Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

На правах рукописи

Благовисная Анна Николаевна

Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
к.ф.-м.н, доцент
Пихтилькова Ольга Александровна

Оренбург – 2019

Содержание

Введение

Область исследования. Работа относится к области изучения структуры алгебр Ли. В теории алгебраических систем построены различные объекты, которые можно применять при описании структурной теории. К указанным объектам, в том числе, относятся радикалы и центроид Мартиндейла, рассматриваемые в данной работе.

Актуальность иследования. Изучение алгебраических систем является существенной частью современных исследований в общей алгебре. Результаты, получаемые при исследовании алгебр Ли, находят своё применение в различных разделах математики и физики. Например, алгебры Ли являются удобным средством, используемым математиками в работах по топологии, дифференциальной геометрии. В квантовой механике рассмотрение операторов, действующих в пространстве состояний системы, зачастую приводят к математическим структурам, в числе которых оказываются и алгебры Ли.

Особый интерес в теории групп представляют бесконечномерные алгебры Ли. Известен пример неразрешимой группы, удовлетворяющей тождеству $x^p = 1$ для $p \geq 5$, построенный Ю. П. Размысловым с помощью бесконечномерных алгебр Ли [44]. А. И. Кострикиным использовались бесконечномерные алгебры Ли при решении проблемы Бернсайда [14].

Одной из основных задач, возникающих при исследовании алгебраических систем, является построение структурной теории, позволяющей свести изучение исходной системы к более простой, исследование свойств которой позволило бы в конечном счёте обобщить полученные результаты на исходную систему. Радикал является важным инструментом построения структурной теории алгебраических систем. Благодаря А.Г. Курошу и С. Амицуру, которые для алгебр и колец рассмотрели понятие радикала, теория радикалов получила ещё большее распространение, и стала использоваться при исследовании различных алгебраических структур, в том числе, и для построения структурной теории алгебр Ли.

Помимо радикалов, существуют и другие понятия, играющие роль инструмента исследования алгебраической системы. В теории ассоциативных колец и модулей разработаны такие объекты, как кольца частных [20], [54] и центроид Мартиндейла [46], [53], [54]. Эти же понятия могут быть сформулированы и для алгебр Ли и найти применение при создании для них структурной теории.

Рассмотренные примеры подтверждают актуальность исследований, связанных с радикалами и центроидом Мартиндейла, построенных для алгебр Ли.

Теории групп и алгебрам Ли посвящены работы многих математиков. Можно утверждать, что развитие структурной теории алгебр Ли началось с построения теории конечномерных алгебр Ли, зарождение которой относится к концу XIX века.

Основателем теории групп и алгебр Ли считается норвежский математик Софус Ли. Во второй половине XIX века С. Ли изучал непрерывные группы преобразований, что привело к открытию алгебр Ли, которые определялись С. Ли как «алгебры инфинитезимальных операторов групп Ли».

Исследованию отдельных аспектов теории алгебр Ли посвящены некоторые из работ немецкого математика Фридриха Энгеля. В современном изложении теории конечномерных алгебр Ли хорошо известна теорема Ф. Энгеля, согласно которой нильпотентная алгебра Ли с нильпотентным присоединенным представлением имеет такой базис, что матрицы всех операторов присоединённого представления треугольны и имеют нулевую диагональ. Кроме того, Ф. Энгелем доказано, что нильпотентная алгебра Ли с нильпотентным присоединенным представлением является разрешимой [13].

Параллельно с исследованиями С. Ли, изучением алгебр Ли занимался и немецкий математик Вильгельм Киллинг [58]. Именно В. Киллингом впервые было введено понятие «наибольший разрешимый идеал» для алгебр Ли. В честь этого ученого в настоящее время наибольший разрешимый идеал конечномерных алгебр Ли часто называют радикалом Киллинга. Ещё одним важным открытием В. Киллинга, относящимся к структурной теории радикалов алгебр Ли, является доказанное им утверждение, что алгебра Ли, профакторизованная по своему радикалу, обладает радикалом, равным нулю. В. Киллингу принадлежит определение полупростых алгебр Ли, к которым относят алгебры Ли с нулевым радикалом. В работах В. Киллинга также приводится доказательство о равенстве полупростых алгебр Ли произведениям простых алгебр Ли над полями нулевой характеристики.

Следует отметить ещё один из важных результатов, опубликованных В. Киллингом, заключающийся в выдвинутой им гипотезе, согласно которой производная алгебра любой алгебры Ли может быть представлена в виде суммы радикала, являющегося нильпотентным для данной алгебры Ли, и некоторой полупростой алгебры. С этим утверждением связано имя французского математика, занимавшегося вопросами исследования групп и алгебр Ли, Эли Картана. Э. Картан сформулировал более широкое предположение, заключающееся в том, что любую алгебру Ли можно представить в виде суммы радикала этой алгебры Ли и некоторой простой подалгебры [7, с. 468].

Таким образом, работы С. Ли, Ф. Энгеля, Э. Картана, В. Киллинга, ставшие классическими для современной алгебры, заложили фундамент для возникновения ключевых понятий и методов теории радикалов алгебр Ли.

В XX веке началось изучение бесконечномерных алгебр Ли, возникающих при изучении векторных полей гладких многообразий. Вопросами теории бесконечномерных алгебр Ли занимались Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев, Е. И. Зельманов, А. И. Кострикин, А. А. Михалёв, С. П. Мищенко, Ю. П. Размыслов и другие. В это же время проводятся исследования, в которых вводятся и изучаются различные радикалы бесконечномерных алгебр Ли. Данные исследования опубликованы в работах К. И. Бейдара, В. Н. Латышева, А. В. Михалёва, В. А. Парфёнова, С. А. Пихтилькова, Л. А. Симоняна, N. Kamiya, F. Kubo, S. Togo.

В XXI веке продолжились исследования, систематизирующие и развивающие структурную теорию бесконечномерных алгебр Ли. В работах С. А. Пихтилькова, В. Н. Латышева, А. В. Михалёва, К. И. Бейдара, И. Н. Балабы, О. А. Пихтильковой, В. М. Полякова, Е. В. Мещериной представлены результаты исследований первичного, локально нильпотентного, верхнего и нижнего слабо разрешимых радикалов, а также радикала Джекобсона и связанных с ним конечно неприводимо представленного, PI-неприводимо представленного, неприводимо представленного радикалов.

Построение общей структурной теории для произвольных алгебр Ли затруднительно, поэтому выделяются специальные классы алгебр, для которых такую теорию построить возможно. В таком случае в качестве предмета исследования рассматриваются алгебры Ли, удовлетворяющие каким-либо ограничениям или условиям. В качестве дополнительных условий, накладываемых на алгебры Ли, рассматриваются условия обрыва возрастающих или убывающих цепей идеалов, подалгебр, подпростанств (нётеровость и артиновость), выполнение полиномиального тождества и другие. Например, публикации [4], [5], [6], [17], [36], [37], [38], [40], [64], [48] связаны с исследованием специальных алгебр Ли, в работах [5], [34], [38] рассматриваются обобщённо специальные алгебры Ли, а в работах [23], [24], [25], [35], [38], [39], [42] изучаются вопросы структурной теории артиновых, нётеровых алгебр Ли, специальных артиновых алгебр Ли.

Понятие радикала позволяет из класса алгебраических систем выделить полупростые и радикальные системы, описать структуру которых значительно проще, чем исходную систему.

Построению и изучению различных радикалов алгебр Ли посвящено большое количество публикаций. Исследования, наиболее близко относящиеся к проблематике настоящей диссертации, проводились в работах [2], [4], [5], [17], [18], [19], [23], [30], [33], [34], [36], [37], [39], [41],[47], [60], [61], [65], [66], [67].

Прежде всего отметим работы, в которых рассматриваются вопросы определения единого радикала бесконечномерных алгебр Ли, позволяющего получать удовлетворительную структурную теорию алгебр Ли. Удовлетворительная структурная теория предполагает наличие такого радикала, который позволит находить общие свойства всей исследуемой алгебраической системы.

Одним из радикалов, рассматриваемых в теории конечномерных алгебр Ли и отвечающих требованиям структурной теории, является радикал, который понимается как наибольший разрешимый идеал [13]. При попытке ввести аналогичным образом понятие радикала для бесконечномерных алгебр Ли возникают определённые трудности, которые прежде всего связаны со свойством суммы разрешимых идеалов. Дело в том, что такая сумма не всегда оказывается разрешимым идеалом [38, с. 7].

В качестве аналога разрешимого радикала для бесконечномерных алгебр Ли предлагалось рассматривать локально разрешимый радикал. Однако для локально разрешимых идеалов бесконечномерных алгебр Ли долгое время оставалась неразрешимой задача, согласно которой требовалось доказать, что при суммировании локально разрешимых идеалов в результате получается идеал, также являющийся локально разрешимым. Решение данной задачи было предложено авторским коллективом в составе В. Н. Латышева, А. В. Михалёва и С. А. Пихтилькова. В статье [22] авторами публикации приведен пример алгебры Ли над полем, в которой результат суммирования идеалов, являющихся локально разрешимыми, не будет локально разрешимым. Таким образом, представлено доказательство того, что локально разрешимый радикал не может быть единым для всех алгебр Ли.

Впервые радикал, обладающий необходимыми свойствами для создания рассматриваемой теории, определил и исследовал В. А. Парфёнов в работе [33]. В данной статье В. А. Парфёнов рассмотрел в качестве радикала наибольший слабо разрешимый идеал, который назвал слабо разрешимым радикалом.

Понятие слабо разрешимого идеала вводится через понятие слабо разрешимой алгебры Ли, согласно определению которой тождество разрешимости некоторой степени должно выполняться для любого её подпространства.

В. А. Парфёновым было показано, что свойство слабой разрешимости идеала сохраняется при суммировании слабо разрешимых идеалов.

Помимо радикала, называемого слабо разрешимым, исследователями открыты и другие, обладающие необходимыми для построения структурной теории свойствами, радикалы алгебр Ли. В частности, к таким радикалам относится первичный радикал.

