На правах рукописи

Ямалтдинова Наиля Ринатовна

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕКЛАМНЫХ РАСХОДОВ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА РАСПРЕДЕЛЕННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ульяновск – 2019

Работа выполнена на кафедре цифровой экономики в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ульяновский государственный университет»

Научный руководитель	– **Лутошкин Игорь Викторович,** кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты	– **Бронштейн Ефим Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет», кафедра вычислительной математики и кибернетики, профессор кафедры – **Мамедова Татьяна Фанадовна**, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва», кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, доцент кафедры
Ведущая организация	– ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Защита диссертации состоится 30 октября 2019 г. в 14-00 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.278.02 при ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет», расположенном по адресу: г. Ульяновск, ул. Набережная р. Свияги, 106, корп. 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа http://www.ulsu.ru, с авторефератом – на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации http://vak.minobrnauki.gov.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 432970, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, д. 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан «___»___________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Волков М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Эффективное управление рекламными расходами позволяет любой фирме за короткое время при небольших издержках увеличить объем продаж даже без внесения изменений в производственный процесс.

Очевидно, что помимо рекламы существуют и другие внутренние и внешние факторы, влияющие на объемы продаж. В существующих на сегодняшний день математических моделях рекламы учитываются ценовые характеристики[1,2,3], качество товара[4,5], ограниченность наращивания товарооборота[6], влияние других участников рынка[7], сезонность спроса[8]. Однако кроме перечисленных факторов, существует множество других контролируемых и неконтролируемых фирмой причин изменения уровня продаж, учет которых в процессе разработки рекламной стратегии не менее важен.

Также важно отметить, что продвижение конкретного продукта может осуществляться с помощью различных по эффективности и длительности воздействия видов рекламы.

Очевидно, что рекламные сообщения редко вызывают мгновенную потребительскую реакцию. В то же время эффект рекламного воздействия может сохраняться некоторое время после выхода такого сообщения. Следовательно, при разработке рекламной стратегии должна быть учтена возможность распределенного с последействием запаздывания реакции потребителей.

В процессе анализа открытых печатных источников, посвященных вопросам моделирования рекламы, было выяснено, что некоторые проблемы

---

[1] Швец, Д. Д. Моделирование и оптимизация рекламных расходов / Д. Д. Швец, Н. И. Фоминов, В. И. Чернышев // EurasiaScience: сб. ст. XIV международной научно-практической конференции. - Москва: НИЦ «Актуальность.РФ». – 2018. – 220 с.

[2] Zhang, Q. A dynamic advertising model with reference price effect / Q. Zhang, J. Zhang, W. Tang // RAIRO - Operations Research. – 2015. – Vol. 49, №4. – P. 669-688.

[3] Caulkins J.P. Interaction of Pricing, Advertising and Experience Quality: A Dynamic Analysis / J.P. Caulkins, G. Feichtinger, D. Grass, R.F. Hartl, P.M. Kort and A. Seidl // European Journal of Operational Research. – 2016. – Vol. 256, №3. – P. 877-885.

[4] Reddy P.V. Quality effects in different advertising models - An impulse control approach / P.V. Reddy, S. Wrzaczek, G. Zaccour // European Journal of Operational Research. – 2016. – Vol. 255, № 2. – P. 984-995.

[5] Giovanni, P. D. Quality improvement vs. advertising support: Which strategy works better for a manufacturer? / P. D. Giovanni // European Journal of Operational Research. – 2011. – Vol. 208, №2. – P. 119-130.

[6] Jiang, H. Effects of Internet Sales Promotion on a Differential Advertising Model / H. Jiang, J. Ma // Discrete Dynamics in Nature and Society. – 2018. – Vol. 2018. – P. 1-11.

[7] Chutani A. Dynamic cooperative advertising under manufacturer and retailer level competition / A. Chutani, S. Sethi // European Journal of Operational Research. – 2018. – Vol. 268, №2. – P. 635-652.

[8] Казаков В.В. Оптимальное управление расходами на рекламу с учетом сезонности спроса / В.В. Казаков, ВН. Савиных // Вестник Томского государственного университета. – 2014. – № 379. – С. 160-165.

остаются нерешенными. В частности, вопросы о характере непрерывно распределенного запаздывания отдачи от воздействия рекламных и нерекламных факторов, о зависимости интенсивности данных воздействий от близости к текущему моменту времени, о влиянии длительности использования товара на отдачу от рекламы, о возможности разработки рекламной стратегии новой фирмы, о возможности использования различных видов рекламы в моделях, учитывающих непрерывно распределенное запаздывание отдачи от факторов.

Объектом исследования являются динамические управляемые системы экономики, учитывающие распределенный характер управляющих воздействий и фазового состояния.

Предметом исследования являются математические модели, алгоритмы и программное обеспечение, обеспечивающие анализ рекламной деятельности фирмы и построение оптимальной рекламной стратегии с учетом распределенного воздействия факторов.

Целью исследования является разработка нового класса математических моделей экономической динамики с учетом распределенного запаздывающего эффекта от факторов воздействия, их качественный анализ, практическая реализация численных алгоритмов анализа моделей на примере управления рекламными расходами.

Исходя из поставленной цели, формулируются требующие решения следующие **задачи**:

1. исследовать математические модели рекламных воздействий с целью выявления некоторых нерешенных вопросов в области моделирования рекламной деятельности;
2. разработать математические модели экономической динамики, предлагающие решение вопроса об их оптимальном распределении на заданном периоде планирования с учетом запаздывания отдачи от факторов, на примере воздействий рекламы и предыдущих продаж;
3. сформулировать задачи оптимального управления рекламными расходами в рамках разработанных моделей и провести анализ поставленных математических проблем;
4. разработать алгоритмы численных методов решения задач оптимального управления с интегро-дифференциальными связями;
5. разработать комплекс программ для решения задач оптимального управления рекламным расходами на заданном периоде планирования с учетом запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж;
6. провести численные эксперименты для верификации разработанных моделей.

Методы исследования. При решении поставленных в работе задач использовались методы математического моделирования, методы теории оптимального управления, численные методы решения интегро-дифференциальных, интегральных уравнений, динамических оптимизационных задач, методы программирования.

Научная новизна. В диссертационной работе разработан новый класс математических моделей экономической динамики, в рамках предлагаемых моделей сформулированы задачи оптимального управления, для которых доказано существование решений и найдены необходимые условия их оптимальности. Также разработаны алгоритмы и комплекс программ для решения поставленных задач.

