановку проблемы.

В качестве примера рассмотрим применение данного метода к задаче (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11). Пусть вектор-функция  $x(t)$  здесь будет представлена следующим образом:

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ C(t) \\ \bar{P}(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где  $q(t) = \begin{pmatrix} v(t) - \phi_u(t) \\ w(t) - \phi_y(t) \end{pmatrix}$ ,  $C(t)$  - функция штрафа,

$$C(t) = \int_0^t C \left( ([-u(t)]^+)^2 + ([u(t) - b]^+)^2 \right) ds,$$

$$[-u(t)]^+ = \begin{cases} 0, & u(t) \geq 0 \\ u(t), & u(t) < 0, \end{cases}$$

$$[u(t) - b]^+ = \begin{cases} 0, & u(t) \leq b \\ u(t) - b, & u(t) > b. \end{cases}$$

Введем также вектор-функции  $g(t, s, x, u)$ ,  $h(t, s, x, u)$ ,  $l(t, x, u, q)$  такие, что

$$q(t) = \int_0^t g(t, s, x(s), u(s)) ds,$$

$$h(t, s, x, u) = \frac{\partial g(t, s, x, u)}{\partial t},$$

$$\dot{x}(t) = l(t, x, u, q).$$

Продифференцируем (3.1):

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} (\dot{\phi}_u(t) + \dot{x}_4(t)) + \frac{\partial f(v, w)}{\partial w} (\dot{\phi}_y(t) + \dot{x}_5(t)) \\ C \left( ([-u(t)]^+)^2 + ([u(t) - b]^+)^2 \right) \\ (1 - \mu)x_0(t) - u(t) \\ G_u(t, t)u(s) + \int_0^t \frac{\partial G_u(t, s)}{\partial t} u(s) ds \\ G_y(t, t)x_0(s) + \int_0^t \frac{\partial G_y(t, s)}{\partial t} x_0(s) ds \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Можно убедиться, что

$$g(t, s, x(s), u(s)) = \begin{pmatrix} G_u(t, s)u(s) \\ G_y(t, s)x_0(s) \end{pmatrix},$$

$$h(t, s, x(s), u(s)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_u(t, s)}{\partial t} u(s) \\ \frac{\partial G_y(t, s)}{\partial t} x_0(s) \end{pmatrix}.$$

Сформулируем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = l(t, x(t), u(t), q(t)), \\ \dot{q}(t) = g(t, t, x(t), u(t)) + \int_0^t h(t, s, x(s), u(s)) ds, \\ x(0) = x^0, \quad q(0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Таким образом, задача (1.4), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11) эквивалентна задаче (1.4), (2.4), (3.1), (3.2), (3.3).

### 3.2.1 Параметризация задачи

Сведем задачу оптимального управления (1.4), (2.4), (3.1), (3.2), (3.3) к конечномерной задаче нелинейного программирования.

Произведем некоторое произвольное разбиение планируемого периода  $[t_0, T]$ :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T. \quad (3.4)$$

На каждом промежутке  $[t_{k-1}, t_k)$ ,  $k=1,2,\dots,N$  зафиксируем структуру управления, которая определяется в некотором параметризованном классе функций:

$$u(t) = u^k(t; \nu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k=1,2,\dots,N. \quad (3.5)$$

Введенные функции  $u^k(t, \nu^k)$  определяются непрерывно на сегментах  $[t_{k-1}; t_k)$  с учетом ограничения (1.4), при этом параметры функции представляют собой конечномерные вектора  $\nu^k \in R^d$ .

Подставляя параметризованное управление (3.4), (3.5) в (3.3), получим фазовую траекторию  $x(t)$ , которая определяется набором  $\omega^k = (t_k, \nu^k)$ , где  $\omega_0^k = t_k$ ,  $\omega_\alpha^k = \nu_\alpha^k$ ,  $1 \leq \alpha \leq d$ . При этом общее количество параметров управления, определяющих полностью фазовую траекторию, равно  $N(d+1)$ . Ниже представлена зависимость траектории от параметров:

$$x(t) = z(t, \nu^1, t_1, \dots, \nu^{k-1}, t_{k-1}, \nu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k. \quad (3.6)$$

Совокупность отношений (3.6) равносильна задаче Коши (3.3), при этом функция  $z(t, v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$  задается на каждом сегменте  $[t_{k-1}; t_k]$  соответствующим интегральным соотношением. Очевидно, что параметризованное управление (3.4), (3.5) может представлять собой сужение допустимого класса управлений. Пусть управляющие функции (3.4), (3.5) заданы на множестве

$$W = \{(\omega^1, \dots, \omega^N) : (3.4), u^k(t, v^k) : (1.4), k = 1, 2, \dots, N\}$$

для любого набора параметров  $\{\omega^k\}$ .

Зададим конечномерную функцию от управляющих параметров  $\{\omega^k\}$ :

$$\varphi(\omega^1, \dots, \omega^N) = g(z(T, \omega^1, \dots, \omega^{N-1}, v^N)). \quad (3.7)$$

Тогда конечномерная задача представляется в виде:

$$\varphi(\omega^1, \dots, \omega^N) \rightarrow \max, \quad (\omega^1, \dots, \omega^N) \in W \quad (3.8)$$

при условиях (1.4), (3.3), (3.5).

Для решения сформулированной задачи (1.4), (3.3), (3.5), (3.7), (3.8) могут быть применены методы первого порядка, например, градиентные методы. Так как целевая функция (3.8) неявно зависит от параметров управления  $\omega^1, \dots, \omega^N$ , то вычисление производных целевой функции по параметрам представляет собой отдельную задачу.

### 3.2.2 Применение метода параметризации к задаче оптимизации рекламных расходов

В [23] подробно рассмотрена проблема построения первых производных для (3.7). Применим необходимые выводы для решения задачи (1.4), (3.3), (3.5), (3.8).

Продифференцируем (3.7) по одному из параметров  $\omega_\alpha^k$ :

$$\frac{\partial \varphi(\omega^1, \dots, \omega^N)}{\partial \omega_\alpha^k} = \frac{\partial g(z(T, \omega^1, \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T, \omega^1, \dots, v^N)}{\partial \omega_\alpha^k}. \quad (3.9)$$

Подставим (3.4), (3.5) в (3.7) и определим функцию  $z(t, \cdot)$ :

$$z(t, \cdot) = \int_0^t \left( l(\tau, z(\tau, \cdot), u(\tau), \int_0^\tau g(\tau, s, z(s, \cdot), u(s)) ds) \right) d\tau. \quad (3.10)$$

Учитывая представление (3.3), введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(t, x, q, u, p) = \langle p_x(t), l(t, x, u, q) \rangle + \langle p_q(t), g(t, t, x, u) \rangle + \int_t^T \langle p_q(s), h(s, t, x, u) \rangle ds. \quad (3.11)$$

где  $p_x(t)$  – вектор сопряженных переменных, который определяется линейными уравнениями

$$\dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), q(t), u(t), p(t))}{\partial x}, \quad \dot{p}_q(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), q(t), u(t), p(t))}{\partial q}.$$

С учетом (3.11):

$$\dot{p}_x(t) = -\left[ \frac{\partial l(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} \right]^T p_x(t) - \left[ \frac{\partial g(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(t) - \int_t^T \left[ \frac{\partial h(t, s, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(s) ds, \quad (3.12)$$

$$\dot{p}_q(t) = -\left[ \frac{\partial l(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \right]^T p_x(t). \quad (3.13)$$

Конечные условия для сопряженных функций:

$$p_x(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}, \quad p_q(T) = 0. \quad (3.14)$$

Частные производные по переменной  $t_k$  и  $v_\alpha^k$  определяются в виде [56]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\omega^1, \dots, \omega^N)}{\partial t_k} &= \frac{\partial g(z(T, \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T, \dots, v^N)}{\partial \omega_\alpha^k} = \\ &= H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k - 0), p(t_k)) - H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k + 0), p(t_k)), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\omega^1, \dots, \omega^N)}{\partial v_\alpha^k} &= \frac{\partial g(z(T, \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T, \omega^1, \dots, v^N)}{\partial \omega_\alpha^k} = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(t, x(t), q(t), u(t), p(t))}{\partial u} \frac{\partial u^k(t, v^k)}{\partial v_\alpha^k} dt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, чтобы вычислить производные (3.9) необходимо кроме исходной задачи Коши (3.4), (3.7) также решить дополнительную задачу (3.12), (3.13), (3.14), и найти функцию Гамильтона-Понтрягина (3.11). Затем в соответствии с (3.15) и (3.16) вычисляется градиент.

### 3.3 Описание комплекса программ

В данном параграфе представлено описание программ, разработанных в диссертационном исследовании для анализа задач распределения рекламного бюджета. Решения задач находятся в соответствии с программным кодом, написанным на языке C++ в среде разработки QT Creator.

#### 3.3.1 Описание программы для решения оптимизационной задачи с помощью принципа максимума

Для нахождения оптимального распределения рекламных затрат на планируемом периоде разработан комплекс программ, реализующий применение принципа максимума (ПМ) к оптимизационной задаче, сформулированной в рамках модели управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж. При этом функция выручки (1.3) предполагается линейной по переменным  $v$  и  $w$  (см. 4.1), а длины интервалов воздействий предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж постоянными на всем периоде планирования.

Входными данными, необходимыми для запуска вычислительного процесса, вводимыми пользователем, являются плановый период  $T$  (квартал),



начальный и минимальный шаги дискретизации  $\Delta t_{\max}$ ,  $\Delta t_{\min}$ , максимальный объем рекламного потока  $b$  (млн. рублей), найденные оценки параметров функций  $\tilde{y}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$ , оценки параметров функций  $G_u(\tau)$ ,  $G_y(\tau)$ .

Полученная модель анализируется на основе численных схем. В частности, при решении задачи Коши для нахождения сопряженных переменных  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  используется численный метод решения интегродифференциальных уравнений, основанный на вычислительной схеме Эйлера. При этом интегральные уравнения связи выручки с рекламными продажами и предыдущими продажами вычисляются квадратурным методом трапеций. Последовательность указанных действий может быть представлена в следующем виде:

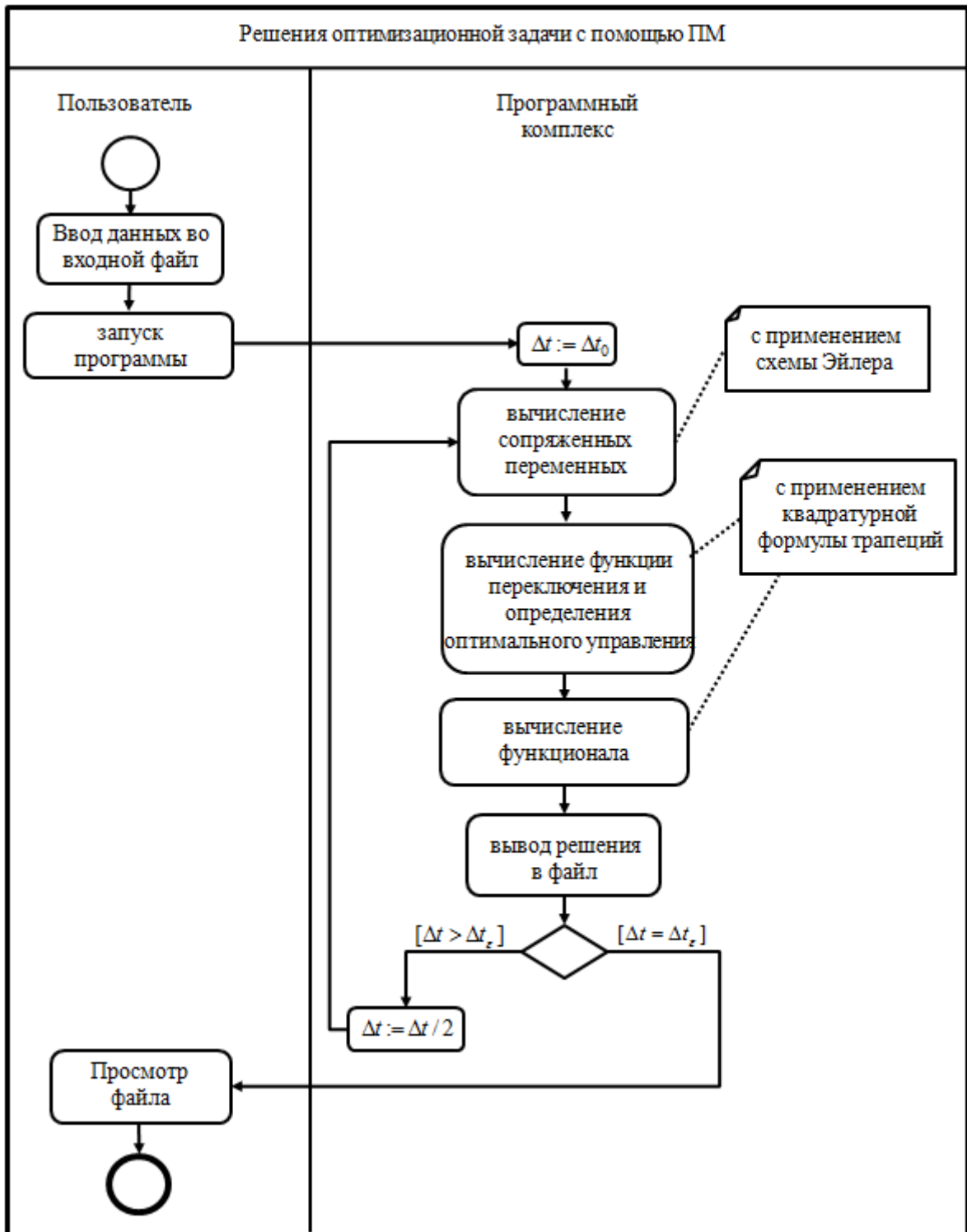


Рисунок 3.2 Диаграмма деятельности для решения оптимизационной задачи с помощью принципа максимума

Функциональные связи в разработанном комплексе программ описываются в схеме 3.3.

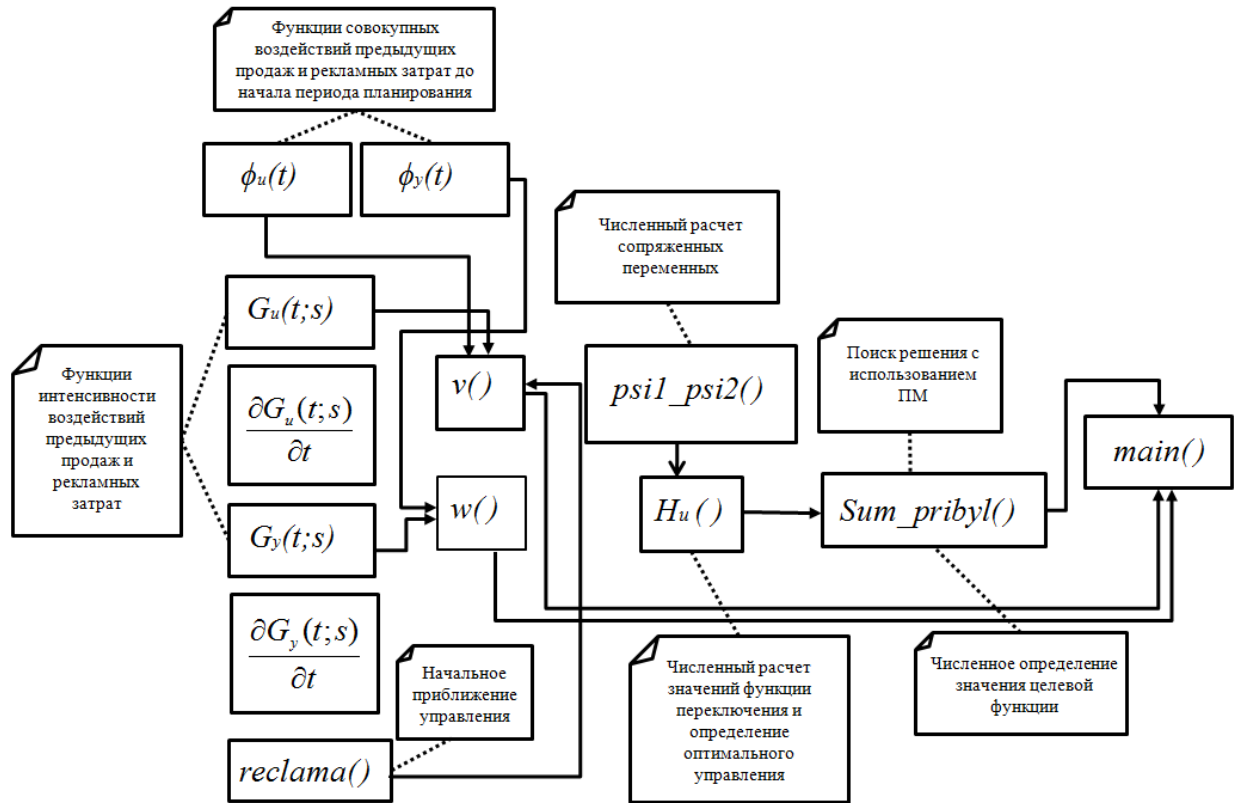


Рисунок 3.3 Схема функциональных связей для решения оптимизационной задачи с помощью принципа максимума

Вывод полученных решений осуществляется в файл текстового формата типа csv, доступного для просмотра и редактирования пользователю. На рис. 3.4 представлены фрагменты результатов применения принципа максимума, размещенных в файле.

3214	reshenie - princ max									
3215	i	u	v	w	y	functional	psi1	psi2	Hu	
3216	0	72525.200000	0.000000	0.000000	7768372.02994	7695846.82994	650.809050	5.514414	759.844289	
3217	1	72525.200000	45.341991	0.000000	8068907.14621	7996381.94621	634.382269	5.511746	743.033937	
3218	2	72525.200000	90.711467	4942.837868	8323005.73723	8250480.53723	620.439095	5.508993	728.716397	
3219	3	72525.200000	136.108431	10054.539619	8541744.92228	8469219.72228	608.283759	5.506167	716.194604	
3220	4	72525.200000	181.532889	15309.433783	8734409.35398	8661884.15398	597.481670	5.503277	705.033013	
3221	5	72525.200000	226.984843	20688.225509	8906991.83894	8834466.63894	587.742305	5.500330	694.940370	
4813	1597	0.010000	105547.694668	18355419.1898	54845643.7977	54845643.7877	0.156180	0.004724	-0.843678	
4814	1598	0.010000	105586.152543	18373929.3981	54891271.7048	54891271.6948	0.104063	0.003147	-0.895874	
4815	1599	0.010000	105624.597129	18392452.2334	54936935.3057	54936935.2957	0.052003	0.001572	-0.947981	
4816	1600	0.010000	105663.028402	18410987.7074	54982634.6228	54982634.6128	0.000000	0.000000	-1.000000	
4817	shift=	0.988125								
4818	functional=	29126119.143690								

Рисунок 3.4 Фрагменты результатов применения принципа максимума, размещенных в выходном файле

### 3.3.2 Описание программы для решения оптимизационной задачи с помощью модифицированного метода локальных вариаций и принципа максимума

Данный комплекс программ реализует применение модифицированного метода локальных вариаций и проверки приближенного решения с помощью принципа максимума для оптимизационной задачи, сформулированной в рамках модели управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж. При этом функция выручки (1.3) предполагается нелинейной по переменным  $v$  и  $w$  (см. 4.2), а начало воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж фиксированным.

Входными данными, необходимыми для запуска вычислительного процесса при реализации модифицированного метода локальных вариаций (ММЛВ) и принципа максимума (ПМ) и вводимыми пользователем, являются плановый период  $T$  (месяц), начальный и минимальный шаги дискретизации  $\Delta t_{\max}$  и  $\Delta t_{\min}$ , максимальный объем рекламного потока  $b$  (рубль), найденные оценки параметров функций  $G_u(\tau)$ ,  $G_y(\tau)$ ,  $\tilde{y}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$ . Результат, полученный с помощью применения модифицированного метода локальных вариаций, проверяется подстановкой данного результата в сопряженные переменные (2.6), (2.7) и функцию переключения (2.5) для сравнения с тем результатом, который может быть получен с помощью применения к задаче принципа максимума.

Последовательность действий разработанной программы может быть представлена в виде:

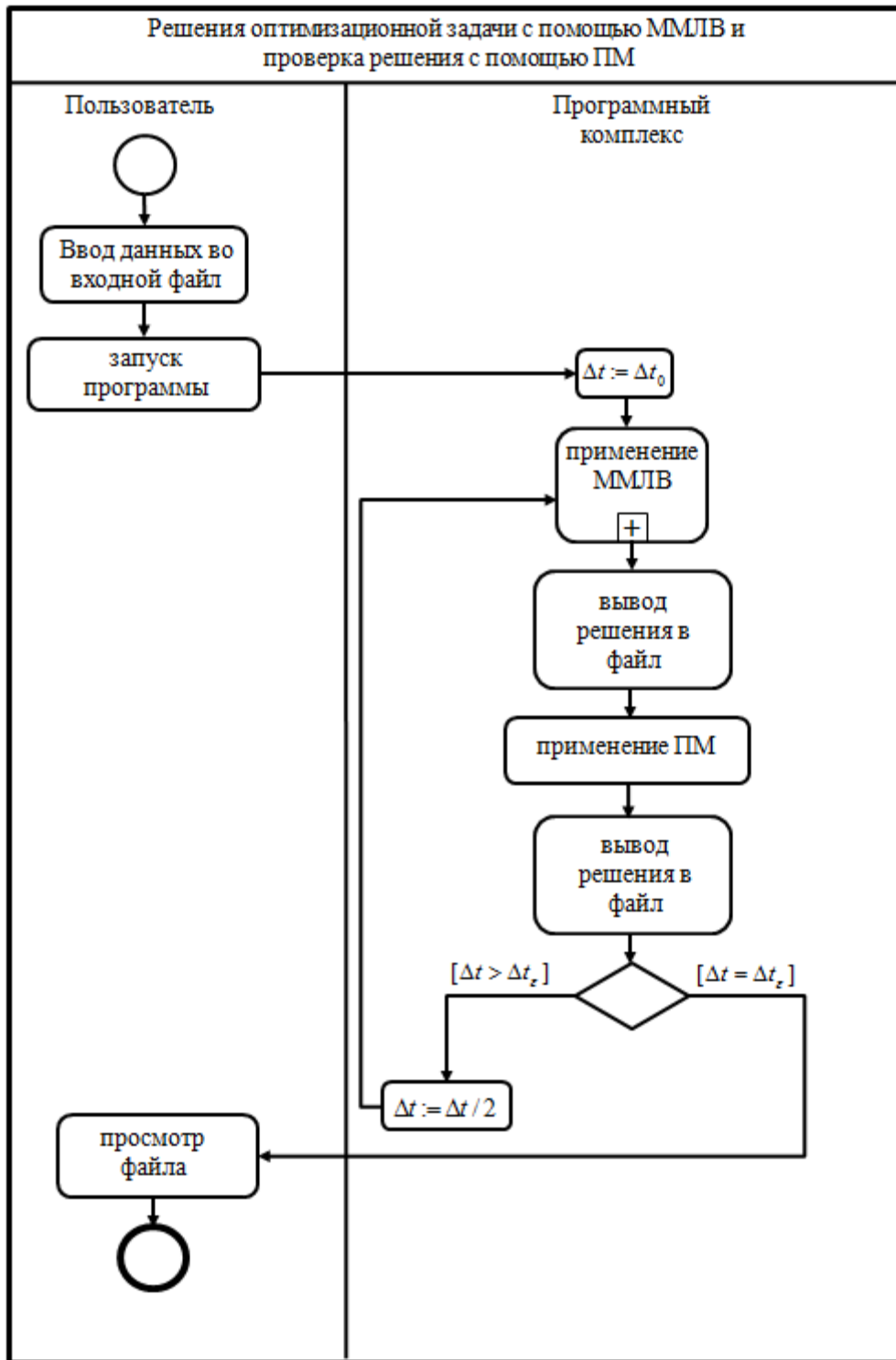


Рисунок. 3.5 Диаграмма деятельности для решения оптимизационной задачи с помощью модифицированного метода локальных вариаций и принципа максимума

Функциональные связи в разработанном комплексе программ описываются в схеме 3.6.