Исследование первичного радикала проводилось для алгебр Ли, удовлетворяющих различным дополнительным условиям. Так, в работах [2], [4], [5] проведено исследование свойств первичного радикала специальных алгебр Ли. Публикации [23], [39], [65] посвящены изучению свойств первичного радикала различных артиновых алгебр Ли.

Интерес представляют соотношения первичного радикала алгебр Ли с разрешимыми радикалами. В работе [37] доказано, что первичный радикал произвольной специальной алгебры Ли содержит локально нильпотентный радикал. Для обощённо специальных алгебр Ли К. И. Бейдаром и С. А. Пихтильковым было показано совпадение первичного радикала с наибольшим локально разрешимым и слабо разрешимым радикалами [4], [5].

Исследуются и свойства первичного радикала алгебр Ли. Особое внимание уделяется вопросам разрешимости первичного радикала. Так, в монографии [38, с. 111] представлено доказательство разрешимости первичного радикала нётеровой алгебры Ли, в статье [23] рассматривается доказательство разрешимости первичного радикала алгебр Ли, удовлетворяющих различным условиям артиновости. Разрешимость первичного радикала специальной артиновой алгебры Ли доказана в [35]. Публикация [39] посвящена доказательству свойства локальной разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

Таким образом, исследование свойств первичного радикала является одной из актуальных задач теории радикалов алгебр Ли.

В теории конечномерных алгебр Ли рассматриваются также нильпотентный радикал, радикал Джекобсона.

Применение нильпотентного радикала и радикала Джекобсона в теории бесконечномерных алгебр Ли также вызывает затруднения в силу невыполнения определённых требований, которым должен удовлетворять радикал алгебраической системы [36]. Поэтому актуальным является вопрос о том, какие радикалы бесконечномерных алгебр Ли будут удовлетворять свойствам, аналогичным свойствам нильпотентного радикала и радикала Джекобсона теории конечномерных алгебр Ли.

Следует отметить, что результаты исследований по радикалам алгебр

Ли систематизированы и изложены С. А. Пихтильковым в монографии [38].

Другой конструкцией, используемой при изучении строения алгебр Ли, является центроид Мартиндейла. Полезной конструкция центроида Мартиндейла оказалась при исследовании специальных алгебр Ли. Согласно работе [46] рассмотрение первичных специальных алгебр Ли над центроидом Мартиндейла может выступать как условие конечности. Благодаря этому, возможно исследование структуры первичных специальных алгебр Ли, а также применение первичного радикала при решении задач теории радикалов алгебр Ли. Например, поиск условий, при которых присоединённая алгебра AdL является первичной ассоциативной PI-алгеброй [38, с. 34], или существования наибольшего локально нильпотентного идеала в обобщённо специальной алгебре Ли [38, с. 59].

В настоящей работе продолжается изучение радикалов алгебр Ли, начатое С. А. Пихтильковым. В частности, особое внимание уделено решению проблем, сформулированных А. В. Михалёвым и М. В. Зайцевым для артиновых и нётеровых алгебр Ли. С формулировками данных проблем автора диссертации познакомил С. А. Пихтильков.

Объектом исследования в работе являются объекты, применяемые при построении структурной теории: радикалы и центроид Мартиндейла алгебр Ли, а также градуированный первичный радикал градуированной Ω-группы.

Предметом исследования в работе являются свойства радикалов и центроида Мартиндейла алгебр Ли, удовлетворяющих условиям артиновости и нётеровости, а также свойства первичного радикала градуированной Ω-группы, удовлетворяющей условию конечности.

Целью настоящей работы является решение проблем А. В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли и М. В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц.

В соответствии с поставленной целью сформулированы **задачи исследования**:

— исследовать свойство локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли;

— решить проблему А. В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли;

— решить проблему М. В. Зайцева для нётеровых специальных алгебр Ли.

Научная новизна. Результаты, полученные в работе, являются новыми.

Доказано, что первичный радикал слабо артиновой алгебры Ли локально нильпотентен. Решена проблема А. В. Михалёва, сформулированная для слабо артиновых алгебр Ли, то есть доказано, что первичный радикал слабо артиновой алгебры Ли разрешим. Для нётеровых алгебр Ли решена проблема М. В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц в следующей редакции: любая полупервичная нётерова специальная алгебра Ли над полем F вложена в матричную алгебру над коммутативным кольцом, которое является прямой суммой полей. Доказано условие конечномерности первичной специальной алгебры Ли над своим центроидом Мартиндейла. Доказана локальная нильпотентность градуированного первичного радикала градуированных Ω-групп.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическую направленность. Возможность использования полученных теоретических результатов работы в исследованиях, посвященных изучению объектов структурной теории алгебр Ли и градуированных Ω-групп, является практической значимостью диссертационного исследования.

Теоретические сведения, изложенные и полученные в данной работе, также могут найти применение при проведении лекционных и практических занятий по учебным дисциплинам, изучаемым студентами университетов математических направлений подготовки.

Методология и методы исследования. В диссертации использованы методы теории колец и алгебр Ли, универсальных алгебр и градуированных Ω-групп.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Доказана локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновых алгебр Ли.

2. Для слабо артиновых алгебр Ли решена проблема А. В. Михалёва о разрешимости первичного радикала.

3. Для нётеровых алгебр Ли решена проблема М. В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц в следующей редакции: любая полупервичная нётерова специальная алгебра Ли над полем F вложена в алгебру матриц над коммутативным кольцом, являющимся прямой суммой полей.

Доказано условие конечномерности первичной специальной алгебры Ли над своим центроидом Мартиндейла.

4. Доказана локальная нильпотентность градуированного первичного радикала градуированных Ω-групп.

Достоверность результатов диссертационного исследования подтверждается аргументированными теоретическими построениями и строго выстроенными доказательствами, которые базируются на методах теории колец и алгебр Ли, универсальных алгебр и градуированных Ω-групп.

Апробация результатов. Результаты диссертации представлены на следующих конференциях:

— Всероссийской научно-практической конференции «Университет XXI века: научное измерение», Тула, Россия, 20–21 мая 2016 г.;

— Международной научно-практической конференции «Алгебра и логика: теория и приложения», посвящённая 70-летию В. М. Левчука, Красноярск, Россия, 24–29 июля 2016 г.;

— XIV международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова и С. М. Воронина, Саратов, Россия, 12–15 сентября 2016 г.;

— Шестой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, Россия, 30 января – 6 февраля 2017 г.;

— Всероссийской научно-практической конференции «Университетский комплекс как региональный центр развития образования, науки и культуры», Оренбург, Россия, 1–3 февраля 2017 г.;

— Международной научно-практической конференции «Вопросы современных научных исследований», Омск, Россия, 27 декабря 2018 г.

Публикации. Список публикаций состоит из 11 работ [68]–[78], включающих статьи, в том числе 4 из которых опубликованы:

— в журнале, входящем в перечень ВАК, индексируемом в Scopus и Web of Science ([72]);

— в журнале, входящем в перечень ВАК и индексируемом в Scopus ([78]);

— в журнале, входящем в перечень ВАК ([74]);

— в журнале, индексируемом в Scopus ([76]).

Все опубликованные работы по теме исследования приведены в конце списка литературы данной диссертации.

Личный вклад автора. В работе приводятся результаты, которые получены как лично автором, так и в соавторстве. В работах, опубликованных совместно с другими исследователями, общее количество результатов, принадлежащих непосредственно автору, составляет не менее половины.

Структура и объём диссертации. Изложение диссертационного исследования проведено в соответствии с общепринятой схемой и включает в себя введение, четыре главы, разбитые на разделы, заключение, список литературы. В конце работы прилагается список использованных обозначений и предметный указатель. Нумерация определений, лемм, предложений и теорем привязана к своему разделу. Весь текст работы занимает 91 страницу. Библиография, приведённая в работе, представляет собой список из 78 источников.

Краткое содержание диссертации.

Во введении автором приводится обзор работ, исследований и результатов, ранее проведённых различными авторами и авторскими коллективами, касающихся проблематики диссертационного исследования, описывается методологический аппарат исследования, а также кратко формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер и необходима для введения основных понятий теории классических радикалов алгебр Ли, обобщения и систематизации сведений о них, необходимых для целей настоящего исследования. Рассматриваются основные понятия теории классических радикалов алгебр Ли, которые в дальнейшем будут использоваться в работе при получении основных результатов.

В **разделе 1.1** поясняется термин «классические радикалы», который впервые появился для ассоциативных колец и алгебр. Классическими радикалами для бесконечномерных алгебр Ли будем называть радикалы, отвечающие требованиям создания удовлетворительной структурной теории алгебр Ли. Главным для нашего исследования является первичный радикал алгебр Ли, обозначаемый $P(L)$ (где L – алгебра Ли), так как изучение его свойств позволяет решить проблемы, сформулированные в задачах исследования.

В **разделе 1.2** рассматривается первичный радикал алгебр Ли, приводятся формулировки известных свойств первичного радикала.

Согласно определению, первичный радикал алгебры Ли L равен пересечению первичных идеалов, либо совпадает с самой алгеброй Ли в случае отсутствия первичный идеалов.

В данном разделе построен **пример 2.1.1** первичной алгебры Ли L, которая представляет собой прямую сумму двух простых алгебр Ли L_1 и L_2, то есть $L = L_1 \oplus L_2$.

В разделе также приводятся известные факты о свойствах первичного радикала и соотношениях первичного радикала, а также разрешимых радикалов алгебр Ли, которые используются при доказательстве свойств локальной нильпотентности и разрешимости первичного радикала алгебры Ли в главе 2 настоящей работы.

В **разделе 1.3** рассматриваются основные понятия и определения, связанные с теорией нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли и локально нильпотентного радикала бесконечномерных алгебр Ли.