Положения, выносимые на защиту:

1. Новые математические модели экономической динамики, учитывающие на заданном временном периоде эффект распределенного запаздывания от воздействующих факторов со связями в виде уравнений Вольтерра.
2. Модификация метода локальных вариаций, позволяющая найти приближенное решение задачи оптимального управления с интегро-дифференциальными связями.
3. Теоремы, обосновывающие существование решений и необходимые условия в задачах оптимального управления, порожденных математическими моделями управления рекламными расходами.
4. Комплекс программ, позволяющий улучшить финансовый результат фирмы путем построения оптимальной рекламной стратегии, основанной на решении задач оптимального управления рекламными расходами с ограничениями в виде уравнений Вольтерра.

Достоверность приведенных в диссертационной работе результатов определяется корректным использованием теории моделирования, оптимального управления, численных методов и методов программирования.

Теоретическая значимость работы определяется разработкой нового класса моделей управления рекламными расходами, позволяющего учитывать при анализе распределенный эффект рекламы и других факторов в непрерывном времени.

Практическая значимость работы. Практические результаты работы могут найти применение в деятельности фирм, активно проводящих рекламные кампании, заинтересованных в разработке оптимальных рекламных стратегий.

Внедрение результатов. Материалы диссертации используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» и отражены в учебно-методических комплексах по курсу «Реклама на рынке ИКТ» для студентов бакалавриата направления «бизнес-информатика».

Результаты работы использовались при создании модели управления инвестициями при выполнении государственного задания Министерства образования и науки РФ №2.1816.2017/4.6 по теме «Исследование и разработка интегрированной автоматизированной системы управления производственно-технологическим планированием авиастроительного предприятия на базе цифровых технологий».

Апробация основных положений диссертационной работы проведена на IV Международной научно-практической конференции «Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании» (Тверской государственный университет, 2 июня 2015 г.), на VII Всероссийской научной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского с международным участием (Национальный исследовательский мордовский государственный университет, 12-15 июля 2016 г), на V Международной научно-практической конференции «Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании» (Тверской государственный университет, 31 мая 2016 г.), на Международном молодежном симпозиуме по управлению, экономике и финансам (Казанский федеральный университет, 24-25 ноября, 2016 г.), на VI Всероссийской научной конференции с международным участием «Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы» (Ульяновский государственный университет, 2016 г.), на Всероссийской заочной научно-практической конференции «Математические методы и интеллектуальные системы в экономике и образовании» (Удмуртский государственный университет, декабрь 2017 г.), на семинаре «The Second Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2017)» (Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 10 ноября 2017 г.), на Международной научно-практическая конференции ICIT-2019 «Информационно-коммуникационные технологии в науке и производстве» (Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., 7-8 февраля 2019 г.).

Публикации. Всего по теме диссертации опубликовано 14 работ, в том числе 2 из списка, рекомендованного ВАК, 3 статьи в изданиях, проиндексированных в международной базе научного цитирования «Scopus», 8 работ в других рецензируемых журналах, сборниках конференций, симпозиумов и семинаров, 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все основные установленные в диссертации результаты получены соискателем самостоятельно. При этом разработка моделей, рассмотрение вопросов существования решений поставленных задач осуществлялась совместно с научным руководителем И.В. Лутошкиным.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка используемой литературы и трех приложений. Работа изложена на 102 страницах, содержит 15 рисунков, 6 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** раскрыта актуальность выбранной темы исследования, сформулированы цели и задачи, положения, выносимые на защиту, научная новизна, практическая значимость работы, приведены сведения об апробации результатов и публикациях.

В **первой главе** в **первом параграфе** проведен обзор существующих на сегодняшний день математических моделей рекламы. В частности выделены статистические модели (модели одновременности Э. Берндта, причинности К. Грэнжера, растянутых во времени эффектов Л. Койка и мультипликативная модель Нерлова-Вога), оптимизационные модели, предложенные зарубежными исследователями (модели Нерлова-Эрроу, Видаля-Вульфа, их расширения), а также рассмотрен ряд моделей отечественных исследователей. Также здесь выделены вопросы, остающиеся открытыми.

Во втором параграфе главы с учетом проанализированных существующих моделей рекламы и сформулированных замечаний предлагаются три математические модели рекламы.

Первая из них – это модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж.

Обозначим через $y(t)$ выручку фирмы, которая является денежным выражением величины спроса на рекламируемый товар и через $u(t)$ – величину рекламных затрат в момент времени t. Пусть задан период планирования $t \in [t_0; T]$. Не ограничивая общности, считаем, $t_0 = 0$.

Обозначим за $v(t)$ – функцию накопленного рекламного воздействия к моменту t, за $w(t)$ – функцию накопленного воздействия предыдущих продаж к моменту *t*. Запишем следующие уравнения накопленных воздействий рекламы и предыдущих продаж:

$$v(t) = \int_0^{t+\lambda} G_u(\tau)u(t-\tau)d\tau, \qquad (1)$$

$$w(t) = \int_0^{t+\lambda} G_y(\tau)y(t-\tau)d\tau, \qquad (2)$$

где $G_u(\tau)$, $G_y(\tau)$ – функции, определяющие весовой характер (интенсивность) воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж соответственно, τ – лаг запаздывания реакции потребителей на рекламные и нерекламные воздействия, λ – максимальное учитываемое запаздывание в момент $t = 0$.

Также здесь будем полагать, что известны фактические данные по рекламе и выручке до начала планируемого периода $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{y}(t)$: $\tilde{u}(t)$ – кусочно-непрерывная функция, $\tilde{y}(t)$ – непрерывная функция при $t < 0$, т.е. $u(t) = \tilde{u}(t)$ и $y(t) = \tilde{y}(t)$, для всех $t < 0$.

При рассмотрении других моделей обозначения этих функций будут сохранены. Для дальнейшего рассмотрения преобразуем (1) и (2).