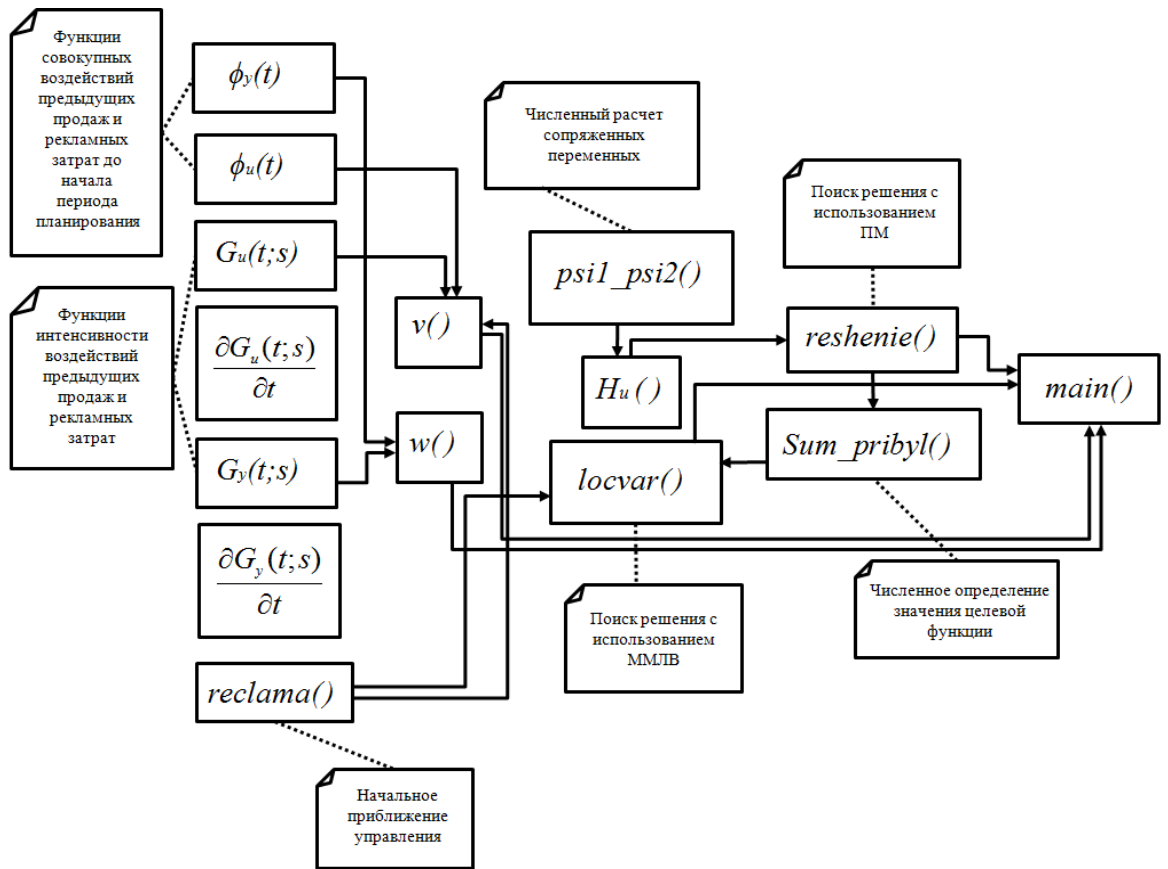


Рисунок 3.6 Схема функциональных связей решения оптимизационной задачи с помощью модифицированного метода локальных вариаций и принципа максимума

Здесь для нахождения сопряженных функций  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , значений функций  $h(t)$ ,  $y(t)$  и  $\bar{P}(t)$  используется схема Эйлера и квадратурная формула трапеций.

Вывод полученных решений осуществляется в файл текстового формата типа csv, доступного для просмотра и редактирования пользователю. На рис. 3.7 представлены фрагменты результатов применения модифицированного метода локальных вариаций, размещенных в файле.

1607	reshenie_loc_var					
1608	i	u	v	w	y	functional
1609		0 72525.200000	0.000000	0.000000	7768372.029943	7695846,83
1610		1 72525.200000	45.341991	0.000000	8068907.146219	7996381,946
1611		2 72525.200000	90.711467	4942.837868	8323005.737230	8250480,537
1612		3 72525.200000	136.108431	10054.539619	8541744.922280	8469219,722
1613		4 72525.200000	181.532889	15309.433783	8734409.353983	8661884,154
1614		5 72525.200000	226.984843	20688.225509	8906991.838946	8834466,639
1615		6 72525.200000	272.464300	26176.404101	9063597.965082	8991072,765
1616		7 72525.200000	317.971261	31762.622726	9207169.890010	9134644,69
3204		1595 0.010000	105470.755132	18318450.008881	34734474.773423	34734474,77
3205		1596 0.010000	105509.223530	18336921.597259	54800051.562053	54800051,55
3206		1597 0.010000	105547.694668	18355419.189849	54845643.797749	54845643,79
3207		1598 0.010000	105586.152543	18373929.398107	54891271.704866	54891271,69
3208		1599 0.010000	105624.597129	18392452.233496	54936935.305767	54936935,3
3209		1600 0.010000	105663.028402	18410987.707481	54982634.622817	54982634,61
3210	shift=	0.988125				
3211	functional=	29126119.143690				
3212	time=	4555.000000				

Рисунок 3.7 Фрагменты результатов применения модифицированного метода локальных вариаций, размещенных в выходном файле

### 3.3.3 Описание реализации метода параметризации

Поиск решения с применением метода параметризации к параметрически представленной задаче оптимизации осуществляется в классе кусочно-постоянных функций с одним моментом переключения. Такое представление управления было принято исходя из результатов применения модифицированного метода локальных вариаций и принципа максимума.

При разработке программы для решения оптимизационной задачи методом параметризации входными данными, вводимыми пользователем, являются количество управлений  $Udim$ , размерность параметризации одной координаты управления  $udim$ , число моментов переключения  $nshift$ , функции  $h(t, s, x, u)$ ,  $g(t, s, x, u)$ ,  $l(t, s, x, u)$ , их частные производные  $\frac{\partial h(t, s, x, u)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g(t, s, x, u)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial l(t, s, x, u)}{\partial x}$ , период планирования  $T$  (месяц), начальный и минимальный шаги дискретизации  $\Delta t_{\max}$  и  $\Delta t_{\min}$ , максимальный

объем рекламного потока  $b$  (руб.), оценки параметров функций  $G_u(\tau)$ ,  $G_y(\tau)$ ,  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$ .

Для определения сопряженных переменных  $p_x(t)$  и  $p_q(t)$  методом Рунге-Кутты второго порядка решается система дифференциальных уравнений (3.12), (3.13), (3.14). Подставив сопряженные переменные в функцию Гамильтона-Понтрягина (3.11), находится градиент функционала (3.15), (3.16). В эксперименте, учитывающем релейность управления, поиск оптимального управления осуществляется методом наискорейшего спуска. В эксперименте, не учитывающем релейность управления, применяется численный метод Ньютона, определяется матрица Гессе. После этого полученное решение уточняется методом наискорейшего спуска [8]. При этом при использовании численных методов в случае выхода за допустимое множество очередного приближения берется его проекция на множество активных ограничений. Алгоритм решения полученной при этом задачи квадратичного программирования подробно рассмотрен в [10], а также был использован в [19].

Работу программы можно представить в виде следующей последовательности действий:



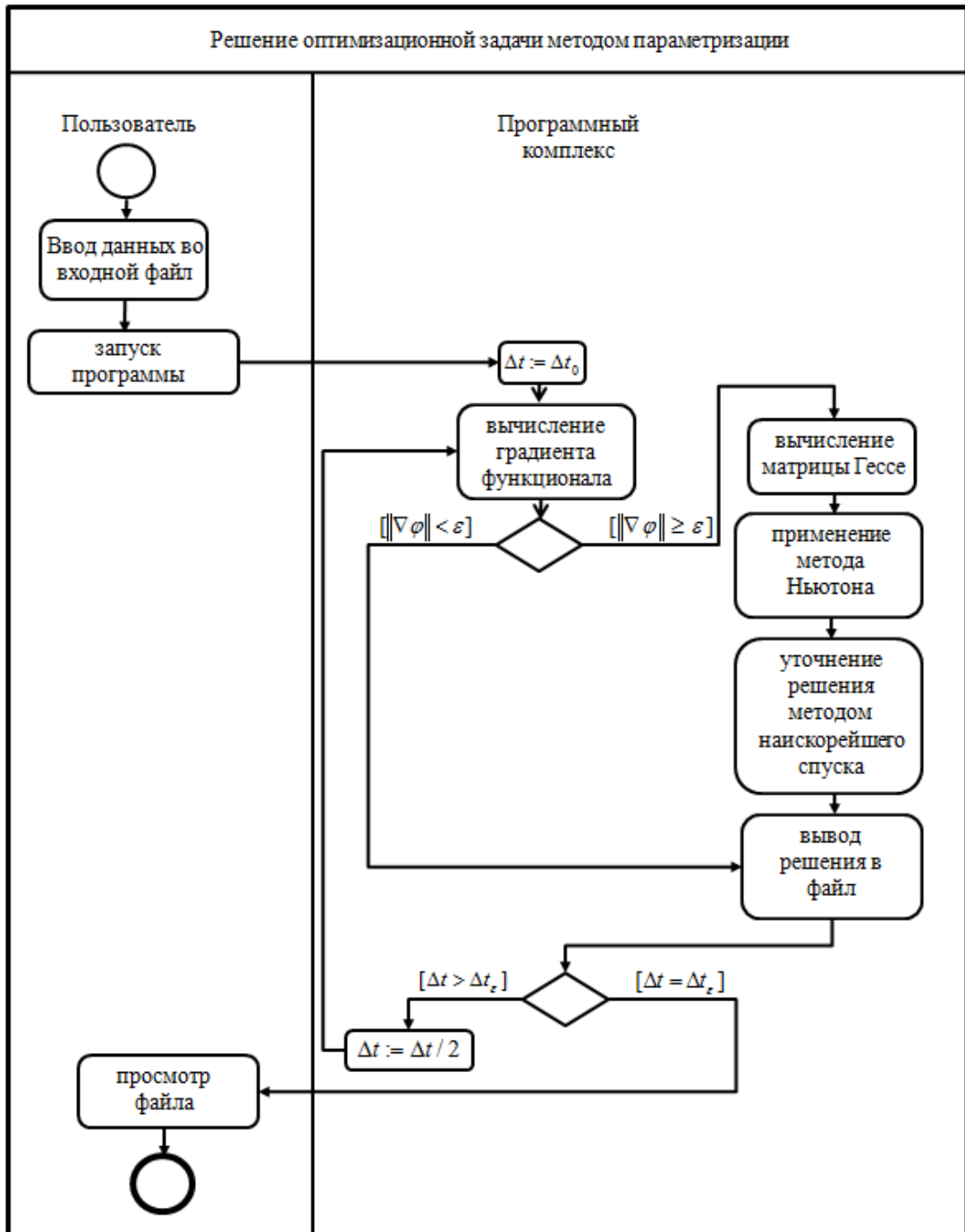
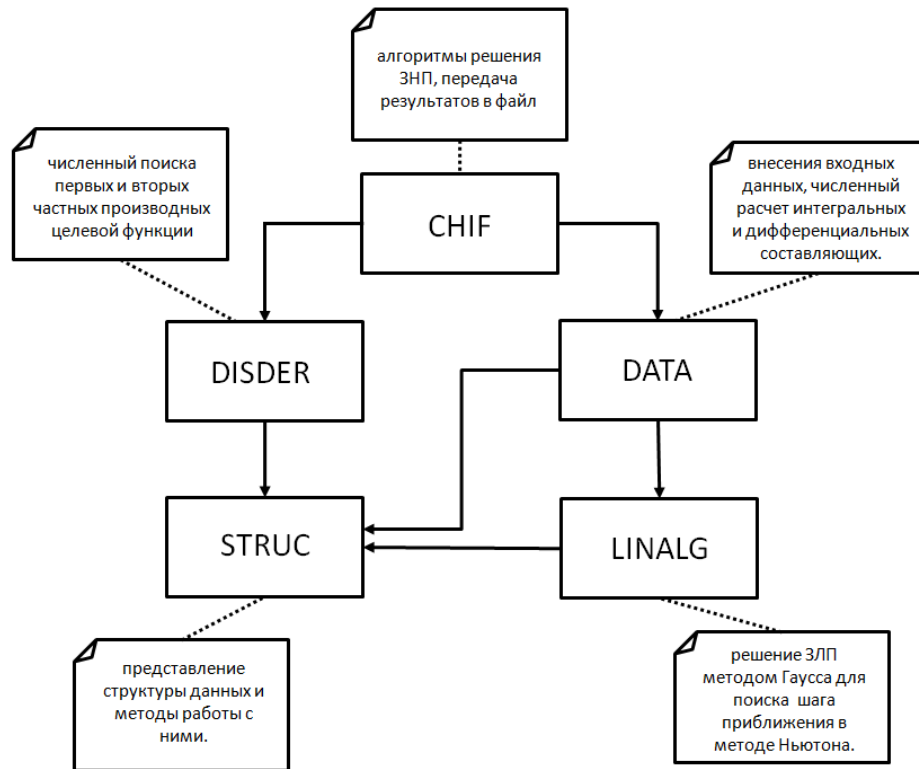