Основным результатом, полученным в данном разделе, является **пример 1.3.1** построения такой бесконечномерной алгебры Ли, которая представляет собой локально нильпотентную алгебру Ли, то есть такую алгебру Ли, для которой выполняется условие, что любое её конечное множество элементов порождает подалгебру, являющуюся нильпотентной. Данный пример построен с использованием бесконечных верхнетреугольных матриц над полем F характеристики нуль, которые при введении на них операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$ образуют алгебру Ли.

Данный пример демонстрирует естественность введения локально нильпотентного радикала в теории бесконечномерных алгебр Ли. В частности, в качестве примера такого введения локально нильпотентного радикала приводится известное его определение для специальных алгебр Ли над полем F, в котором используется понятие PI-представлений алгебр Ли над полем F и их наибольших идеалов локальной нильпотентности.

Раздел 1.4 посвящён истории проблематики введения определения радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли и проблемы его гомологического описания.

Рассмотрение существующих в теории алгебр Ли определений радикала Джекобсона и связанных с ним естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли, таких как неприводимо представленный радикал, PI-неприводимо представленный радикал и конечно неприводимо представленный радикал, позволило в заключении данной работы сформулировать новые проблемы и вопросы, которые могут составить основу для дальнейших исследований свойств радикалов бесконечномерных алгебр Ли.

Во **второй главе** рассматриваются слабо артиновы алгебры Ли и решаются проблемы, поставленные в задачах исследования, связанные со свойствами первичного радикала алгебр Ли. В процессе доказательства основных результатов данной главы используются нижний слабо разрешимый радикал и его соотношение с первичным радикалом, представление первичного радикала алгебр Ли по нильпотентным идеалам, а также свойства абелевых, нильпотентных и разрешимых идеалов алгебр Ли.

В **разделе 2.1** приводятся определение слабо артиновой алгебры Ли и примеры бесконечномерных слабо артиновых алгебр Ли.

Основным результатом, полученным в данном разделе, является **пример 2.1.4** построения бесконечномерной слабо артиновой алгебры Ли. Алгебра Ли L строится как полупрямое произведение алгебр M и P, то есть $L = M \odot P$, где M является простой алгеброй Ли, а P представляет собой прямую сумму векторных пространств $M_i, i = 1, 2, ...$, которые являются алгебрами Ли, изоморфными M, то есть $P = M_1 \dotplus M_2 \dotplus ... \dotplus M_n \dotplus ....$ На P задается операция таким образом, чтобы P являлась алгеброй Ли. Доказывается, что построенная алгебра является слабо артиновой.

В **разделе 2.2** главным результатом является доказательство свойства локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли, которое решает первую из задач, поставленных в настоящем диссертационном исследовании.

Теорема 2.2.1 *Первичный радикал $P(L)$ любой слабо артиновой алгебры Ли L является локально нильпотентным.*

При получении данного результата основными конструкциями, используемыми в логической цепи умозаключений, стали представление первичного радикала алгебры Ли в качестве радикала, являющегося нижним слабо разрешимым, и представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Согласно определению свойства локальной нильпотентности алгебр Ли любое конечное множество элементов алгебры Ли L должно порождать в ней нильпотентную подалгебру, что и положено в основу доказательства теоремы 2.2.1 для первичного радикала $P(L)$ слабо артиновой алгебры Ли L.

В **разделе 2.3** представлено решение проблемы о разрешимости первичного радикала, сформулированной А. В. Михалёвым для слабо артиновых алгебр Ли, и поставленной в качестве второй задачи настоящего исследования.

Основным результатом раздела 2.3 является формулировка и доказательство теоремы 2.3.2, согласно которой для слабо артиновой алгебры Ли её первичный радикал разрешим.

Теорема 2.3.2 *Первичный радикал $P(L)$ любой слабо артиновой алгебры Ли L является разрешимым.*

В рассуждениях, приводящих к получению подтверждения истинности приведённой теоремы, использовались представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала и представление первичного радикала по нильпотентным идеалам, а также свойства идеалов и нильпотентных идеалов алгебр Ли.

Основную идею получения результата можно разбить несколько этапов:

1. Рассматривается производный ряд первичного радикала $P = P(L)$ слабо артиновой алгебры Ли L. Используя условие слабой артиновости, получаем следующие соотношения:

$$R_1 = P^{(n+1)} = P^{(n)} \text{ и } [R_1, R_1] = R_1.$$

В предположении, что $R_1 \neq 0$, доказывается неразрешимость последнего несобственного идеала $K = R_m$ убывающей цепи ненулевых идеалов, построенной на основе производных рядов первичного радикала $P = P(L)$ и собственных неразрешимых идеалов, содержащихся в идеалах из стабилизирующейся цепи.

2. Рассматривается представление первичного радикала $P = P(L)$ слабо артиновой алгебры Ли L как нижнего слабо разрешимого радикала, из которого следует, что $P(L) = \tau(\beta)$.

3. Показывается, что построенный в пункте 1 неразрешимый идеал $K = \tau(\omega)$ занумерован первым бесконечным порядковым числом.

4. Строится представление первичного радикала по нильпотентным идеалам: $P(L) = \rho(\beta)$.

Идеал K, полученный в пункте 1, представляется в виде объединения нильпотентных идеалов, являющихся элементами возрастающей цепи идеалов, то есть $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho(i)$.

5. С помощью элементов идеала K получаем выполнение тождеств разрешимости для первичного радикала $P = P(L)$.

В третьей главе решается проблема М. В. Зайцева, поставленная в качестве третьей задачи данного исследования. Она связана с проблемой вложения специальной нётеровой алгебры Ли в алгебру матриц. В процессе получения основных результатов главы используется конструкция центроида Мартиндейла.

В разделе 3.1 изложены необходимые для получения основных результатов определения нётеровой алгебры Ли и понятия размерности пространства над прямой суммой полей.

Сформулирована и доказана **лемма 3.1.1** о совпадении размерностей C-подпростанств, являющихся вложенными друг в друга подпростанствами C-подпростанства, получающегося как тензорное произведение конечномерного пространства над полем F и прямой суммы полей.

В разделе 3.2 рассматриваются основные понятия и результаты, необходимые для решения проблемы М. В. Зайцева, связанные с конструкцией центроида Мартиндейла.

Доказана следующая теорема о конечномерности первичной PI-алгебры.

Теорема 3.2.2 *Пусть A – первичная ассоциативная PI-алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d. Тогда A конечномерна над своим центроидом Мартиндейла $C(A)$, и ее размерность над C меньше, либо равна $[d/2]^2$.*

Для первичной специальной алгебры Ли сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.5 *Пусть L – первичная специальная алгебра Ли. Тогда*

1) L является матричной алгеброй Ли;

2) если сложность $n(L)$ равна n, то L конечномерна над своим центроидом Мартиндейла размерности не выше n^2.

Теорема 3.2.5 определяет условие конечномерности первичной специальной алгебры Ли L над своим центроидом Мартиндейла.

В разделе 3.3 сформулирован и доказан основной результат главы 3, заключающийся в решении проблемы М. В. Зайцева о вложении любой нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц.

Следующая теорема дает решение проблемы М. В. Зайцева, согласно которой любая полупервичная нётерова специальная алгебра Ли вкладывается в матричную алгебру над коммутативным кольцом.

Теорема 3.3.1 *Пусть алгебра Ли L – нётерова полупервичная специальная. Тогда L вложена в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.*

В четвёртой главе приведены результаты исследования первичного радикала градуированных Ω-групп, полученные в качестве дополнительных результатов к задачам, поставленным в данной работе.

В разделе 4.1 рассмотрены основные определения и сведения о градуированных Ω-группах в соответствии с работами [30], [16].

В разделе 4.2 сформулирован и доказан основной результат главы 4, заключающийся в доказательстве свойства локальной нильпотентности градуированного идеала градуированной Ω-группы, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек градуированных идеалов.

В процессе исследования свойства локальной нильпотентности градуированного идеала градуированной Ω-группы сформулированы и доказаны вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основного результата.

Первое утверждение связано с существованием ненулевого абелева градуированного идеала в градуированном идеале. Согласно **лемме 4.2.1**, доказанной в настоящей работе, любой ненулевой разрешимый градуированный идеал градуированной Ω-группы содержит ненулевой абелев градуированный идеал.

Второе утверждение о сумме градуированных идеалов градуированной Ω-группы сформулировано в виде **леммы 4.2.2**, с помощью которой установлено, что при суммировании нильпотентных градуированных идеалов свойство нильпотентности сохраняется.

Основным результатом, полученным в данном разделе, является теорема, формулировка которой приведена далее.

Теорема 4.2.1 *Градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω-группы A с условием конечности, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей градуированных идеалов, является локально нильпотентным.*

При получении данного результата основными конструкциями, используемыми в логической цепи умозаключений, стали представление градуированного первичного радикала градуированной Ω-группы как нижнего слабо разрешимого градуированного радикала и представление первичного градуированного радикала градуированной Ω-группы по её нильпотентным градуированным идеалам.

Согласно определению свойства локальной нильпотентности градуированных Ω-групп любое конечное множество элементов градуированной Ω-группы A должно порождать в ней нильпотентную градуированную Ω-подгруппу, что и доказывается в теореме 4.2.1 применительно к градуированному первичному радикалу $P(A)$.

В заключении диссертации приведены выводы по полученным результатам проведенного исследования, а также сформулированы новые научные проблемы теории радикалов бесконечномерных алгебр Ли.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность за поддержку и постоянное внимание к работе кандидату физико-математических наук, доценту Ольге Александровне Пихтильковой.

1 Классические радикалы алгебр Ли

Данная глава носит вспомогательный характер. В ней приводятся определения основных понятий теории классических радикалов алгебр Ли и систематизируются известные факты и сведения о них.

В первом разделе поясняется термин «класические радикалы». В последующих разделах приводятся определения радикалов, их свойства и известные факты о соотношениях радикалов между собой.

В главе рассматриваются основные свойства радикалов, которые в дальнейшем будут использоваться в работе при получении основных результатов: разрешимость, нильпотентность, локальная разрешимость, локальная нильпотентность.