Введем функции $\phi_u(t)$ и $\phi_y(t)$ такие, что:

$$\phi_u(t) = \int_{-\lambda}^{0} G_u(t-s)\tilde{u}(s)ds, \qquad (3)$$

$$\phi_y(t) = \int_{-\lambda}^{0} G_y(t-s)\tilde{y}(s)ds. \qquad (4)$$

Следовательно (1) и (2) могут быть преобразованы:

$$v(t) = \phi_u(t) + \int_0^t G_u(t-s)u(s)ds, \qquad (5)$$

$$w(t) = \phi_y(t) + \int_0^t G_y(t-s)y(s)ds. \qquad (6)$$

Выручка в момент времени *t* определяется соотношением:

$$y(t) = f(v(t), w(t)). \qquad (7)$$

Анализ вида функций $f(v,w)$, $G_u(\tau)$, $G_y(\tau)$ – проблема эконометрического анализа, учитывающая общую ситуацию на рынке, вид производимой продукции или представляемых услуг фирмой, относительную ограниченность спроса, наличие конкуренции и т. д.

При планировании рекламных инвестиций всегда выделяется фиксированный бюджет. Введем множество U_b, ограничивающее поток инвестиций в рекламу и множество рекламных стратегий U:

$$U_b = \{u \in R : 0 \le u \le b\},$$
$$U = \{u(\cdot):\ u(t) \in U_b, \quad t \in [0;T]\}. \qquad (8)$$

Составим задачу оптимального управления рекламными затратами фирмы. Для этого найдем текущую прибыль π в момент времени t:

$$\pi(y(t),u(t)) = y(t) - c(y(t),t) - u(t),$$

где $c(y(t),t) = c_1(y(t),t) + c_2(t)$, $c(y(t),t)$ – совокупные издержки за исключением рекламных затрат, $c_1(y(t),t)$ – переменные издержки, связанные с выпуском продукции (оказанием услуг), $c_2(t)$ – постоянные издержки, в общем случае определяемые временным трендом.

Пусть переменные издержки находятся в прямой зависимости от выпуска с постоянным коэффициентом μ, где μ – норма издержек на единицу выпуска: $c_1(y) = \mu y$.

В этом случае прибыль в момент времени t определяется:

$$\pi(y(t),u) = (1-\mu) f(v(t),w(t)) - u(t) - c_2(t),$$

и задача максимизация совокупной прибыли эквивалентна группе условий:

$$\overline{\Pi}(t) = \int_0^t \big((1-\mu) f(v(s),w(s)) - u(s)\big) ds, \qquad (9)$$

$$\overline{\Pi}(t) \to \max_{u \in U}. \qquad (10)$$

Таким образом, задача оптимального управления рекламными затратами фирмы задается системой (5), (6), (7), (8), (9), (10).

Вторая предлагаемая модель – модель управления рекламными расходами фирмы с распределенным лагом запаздывания отдачи от воздействия рекламы и точечным воздействием предыдущих продаж.

В этом случае запаздывающее воздействие предыдущих продаж точечное, а не распределенное во времени:

$$w(t) = g(y(t-1)). \qquad (11)$$

Введем для данной модели функцию $\phi_y(t)$, здесь она примет вид:

$$\phi_y(t) = \begin{cases} g(\tilde{y}(t-1)), & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t \ge 1, \end{cases}$$

где $g(\tilde{y})$ – непрерывна по $\tilde{y}(t)$, при этом $g(y(0)) = g(\tilde{y}(0))$.

Также введем функцию:

$$\bar{\delta}(s-t+1) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ \delta(s-t+1), & t \ge 1, \end{cases}$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Тогда $w(t)$ определяется следующим образом:

$$w(t)=\phi_y(t)+\int_0^t \bar{\delta}(s-t+1)g\big(y(s)\big)ds. \qquad (12)$$

При этом пусть накопленное рекламное воздействие определено в виде (5). В этом случае оптимизационная задача задается системой (5), (7), (8), (9), (10), (12).

Третья модель – модель управления рекламными расходами фирмы с распределенными на постоянном интервале лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы нескольких видов и предыдущих продаж.

Представим, что фирма может диверсифицировать рекламные расходы между $n \geq 1$ медиаканалами или видами рекламы. Пусть $u_i(t)$ – величина рекламных затрат в *i*-й медиаканал, $i = 1,2,...,n$. Определение величин $u_1(t), u_2(t),...,u_n(t)$ представляет собой управленческое решение фирмы. В этом случае $u(t)$ можно считать управляющей вектор-функцией $u(t) = (u_1(t), u_2(t),...,u_n(t))$, $u(t) \in R^n$.

Пусть фирма реализует товар с недлительным сроком использования. В этом случае зависимости объемов продаж от давнего и начального рекламных воздействий скорее всего будут носить случайный характер, т.к. учет этих интервалов запаздывания в модели противоречит экономическому смыслу.

В этом случае накопленное воздействие рекламных затрат к моменту времени *t* представляется в виде:

$$v(t)=\begin{pmatrix} \int_{\tau_{1u_1}}^{\tau_{2u_1}} G_{u_1}(\tau)a_1\big(u_1(t-\tau),u_2(t-\tau),...,u_n(t-\tau)\big)d\tau \\ \int_{\tau_{1u_2}}^{\tau_{2u_2}} G_{u_2}(\tau)a_2\big(u_1(t-\tau),u_2(t-\tau),...,u_n(t-\tau)\big)d\tau \\ ... \\ \int_{\tau_{1u_n}}^{\tau_{1u_n}} G_{u_n}(\tau)a_n\big(u_1(t-\tau),u_2(t-\tau),...,u_n(t-\tau)\big)d\tau \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

накопленное воздействие предыдущих продаж:

$$w(t)=\int_{\tau_{1y}}^{\tau_{2y}} G_y(\tau)y(t-\tau)d\tau. \qquad (14)$$

где $[\tau_{1u_i};\tau_{2u_i}]$ – интервал лагов запаздывания, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие от использования *i*-го медиаканала, $i = 1,2,...,n$, $[\tau_{1y};\tau_{2y}]$ – интервал лагов запаздывания, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж.

В общем случае величины τ_{1u_i}, τ_{2u_i}, τ_{1y}, τ_{2y} являются функциями времени t, при этом $0 \le \tau_{1y} < \tau_{2y}$, $0 \le \tau_{1u_i} < \tau_{2u_i}$, $i = 1,2,...,n$.

Если аудитория *i*-го медиаканала практически не получает воздействие от других медиаканалов, то функция $a_i(u_1(s), u_2(s),..., u_n(s)) \equiv a_i(u_i(s))$, а в простейшем случае можно полагать $a_i(u_1(s), u_2(s),..., u_n(s)) \equiv u_i(s)$.