Рисунок 3.8 Диаграмма деятельности для решения оптимизационной задачи с помощью метода параметризации

Схема функциональных модулей представлена на рис. 3.9.



*Рисунок 3.9 Схема функциональных модулей программы для решения оптимизационной задачи с помощью метода параметризации*

Вывод полученных решений осуществляется в файл текстового формата типа csv, доступного для просмотра и редактирования пользователю. На рис. 3.10 представлены фрагменты результатов применения метода параметризации, размещенных в файле.

36	РЕЗУЛЬТАТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ				
37	THIS POINT IS				
38	z [ 0 ] = 7.252523e+004				
39	z [ 1 ] = 9.882230e-001				
40	z [ 2 ] = -2.743706e-004				
41	pk[0] = 1.000000e+000	The difference is: 27771.000000 seconds		Step of integration is : 0.000625	
42	ti	u1(ti)	x1(ti)	x2(ti)	x3(ti)
88	9.183673e-001	7.252523e+004	4.915131e+007	2.494981e+007	9.766
89	9.387755e-001	7.252523e+004	5.061698e+007	2.596629e+007	9.984
90	9.591837e-001	7.252523e+004	5.212821e+007	2.701315e+007	1.020
91	9.795918e-001	7.252523e+004	5.368639e+007	2.809133e+007	1.041
92	1.000000e+000	-2.743706e-004	5.522032e+007	2.920223e+007	1.050
93					

*Рисунок 3.10 Фрагменты результатов применения метода параметризации, размещенных в выходном файле*

### Выводы по главе 3

Для предлагаемых в предыдущей главе задач оптимизации рекламных расходов в виде системы интегральных уравнений Вольтерра в силу их нетривиальности требуются специальные методы решения. Для нахождения решения было предложено применить:

- модифицированный метод локальных вариаций;
- метод параметризации.

Относительно модифицированного метода локальных вариаций стоит отметить, что в исследовании [27] приведены необходимые условия сходимости метода локальных вариаций для задачи вариационного исчисления. Для поставленных задач данный вопрос остается открытым и может быть доработан в дальнейшем.

При этом, т.к. функция оптимальных рекламных расходов имеет релейный характер и принимает краевые значения допустимого множества на всем периоде планирования (см. необходимые условия оптимальности в главе 2), это означает, что шаг варьирования управления в случае применения модифицированного метода локальных вариаций может быть равен максимально допустимому значению управления с целью ускорения вычислительных процессов.

Метод параметризации разделяет проблему оптимизации задачи и вычислительную проблему, связанную с расчетом интегро-дифференциальных задач Коши для фазовой и сопряженной систем. Это позволяет для задачи нелинейного программирования определять небольшой набор переменных относительно аппроксимации в конечно-разностных схемах [23].

Также в настоящей главе описан комплекс программ, в рамках которого может решаться задача оптимизации рекламных расходов, сформулированная в рамках динамической модели рекламы с распределенными лагами запаздывания с линейным уравнением связи между

выручкой и накопленными воздействиями рекламы и предыдущих продаж, где предполагается постоянные длины интервалов воздействий предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж на всем периоде планирования.

Также в рамках комплекса программ разработана реализация решения для задачи оптимизации рекламных расходов, сформулированной в рамках динамической модели рекламы с распределенными лагами запаздывания с нелинейным уравнением связи между выручкой и накопленными воздействиями рекламы и предыдущих продаж. При этом начало воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж фиксировано.

## ГЛАВА 4. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЛАГАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

### 4.1 Вычислительный эксперимент с линейным уравнением выручки

Для тестирования предлагаемой модели использовалась поквартальная статистика, включающая в себя данные по выручке  $y(t)$  и расходам на рекламу  $u(t)$  за период с I квартала 2004 г. по III квартал 2013 г включительно, взяты данные компании ПАО «Мегафон» в миллионах рублей [14] (см. Приложение 1).

На первом этапе для выявления статистической связи между факторами и определения лагов запаздывания проводился корреляционный анализ. Степень тесноты статистической связи определяется между  $y(t)$  и  $u(t - \tau)$ ,  $\tau = 0, 1, \dots$ . Расчеты коэффициентов корреляции Пирсона и автокорреляции показали сильную линейную связь между  $y(t)$  и  $y(t - 1)$ ,  $y(t - 2)$ ,  $u(t)$ ,  $u(t - 1)$ ,  $u(t - 2)$  (см. таб. 4.1).

Таблица 4.1. Выборочные коэффициенты корреляции Пирсона и автокорреляции

лаг запаздывания, $\tau$	0	1	2
$corr(y(t), y(t - \tau))$	1	0,92	0,73
$corr(y(t), u(t - \tau))$	0,83	0,79	0,62

Из таблицы видно, что статистические связи между рекламой и продажами, а также между текущими и предыдущими продажами ослабевают по мере увеличения величины лага, что соответствует ранее сделанным предположениям.

В ходе проверки значимости параметров связи по  $t$ -критерию Стьюдента с вероятностью ошибки 3% была отвергнута гипотеза о том, что при нормальном распределении связь выручки и рекламных затрат отсутствует. С вероятностью существенно меньшей процента, была отвергнута гипотеза о том, что отсутствует связь между текущими и предыдущими значениями выручки.

Таким образом, исходя из анализа существенности связи, были определены начальные и конечные лаги запаздывания:  $\tau_{1u} = 0$ ,  $\tau_{2u} = 2$ ,  $\tau_{1y} = 1$ ,  $\tau_{2y} = 2$ .

На следующем этапе было сделано предположение о линейном виде правой части соотношения (1.3):

$$y(t) = a_1 v(t) + a_2 w(t) = a_1 \int_0^2 G_u(\tau) u(t - \tau) d\tau + a_2 \int_1^2 G_y(\tau) y(t - \tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Анализ линейной дискретной (по лагам запаздывания) регрессионной модели показал, что отдача от рекламного воздействия убывает, т.е. реакция на рекламу принимает максимальное значение практически сразу после выхода рекламного сообщения и оказывает меньшее влияние на последующие продажи. На рисунке 4.1 представлен аппроксимирующий дискретные лаги запаздывания график функции  $G_u(\tau)$ .

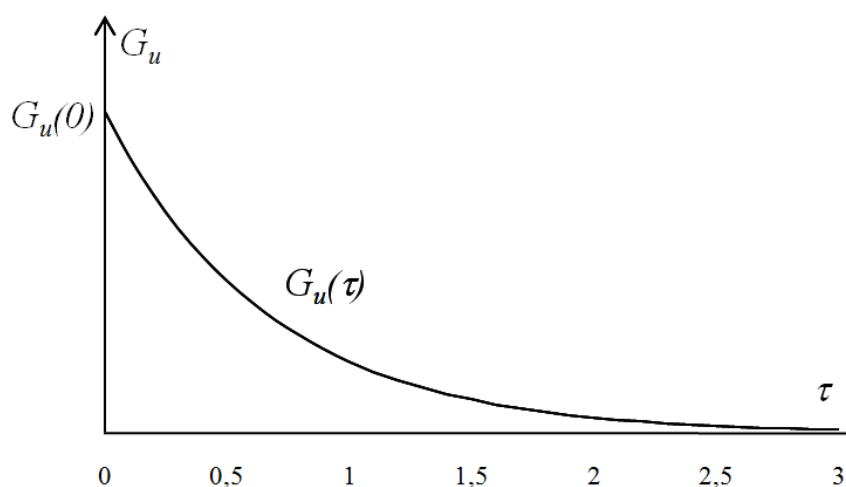


Рисунок 4.1 График аппроксимирующей функции  $G_u(\tau)$

Также монотонно убывающим оказалось влияние предыдущих продаж. На рис 4.2 представлен аппроксимирующий дискретные лаги запаздывания график функции  $G_y(\tau)$ .