1.1 Понятие классических радикалов алгебр Ли

В работах, посвящённых структурной теории алгебр Ли, встречаются различные определения понятия радикала. Это обусловлено исследованием алгебр Ли многими авторами с разных точек зрения. Наиболее разработанной является теория конечномерных алгебр Ли, начало которой в конце XIX века положили работы С. Ли, Э. Картана, Ф. Энгеля, В. Киллинга. Тогда же появляется понятие радикала для конечномерных алгебр Ли, описанное в трудах В. Киллинга.

Радикал В. Киллинга связан с понятием разрешимости.

Для того, чтобы ввести понятие разрешимости алгебры Ли L, необходимо рассмотреть ряд идеалов алгебры L следующего вида:

$$L' = [L, L], L'' = [L', L'], ..., L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}], ... \tag{1.1.1}$$

Ряд (1.1.1) называется производным рядом алгебры Ли L.

Определение 1.1.1 ([13, с. 17]) *Алгебра Ли L называется разрешимой, если для некоторого натурального n выполняется условие $L^{(n)} = 0$.*

Идеал I алгебры Ли L будет разрешимым, если он удовлетворяет условию, указанному в определении 1.1.1. Если складывать конечное число разрешимых идеалов конечномерной алгебры Ли, то их сумма будет идеалом, который также разрешим. Это свойство идеалов позволило ввести В. Киллингу понятие, которое с точки зрения современных подходов к пониманию исследуемых объектов структурной теории алгебр Ли является радикалом и определяется как наибольший или максимальный из всех разрешимых идеалов.

Применить аналогичный подход к определению разрешимого радикала бесконечномерных алгебр Ли, как в случае определения радикала В. Киллинга, не удалось, так как свойство суммы разрешимых радикалов, на котором данное определение основано, не выполняется. Похожие ситуации возникают и в случае рассмотрения других радикалов конечномерных алгебр Ли.

Заметим, что радикал В. Киллинга не единственный радикал, который был построен для конечномерных алгебр Ли. Примерами других радикалов являются первичный, нильпотентный радикалы, радикал Джекобсона, более подробно про определения и свойства которых как в случае конечномерных, так и в случае бесконечномерных алгебр Ли написано далее в разделах 1.2, 1.3 и 1.4 данной главы.

В 30-40 годах XX века в процессе исследования произвольных (бесконечномерных) колец и алгебр найдено несколько радикалов, удовлетворяющих требованиям структурной теории и совпадающих в классическом случае с классическим нильпотентным радикалом.

К наиболее распространенным относятся нижний ниль-радикал Бэра, локально нильпотентный радикал Левицкого, верхний ниль-радикал Кёте и квазирегулярный радикал Перлиса-Джекобсона.

Перечисленные радикалы нашли применение в разных областях современной теории алгебраических систем. Они встречаются почти в любой монографии по теории колец или алгебр, начиная с монографии Джекобсона [10]. Поэтому можно сказать, что указанные радикалы стали классическими. Такое название оправдывается и тем, что в классическом случае конечномерных алгебр и колец с условием минимальности все эти радикалы совпадают с классическим нильпотентным радикалом [1].

По аналогии с данным определением классических радикалов для произвольных алгебраических систем, рассмотрим радикалы, которые можно отнести к классическим радикалам алгебр Ли.

Далее рассмотрим необходимые сведения об определениях и свойствах радикалов алгебр Ли, которые можно относить к классическим.

1.2 Первичный радикал алгебр Ли и его соотношения с разрешимыми радикалами

Рассмотрение первичного радикала ряда алгебраических структур показало себя как один из плодотворных подходов к построению структурной теории алгебраических систем. Существуют многочисленные публикации, посвящённые изучению свойств, которыми обладают первичные радикалы разнообразных алгебраических структур. Авторами исследуются первичные радикалы групп, колец, алгебр, решеток с точки зрения различных подходов к определениям этих объектов. Впервые в 1949 году Н. Маккой рассмотрел понятия первичного кольца и первичного идеала, с помощью которых определил первичный радикал в виде пересечения всех первичных идеалов кольца [62]. Далее теория первичного радикала была распространена и на другие алгебраические системы. В 1960 г. К. К. Щукин в работе «RI^*-разрешимый радикал групп» ввёл определение первичных нормальных делителей, первичной группы, а также первичного радикала группы [50]. Первичный радикал Ω-групп исследовался в работах И. Н. Балабы, А. В. Михалёва, С. А. Пихтилькова и других математиков ([29], [30], [55]). Рассматривались определения и свойства первичного радикала для таких алгебраических структур, как решёточно упорядоченные и частично упорядоченные алгебраические системы [15], [27], [28], [31], [32], лупы и Ω-лупы [8], [9]. С. А. Пихтильковым, И. Н. Балабой и К. И. Бейдаром рассмотрен первичный радикал и его свойства для супералгебр Ли, специальных алгебр Ли [4], [5], [64], [65]. Ряд работ посвящён исследованиям первичного радикала алгебр Ли, для которых выполняются условия стабилизации убывающих цепей таких объектов, как идеалов, подалгебр или внутренних идеалов (условие артиновости), локальной нильпотентности [23], [38], [39], [42].

Рассмотрим определение первичного радикала для алгебр Ли в соответствии с работой [39]. Предварительно нам необходимо привести формулировки определений для понятий первичной алгебры и первичного идеала.

Определение 1.2.1 ([39]) *Первичной будем называть такую алгебру Ли L, для которой выполнено условие: для произвольных идеалов I и J из равенства коммутантов этих идеалов нулю $[I, J] = 0$ должно следовать, что либо идеал $I = 0$, либо $J = 0$.*

Определение 1.2.2 ([39]) *Первичным идеалом алгебры Ли L называется такой идеал P, для которого фактор-алгебра L/P – первична.*

Определение 1.2.3 ([39]) *Пусть P_α – все первичные идеалы алгебры Ли L. Тогда их пересечение $\bigcap P_\alpha$ будем называть первичным радикалом и обозначать $P(L)$. Если у алгебры Ли L нет первичных идеалов, то в качестве первичного радикала будем считать саму алгебру Ли L.*

Пример 2.1.1 Рассмотрим алгебру Ли $L = L_1 \oplus L_2$, где $L = L_1$ и L_2 — простые алгебры Ли. Тогда алгебра Ли L имеет только два нетривиальных собственных идеала: $I = \{(x_1, 0) : x_1 \in L_1\}$ и $J = \{(0, x_2) : x_2 \in L_2\}$.

Алгебра Ли L является первичной. Кроме того, первичными являются и идеалы I и J. При этом первичный радикал $P(L)$ равен нулю.

Отметим, что при поиске первичного радикала полезными оказываются некоторые известные факты о первичном радикале различных видов алгебр Ли.

Определение 1.2.4 ([38, с. 154]) *Алгебра Ли L, называется полупервичной, если для всякого её идеала I из $I^2 = 0$ следует, что $I = 0$.*

Заметим, что точно также полупервичная алгебра определяется и для ассоциативных алгебр. Приведённое определение эквивалентно равенству нулю первичного радикала.

Примером полупервичной алгебры Ли является алгебра Ли $L = sl_2(F)\bigotimes_F P$, где F – поле, имеющее характеристику нуль, P – кольцо многочленов от одной переменной без свободных членов с коэффициентами из поля F [37]. Первичный радикал данной алгебры Ли равен нулю.

Следующее свойство может оказаться полезным при поиске первичных радикалов колец многочленов над различными алгебрами Ли. Оно является аналогом свойства первичного радикала кольца многочленов над ассоциативной алгеброй. Ш. Амицур [52] показал, что если A – ассоциативная алгебра и $A[x]$ – кольцо многочленов над A, то первичный радикал кольца многочленов $A[x]$ совпадает с кольцом многочленов над первичным радикалом кольца A, то есть $P(A[x]) = P(A)[x]$. Аналогичный результат распространён и на случай для алгебр Ли, когда L – алгебра Ли и $L[x]$ – кольцо многочленов над L. В работе [43] С. А. Пихтильковым и В. М. Поляковым доказано, что первичный радикал кольца многочленов $L[x]$ совпадает с кольцом многочленов над первичным радикалом алгебры Ли L, то есть $P(L[x]) = P(L)[x]$. Кроме того, для кольца многочленов над L от n коммутирующих переменных $L[x_1, ..., x_n]$ справедливо равенство, при котором первичный радикал кольца коммутирующих переменных совпадает с кольцом многочленов над первичным радикалом $P(L)$ от n коммутирующих переменных, то есть $P(L[x_1, ..., x_n]) = P(L)[x_1, ..., x_n]$.

Актуальным для исследований является вопрос о разрешимости первичного радикала алгебр Ли.

Рассмотрим ещё одно определение разрешимой алгебры Ли.

Определение 1.2.6 ([38, с. 30]) *Рассмотрим систему многочленов:*

$$f_0(x_1) = x_1, f_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2],$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]], \dots ,$$

$$f_{k+1}(x_1, ..., x_{2^{k+1}}) = [f_k(x_1, ..., x_{2^k}, f_k(x_{2^k+1}, ..., x_{2^{k+1}}], \ldots .$$

Если для алгебры Ли L выполняется условие $f_c = 0$ и не выполняется $f_{c-1} = 0$, алгебра Ли L называется разрешимой ступени c .

Алгебра Ли называется разрешимой, если она является разрешимой алгеброй некоторой ступени.

При исследовании бесконечномерных алгебр Ли используются также понятия слабо разрешимой и локально разрешимой алгебр Ли.

Определение 1.2.7 ([38, с. 41]) *Пусть L – алгебра Ли, V – её произвольное конечномерное подпространство ($V \subseteq L$). Если для каждого V найдется такое k, что f_k будет равно нулю для любых элементов из V, то L называется слабо разрешимой.*

Определение 1.2.8 ([38, с. 30]) *Пусть L – алгебра Ли, A – произвольная конечная подалгебра L. Назовём L локально разрешимой, если выполняется условие, согласно которому любая её подалгебра A – разрешима.*

При изложении решения задач данного исследования, связанных с алгебрами Ли, для которых выполняется условие стабилизации убывающих цепей идеалов (слабая артиновость), будет использован, в том числе, и радикал, который называется нижним слабо разрешимым.