Что касается свойств $a_i(u_1, u_2,..., u_n)$, $i = 1,2,...,n,$ предполагается, что они непрерывны по всем аргументам, $a_i(u_1, u_2,..., u_n) \ge 0$ для любых $u_1, u_2,..., u_n$. В точке $u_i = 0$, $i = 1,2,...,n,$ и некоторой окрестности нулевых рекламных затрат $O_{\varepsilon_1} = \{u \in R_+^n : \|u\| < \varepsilon_1\}$ отдача от рекламы не дает эффекта, что дает основание сделать предположение: $a_i(u_1, u_2,..., u_n) = 0$, $u \in O_{\varepsilon_1}$. Начиная с некоторого суммарного воздействия, аудитория начинает реагировать на рекламу позитивно при соответствующих рекламных затратах, что можно выразить в следующем виде: существует $O_{\varepsilon_2} = \{u \in R_+^n : \|u\| < \varepsilon_2\}$, для любых $u^1, u^2 \in O_\varepsilon$, $u^1 < u^2$, $a_i(u^1) \le a_i(u^2)$. При дальнейшем увеличении рекламы положительный эффект может смениться на отрицательный, т.е. рост рекламного воздействия будет приводить к уменьшению отдачи.

Анализ вида функций $a_i(u_1(s), u_2(s),..., u_n(s))$, $i = 1,2,...,n$ – проблема эконометрического анализа, учитывающая возможные воздействия одних медиаканалов на эффективность других.

Как и в предыдущих моделях, будем предполагать, что известны фактические данные по рекламе до начала планируемого периода $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t),..., \tilde{u}_n(t))$ и выручке $\tilde{y}(t)$.

Пусть поток рекламного бюджета, выделяемого на использование *n* медиканалов, ограничен некоторой суммой *B*. Введем множество U_B, ограничивающее поток инвестиций в рекламу, и множество рекламных стратегий U:

$$\begin{gathered} U_B = \{u \in R^n : \sum_{i=1}^{n} u_i \le B, \quad u_i \ge 0, \quad i = 1,2,...,n\}, \\ U = \{u(\cdot) : u(t) \in U_B, \quad t \in [0;T]\}. \end{gathered} \tag{15}$$

В этом случае $\overline{\Pi}(t)$ имеет вид:

$$\overline{\Pi}(t) = \int_0^t \left((1-\mu) f(v(s), w(s)) - \sum_{i=1}^{n} u_i(s) \right) ds. \tag{16}$$

Преобразуем ограничения (13) и (14).

Введем кусочно-непрерывные функции $\overline{G}_{u_i}(t-s), \overline{G}_y(t-s), \phi_{u_i}(t)$, $\phi_y(t)$ $i=1,2,...,n$, $t-s=\tau$ такие, что:

$$\overline{G}_{u_i}(t-s)=\begin{cases} G_{u_i}(t-s), & \tau_{1u_i} \le t-s \le \tau_{2u_i}, \\ 0, & иначе; \end{cases} \tag{17}$$

$$\overline{G}_y(t-s)=\begin{cases} G_y(t-s), & \tau_{1y} \le t-s \le \tau_{2y}, \\ 0, & иначе; \end{cases} \tag{18}$$

$$\phi_{u_i}(t)=\begin{cases} \int\limits_{t-\tau_{2u_i}}^{t-\tau_{1u_i}} G_{u_i}(t-s)a_i(\tilde{u}(s))ds, & 0 \le t < \tau_{1u_i}, \\ \int\limits_{t-\tau_{2u_i}}^{0} G_{u_i}(t-s)a_i(\tilde{u}(s))ds, & \tau_{1u_i} \le t < \tau_{2u_i}, \\ 0, & t \ge \tau_{2u_i}; \end{cases} \tag{19}$$

$$\phi_y(t)=\begin{cases} \int\limits_{t-\tau_{2y}}^{t-\tau_{1y}} G_y(t-s)\tilde{y}(s)ds, & 0 \le t < \tau_{1y}, \\ \int\limits_{t-\tau_{2y}}^{0} G_y(t-s)\tilde{y}(s)ds, & \tau_{1y} \le t < \tau_{2y}, \\ 0, & \tau_{2y} \ge t. \end{cases} \tag{20}$$

Тогда накопленные воздействия рекламных затрат и предыдущих продаж можно представить:

$$v(t)=\begin{pmatrix} \phi_{u_1}(t)+\int\limits_0^t \overline{G}_{u_1}(t-s)a_1\big(u(s)\big)ds \\ \phi_{u_2}(t)+\int\limits_0^t \overline{G}_{u_2}(t-s)a_2\big(u(s)\big)ds \\ \dots \\ \phi_{u_n}(t)+\int\limits_0^t \overline{G}_{u_n}(t-s)a_n\big(u(s)\big)ds \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$w(t)=\phi_y(t)+\int\limits_0^t \overline{G}_y(t-s)f(v(s),w(s))ds. \tag{22}$$

Таким образом, ограничения (13) и (14) эквивалентны (21) и (22), соответственно. Задача оптимального распределения рекламных расходов представляет из себя систему (7), (10), (15), (16), (21), (22).

Во второй главе диссертации доказаны теоремы существования решений сформулированных в первой главе задач оптимального управления рекламными расходами: (5), (6), (7), (8), (9), (10); (5), (7), (8), (9), (10), (12);

(7), (10), (15), (16), (21), (22). Также получены необходимые условия оптимальности рекламных стратегий на основе принципа максимума.

Значение совокупной прибыли $\Pi(T)$ является функционалом от $u(\cdot)$. Введем $J(u(\cdot)) \equiv \overline{\Pi}(T)$.

В **первом параграфе** вопрос существования решения задачи (5), (6), (7), (8), (9), (10) решается в рамках двух теорем, доказательство которых приводится в диссертационной работе.

Теорема 1. *Пусть функции* $G_u(\tau) \in C([0;t+\lambda])$, $G_y(\tau) \in C([0;t+\lambda])$, *функция f(v,w) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной у для всех w, тогда для любой кусочно-непрерывной функции* $u(\cdot) \in U$ *существует непрерывная единственная на этом отрезке функция w(t), удовлетворяющая (6).*

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1, функция* $f(v,w)$ *монотонно не убывает по v, тогда имеет место одна из следующих альтернатив:*

1. Существует допустимое управление $u^*(\cdot) \in U$, *соответствующие данному управлению решения уравнений (5), (6), (9), значение функционала* $J(u^*(\cdot)) \ge J(u(\cdot))$ *для любого* $u(\cdot) \in U$.