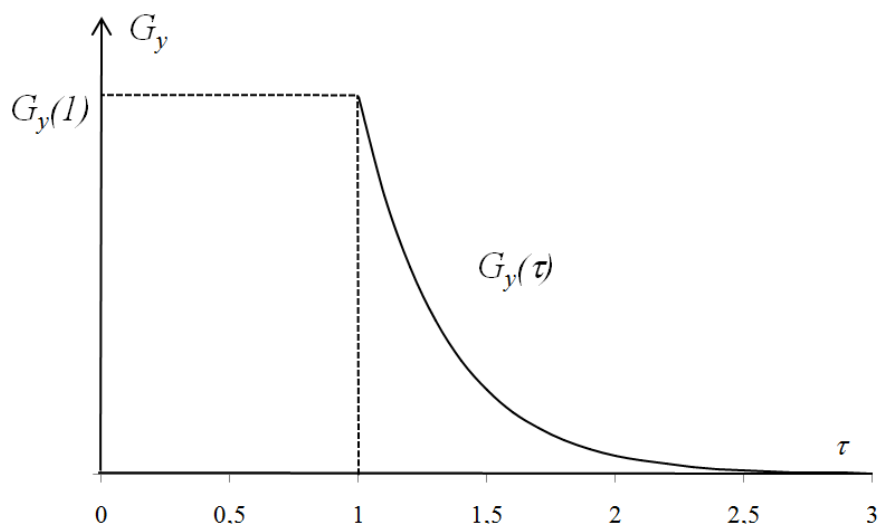


Рисунок 4.2 График аппроксимирующей функции  $G_y(\tau)$

Учитывая предположения относительно функций  $G_u(\tau)$  и  $G_y(\tau)$ , их реальное поведение в соответствии со статистическими данными, выберем следующее их параметрическое представление:

$$G_u(\tau) = a_u \exp(b_u \tau), \quad G_y(\tau) = a_y \exp(b_y \tau).$$

Введем параметры  $a_{1u} = a_1 a_u$ ,  $a_{2y} = a_2 a_y$ . Оценки параметров (4.1)  $\hat{a}_{1u}$ ,  $\hat{a}_{2y}$ ,  $\hat{b}_u$ ,  $\hat{b}_y$ , были определены методом наименьших квадратов:

$$y(t) = \int_0^2 2,87 \exp(-7,87\tau) u(t-\tau) d\tau + \int_1^2 3,05 \exp(-0,97\tau) y(t-\tau) d\tau.$$

Также исходя из фактических значений статистических данных, были определены функции  $\tilde{u}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$  как результат точечной аппроксимации:

$$\tilde{u}(t) = -0,09t + 2,06, \quad \tilde{y}(t) = 1,47t + 68,45.$$

Для нахождения оптимального распределения рекламных затрат на планируемом периоде разработана программа, реализующая применение

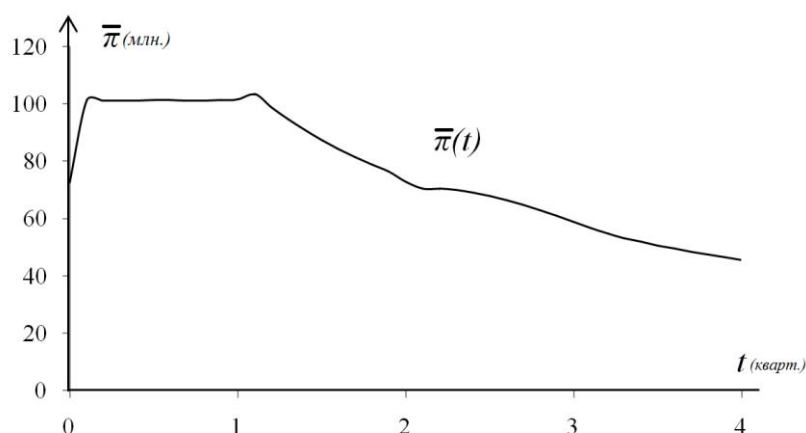
принципа максимума к оптимизационной задаче. Решения задачи находится в соответствии с программным кодом, написанным на языке C++ в среде разработки QT Creator. С описанием программы можно ознакомиться в главе 3.

Для вычислительного эксперимента в соответствии с данными фирмы определен максимальный объем рекламного потока  $b=2,4$ , выбран период планирования  $T=4$  квартала (или 1 год).

Численный анализ проводился с различными шагами дискретизации временного параметра. Во всех случаях решение задачи приводило к следующей структуре оптимального управления:

$$u(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq t^*, \\ 0, & t^* \leq t \leq T. \end{cases}$$

На следующем рисунке представлено распределение функционала на планируемом периоде при оптимальных рекламных расходах.



*Рисунок 4.3 Распределение функционала при оптимальных рекламных расходах*

Далее в таблице приведены результаты расчетов при оцененных значениях параметров  $\hat{a}_{1u} = 2,87$ ,  $\hat{b}_u = -7,87$ ,  $\hat{a}_{2y} = 3,05$ ,  $\hat{b}_y = -0,97$  и различных шагах дискретизации.



Таблица 4.2 Результаты решения при различных шагах дискретизации

шаг дискретизации	значение функционала (млн. рублей)	точка переключения управления (кварталов)
0,001000	640,119	3,57
0,000500	640,136	3,64
0,000250	640,142	3,70
0,000125	640,143	3,74

Решения, приведенные в таблице 4.2, подтверждают эмпирическое представление об оптимальной стратегии рекламных вложений: на первоначальном этапе производится максимальное вложение в рекламу, а в конце периода планирования финансирование снижается или прекращается.

Для проверки устойчивости полученного результата модели были проведены вариации параметров: каждая из найденных оценок параметров варьировалась на 10% в сторону уменьшения и увеличения, а затем находилось оптимальное решение при этих значениях параметров.

В таблице 4.3 приведены решения при различных значениях параметров и фиксированном шаге дискретизации 0,000125.

Таблица 4.3 Результаты решения при различных параметрах

$a_{1u}$	$a_{2y}$	$b_u$	$b_y$	значение функционала (млн. рублей)	точка переключения управления (кварталов)
$\hat{a}_{1u}$	$\hat{a}_{2y}$	$\hat{b}_u$	$\hat{b}_y$	640,143	3,742
$1,1\hat{a}_{1u}$	$\hat{a}_{2y}$	$\hat{b}_u$	$\hat{b}_y$	640,410	3,742

$a_{1u}$	$a_{2y}$	$b_u$	$b_y$	значение функционала (млн. рублей)	точка переключения управления (кварталов)
$0,9\hat{a}_{1u}$	$\hat{a}_{2y}$	$\hat{b}_u$	$\hat{b}_y$	639,876	3,742
$\hat{a}_{1u}$	$1,1\hat{a}_{2y}$	$\hat{b}_u$	$\hat{b}_y$	640,184	3,738
$\hat{a}_{1u}$	$0,9\hat{a}_{2y}$	$\hat{b}_u$	$\hat{b}_y$	639,870	3,745
$\hat{a}_{1u}$	$\hat{a}_{2y}$	$1,1\hat{b}_u$	$\hat{b}_y$	700,438	3,748
$\hat{a}_{1u}$	$\hat{a}_{2y}$	$0,9\hat{b}_u$	$\hat{b}_y$	586,203	3,736
$\hat{a}_{1u}$	$\hat{a}_{2y}$	$\hat{b}_u$	$1,1\hat{b}_y$	761,984	3,740
$\hat{a}_{1u}$	$\hat{a}_{2y}$	$\hat{b}_u$	$0,9\hat{b}_y$	571,539	3,743

Из таблицы 4.3 следует, что вариация параметров на 10 % меняет точку переключения управления не более, чем на 0,16%. При этом наиболее существенно на значение функционала влияют оценки параметров  $b_u$  и  $b_y$ . При увеличении оценки параметра  $b_u$  на 10%, значение функционала увеличивается на 9,47%, а при увеличении оценки параметра  $b_y$  – на 29,99 %. При уменьшении оценки параметра  $b_u$  на 10%, значение функционала снижается на 16,31%, а при уменьшении оценки параметра  $b_y$  – на 24,99 %. Это означает, что эконометрическое оценивание этих параметров следует проводить более тщательно.

Таким образом, проведенный численный анализ показал, что предлагаемая модель может быть применима для формирования эффективной стратегии управления рекламными расходами.

## 4.2 Вычислительный эксперимент с нелинейным уравнением выручки

Для тестирования данной модели использовались ежемесячные статистические данные по выручке и рекламным затратам (в рублях) одного из российских производителей одежды сегмента масс-маркет за период с января 2009 г. по июль 2014 г. (см. Приложение 2).

Предполагалось, что функция  $f(v, w)$  нелинейная относительно накопленных воздействий рекламных затрат и предыдущих продаж:

$$f(v, w) = \alpha v^{\beta_1} w^{\beta_2}$$

и представляется в следующем виде уравнения Вольтерра:

$$y(t) = \alpha \left( \phi_u(t) + \int_0^t G_u(t-s)u(s)ds \right)^{\beta_1} \left( \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s)y(s)ds \right)^{\beta_2}, \quad (4.2)$$

При этом был выбран фиксированный момент времени начала воздействия рекламных и нерекламных факторов.

В данной модели анализ дискретной регрессионной модели показал, что отдача от рекламного воздействия сначала монотонно возрастает до определенного момента, затем монотонно убывает, т.е. реакция на рекламу принимает максимальное значение спустя некоторое время после выхода рекламного сообщения, что соответствует представлению графика  $G_u(\tau)$  как на рис. 1.1.

Изменение воздействия предыдущих продаж относительно дискретных лагов запаздывания аналогичное. Это означает, что положительное мнение первых потребителей о товаре оказывает рост на его приобретения следующими потребителями. Однако оценка товара первыми потребителями со временем забывается, уступая место более актуальной оценке.

Таким образом, было выбрано следующее параметрическое представление функций  $G_u(\tau)$  и  $G_y(\tau)$ :

$$G_u(\tau) = \exp(a_u \tau^2 + b_u \tau),$$

$$G_y(\tau) = \exp(a_y \tau^2 + b_y \tau).$$

Оценки параметров (4.2) определялись методом наименьших квадратов:  $\hat{a}_u = -0,35$ ,  $\hat{b}_u = 0,97$ ,  $\hat{a}_y = 0$ ,  $\hat{b}_y = -1,37$ ,  $\hat{\beta}_1 = 0,16$ ,  $\hat{\beta}_2 = 0,93$ ,  $\hat{\alpha} = 1,38$ .

В данном случае  $0 < \hat{\beta}_1 < 1$ ,  $0 < \hat{\beta}_2 < 1$ , но  $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 > 1$ , т.е. функция  $f(v, w)$  не является вогнутой и может не удовлетворять условию Липшица по переменной  $w$ .

Рассмотрим нелинейное ограничение (4.2).

**Утверждение 4.1** Пусть функции  $G_u(\tau) \in C([0; t + \lambda])$ ,  $G_y(\tau) \in C([0; t + \lambda])$ , функция выручки (4.2) непрерывна и  $0 < \hat{\beta}_2 < 1$ , тогда для любой кусочно-непрерывной функции  $u(\cdot) \in U$  существует непрерывная единственная на этом отрезке функция  $w(t)$ , удовлетворяющая (1.11).

*Доказательство.* Согласно теореме 2.1, справедливо, что  $0 \leq v(t) \leq b_1$  для любой рекламной стратегии (1.4), т.е.

$$w(t) \leq \phi_y(t) + \alpha b_1^{\beta_1} \int_0^t G_y(t-s) w(s)^{\beta_2} ds.$$

Ведем функцию  $f(w) = w^{\beta_2}$ , которая в соответствии с полученной оценкой  $\hat{\beta}_2$  является вогнутой функцией, т.е. удовлетворяет условию Липшица по переменной  $w$ :  $|f(w_1) - f(w_2)| \leq L_w |w_1 - w_2|$ ,  $\forall w_1, w_2$ , где  $L_w$  - константа Липшица.