Впервые исследование радикала, называемого слабо разрешимым, применительно к произвольным алгебрам Ли проведено в статье [33]. В указанной работе установлено, что при суммировании идеалов, являющихся слабо разрешимыми, сохраняется свойство слабой разрешимости. В этой же работе сформулировано и доказано утверждение, согласно которому алгебра Ли L, в которой существует идеал I и фактор-алгебра L/I, являющиеся слабо разрешимыми, будет в свою очередь слабо разрешимой. Более того, для класса алгебр Ли, являющихся слабо разрешимыми, выполняются все условия, необходимые для того, чтобы считать его радикальным [33].

Далее рассмотрим понятия верхнего и нижнего слабо разрешимых радикалов.

Верхний слабо разрешимый радикал алгебры Ли L – это наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли, обозначается он как $T(L)$.

Чтобы ввести определение нижнего слабо разрешимого радикала в соответствии с работой [38], рассмотрим следующую конструкцию.

Пусть $\rho(L)$ – сумма разрешимых идеалов алгебры Ли L.

Тогда, учитывая, что при суммировании разрешимых идеалов наследуется свойство разрешимости, идеал $\rho(L)$ будет локально разрешимым.

Рассмотрим число α, которое является порядковым. Поставим ему в соответствие идеал $\rho(\alpha)$ определённым образом, используя трансфинитную индукцию:

1. При $\alpha = 0$ идеал $\rho(0)$ равен нулю.

2. Будем считать, что для любых порядковых чисел α меньших некоторого β идеал $\rho(\alpha)$ определен, а для порядкового числа β идеал $\rho(\beta)$ задается следующим способом:

а) если число $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым, то идеал $\rho(\beta)$ – это такой идеал алгебры L, что фактор идеала $\rho(\beta)$ по идеалу $\rho(\gamma)$ совпадает с идеалом $\rho(L/\rho(\gamma))$;

б) в случае, когда β является предельным порядковым, идеал $\rho(\beta)$ представляет собой следующее объединение:

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \rho(\gamma).$$

Согласно результату исследования R. Amayo [51] «расширение локально разрешимой алгебры Ли с помощью локально разрешимой алгебры не может быть локально разрешимым», однако, как показано в работе [33], такое расширение будет слабо разрешимым.

Учитывая мощность множества порядковых чисел, получим, что для некоторого порядкового числа β выполняется условие $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$.

Назовём $\rho(\beta)$ нижним слабо разрешимым радикалом алгебры Ли L.

Заметим, что слабо разрешимые алгебры Ли представляют собой аналог локально нильпотентных ассоциативных алгебр.

При исследовании свойств, которыми обладают радикалы разнообразных типов алгебр Ли (в нашем случае алгебр, с дополнительно накладываемыми на них условиями), представляют интерес вопросы, связанные с выявлением условий, при которых радикалы равны или каким-либо образом соотносятся между собой. Известно, что для произвольной алгебры Ли выполняется соотношение, согласно которому первичный радикал содержится в идеале, который является наибольшим слабо разрешимым.

В монографии [38] С. А. Пихтильковым получен результат о соотношении первичного радикала и слабо разрешимого радикала для произвольных алгебр Ли, который сформулирован в виде теоремы, устанавливающей, что для любой алгебры Ли L, заданной над полем F, нижний слабо разрешимый и первичный радикалы совпадают. Данный факт позволяет проводить доказательства различных свойств первичного радикала алгебр Ли. В настоящей работе он используется при решении первой и второй задач диссертационного исследования.

Следующее определение связано со свойством первичного радикала произвольной алгебры Ли.

Определение 1.2.5 ([7, с. 12]) *Идеал алгебры Ли, устойчивый относительно всех внутренних дифференцирований, называется характеристическим.*

В работе [38, с. 43], основываясь на факте равенства нижнего слабо разрешимого радикала первичному, С. А. Пихтильков доказал, что для произвольной алгебры Ли L над полем P, характеристика которого равна нулю, первичный радикал $P(L)$ будет характеристическим.

Таким образом, в данном разделе приведены и систематизированы основные определения и утверждения теории первичного радикала алгебр Ли, которые потребуются для дальнейших исследований.

1.3 Нильпотентный и локально нильпотентный радикалы алгебр Ли

Нильпотентный радикал алгебры Ли играет важную роль в теории полупростых конечномерных алгебр Ли над полем, обладающем характеристикой нуль.

Нильпотентный радикал алгебр Ли относится к классическим радикалам структурной теории конечномерных алгебр Ли.

Для того, чтобы ввести понятие нильпотентности алгебры Ли L, необходимо рассмотреть ряд идеалов алгебры L следующего вида:

$$L_1 = L, L_2 = [L, L], \ldots, L_{n+1} = [L, L_n], \ldots. \qquad (1.3.1)$$

Ряд (1.3.1) называется нижним центральным рядом алгебры Ли L.

Определение 1.3.1 ([13, с. 20]) *Алгебра L нильпотентна, если члены нижнего центрального ряда обращаются в 0 на некотором конечном шаге.*

Наименьшее натуральное n, для которого $L_n = 0$, называется длиной (ступенью) нильпотентности.

Примером нильпотентной алгебры Ли, используемой в работе при получении результатов, является коммутативная алгебра Ли.

Заметим, что нильпотентность и разрешимость алгебры Ли L связаны следующим образом: из нильпотентности следует её разрешимость [13].

Идеал I алгебры Ли L будет нильпотентным, если он удовлетворяет условию, указанному в определении 1.3.1, то есть, если он нильпотентен как алгебра Ли. Если складывать конечное число нильпотентных идеалов конечномерной алгебры Ли, то их сумма будет идеалом, который также нильпотентен.

В алгебрах Ли, являющихся конечномерными, существует наибольший или максимальный из всех нильпотентных идеалов ([7], [11]), но он не обладает необходимыми характерными для радикала свойствами, благодаря которым его можно было бы рассматривать в качестве радикала, называемого нильпотентным [38, с. 64]. В связи с этим определение понятия нильпотентного радикала любой конечномерной алгебры Ли L вводится с помощью ядер её неприводимых конечномерных представлений и является их пересечением.

Как показано в [7, с. 58], нильпотентный радикал представляет собой пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L.

Определение 1.3.2 ([19]) *Пусть L – алгебра Ли, M – конечномерный модуль, x_M – эндоморфизм, поставленный в соответствие элементу x. Наибольший идеал U из L называется наибольшим идеалом нильпотентности представления, если x_M нильпотентен для всех x из L в алгебре эндоморфизмов $End(M)$.*

Отметим, что нильпотентный радикал содержится в таком идеале алгебры Ли L, который является наибольшим нильпотентным. Тогда и сам радикал будет нильпотентным идеалом [7, с. 58].

В отношении нильпотентного радикала справедлива теорема о связи разрешимого и нильпотентного радикалов.

Теорема 1.3.1 (О нильпотентном радикале [7, с. 59]) *Нильпотентный радикал произвольной конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль совпадает с коммутантом самой алгебры Ли L и её разрешимого радикала.*

Для бесконечномерных алгебр Ли также интересным представляется вопрос о существовании максимального нильпотентного идеала. В качестве примера таких алгебр Ли, обладающих максимальным нильпотентным идеалом, можно привести конечно порождённые специальные [45].

Возвращаясь к вопросу об определении нильпотентного радикала для случая, когда алгебры Ли являются бесконечномерными, отметим, что при попытке перенести определение с конечномерного случая, получаем ситуацию, при которой таким образом определённый радикал вовсе не обязательно будет нильпотентным.

Далее рассмотрим пример бесконечномерной локально нильпотентной алгебры Ли, которая не является нильпотентной.

Пример 1.3.1 Пусть L – это алгебра Ли бесконечных верхнетреугольных матриц по отношению к операции коммутирования над полем F характеристики нуль, содержащих лишь конечное число элементов, отличных от нуля.

Пусть N – подалгебра матриц алгебры Ли L с нулевыми элементами на диагонали.

Пусть матрица A, принадлежащая N содержит ненулевые слагаемые $a_{ij_1}e_{ij_1}$, $a_{ij_2}e_{ij_2}$, $\ldots$, $a_{ij_k}e_{ij_k}$, $i \neq j_1$, $i \neq j_2$, $i \neq j_k$, где e_{ij} – матричная единица.

Элементы e_{ii}, $e_{j_1j_1}$ принадлежат L. Тогда

$$[e_{ii}, A] = \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s}e_{ij_s} \Rightarrow \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s}e_{ij_s} \in N,$$
$$[[e_{ii}, A], e_{j_1j_1}] = a_{ij_1}e_{ij_1} \Rightarrow a_{ij_1}e_{ij_1} \in N.$$

Итак, $N \subset [L, N]$.

С другой стороны, N – идеал алгебры Ли L, то есть $[L, N] \subset N$.

Таким образом, $N = [L, N]$.

Исходя из того, что всякое конечное множество матриц алгебры Ли L вкладывается в алгебру Ли матриц, порядок которых конечен (предполагается, что при вложении откидывается бесконечное множество элементов, равных нулю), получим, что L – разрешима, а N – локально нильпотентна.

Рассмотрим конечномерное представление M алгебры Ли L.

Пусть $\overline{L}$ и $\overline{N}$ – гомоморфные образы алгебр Ли L и N в алгебре Ли эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$.

Алгебра Ли $\overline{L}$ будет конечномерной. Тогда можно воспользоваться теоремой 1.3.1, согласно которой нильпотентный радикал алгебры Ли $\overline{L}$ будет равен $N(\overline{L}) = \overline{N}$. Согласно определению нильпотентного радикала, эндоморфизм x_M, который соответствует элементу x, будет для всех $x \in \overline{L}$ нильпотентным в алгебре $End(M)$. Следовательно, алгебра Ли N содержится в наибольшем идеале нильпотентности представления M.