2. Существует последовательность допустимых управляющих функций $u^s(\cdot) \in U$ *и такое число* $\overline{J}$: $J(u^s(\cdot)) \to \overline{J}$ *при* $s \to \infty$, *что* $J(u(\cdot)) \le \overline{J}$ *для любого* $u(\cdot) \in U$.

Также в задаче (5), (6), (7), (8), (9), (10) были определены необходимые условия оптимальности рекламной стратегии. Для этого задача была преобразована следующим образом.

Введем вектор-функции $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)^T$ и $F(t,s,x(s),u(s))$. При этом

$$x_1(t) = v(t) - \phi_u(t),$$

$$x_2(t) = w(t) - \phi_y(t),$$

$$x_3(t) = \overline{\Pi}(t),$$

$$F(t,s,x(s),u(s)) = \begin{pmatrix} G_u(t-s)u(s)ds \\ G_y(t-s)y(s) \\ (1-\mu)(y(s)-u(s)) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$y(s) \equiv f(v(s),w(s)) = f(\phi_u(s)+x_1(s), \phi_y(s)+x_2(s)), \tag{24}$$

$$x(t) = \int_0^t F(t,s,x(s),u(s))ds. \tag{25}$$

Тогда можно поставить задачу макисимизации:

$$x_3(T) \to \max . \tag{26}$$

Необходимые условия оптимальности определяются теоремой 3.

Теорема 3. *Пусть* $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$ *– оптимальный процесс для задачи* (8), (23), (24), (25), (26), *тогда найдутся такие функции* $h(s)$, $p_1(s)$, $p_2(s)$*:*

$$h(s) = p_1(s)G_u(0) - 1 + \int_s^T \left(p_1(t) \frac{\partial G_u(t,s)}{\partial t} \right) dt , \tag{27}$$

$$\dot{p}_1(s) = -\frac{\partial f(v,w)}{dv} \left(1 - \mu + p_2(t)G_y(0) + \int_s^T \left(p_2(t) \frac{\partial G_y(t,s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad p_1(T) = 0, \tag{28}$$

$$\dot{p}_2(s) = -\frac{\partial f(v,w)}{dw} \left(1 - \mu + p_2(t)G_y(0) + \int_s^T \left(p_2(t) \frac{\partial G_y(t,s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad p_2(T) = 0, \tag{29}$$

что оптимальное распределение рекламных расходов будет иметь вид:

$$u(s) = \begin{cases} b, & h(s) > 0, \\ 0, & h(s) < 0, \\ \bar{u}, & h(s) = 0, \quad 0 \le \bar{u} \le b. \end{cases} \tag{30}$$

Отметим, что система сопряженных функций (28), (29) в общем случае не имеет аналитического решения, поэтому здесь требуется применение численных методов решения интегро-дифференциальных уравнений.

Во **втором параграфе** существование решения в задаче оптимального управления (5), (7), (8), (9), (10), (12) определяется следующими теоремами.

Теорема 4. *Пусть* $u(t)$ *– кусочно-непрерывна справа на интервале* $[0;T]$, $G_u(\tau) \in C([0;t+\lambda])$, *тогда функция точечного воздействия предыдущих продаж* $w(t)$ *ограничена на* $[0;T]$.

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения теоремы 4, функция* $f(v,w)$ *монотонно не убывает по v, тогда имеет место одна из следующих альтернатив:*

1. Существует допустимое управление $u^*(\cdot) \in U$ *, соответствующие данному управлению, решения уравнений (5), (9), (12)* $\{v^*(t), w^*(t), \overline{\Pi}^*(t), 0 \le t \le T\}$ *и число* $J(u^*(\cdot)) \ge J(u(\cdot))$ *для любого* $u(\cdot) \in U$.

2. Существует последовательность допустимых управляющих функций $u^s(\cdot)\in U$ *и такое число* $\bar{J}$*:* $J(u^s(\cdot))\to\bar{J}$ *при* $s\to\infty$*, что* $J(u(\cdot))\le\bar{J}$ *для любого* $u(\cdot)\in U$.

Для определения необходимых условий оптимальности здесь также были выполнены преобразования представления задачи.

Определим вектор $F(t,s,x(s),u(s))$ в следующем виде:

$$F(t,s,x(s),u(s))=\begin{pmatrix} G_u(t-s)u(s)ds \\ \bar{\delta}(s-t+1)\,f(\phi_u(s)+x_1(s),\phi_y(s)+x_2(s)) \\ (1-\mu)\,f(\phi_u(s)+x_1(s),\phi_y(s)+x_2(s))-u(s)\end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Пусть $x(t)$ определяется как (25), тогда задача максимизации имеет вид (26).

Теорема 6. *Пусть* $\{u^*(t),v^*(t),w^*(t)\}$ *- оптимальный процесс для задачи* (8), (23), (24), (25), (26), *тогда найдутся такие функции* $h(s)$, $p_1(s)$, $p_2(s)$*:*

$$h(s)=p_1(s)G_u(0)-1+\int_s^T\left(\frac{\partial G_u(t-s)}{\partial t}\,p_1(t)\right)dt\,, \qquad (32)$$

$$\dot{p}_1(s)=-\frac{\partial f(v,w)}{\partial v}\left(1+\frac{dp_2(s+1)}{d(s+1)}\right),\quad p_1(T)=0\,, \qquad (33)$$

$$\dot{p}_2(s)=-\frac{\partial f(v,w)}{\partial w}\left(1+\frac{dp_2(s+1)}{d(s+1)}\right),\quad p_2(T)=0\,, \qquad (34)$$

что оптимальное распределение рекламных расходов будет иметь вид (30).

В **третьем параграфе** существование решения в задаче оптимального управления (7), (10), (15), (16), (21), (22) определяется следующими теоремами.