Следовательно, с учетом оператора  $A$ ,

$$Aw(t) \equiv \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s) \alpha v(s)^{\beta_1} w(s)^{\beta_2} ds,$$

и того, что  $M = \max_{0 \leq \tau \leq t + \lambda} G_y(\tau)$ , будет верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |Aw_1(t) - Aw_2(t)| &= \left| \int_0^t G_y(t-s) \alpha v(s)^{\beta_1} (w_1(s)^{\beta_2} - w_2(s)^{\beta_2}) ds \right| \leq \\ &\leq M \alpha b_1^{\beta_1} L_w t \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|. \end{aligned}$$

Если применим оператор  $k$  раз, получим:

$$|A^k w_1(t) - A^k w_2(t)| \leq \frac{(M \alpha b_1^{\beta_1} L_w t)^k}{k!} \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|.$$

Используя метрику в пространстве непрерывных функций

$$\rho(w_1, w_2) = \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|,$$

получаем соотношение:

$$\rho(A^k w_1, A^k w_2) \leq \frac{(MLt)^k}{k!} \rho(w_1, w_2).$$

Очевидно, что существует  $k$ :  $\frac{(MLt)^k}{k!} < 1$ . Это означает, что в рассматриваемой задаче оператор  $A^k$  также является сжимающим, следовательно, решение  $w(t)$  существует и единственно на отрезке  $[0; T]$ .  $\square$

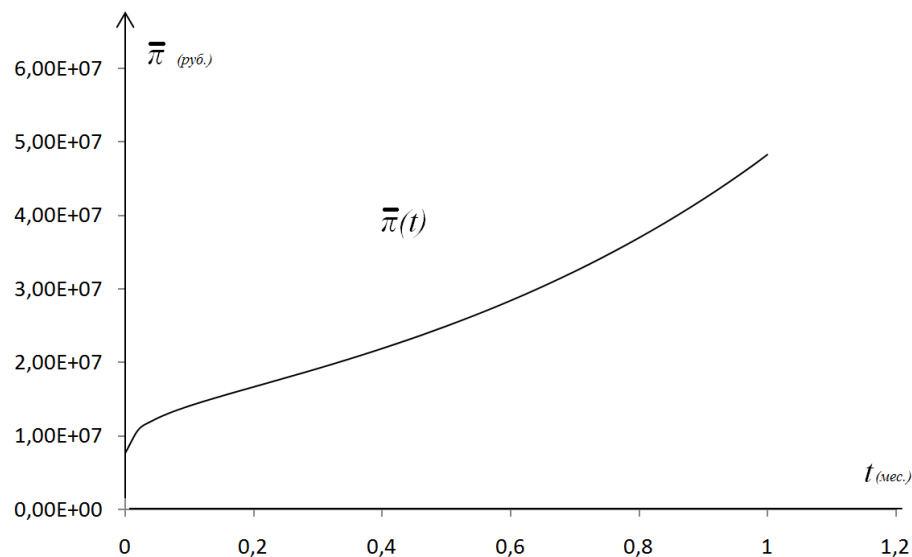
Таким образом, в соответствии с теоремой 2.2 существует единственное решение в рассматриваемой задаче оптимального управления рекламными расходами.

Для решения задачи оптимального управления был сформирован комплекс программ, реализующий модифицированный метод локальных вариаций и проверяющий полученное решение с помощью применения принципа максимума, а также численный метод параметризации. Решения оптимизационных задач в рамках практической реализации предлагаемых моделей были найдены в соответствии с программным кодом, написанным на языке C++ с использованием среды разработки QT. Описание комплекса программ представлено в главе 3.

Решения задачи при использовании модифицированного метода локальных вариаций и принципа максимума оказались идентичны. Это логично, т.к. для решения интегро-дифференциальных уравнений были применены одинаковые численные методы.

Для вычислительного эксперимента в соответствии с данными фирмы определен максимальный объем рекламного потока  $b = 72525$  рублей, выбран период планирования  $T = 1$  месяц.

На рис. 4.4 представлено распределение функционала на планируемом периоде при оптимальных рекламных расходах.



*Рисунок 4.4 Распределение функционала при оптимальных рекламных расходах.*

При этом применение модифицированного метода локальных вариаций и метода параметризации привело к одинаковой структуре оптимального управления:

$$u(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq t^*, \\ 0, & t^* \leq t \leq T. \end{cases}$$

В таблице ниже представлены полученные результаты решения задачи для планового месяца по каждому из методов.

Таблица 4.4 Результаты решения при использовании метода параметризации (МП) и модифицированного метода локальных вариаций (ММЛВ) при различных шагах дискретизации

Шаг дискретизации	Момент переключения		Значение функционала (руб.)		Время вычислительного процесса (сек.)	
	МП	ММЛВ	МП	ММЛВ	МП	ММЛВ
0,010000	0,98842	0,98000	$3,20378 \cdot 10^7$	$2,81215 \cdot 10^7$	36	6
0,005000	0,98842	0,98500	$3,01256 \cdot 10^7$	$2,86469 \cdot 10^7$	74	13
0,002500	0,98842	0,98750	$2,94799 \cdot 10^7$	$2,89185 \cdot 10^7$	263	78
0,001250	0,98842	0,98750	$2,92896 \cdot 10^7$	$2,90565 \cdot 10^7$	992	530
0,000625	0,98842	0,988125	$2,92387 \cdot 10^7$	$2,91261 \cdot 10^7$	3710	4555

Из таблицы 4.4 видно, что результаты вычислений функционала при использовании двух разных методов сходятся. Автор диссертационной работы допускает, что небольшие различия в значениях функционала и точки переключения могут возникать при использовании разных численных методов оптимизации и решения интегро-дифференциальных уравнений. В частности, в методе параметризации для определения сопряженных переменных  $p_x(t)$  и  $p_q(t)$  используется метод Рунге-Кутты второго порядка, а поиск оптимального управления в задаче нелинейного программирования осуществлялся методом наискорейшего спуска.

Решение задачи при более грубых численных расчетах при использовании модифицированного метода локальных вариаций занимает меньше времени. Это объясняется тем, что для применения метода параметризации необходимо свести представление оптимизационной задачи к виду с большей размерностью фазового пространства. При этом здесь

требуется численное решение задачи Коши (1.4), (3.3), задачи (3.12), (3.13), (3.14), определения функции Гамильтона-Понтрягина (3.11), также градиентов (3.15) и (3.16) в то время как для модифицированного метода локальных вариаций численно необходимо только определить интегральные слагаемые в (1.6), (1.10), (1.11), а для проверки решения принципом максимума необходимо решить задачу Коши (2.6), (2.7). Логично, что время вычислений при этом будет выше.

Отметим, что в модифицированном методе локальных вариаций наблюдается зависимость точности момента переключения от шага дискретизации  $\Delta t$ . Это может объясняться тем, что в методе параметризации  $\Delta t$  прямо участвует в расчете только сопряженной и фазовой переменных, при этом задачи Коши и задача нелинейного программирования решаются условно независимо друг от друга.

Время вычислительного процесса при использовании модифицированного метода локальных вариаций с уменьшением  $\Delta t$  растет быстрее, чем при использовании метода параметризации, т.к. решение задачи прямо зависит от  $\Delta t$ , и с его уменьшением увеличивается число варьируемых параметров, в то время как в методе параметризации их число не меняется. Таким образом, допускается существование такого шага дискретизации  $\Delta t^* > 0$ , при дальнейшем уменьшении которого, решение задачи с помощью метода параметризации потребует меньше времени, чем с помощью модифицированного метода локальных вариаций.

В качестве дополнительного эксперимента при использовании метода параметризации определены значения функционала, моменты переключения и время вычислительного процесса в отсутствии предположения о релейном характере управления. При этом в задаче оптимизации здесь также реализован метод Ньютона, после чего полученное решение уточнено методом наискорейшего спуска. Результаты оказались незначительно отличающимися от результатов предыдущего эксперимента. Они представлены в следующей таблице.



Таблица 4.5 *Результаты решения при использовании метода параметризации (МП) в отсутствие предположения о релейности управления*

Шаг дискретизации	Момент переключения	Значение функционала (руб.)	Время вычислительного процесса (сек.)
0,010000	0,98837	$3,19626 \cdot 10^7$	141
0,005000	0,98839	$3,00762 \cdot 10^7$	520
0,002500	0,98831	$2,94398 \cdot 10^7$	1902
0,001250	0,98823	$2,92524 \cdot 10^7$	8618
0,000625	0,98822	$2,92022 \cdot 10^7$	27771

Из представленных данных таблицы 4.5 можно сделать вывод, что несмотря на то, что время вычислений резко увеличилось, скорость его роста с уменьшением шага дискретизации падает и даже в этом случае может существовать такой  $\Delta t^* > 0$ , при дальнейшем уменьшении которого, решение задачи с помощью метода параметризации потребует меньше времени, чем с помощью модифицированного метода локальных вариаций.

## Выводы по главе 4

Модели, предложенные в главе 2, получили практическое подтверждение в ходе вычислительных экспериментов. Методы, предложенные в главе 3, оказались эффективны в решении поставленных задач.

Вычислительные процессы при применении модифицированного метода локальных вариаций занимают относительно много времени за счет большого числа варьируемых переменных, но данный метод легче остальных в плане реализации, требует меньшей теоретической подготовки от исследователя.

Принцип максимума удобен для задач с линейной зависимостью уровня продаж от функций накопленных рекламных и нерекламных воздействий, т.к. сопряженные функции в данном случае не зависят от фазовой функции, и решение может быть найдено без использования численных методов оптимизации.

Метод параметризации предполагает большей теоретической подготовленности исследователя, но работает быстрее за счет быстрой сходимости градиентного метода и меньшего количества переменных.

Для динамической модели рекламы с распределенным на фиксированном интервале запаздыванием с линейным уравнением связи между выручкой и накопленными воздействиями рекламы и предыдущих продаж проблема интегрирования исходной и сопряженных систем разделена с проблемой оптимизации. Полученное решение согласуется с ожидаемым, использование предлагаемой модели дает наилучшее в плане максимального финансового результата решение в сравнении с фактическим результатом за тот же период.

Для динамической модели рекламы с распределенным на переменном интервале запаздыванием с нелинейным уравнением связи между выручкой и накопленными воздействиями рекламы и предыдущих продаж было

получено решение с помощью модифицированного метода локальных вариаций, которое затем было проверено в рамках применения принципа максимума к задаче, что дало тот же результат. Также был применен метод параметризации. Решение при этом незначительно отличается от предыдущих результатов, что может объясняться применением различных численных методов оптимизации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенной работы можно сделать вывод о том, что оптимальное управление рекламными расходами фирмы, которые при этом могут быть направлены на использование различных медиаканалов, предполагает при разработке стратегии учет множества влияющих на потребительский спрос факторов. Воздействие рекламных и нерекламных факторов потребительского спроса, как правило, распределено во времени и имеет непостоянную интенсивность воздействия в зависимости от давности прошлых продаж и затраченных средств на рекламу. При этом накопленные влияния таких факторов могут зависеть от длительности пользования продуктом. Учет совокупности всех этих особенностей в процессе разработки математических моделей рекламы предлагается впервые. Все поставленные задачи, касающиеся сформулированных моделей, были решены, и к основным результатам можно отнести следующее:

- 1) исследованы математические модели рекламных воздействий и выявлены некоторые нерешенные вопросы в области моделирования рекламной деятельности;
- 2) разработан новый класс математических моделей экономической динамики, учитывающий на заданном временном периоде эффект распределенного запаздывания от воздействующих факторов на примере управления рекламными расходами;
- 3) сформулированы задачи оптимального управления рекламными расходами в рамках разработанных моделей и проведен анализ поставленных математических проблем;
- 4) разработаны алгоритмы численных методов решения задач оптимального управления с интегро-дифференциальными связями;

5) разработан комплекс программ для решения задач оптимального управления с эффектом распределенного запаздывания рекламными расходами от воздействующих факторов;

б) проведены численные эксперименты для верификации разработанных математических моделей.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьева, Е.В. Математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы, производящей однородную продукцию: автореф. дис. ... канд. ф.-м. наук: 05.13.18 / Е.В. Астафьева. – Томск, 2006. – 19 с.
2. Астафьева, Е.В. Модель рекламы компании с эффектом «надоедания» рекламы / Е.В. Астафьева, А.Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. Томск: Изд-во Том ун-та, 2004. - №284. – С. 34-36.
3. Ахмедова, Д.Д. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу / Д.Д. Ахмедова, А.Ф. Терпугов // Изв. вузов. Физика, 2001. - №1. – С. 25-28.
4. Ахмедова, Д.Д. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу / Д.Д. Ахмедова, О.А. Змеев, А.Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. Томск: Изд-во Том ун-та, 2002. - №275. – С. 181-185.
5. Берндт, Э.Р. Практика эконометрики: классика и современность : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям 060000 – экономика и управление / Э.Р. Берндт ; пер. с англ. под ред. С. А. Айвазяна. – М.: ЮНИТИ-ДИАНА, 2005. – 863 с.
6. Бузин, В.Н. Медиапланирование как управленческая технология повышения эффективности информационной компании: автореф. дис. ... канд. соц. наук : 22.01.18 / В.Н. Бузин. – М., 2008. – 154 с.
7. Бузин, В.Н. Медиапланирование для практиков / В.Н. Бузин, Т.С. Бузина. – М. : Вершина, 2006. – 448 с.
8. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. - М.: Наука, 1981. – 400 с.
9. Горбунов, В.К. Метод параметризации задач оптимального управления / В.К. Горбунов // Журн. вычисл. математики и мат. Физики. – 1979. – Т.19, №2. – С. 292-303.