Учитывая произвольность конечномерного представления M, мы получили включение $N \subset N(L)$.

Покажем, что пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений совпадает с N.

Пусть для матрицы A алгебры L слагаемое $a_{ii}e_{ii}$ не равно нулю.

Алгебра Ли L представлена эндоморфизмами бесконечномерного векторного пространства V и запись её элементов в виде матриц получается после выбора базиса $t_1, t_2, \dots$.

После соответствующей перенумерации элементов базиса можно получить, что $a_{ii}e_{ii} \neq 0$.

Рассмотрим подпространство W, являющееся линейной оболочкой базисных элементов $t_2, t_3, \dots$. Пусть $\overline{V} = V/W$ фактор-пространство.

Пусть матрицы действуют справа на векторы V.

Покажем, что подпространство W инвариантно относительно алгебры Ли L.

Алгебра Ли L является линейной оболочкой матричных единиц e_{ij}, $i \leq j$.

Тогда $t_k e_{ij} = \delta_{ki} t_j$, где δ_{ki} – символ Кронекера, $k \leq j$.

Можно считать, что L действует на фактор-пространстве $\overline{V}$.

Тогда $\overline{t_1}A = a_{11}\overline{t_1}$. Отсюда следует, что $\overline{t_1}A^n = a_{11}^n \overline{t_1} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, матрица A не лежит в наибольшем идеале нильпотентности представления алгебры Ли L в пространстве $\overline{V}$.

Так как A – произвольная матрица L с ненулевыми элементами на диагонали, то $N(L) \subset N$.

В результате получаем, что $N(L) = N$ и алгебра N не является нильпотентной.

Данный пример показывает естественность введения для бесконечномерных алгебр Ли понятия локально нильпотентного радикала. Такой радикал будет удовлетворять свойствам, аналогичным свойствам нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли.

Для ассоциативных алгебр локально нильпотентным радикалом (называемым также радикалом Левицкого) алгебры R называется её такой локально нильпотентный идеал, который будет наибольшим [1]. В случае бесконечномерных алгебр Ли подход к определению локально нильпотентного радикала иной.

Определение 1.3.3 *Алгебра Ли называется локально нильпотентной, если любая её конечно порождённая подалгебра нильпотентна.*

Понятие локально нильпотентного радикала для бесконечномерных алгебр Ли является аналогом нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли.

В статье [36] введено понятие радикала специальной алгебры Ли, называемого локально нильпотентным. Руководствуясь данной работой приведём это определение.

Рассмотрим сначала понятие специальной алгебры Ли. Для этого нам понадобится определение ассоциативной PI-алгебры.

Определение 1.3.4 ([10, с. 323]) *Назовём PI-алгеброй такую ассоциативную алгебру A, для которой в свободной ассоциативной алгебре $F(x)$ можно найти такой многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с некоммутативными переменными, что для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, принадлежащих алгебре A, будет выполняться равенство*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Понятие специальной алгебры Ли, приведённое далее по тексту, введено в 1963 г. В. Н. Латышевым [21].

Определение 1.3.5 ([21]) *Специальной называется такая алгебра Ли L, для которой можно найти ассоциативную PI-алгебру A таким образом, чтобы L являлась вложением в $A^{(-)}$ в качестве алгебры Ли. Здесь $A^{(-)}$ – это алгебра Ли, заданная на A посредством операции $[x, y] = xy - yx$.*

Специальные алгебры Ли также называются SPI-алгебрами.

Чтобы для SPI-алгебр привести определение радикала, называемого локально-нильпотентным, сначала необходимо рассмотреть понятие, аналогичное наибольшему идеалу нильпотентности, рассматриваемому для конечномерных алгебр Ли. Оно вводится для PI-представлений алгебр Ли в соответствии с теоремой, сформулированной в монографии [38, с. 66-67, теорема 3.2.1]. При формулировке теоремы используется векторное пространство V, эндоморфизм α_V, поставленный в соответствие элементу α, и, в предположении, что алгебра Ли L обладает PI-представлением в кольце эндоморфизмов V, утверждается, что выполняются определённые условия. Во-первых, все идеалы J алгебры L, для которых α_V нильпотентен для произвольных α из L, содержатся в одном из них. Обозначим такой идеал через U. Во-вторых, образ $\overline{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре эндоморфизмов $End(V)$. В третьих, идеал U состоит из множества таких элементов α, принадлежащих L, что эндоморфизмы, порождаемые этими элементами α_V, принадлежат первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, которая ассоциирована с представлением алгебры L.

Заметим, что идеал U, упоминаемый в теореме [38, с. 66-67, теорема 3.2.1], удовлетворяет условиям, аналогичным условиям из определения 1.3.2. Следовательно, такой идеал U может быть назван наибольшим идеалом локальной нильпотентности PI-представления.

Для специальных алгебр Ли С.А. Пихтильков ввёл определение локально нильпотентного радикала следующим образом.

Определение 1.3.6 ([36]) *Пусть L – специальная алгебра Ли L над полем F, U_α – наибольшие идеалы локальной нильпотентности всех PI-представлений L. Пересечение всех идеалов U_α назовём локально нильпотентным радикалом и обозначим $N(L)$.*

В работе [36] доказаны свойства локально нильпотентного радикала $N(L)$ специальной алгебры Ли L. В частности, установлено, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L обладает свойством локальной нильпотентности.

1.4 Радикал Джекобсона и связанные с ним радикалы алгебр Ли

Радикал Джекобсона – классический радикал, удовлетворяющий требованиям структурной теории и рассматриваемый для различных алгебраических систем. В теории радикалов колец известен также как квазирегулярный радикал Перлиса-Джекобсона. Как правило, вводится в рассмотрение с помощью модулей.

Радикалом Джекобсона в теории ассоциативных колец называется пересечение всех максимальных правых идеалов кольца [49]. Для того, чтобы определить радикал Джекобсона для алгебры, которая является ассоциативной, используется понятие неприводимых R-модулей (левых или правых), пересечение аннуляторов которых и есть радикал Джекобсона [1]. Определение, эквивалентное данному, может быть сформулировано через понятие всех неприводимых представлений как пересечение их ядер.

Аналогичным образом было введено понятие радикала Джекобсона для алгебры Ли. Первоначально Е. Маршалл сформулировал определение, используя понятие максимальных идеалов [63]. В своей статье «О радикалах Джекобсона бесконечномерных алгебр Ли» Ф. Кубо в определении радикала Джекобсона отдельно оговорил случай, что понимать под радикалом Джекобсона, если отсутствуют максимальные идеалы.

Итак, в соответствии с рассмотренными работами определение радикала Джекобсона можно ввести следующим образом.

Определение 1.4.1 *Под радикалом Джекобсона алгебры Ли L понимается пересечение максимальных идеалов алгебры Ли L. В случае отсутствия максимальных идеалов в качестве радикала Джекобсона рассматривают саму алгебру Ли L.*

При исследовании радикалов алгебраических структур интересен вопрос о том, в каких случаях различные радикалы будут совпадать, а также каким-либо образом соотноситься друг с другом или иными объектами структурной теории. Так, например, в случае конечномерных алгебр Ли радикал Джекобсона и нильпотентный радикал будут совпадать в том случае, если алгебра Ли задана над полем, имеющем характеристику нуль [63].

Е. Маршаллом также доказана теорема для конечномерных алгебр Ли [63], в которой рассматривается связь между разрешимым радикалом и радикалом Джекобсона. Согласно указанной теореме радикал Джекобсона $J(L)$ равен коммутанту самой алгебры и разрешимого радикала $\sigma(L)$, то есть $J(L) = [L, \sigma(L)]$, если алгебра Ли рассматривается над полем, имеющем характеристику нуль, и имеет разложение в прямую сумму вида $L = S \oplus \sigma(L)$, где S является полупростой алгеброй Ли.

Как и для других радикалов, для радикала Джекобсона алгебр Ли исследуются его соотношения с другими радикалами и идеалами.

Н. Камийя в своей статье [60] рассмотрел вопросы о том, как идеал, являющийся локально разрешимым, соотносится с радикалом Джекобсона. Для этого им было использовано понятие подидеала алгебры Ли.

Определение 1.4.2 *Подидеалом алгебры Ли называется идеал её идеала.*

Для алгебры Ли L, порождённой её конечномерными локальными подидеалами, Н. Камийя доказано следующее утверждение.

Теорема 1.4.1 ([60]) *Пусть L – алгебра Ли, порождённая конечномерными локальными подидеалами L, $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L. Тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L совпадает с коммутантом $[L, \sigma(L)]$.*

Ф. Кубо также проводил исследование свойств радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли [61]. В его работах доказано, что результаты, полученные Н. Камийя и Е. Маршаллом нельзя распространить для бесконечномерных алгебр Ли, так как они не выполняются даже для алгебр, являющихся локально конечными. Ф. Кубо также изучал свойства бесконечномерных алгебр Ли, у которых радикал Джекобсона равен нулю.

Один из способов изучения свойств алгебр Ли, а также их идеалов предполагает использование описания идеалов алгебр Ли, называемое гомологическим. Точно также, как и в случае гомологического описания колец, подобное описание для алгебр Ли подразумевает формулирование их определений и свойств через определения и свойства модулей над этими алгебрами Ли [26]. В контексте теории радикала Джекобсона для алгебр Ли является актуальной проблема возможности его гомологического описания.

В работе [41] рассмотрены определения естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли, а также приведены их сравнения с радикалом Джекобсона. В статье исследуются радикалы алгебр Ли, задаваемые через различные конструкции модулей над ними. Далее приведем определения этих радикалов в соответствии с [41].