Теорема 7. *Пусть функции* $G_{u_i}(\tau)\in C([\tau_{1u_i};\tau_{2u_i}])$, $G_y(\tau)\in C([\tau_{1y};\tau_{2y}])$, *функция* $f(v,w)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной w для всех w, тогда для любой кусочно-непрерывной функции* $u(\cdot)\in U$ *существует непрерывная единственная на этом отрезке функция w(t), удовлетворяющая (22).*

Теорема 8. *Пусть выполнены предположения теоремы 7, функция* $f(v,w)$ *монотонно не убывает по всем* $v_i(t)$, $i=1,2,...,n$*, тогда имеет место одна из следующих альтернатив:*

1. Существует допустимая вектор-функция управлений $u^*(\cdot)\in U$ *, соответствующие данному управлению решения уравнений (16), (21), (22)*

$\{v^*(t), w^*(t), \overline{\Pi}^*(t), 0 \le t \le T\}$ *и значение функционала* $J(u^*(\cdot)) \ge J(u(\cdot))$ *для любой* $u(\cdot) \in U$.

2. Существует последовательность допустимых управляющих вектор-функций $u^s(\cdot) \in U$ *и такое число* $\overline{J}$*:* $J(u^s(\cdot)) \to \overline{J}$ *при* $s \to \infty$*, что* $J(u(\cdot)) \le \overline{J}$ *для любой* $u(\cdot) \in U$.

Для определения необходимых условий оптимальности решения задачи рассмотрим вектор-функцию $F(t, s, x(s), u(s))$ в виде:

$$F(t,s,x(s),u(s)) = \begin{pmatrix} \overline{G}_{u_1}(t-s)a_1(u) \\ \overline{G}_{u_2}(t-s)a_2(u) \\ \dots \\ \overline{G}_{u_n}(t-s)a_n(u) \\ \overline{G}_y(t-s)y(s) \\ (1-\mu)y(s) - \sum_{i=1}^{n} u_i \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$y(s) \equiv (\phi_{u_1}(s) + x_1(s), \dots, \phi_{u_n}(s) + x_n(s), \phi_y(s) + x_{n+1}(s)). \tag{36}$$

Пусть $x(t)$ соответствует представлению (25), задача максимизации имеет вид:

$$x_{n+2}(T) \to \max. \tag{37}$$

Теорема 9. *Пусть* $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$ *– оптимальный процесс для задачи* (15), (25), (35), (36), (37), *тогда найдутся такие* $h_i(s)$, $p_i(s)$, $i = 1,2,\dots,n+1$.

$$h_i(s) = p_i(s)\overline{G}_{u_i}(0) + \int_s^T \left(p_i(t) \frac{\partial \overline{G}_{u_i}(t-s)}{\partial t} \right) dt, \tag{38}$$

$$\dot{p}_i(s) = -\frac{\partial f(v^*, w^*)}{\partial v_i} \left(p_{n+1}(s)\overline{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T \left(p_{n+1}(t) \frac{\partial \overline{G}_y(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \tag{39}$$

$$\dot{p}_{n+1}(s) = -\frac{\partial f(v^*, w^*)}{\partial w} \left(p_{n+1}(s)\overline{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T \left(p_{n+1}(t) \frac{\partial \overline{G}_y(t-s)}{\partial t} \right) dt \right). \tag{40}$$

с конечными условиями $p_i(T) = 0$, $i = 1,2,\dots,n+1$*, что оптимальное распределение рекламных расходов при всех* $s \in [0;T]$ *будет являться решением задачи:*

$$u^*(s) = \arg\max_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} (a_i(u)h_i(s) - u_i). \tag{41}$$

Для предлагаемых задач оптимизации в виде системы интегральных уравнений Вольтерра в силу их нетривиальности требуются специальные методы решения.

В **третьей главе** предложены численные методы решения задач оптимального управления рекламными расходами. В **первом параграфе третьей главы** предлагается модификация метода локальных вариаций.

Во **втором параграфе** апробируется метод параметризации для задач, содержащих связи, определяемые интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра, которые нелинейным образом входят в постановку проблемы.

В **третьем параграфе** описывается комплекс программ, разработанный для анализа задач распределения рекламного бюджета. Решения задач находится в соответствии с программным кодом, написанным на языке C++ в среде разработки QT Creator.

На рис. 1 представлена схема функциональных связей для решения оптимизационной задачи с помощью принципа максимума.

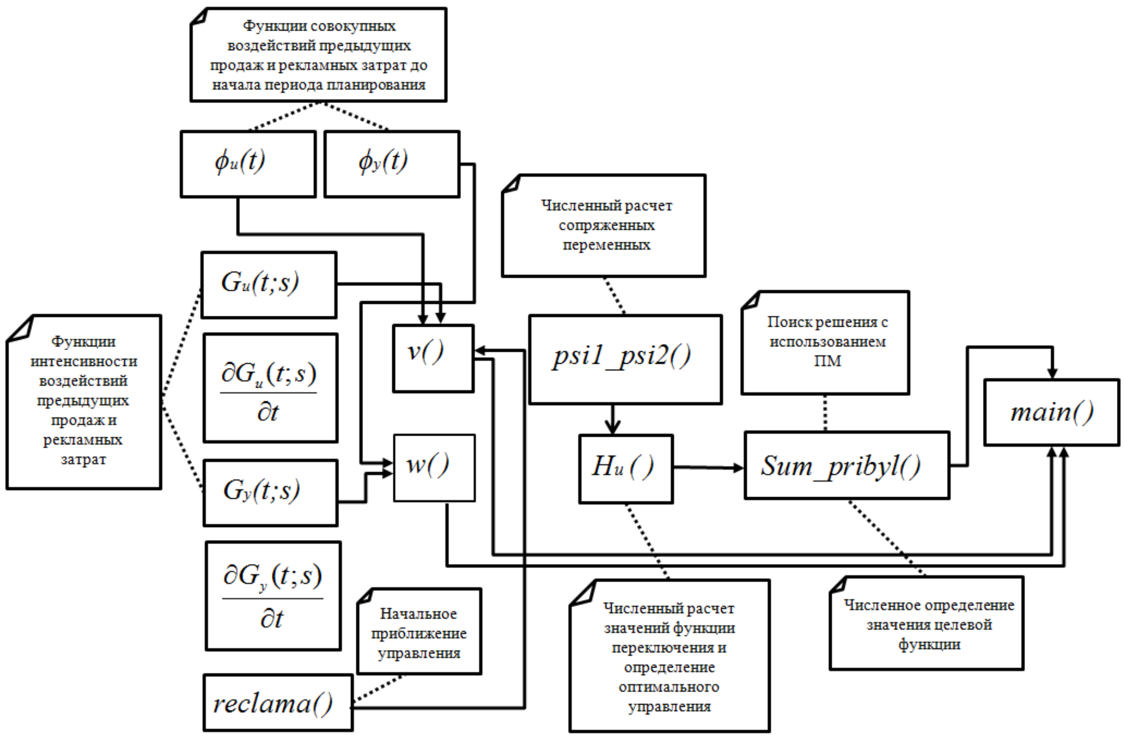

Рисунок 1. Схема функциональных связей для решения оптимизационной задачи с помощью принципа максимума

На рис. 2 представлена схема функциональных связей для решения оптимизационной задачи с помощью модифицированного метода локальных вариаций и проверки приближенного решения с помощью принципа максимума.