10. Горбунов, В.К. Методы редукции неустойчивых вычислительных задач: монография / В.К. Горбунов – Фрунзе: Илим, АН Кирг. ССР, 1984.
11. Горбунов, В.К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным / В.К. Горбунов // Журн. вычисл. математики и мат. Физики. – 1978. – Т.18, №5. – С. 1083-1095.
12. Горбунов, В.К. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации / В.К. Горбунов, И.В. Лутошкин // Изв. РАН. Сер.: Теория и системы управления. – 2004. – №5. – С. 67-84.
13. Дмитрук, А.В. Необходимые условия слабого минимума в задачах с интегральными уравнениями / А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский // Труды 12 всероссийского совещания по проблемам управления. – Москва: ИПУ РАН, 2014. – С. 709-713.
14. Ежеквартальные отчеты ПАО «Мегафон». URL: [http://corp.megafon.ru/investoram/disclosure/quarterly\\_reports](http://corp.megafon.ru/investoram/disclosure/quarterly_reports) (дата обращения: 01.10.2013)
15. Казаков В.В. Оптимальное управление расходами на рекламу с учетом сезонности спроса / В.В. Казаков, В.Н. Савиных // Вестник Томского государственного университета. – 2014. – № 379. – С. 160-165.
16. Кац, В.М. Исследование математических моделей страхования для при нестационарных потоках страховых премий с интенсивностью, зависящей от капитала : дис. ... канд. ф.-м. наук :05.13.18 / В.М. Кац. – Томск, 2003. – 129 с.
17. Кац, В.М. Оптимальное управление расходами на рекламу / В.М. Кац, К.И. Лившиц // Вестник ТГПУ. Сер. Экономика. – 2003. – Т.7, №5. – С. 62-64.
18. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 302 с.
19. Лутошкин, И.В. Метод параметризации и его использование в вырожденных задачах : дис. ... канд. ф.-м. наук :01.01.09 / И.В. Лутошкин. – Ульяновск, 2000. – 107 с.

20. Лутошкин, И.В. Метод параметризации для моделирования управляемых систем с точечным запаздыванием / И.В. Лутошкин, А.И. Тонких // Автоматизация процессов управления. – 2010. – № 4. – С. 21-25.
21. Лутошкин, И.В. Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями / И.В. Лутошкин, И.Е. Дергунов // Тр. СВМО. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 116-126.
22. Лутошкин, И.В. Моделирование отдачи от частоты рекламных воздействий / И.В. Лутошкин // Прикл. Эконометрика. – 2010. – Т. 19, № 3. – С. 101-111.
23. Лутошкин, И.В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации / И.В. Лутошкин // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 44-56.
24. Лутошкин, И.В. Сравнение продаж продукции различных видов в зависимости от рекламных воздействий / И.В. Лутошкин, Е.В. Мартыненко // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством. – 2015. – Т. 3, № 25. – С. 113-121.
25. Лутошкин, И.В. Математические модели рекламных воздействий: учеб. пособие / И.В. Лутошкин. – Ульяновск : УлГУ, 2016. – 94 с.
26. Основы теории оптимального управления : учеб. пособие для экон. вузов / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов [и др.]. – М.: Высш. шк., 1990. – 461 с.
27. Черноусько, Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы) / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1973. – 236 с.
28. Швец, Д. Д. Моделирование и оптимизация рекламных расходов / Д. Д. Швец, Н. И. Фоминов, В. И. Чернышев // EurasiaScience: сб. ст. XIV международной научно-практической конференции. - Москва: НИЦ «Актуальность.РФ». – 2018. – 220 с.
29. Bakke, V.L. A maximum principle for an optimal control problem with integral constraints / V.L. Bakke // JOTA. – 1974. – Vol. 13. – P. 32-55.



30. Bonnas, J.F. Optimal control of state constrained integral equation / J.F. Bonnas, C. De La Vega // *Set-Valued and Var. Analysis.* – 2010. – Vol. 18, №3. – P. 307-326.
31. Buratto, A. Advertising a new product in a segmented market / A. Buratto, L. Grosset, B. Viscolani // *European Journal of Operational Research.* – 2006. – Vol. 175, №3. – P. 1262-1267.
32. Buratto, A. Advertising channel selection in a segmented market / A. Buratto, L. Grosset, B. Viscolani // *Automatica.* – 2006. – Vol. 42, №8. – P. 1343–1347.
33. Buratto, A. Coordination of advertising strategies in a fashion licensing contract / A. Buratto, G. Zaccour // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 2009. - Vol. 142, №1. – P. 31–53.
34. Caulkins J.P. Interaction of Pricing, Advertising and Experience Quality: A Dynamic Analysis / J.P. Caulkins, G. Feichtinger, D. Grass, R.F. Hartl, P.M. Kort and A. Seidl // *European Journal of Operational Research.* – 2016. – Vol. 256, №3. – P. 877-885.
35. Chutani A. Dynamic cooperative advertising under manufacturer and retailer level competition / A. Chutani, S. Sethi // *European Journal of Operational Research.* – 2018. – Vol. 268, №2. – P. 635-652.
36. De la Vega, C. Necessary conditions for optimal terminal time control problems governed by a Volterra integral equation / C. De la Vega // *JOTA.* - 2006.– Vol. 130, №1.–P. 79-93.
37. Deal, K.R. Optimizing advertising expenditures in a dynamic duopoly / K.R. Deal // *Operations Research.* – 1979. – Vol. 27, №4. – P. 682-692.
38. Erickson, G.M. A differential game model of the marketing-operations interface / G.M. Erikson // *European Journal of Operational Research.* – 2011. – Vol. 211, №2. – P. 394-402.
39. Feichtinger, G. Dynamic optimal control models in advertising: Recent developments / G. Feichtinger, R.F. Hartl, S.P. Sethi // *Management Science.* – 1994. – Vol. 40, №2. – P. 196-226.

40. Fershtman, C. Goodwill and market shares in oligopoly / C. Fershtman // *Economica*. – 1984. – Vol. 51, №203. – P. 271-281.
41. Fershtman, C. Market share pioneering advantage: A theoretical approach / C. Fershtman, M. Vijay, M. Eitan // *Management Science*. – 1990. – Vol. 36. №8. – P. 900-918.
42. Filatova, D. Optimal control problems with integral equation as control object / D. Filatova, M. Grzywaczewski, N. Osmolovkii // *Nonlinear Analysis*. – 2010. – Vol. 72. – P. 1235-1246.
43. Fruchter, G. E. Signaling quality: Dynamic price-advertising model / G.E. Fruchter // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 2009. – Vol. 143, №3. – P. 479-496.
44. Giovanni, P.D. Quality improvement vs. advertising support: Which strategy works better for a manufacturer? / P.D. Giovanni // *European Journal of Operational Research*. – 2011. – Vol. 208, №2. – P. 119-130.
45. Gorbunov, V.K. A parametrization method for the numerical solution of singular differential equations / V.K. Gorbunov, I.V. Lutoshkin, Y.V. Martynenko // *Applied Numerical Mathematics*. – 2009. – №59. – P. 639-655.
46. Gorbunov, V. K. The parameterization method in optimal control problems and differential-algebraic equations / V.K. Gorbunov, I.V. Lutoshkin // *Journal of computational and applied mathematics*. – 2006. – Vol. 185, №2. – P. 377-390.
47. Gorbunov, V.K. The parameterization method in singular differential-algebraic equations / V. Gorbunov, I.V. Lutoshkin // *Computational Science (ICCS 2003)* / eds. P. Slot [et al.]. – LNCS 2658. – Springer, 2003. – P. 483-491.
48. Granger, C.W.J. Investigating causal relations by econometric model and cross-spectral methods / C.W.J. Granger // *Econometrica*. – 1969. – Vol. 37, №3. – P. 424-438.
49. Hausman, J.A. Specification Tests in Econometrics / J.A. Hausman // *Econometrica*. – 1978. – Vol. 46, № 6. – P. 1251-1271.

50. He, X.L. Retail competition and cooperative advertising / X.L. He, A. Krishnamoorthy, A. Prasad, S.P. Sethi // *Operations Research Letters*. – 2011. – Vol. 39, №1. – P. 11-16.
51. Jiang, H. Effects of Internet Sales Promotion on a Differential Advertising Model / H. Jiang, J. Ma // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. – 2018. – Vol. 2018. – P. 1-11.
52. Kotowitz, Y. Advertising, consumer information and product quality / Y. Kotowitz Y, Mathewson F. *Bell Journal of Economics*. – 1979. - Vol. 10, №2. –P. 566-558.
53. Leitmann, G. Profit maximization through advertising: A nonzero sum differential game approach / G. Leitmann, W.E. Schmitendorf // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1978. – Vol. 23, №4. – P. 645-650.
54. Mesak, H.I. On the superiority of pulsing under a concave advertising market potential function / H.I. Mesak, T.S. Ellis // *European Journal of Operational Research*. – 2009. – Vol. 194. – P. 608-627.
55. Mesak, H.I. An aggregate advertising pulsing model with wearout effects / Mesak H.I. // *Marketing Science*. – 1992. – Vol. 11, №3. –P. 310-325.
56. Mosca, S. Optimal goodwill path to introduce a new product / S. Mosca, B. Viscolani // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 2004. – Vol. 123, №1.–P. 149-162.
57. Muhajan, V. Advertising pulsing policies for generating awareness for new products / V. Muhajan, E. Muller // *Marketing Science*. – 1986. – Vol. 5, №2. – P. 89-106.
58. Mukundan, R. Linear feedback strategies in non-zero-sum differential game / R. Mukundan, W.B. Elsner // *International Journal of System Science*. – 1975. – Vol. 6, №6. – P. 513-532.
59. Nerlove, M. Optimal advertising policy under dynamic conditions / M. Nerlove, K.J. Arrow // *Economica*. – 1962. –Vol. 29, №114. –P.129-142.

60. Pauwels, W. Optimal dynamic advertising policies in the presence of continuously distributed time lags / W. Pauwels // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 1977. – Vol. 22, №1. – P. 79-89.
61. Reddy, P.V. Quality effects in different advertising models - An impulse control approach / P.V. Reddy, S. Wrzaczek, G. Zaccour // *European Journal of Operational Research*. – 2016. Vol. 255. № 2. – P. 984-995.
62. Sethi, S.P. Optimal advertising and pricing in a new-product adoption model / S.P. Sethi, A. Prasad, X. He // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 2008. – Vol. 139, №2. – P. 351-360.
63. Sethi, S.P. Optimal control of a logarithmic advertising model / S.P. Sethi // *Operational Research Quarterly*. – 1975. – Vol. 26, №2. – P. 317-319.
64. Vidale, M.L. An operations-research study of sales response to advertising / M. L. Vidale, Wolfe H.B. // *Operations Research*. – 1957. – Vol. 5, №3. – P. 370-381.
65. Zhang, Q. A dynamic advertising model with reference price effect / Q. Zhang, J. Zhang, W. Tang // *RAIRO - Operations Research*. – 2015. – Vol. 49, №4. – P. 669-688.