Определение 1.4.3 *Пусть L – алгебра Ли, M_α – неприводимые модули над L. Неприводимо представленным радикалом $Irr(L)$ алгебры Ли L называется пересечение аннуляторов всех M_α. Если у алгебры Ли L нет неприводимых модулей, то $Irr(L)$ будем считать саму алгебру L.*

Определение 1.4.4 *PI-неприводимо представленным радикалом $IrrPI(L)$ алгебры Ли L называется пересечение аннуляторов всех её неприводимых PI-представлений. Если у алгебры Ли L нет неприводимых PI-представлений, то $IrrPI(L)$ будем считать саму алгебру L.*

Определение 1.4.5 *Конечно неприводимо представленным радикалом $IrrFin(L)$ алгебры Ли L называется пересечение её аннуляторов всех неприводимых конечномерных представлений. Если у алгебры Ли L отсутствуют указанные представления, то $IrrFin(L)$ будем считать саму алгебру L.*

В работе [41] также исследованы свойства неприводимо представленных радикалов. В частности, доказано, что для произвольной алгебры Ли L неприводимо представленный радикал $Irr(L) = L \cap J(U(L))$, где $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебра.

В случае конечномерной алгебры Ли L над полем, обладающим характеристикой, равной нулю, PI-неприводимо представленный радикал становится равным нильпотентному радикалу алгебры Ли L.

Также исследованы соотношения между всеми гомологически заданными радикалами. Показано, что в случае, когда у основного поля характеристика равна нулю, имеют место следующие включения: $Irr(L) \subset IrrPI(L) \subset IrrFin(L)$.

Изучение свойств разрешимости PI-неприводимо представленного радикала показало, что в общем случае $IrrPI(L)$ не является локально разрешимым, в том числе и для специальных алгебр Ли.

В работе [41] сделан вывод о представлении радикала Джекобсона через модули, согласно которому для конечномерных алгебр Ли над полем, обладающим характеристикой нуль, радикал Джекобсона и PI-неприводимо представленный радикал алгебры Ли совпадают. Следовательно, радикал Джекобсона алгебры Ли можно определить как пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли и как саму алгебру, в случае их отсутствия.

2 Слабо артиновы алгебры Ли

В данной главе решаются первая и вторая проблемы, поставленные в задачах исследования.

В первом разделе дается определение слабо артиновых алгебр Ли и приводятся примеры.

Во втором разделе доказывается локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

В третьем разделе решается проблема А. В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

В процессе решения рассматриваемых проблем используются определения и свойства нижнего слабо разрешимого радикала, абелевых, нильпотентных и разрешимых идеалов алгебр Ли, а также представление первичного радикала алгебр Ли по нильпотентным идеалам.

2.1 Понятие и примеры слабо артиновых алгебр Ли

Артиновость является одним из условий конечности, позволяющим исследовать бесконечномерные алгебры Ли с точки зрения построения структурной теории.

Э. Артин впервые рассмотрел кольца с условием минимальности.

Для ассоциативных колец рассматривается понятие правой или левой артиновости. Если в ассоциативном кольце R любая убывающая цепочка его правых (левых) идеалов стабилизируется, то кольцо R называется право (лево) артиновым. Ассоциативное кольцо не обязательно обладает свойствами правой и левой артиновости одновременно. Известен пример Смолла [20, с. 122] кольца, которое является право артиновым, но не является лево артиновым.

Артиновость ассоциативных колец также может определяться и только для двусторонних идеалов. В этом случае возникает понятие слабой артиновости, которое слабее артиновости.

Заметим, что в алгебрах Ли все идеалы являются двусторонними идеалами, поэтому для алгебр Ли не вводятся понятия правой или левой артиновости.

Определение 2.1.1 *Пусть L – алгебра Ли. Если любая убывающая цепь её идеалов $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ стабилизируется (обрывается), то L называется слабо артиновой.*

То, что в слабо артиновой алгебре Ли L любая цепь $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ идеалов обрывается (стабилизируется) означает, что найдётся такой номер n, начиная с которого все идеалы будут равны: $I_n = I_{n+1} = ...$, то есть множество идеалов цепи $I_1, I_2, ...$ будет иметь минимальный элемент.

Кроме подхода к определению артиновости для алгебр Ли, при котором используются идеалы алгебр Ли, существует подход, когда артиновость можно определить через подалгебры, внутренние идеалы. В работе [25] Е. В. Мещериной и О.А Пихтильковой рассмотрены различные понятия артиновости для алгебр Ли. В публикации [25] слабо артинова алгебра называется i-артиновой. Также в статье [25] рассмотрены понятия артиновости в случае обрыва убывающей цепочки алгебр и цепочки внутренних идеалов. Доказано, что из артиновости в смысле обрыва цепочки внутренних идеалов следует слабая артиновость алгебр Ли, из артиновости в смысле обрыва убывающей цепочки алгебр также следует слабая артиновость алгебры Ли.

Рассмотрим примеры слабо артиновых алгебр Ли.

Сначала приведём известные примеры алгебр Ли, являющихся бесконечномерными простыми. Любая простая алгебра Ли будет слабо артиновой, так как у неё только два идеала – тривиальный и сама алгебра.

Пример 2.1.1 Алгебра $sl_2(K)$, где K представляет собой бесконечномерное расширение поля F характеристики, равной нулю, является простой и бесконечномерной.

Пример 2.1.2 Пусть F – поле, V – векторное пространство, являющееся бесконечномерным над F, S – полная алгебра линейных отображений пространства V. Введём на S операцию $[x, y] = xy - yx$. В результате получим алгебру Ли, которая обозначается как $L = L(V)^{(-)}$ и является простой.

Приведём иные примеры слабо артиновых алгебр Ли.

Пример 2.1.3 Пусть F – поле, характеристика которого равна нулю,

$$K = F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \text{ –}$$

поле произвольных рациональных функций, зависящих от счётного числа коммутирующих переменных $x_1, x_2, ..., x_n, \dots$.

Далее введём следующие обозначения:

— L_1 – алгебра матриц второго порядка над полем K, след которых равен нулю, то есть $L_1 = sl_2(K)$. Алгебра L_1 является алгеброй Ли над полем K;

— L_2 – любая неизоморфная L_1 алгебра Ли.

Рассмотрим алгебру Ли $L = L_1 \oplus L_2$. В алгебре L, кроме неё самой и нуля, существуют только 2 идеала, один из которых изоморфен L_1, а другой – L_2, тогда любая цепь идеалов обрывается, то есть алгебра Ли L является слабо артиновой.

Пример 2.1.4 Пусть F – поле произвольной характеристики, M – простая алгебра Ли.

Известно, что простые алгебры Ли конечномерные и бесконечномерные существуют для полей любой характеристики.

Обозначим через $M_i, i = 1, 2, ...$ алгебры Ли изоморфные M.

Пусть $P = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} ... \dot{+} M_n \dot{+} ...$ – прямая сумма векторных пространств.

Обозначим через x_k элемент $x \in M_k$.

Введем на P структуру алгебры Ли с помощью операции

$$[a_i, b_j] = [a, b]_{min(i,j)-1}.$$

Если $min(i, j) - 1 < 1$, то произведение считается равным нулю.

На суммы $\sum\limits_{i \in I} a_i$, $\sum\limits_{j \in J} b_j$ и $\sum\limits_{k \in K} c_k$ произведение распространяется по дистрибутивности.

Проверим антикоммутативность.

Пусть $i \leq j$. Тогда $[a_i, b_j] = [a, b]_{i-1} = -[b, a]_{i-1} = -[b_j, a_i]$.

Аналогично проверяется случай, когда $i > j$.

Проверим тождество Якоби.

Если $i \leq j \leq k$, то получим

$[[a_i, b_j], c_k] + [[b_i, c_j], a_k] + [[c_i, a_j], b_k] = [[a, b], c]_{i-2} + [[b, c], a]_{i-2} + [[c, a], b]_{i-2} = 0$.

Аналогично проверяются остальные случаи.

Итак, алгебра P является алгеброй Ли.

Определим действие алгебры M на P по формуле

$$[x, a_i] = [x, a]_i, \text{ где } x \in M.$$

Действие алгебры M на P задает гомоморфизм

$$M \to \mathrm{Der}\, P.$$

Действительно,

$$\varphi([x, y])(a_i) = [[x, y], a_i] = [[x, a]_i, [y, a]_i]$$

Пусть алгебра Ли $L = M \odot P$ является полупрямым произведением алгебр M и P. Данная алгебра L является слабо артиновой. Покажем это.

Покажем, что все идеалы алгебры Ли L имеют вид

$$L,\ M_1 + ... + M_n, n = 1, 2, ...\ .$$

Пусть I – идеал алгебры Ли L, $a \in I$, a имеет вид

$$a = x + m_1 + ... + m_k,\ x \in M,\ m_i \in M_i.$$

1. Предположим, что $x = 0$. Тогда

$$a = m_1 + ... + m_k, \text{ где } m_k \neq 0.$$

Имеет смысл рассматривать только ненулевые элементы a.

Произведем преобразования в несколько шагов.

Можно выбрать такой элемент $m \in M_k$, что $[m_k, m] \neq 0$.

Тогда $[a, m] = x_1 + ... + x_{k-1}$, где $x_i \in M_i, x_{k-1} \neq 0$. Отметим. что $[a, m] \in I$.

И так далее, пока мы не придем к элементу $y \in M_1, y \neq 0, y \in I$.

Действуя на y элементами из M получим все элементы M_1. Используется простота алгебры M и ее неприводимость как модуля над M.

Получили включение $M_1 \subset I$.

В качестве промежуточного элемента у нас был элемент $z_1 + z_2 \in I, z_i \in M_i, z_2 \neq 0$.

Мы уже установили, что $z_1 \in I$. Следовательно, $z_2 \in I$.

Действуя на z_2 элементами из M получим включение $M_2 \subset I$.

Продолжая аналогичные рассуждения, получим

$$M_1 + ... + M_k \subset I.$$

2. Предположим теперь, что $x \neq 0$. То есть $a = x + m_1 + ... + m_k$.

Подберем $m \in M_k$ такое, что $[x, m] \neq 0$. Получим

$$[a, m] = [x, m] + [m_1, m] + ... + [m_k, m].$$

Отметим, что $[x, m] \in M_k, [m_i, m] \in M_{i-1}$.