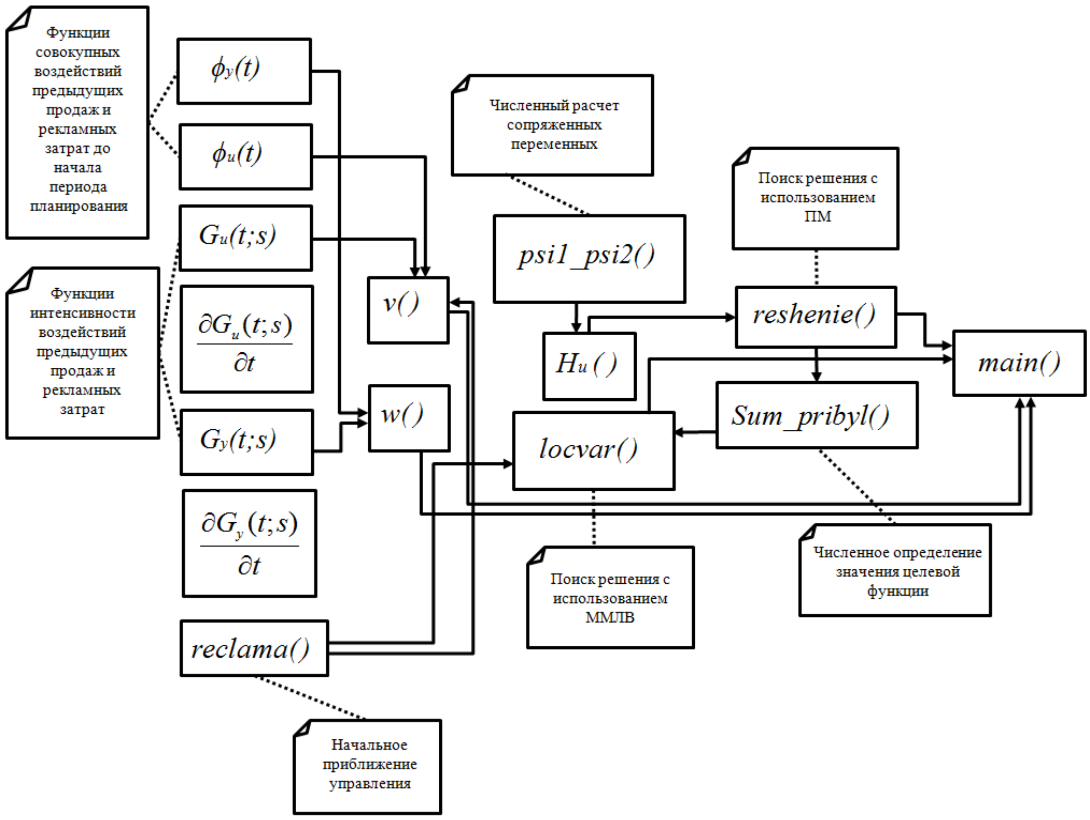

Рисунок 2. Схема функциональных связей решения оптимизационной задачи с помощью модифицированного метода локальных вариаций и принципа максимума

Оптимизационные задачи сформулированы в рамках модели управления рекламными расходами фирмы с распределенными лагами запаздывания отдачи от воздействий рекламы и предыдущих продаж. В первом случае функция выручки предполагается линейной по переменным v и w, а длины интервалов воздействий предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж постоянными на всем периоде планирования. Для второй задачи функция выручки нелинейная по переменным v и w, а начало воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж фиксировано.

На рис. 3 представлена схема функциональных модулей для решения этой же оптимизационной задачи с помощью метода параметризации.

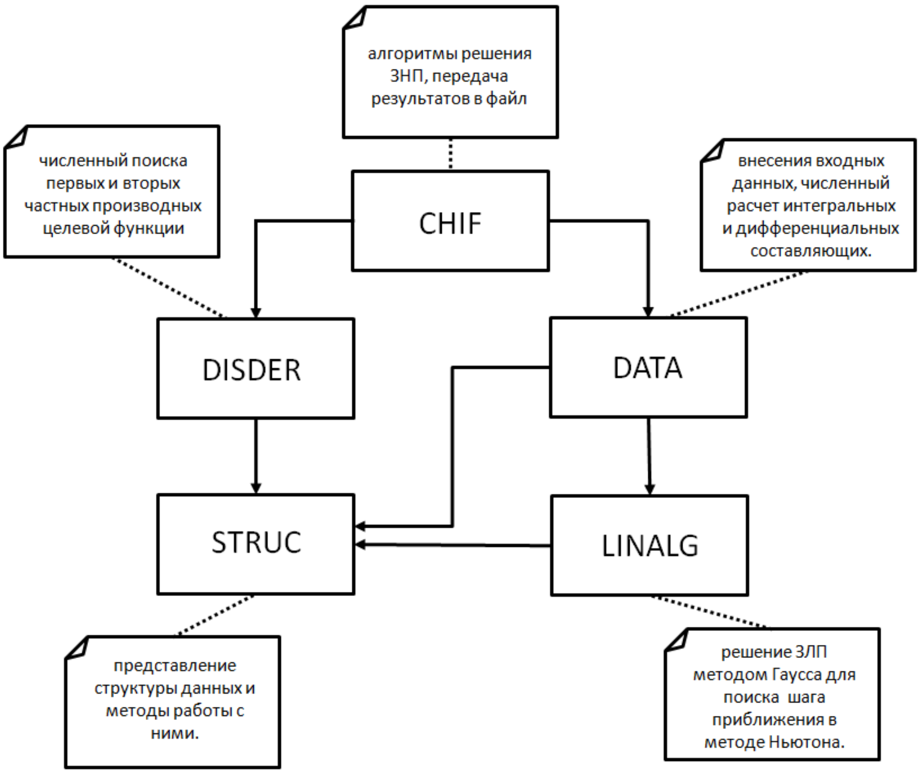

Рисунок 3. Схема функциональных модулей программы для решения оптимизационной задачи с помощью метода параметризации

Вывод всех полученных решений осуществляется в файлы текстового формата типа csv, доступного для просмотра и редактирования пользователю.