#### **Работы автора по теме диссертации**

66. Лутошкин, И.В. Динамическая модель распределения рекламного бюджета между несколькими медиаканалами / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // *Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы: сб. трудов шестой всерос. науч. конф.* – Ульяновск: УлГУ, 2016. – С. 38-40.
67. Лутошкин, И.В. Инновационные инструменты управления рекламной кампанией фирмы / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // *Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы: сб. трудов седьмой всерос. науч. конф.* – Ульяновск: УлГУ, 2017. – С. 20-21.
68. Лутошкин, И.В. Модель оптимизации рекламных расходов с учетом распределенного запаздывания / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова //

Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании. Математика и статика: сб. тр. IV Междунар. науч.-практ. конф. (2 июня 2015, г. Тверь). – Тверь: Тверс. гос. ун-т, 2015. – С. 84-89.

69. Лутошкин, И.В. Применение принципа максимума в задаче управления рекламными расходами / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Симбирский научный вестник. – 2016. – Т. 4, №22. – С. 111-116.

70. Лутошкин, И.В. Принцип максимума в задаче управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Журн. Средневолж. мат. общества. – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 96-104.

71. Лутошкин, И.В. Существование решения задачи управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2016. – Т. 18.-С. 48-59.

72. Лутошкин, И.В. Численный анализ динамической модели рекламных расходов / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: материалы VII всерос. науч. конф. имени Е.В. Воскресенского (12-15 июля 2016, г. Саранск). – Саранск: СВМО, 2016. – С. 61-62.

73. Лутошкин, И.В. Численный анализ динамической модели рекламных расходов / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Международный молодежный симпозиум по управлению, экономике и финансам: сб. научных статей. – Казань: Изд-во Казан.ун-та, 2016. – С. 416-419.

74. Ямалтдинова Н.Р., Лутошкин И.В. Численные методы решения задач оптимизации рекламных затрат в динамических моделях рекламных затрат с распределенным запаздыванием. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2018662134. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка №2018619515 от 10.09.2018.

75. Ямалтдинова, Н.Р. Математическая модель рекламной кампании фирмы / Н.Р. Ямалтдинова // Математические методы и интеллектуальные системы в экономике и образовании: материалы Всерос. заоч. научно-практич. конф. (декабрь 2017, г. Ижевск). – Ижевск: Институт экономики и управления ФГБОУ ВО «УдГУ», 2017. – С. 49-50.
76. Ямалтдинова, Н.Р. Анализ воздействия распределенных факторов на объем продаж / Н. Р. Ямалтдинова // Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании. Математика и статика: сб. тр. V Междунар. науч.-практ. конф. (31 мая 2016, г. Тверь). – Тверь: Тверс. гос. ун-т, 2016. – С. 118-122.
77. Lutoshkin, I.V. The dynamic model of advertising costs / I.V. Lutoshkin, N.R. Yamaltdinova // ECECSR Journal. – 2018. – Vol. 52, №1. – P. 201-214.
78. Lutoshkin, I.V. The Mathematical Model for Describing the Principles of Enterprise Management “Just in Time, Design to Cost, Risks Management” / I.V. Lutoshkin, S.V. Lipatova, Y.V. Polyanskov, N.R. Yamaltdinova, M.N. Yardaeva // Recent Research in Control Engineering and Decision Making. – 2019. – Vol. 199. – P. 682-695.
79. Lutoshkin, I.V. The dynamic model of advertising costs with continuously distributed lags / I.V. Lutoshkin, N.R. Yamaltdinova // CEUR-WS. – 2018. – Vol. 2018. – P. 103-112.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Поквартальные статистические данные ПАО  
«Мегафон» по выручке и рекламным затратам за период с I квартала 2004 г.  
по III квартал 2013 г. в млн. рублей.

Отчетная дата	Выручка, млн. руб.	Рекламные расходы, млн. руб.
Март 2004	7,890	0,509
Июнь 2004	9,959	0,583
Сентябрь 2004	12,121	0,706
Декабрь 2004	12,363	0,909
Март 2005	12,740	0,716
Июнь 2005	16,108	1,073
Сентябрь 2005	18,713	0,734
Декабрь 2005	20,294	1,108
Март 2006	19,720	0,932
Июнь 2006	23,161	0,971
Сентябрь 2006	28,548	1,038
Декабрь 2006	29,686	1,142
Март 2007	29,338	1,368
Июнь 2007	34,267	1,386
Сентябрь 2007	38,094	1,435
Декабрь 2007	38,694	1,997
Март 2008	37,789	1,473
Июнь 2008	42,420	1,978
Сентябрь 2008	46,801	1,788
Декабрь 2008	48,441	2,232
Март 2009	42,196	1,105
Июнь 2009	43,878	1,718
Сентябрь 2009	47,444	1,447
Декабрь 2009	48,365	1,930
Март 2010	46,743	1,507
Июнь 2010	52,215	1,634
Сентябрь 2010	57,566	1,574
Декабрь 2010	58,991	2,209
Март 2011	55,156	1,364
Июнь 2011	58,557	1,869
Сентябрь 2011	63,433	1,825
Декабрь 2011	65,456	2,379
Март 2012	63,104	1,960

Отчетная дата	Выручка, млн. руб.	Рекламные расходы, млн. руб.
Июнь 2012	66,760	2,060
Сентябрь 2012	71,234	2,145
Декабрь 2012	71,539	1,971
Март 2013	70,311	1,680
Июнь 2013	72,230	1,751
Сентябрь 2013	77,543	1,731



Приложение 2. Ежемесячные статистические данные по выручке и рекламным затратам (в рублях) фирмы за период с января 2009 г. по июль 2014 г.

Отчетная дата	Выручка, руб.	Рекламные расходы, руб.
Январь 2009	7 664 239,44	15 642,50
Февраль 2009	8 147 945,52	15 926,40
Март 2009	8 390 261,88	16 021,20
Апрель 2009	11 610 923,94	15 162,67
Май 2009	12 209 301,72	15 126,73
Июнь 2009	12 209 301,72	15 051,37
Июль 2009	11 348 324,46	13 739,87
Август 2009	12 050 547,30	13 562,17
Сентябрь 2009	11 699 435,88	13 236,67
Октябрь 2009	12 307 442,40	13 795,13
Ноябрь 2009	12 066 403,14	14 626,20
Декабрь 2009	11 463 249,60	15 281,07
Январь 2010	8 534 889,00	14 188,87
Февраль 2010	9 073 765,80	16 488,80
Март 2010	9 343 204,20	18 325,60
Апрель 2010	12 948 873,30	18 861,63
Май 2010	13 616 134,29	18 738,40
Июнь 2010	13 616 134,29	18 582,90
Июль 2010	12 646 891,62	17 939,70
Август 2010	13 429 402,47	17 404,27
Сентябрь 2010	13 038 417,81	16 240,70
Октябрь 2010	13 731 275,25	16 314,93
Ноябрь 2010	13 462 119,00	18 119,50
Декабрь 2010	12 788 869,50	19 615,00
Январь 2011	9 513 504,00	18 211,60
Февраль 2011	10 114 156,80	18 421,27
Март 2011	10 414 483,20	18 555,13
Апрель 2011	14 433 457,50	19 349,77
Май 2011	15 177 219,75	18 754,40
Июнь 2011	15 177 219,75	18 873,47
Июль 2011	14 095 536,84	19 544,97
Август 2011	14 967 041,76	18 943,57
Сентябрь 2011	14 531 289,30	19 063,83
Октябрь 2011	15 286 097,97	19 482,43
Ноябрь 2011	14 986 201,23	18 883,00

Отчетная дата	Выручка, руб.	Рекламные расходы, руб.
Декабрь 2011	14 236 459,38	19 002,87
Январь 2012	11 701 609,92	27 843,65
Февраль 2012	5 562 786,24	28 348,99
Март 2012	8 644 021,06	28 517,74
Апрель 2012	11 979 769,73	26 989,55
Май 2012	12 597 092,39	26 925,58
Июнь 2012	14 418 358,76	26 791,44
Июль 2012	13 390 760,00	24 456,97
Август 2012	14 218 689,67	24 140,66
Сентябрь 2012	13 804 724,84	23 561,27
Октябрь 2012	10 241 685,64	24 555,33
Ноябрь 2012	10 040 754,82	26 034,64
Декабрь 2012	9 538 427,78	27 200,30
Январь 2013	8 278 842,33	25 256,19
Февраль 2013	8 801 552,83	29 350,06
Март 2013	9 062 908,07	32 619,57
Апрель 2013	12 560 407,10	46 776,84
Май 2013	13 207 650,26	46 471,23
Июнь 2013	21 377 330,84	46 085,59
Июль 2013	19 855 619,84	44 490,46
Август 2013	21 084 161,88	43 162,59
Сентябрь 2013	20 470 315,96	40 276,94
Октябрь 2013	21 558 102,14	40 461,03
Ноябрь 2013	21 135 526,83	44 936,36
Декабрь 2013	20 078 525,12	48 645,20
Январь 2014	17 091 253,95	45 164,77
Февраль 2014	18 169 918,51	51 211,13
Март 2014	18 710 283,99	51 583,26
Апрель 2014	25 892 360,39	53 792,36
Май 2014	27 226 742,84	52 137,23
Июнь 2014	27 226 742,84	52 468,25
Июль 2014	25 306 763,55	54 335,02

### Приложение 3. Фрагмент кода программы для реализации модифицированного метода локальных вариаций

```

void itteraziya()
{
    int i;
    time_t first_locvar, second_locvar, first_pm, second_pm;
    first_locvar = time(NULL);
    v();
    wandvyruchka();
    Sum_Pribyl();
    sump1=sum_pribyl*h;
    for(i=0;i<diskr+1;i++)
    {
        u0[i]=u[i];
        v();
        wandvyruchka();
        Sum_Pribyl();
        sump=sum_pribyl*h;
        u[i]=u0[i]+H;
        if(u[i]<0.01)
        {
            u[i]=0.01;
        }
        if(u[i]>budget)
        {
            u[i]=budget;
        }
        up[i]=u[i];
        v();
        wandvyruchka();
        Sum_Pribyl();
        sump1=sum_pribyl*h;
        u[i]=u0[i]-H;
        if(u[i]<0.01)
        {
            u[i]=0.01;
        }
        if(u[i]>budget)
        {
            u[i]=budget;
        }
        um[i]=u[i];
        v();
        wandvyruchka();
        Sum_Pribyl();
        sumpm=sum_pribyl*h;
        u[i]=u0[i];
        if ((sumpp>sump) & (sumpp>sumpm))
        {
            u[i]=up[i];
        }
    }
}

```

```

        um[i]=up[i];
        sump2=sumpp;
    }
    else if ((sumpm>sump)&(sumpm>sumpp))
    {
        u[i]=um[i];
        up[i]=um[i];
        sump2=sumpm;
    }
    else if ((sump>=sumpp)&(sump>=sumpm))
    {
        um[i]=u[i];
        up[i]=u[i];
        sump2=sump;
    }
}
while ((fabs(sump1-sump2)>eps))
{
    count+=1;
    itteraziya();
}
cout<<"sum_loc_var="<<sump2<<endl;
second_locvar = time(NULL);

cout<<"vremya_rasscheta_dlya_locvar="<<difftime(second_locvar,fi
rst_locvar)
<<endl;
    first_pm = time(NULL);
    v();
    wandvyruchka();
    for(i=0;i<diskr+1;i++)
    {
        prib0[i]=prib[i];
    }
    reshenie();
    for(i=0;i<diskr+1;i++)
    {
        u[i]=u0[i];
    }
    Pereclyuchenie();
    second_pm = time(NULL);

cout<<"vremya_rasscheta_dlya_pm="<<difftime(second_pm,first_pm)<
<endl;
}

```