Четвертая глава посвящена практической реализации моделей. В **первом параграфе** для тестирования модели использовались статистические данные компании ПАО «Мегафон». Проведен вычислительный эксперимент для динамической модели рекламы с линейным уравнением связи между выручкой и накопленными воздействиями рекламы и предыдущих продаж:

$$y(t) = a_1 \int_0^2 G_u(\tau) u(t-\tau) d\tau + a_2 \int_1^2 G_y(\tau) y(t-\tau) d\tau .$$

Численный анализ оптимизационной задачи проводился с различными шагами дискретизации временного параметра. Для проверки устойчивости результата были проведены вариации параметров модели. Проведенный анализ показал, что предлагаемая модель может быть применима для формирования эффективной стратегии управления рекламными расходами.

Во **втором параграфе** проведен вычислительный эксперимент для динамической модели рекламы с нелинейным уравнением связи между выручкой и накопленными воздействиями рекламы и предыдущих продаж:

$$y(t)=\alpha\left(\phi_u(t)+\int_0^t G_u(t-s)u(s)ds\right)^{\beta_1}\left(\phi_y(t)+\int_0^t G_y(t-s)y(s)ds\right)^{\beta_2}.$$

Динамическая оптимизационная задача решалась с помощью модифицированного метода локальных вариаций, затем решение было проверено в рамках применения принципа максимума. Также был применен метод параметризации. Результаты вычислений функционала при использовании двух разных методов сходятся, при этом структура решения принимает релейный вид с одним моментом переключения.

Модели, предложенные в главе 1, получили практическое подтверждение в ходе вычислительных экспериментов. Методы, предложенные в главе 3, оказались эффективны в решении поставленных задач.

В **заключении** изложены основные результаты диссертационной работы:

1. исследованы математические модели рекламных воздействий и выявлены некоторые нерешенные вопросы в области моделирования рекламной деятельности;
2. разработан новый класс математических моделей экономической динамики, учитывающий на заданном временном периоде эффект распределенного запаздывания от воздействующих факторов на примере управления рекламными расходами;
3. сформулированы задачи оптимального управления рекламными расходами в рамках разработанных моделей и проведен анализ поставленных математических проблем;
4. разработаны алгоритмы численных методов решения задач оптимального управления с интегро-дифференциальными связями;
5. разработан комплекс программ для решения задач оптимального управления с эффектом распределенного запаздывания рекламными расходами от воздействующих факторов;
6. проведены численные эксперименты для верификации разработанных математических моделей.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

[1] Лутошкин, И.В. Принцип максимума в задаче управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Журн. Средневолж. мат. общества. – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 96-104.

[2] Лутошкин, И.В. Существование решения задачи управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2016. – Т. 18.-С. 48-59.

В изданиях, входящих в базы данных Scopus:

[3] Lutoshkin, I.V. The dynamic model of advertising costs / I.V. Lutoshkin, N.R. Yamaltdinova // ECECSR Journal. – 2018. – Vol. 52, №1. – P. 201-214.

[4] Lutoshkin, I.V. The dynamic model of advertising costs with continuously distributed lags / I.V. Lutoshkin, N.R. Yamaltdinova // CEUR-WS. – 2018. – Vol. 2018. – P. 103-112.

[5] Lutoshkin, I.V. The Mathematical Model for Describing the Principles of Enterprise Management “Just in Time, Design to Cost, Risks Management” / I.V. Lutoshkin, S.V. Lipatova, Y.V. Polyanskov, N.R. Yamaltdinova, M.N. Yardaeva // Recent Research in Control Engineering and Decision Making. – 2019. – Vol. 199. – P. 682-695.

Прочие публикации

[6] Лутошкин, И.В. Динамическая модель распределения рекламного бюджета между несколькими медиаканалами / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы: сб. трудов шестой всерос. науч. конф. – Ульяновск: УлГУ, 2016. – С. 38-40.

[7] Лутошкин, И.В. Инновационные инструменты управления рекламной кампанией фирмы / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы: сб. трудов седьмой всерос. науч. конф. – Ульяновск: УлГУ, 2017. – С. 20-21.

[8] Лутошкин, И.В. Модель оптимизации рекламных расходов с учетом распределенного запаздывания / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании. Математика и статика: сб. тр. IV Междунар. науч.-практ. конф. (2 июня 2015, г. Тверь). – Тверь: Тверс. гос. ун-т, 2015. – С. 84-89.

[9] Лутошкин, И.В. Применение принципа максимума в задаче управления рекламными расходами / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Симбирский научный вестник. – 2016. – Т. 4, №22. – С. 111-116.

[10] Лутошкин, И.В. Численный анализ динамической модели рекламных расходов / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: материалы VII всерос. науч. конф. имени Е.В. Воскресенского (12-15 июля 2016, г. Саранск). – Саранск: СВМО, 2016. – С. 61-62.

[11] Лутошкин, И.В. Численный анализ динамической модели рекламных расходов / И.В. Лутошкин, Н.Р. Ямалтдинова // Международный молодежный симпозиум по управлению, экономике и финансам: сб. научных статей. – Казань: Изд-во Казан.ун-та, 2016. – С. 416-419.

[12] Ямалтдинова, Н.Р. Анализ воздействия распределенных факторов на объем продаж / Н. Р. Ямалтдинова // Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании. Математика и статика: сб. тр. V Междунар. науч.-практ. конф. (31 мая 2016, г. Тверь). – Тверь: Тверс. гос. ун-т, 2016. – С. 118-122.

[13] Ямалтдинова, Н.Р. Математическая модель рекламной кампании фирмы / Н.Р. Ямалтдинова // Математические методы и интеллектуальные системы в экономике и образовании: материалы всерос. заоч. научно-практич. конф. (декабрь 2017, г. Ижевск). – Ижевск: Институт экономики и управления ФГБОУ ВО «УдГУ», 2017. – С. 49-50.

Патентные и авторские свидетельства

[14] Ямалтдинова Н.Р., Лутошкин И.В. Численные методы решения задач оптимизации рекламных затрат в динамических моделях рекламных затрат с распределенным запаздыванием. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2018662134. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка №2018619515 от 10.09.2018.