Следовательно, $[a, m] \in I$ представимо в виде

$$[a, m] = x_1 + ... + x_k,$$
$$x_i \in M_i, x_k \neq 0.$$

Согласно п.1 справедливо включение $M_1 + ... + M_k \subset I$.

Получим $x = a - m_1 - ... - m_k \in I$.

Действуя на x элементами из M получим $M \subset I$.

Следовательно, $M_n = [M, M_n] \subset I$ для $m = 1, 2, ...$.

Мы доказали включение $L \subset I$.

Таким образом, алгебра L – слабо артинова.

2.2 Локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли

Определение 2.2.1 ([3, с. 34]) *Алгебра Ли L называется нильпотентной ступени c, если она удовлетворяет тождеству нильпотентности степени c*

$$[x_1, ..., x_c] = 0.$$

с левонормированной расстановкой скобок и не удовлетворяет тождеству

$$[x_1, ..., x_{c-1}] = 0.$$

Напомним, что алгебра Ли L называется локально нильпотентной, если любое её конечное множество элементов порождает в L нильпотентную подалгебру.

Приведём пример локально нильпотентной алгебры Ли.

Пример 2.2.1 Пусть F – поле произвольной характеристики. Обозначим через $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ базис счетномерного векторного пространства V.

Рассмотрим систему векторных пространств $B_k = span(e_1, ..., e_k)$. Эти подпространства образуют возрастающую последовательность $M_1 \subset M_2 \subset ...$.

Рассмотрим алгебру A линейных отображений конечного ранга $f : V \to V$, удовлетворяющих условию

$$f(M_1) = 0,\ f(M_k) \subset M_{k-1}, k = 2, 3, ...$$

Обозначим через P алгебру Ли $A^{(-)}$, полученную из A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

Для удобства в качестве элементов алгебры Ли P можно представлять бесконечные матрицы, обладающие конечным количеством столбцов с элементами, не являющимися нулевыми, то есть

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Таким образом, приведённый пример алгебры Ли P представляет собой алгебру Ли, являющуюся локально нильпотентной.

Теорема 2.2.1 *Первичный радикал $P(L)$ любой слабо артиновой алгебры Ли L является локально нильпотентным.*

Доказательство.

В процессе обоснования истинности данного утверждения будут использованы те из свойств первичного радикала, которые устанавливают его связи с радикалом, являющимся нижним слабо разрешимым, а также с нильпотентными идеалами.

Заметим, что в случае равенства первичного радикала нулю утверждение теоремы выполнено.

Рассмотрим случай, когда $P(L) \neq 0$.

Известно, что в разрешимом идеале алгебры Ли, отличном от нулевого, содержится ненулевой абелев идеал [11].

В первичном радикале алгебры Ли также будет существовать ненулевой абелев идеал. Любой разрешимый идеал, отличный от нулевого, имеющийся в первичном радикале $P(L)$, обладает абелевым идеалом. Сам разрешимый идеал, отличный от нулевого, в первичном радикале $P(L)$ существует в силу конструктивного определения нижнего слабо разрешимого идеала в случае, когда $P(L) \neq 0$ [30].

Рассмотрим число α, которое является порядковым. Поставим ему в соответствие идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ определённым образом, используя трансфинитную индукцию:

1. При $\alpha = 0$ идеал $\tau(0)$ равен нулю.

2. Будем считать, что для любых порядковых чисел α меньших некоторого β идеал $\tau(\alpha)$ определен, а для порядкового числа β идеал $\tau(\beta)$ задается следующим способом:

а) если число $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым, то идеал $\tau(\beta)$ – это такой идеал алгебры L, что фактор идеала $\tau(\beta)$ по идеалу $\tau(\gamma)$ совпадает с идеалом $\tau(L/\tau(\gamma))$;

б) в случае, когда β является предельным порядковым, идеал $\tau(\beta)$ представляет собой следующее объединение:

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \tau(\gamma).$$

Учитывая мощность множества порядковых чисел, получим, что для некоторого порядкового β выполняется условие $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$. Следовательно, $\tau(\beta) = P(L)$.

Для получения дальнейших результатов нам необходимо воспользоваться также и представлением $P(L)$ по идеалам, являющимися нильпотентными.

Обозначим сумму всех абелевых идеалов, отличных от нулевого, которые лежат в первичном радикале $P(L)$, через $\sigma(L)$. Так как алгебра Ли L является слабо артиновой, то таких идеалов будет конечное число.

Так как абелев идеал является нильпотентным, а в [11] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли – нильпотентна, то и идеал $\sigma(L)$ будет нильпотентен.

Рассмотрим число α, которое является порядковым. Поставим ему в соответствие идеал $\sigma(\alpha) \subset P(L)$ определённым образом, используя трансфинитную индукцию:

1. При $\alpha = 0$ идеал $\sigma(0)$ равен нулю.

2. Будем считать, что для любых порядковых чисел α меньших некоторого β идеал $\sigma(\alpha)$ определен, а для порядкового числа β идеал $\sigma(\beta)$ задается следующим способом:

а) если число $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым, то идеал $\sigma(\beta)$ – это такой идеал алгебры L, что фактор идеала $\sigma(\beta)$ по идеалу

$\sigma(\gamma)$ совпадает с идеалом $\sigma(L/\sigma(\gamma))$;

б) в случае, когда β является предельным порядковым, идеал $\sigma(\beta)$ представляет собой следующее объединение:

$$\sigma(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \sigma(\gamma).$$

Учитывая мощность множества порядковых чисел, получим, что для некоторого порядкового β выполняется условие $\sigma(\beta) = \sigma(\beta + 1)$. Следовательно, $\sigma(\beta) = P(L)$.

Обозначим через $N(\sigma(\alpha))$ степень нильпотентности идеала $\sigma(\alpha)$.

Пусть $X \subset P(L)$ непустое конечное множество. Докажем, что все произведения $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}], x_{i_k} \in X$ с левой расстановкой скобок равны 0 для некоторого натурального r.

Для каждого $x \in X$ обозначим через $\alpha(x)$ порядковое число α такое, что $x \in \sigma(\alpha)\backslash\sigma(\alpha - 1)$, если $\alpha - 1$ определено и α, если $x \in \sigma(\alpha)$ и $\alpha - 1$ не определено.

Рассмотрим все произведения $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}]$.

Введём множество $X_1 = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}]|x_{i_k} \in X\}$.

Пусть $\alpha_1 = max(\alpha([x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}]), x_{i_k} \in X)$, $m_1 = N(\sigma(\alpha_1))$.

Все произведения $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}]$ удовлетворяют $\alpha([x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}]) < \alpha_1$.

Введем множество $X_2 = \left\{[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{m_1}}]|x_{i_k} \in X, 1 \leq k \leq m\right\}$.

Пусть $\alpha_2 = max_{x\in X_2}(\alpha(x))$, $m_2 = N(\sigma(\alpha_2))$.

Из сказанного выше следует, что $\alpha_2 < \alpha_1$.

Введем множество $X_3 = \left\{[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{m_2}}]|x_{i_k} \in X, 1 \leq k \leq m_2\right\}$, и так далее.

В результате получим последовательность множеств $X_1, X_2, ...$ и соответствующую ей убывающую последовательность ординальных чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > ...$, которая не может быть бесконечной.

Следовательно, для некоторого r все элементы множества X_r равны нулю.

Это означает нильпотентность алгебры Ли, порожденной множеством X и локальную нильпотентность первичного радикала $P(L)$.

Доказательство теоремы завершено.

2.3 О проблеме А.В. Михалёва

Проблема А. В. Михалёва связана с вопросом разрешимости первичного радикала артиновых алгебр Ли.

Первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L разрешим, если он является разрешимым как алгебра Ли некоторой ступени.

Вопрос о разрешимости первичного радикала алгебр Ли рассматривался в работах [2], [23], [35], [42].

Кроме разрешимости первичного радикала в смысле определения 1.2.6 данной работы, для произвольных алгебр Ли также исследовалась слабая и локальная разрешимость $P(L)$.

Для определения слабой разрешимости $P(L)$ рассматриваются его произвольные конечномерные подпространства P_α. Если для каждого P_α найдётся такое k, что f_k будет равно нулю для любых элементов, принадлежащих P_α, то $P(L)$ будет слабо разрешимым.

Для определения локальной разрешимости $P(L)$ рассматриваются его произвольные конечные подалгебры S_α. Если всякая S_α разрешима, то $P(L)$ будет локально разрешимым.

Перечислим то, что уже известно о свойствах $P(L)$. В работе [38] доказана слабая разрешимость $P(L)$. В статье [30] приведён пример такой алгебры Ли, радикал для которой не является локально разрешимым.

Для L, удовлетворяющих условиям стабилизации цепей идеалов, изучению свойства разрешимости $P(L)$ посвящены такие работы, как [23], [38], [42].

Для нётеровых алгебр Ли над полем С. А. Пихтильковым получено, что их первичный радикал всегда будет разрешимым.

Как следствие, возникает вопрос: можно ли найти такую артинову алгебру Ли, для которой первичный радикал не будет разрешим?

Вопрос о поиске такой алгебры Ли сформулирован А. В. Михалёвым в 2001 году на семинаре «Кольца и модули», проводимом на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

В процессе решения данной проблемы А. В. Михалёва получены следующие результаты. С. А. Пихтильков показал, что первичный радикал специальной слабо артиновой алгебры разрешим [35]. Также разрешимость первичного радикала доказана для артиновых обобщённо специальных алгебр Ли. Данное свойство первичного радикала доказано и для суперапгебр Ли [2]. Разрешимость первичного радикала также доказана для слабо артиновых локально нильпотентных алгебр Ли [42]. Ослабленная проблема А. В. Михалёва решена для первичного радикала алгебры Ли, в которой любая цепь внутренних идеалов или подалгебр обрывается [23].

Прежде чем рассматривать доказательство разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли, сначала отметим следующий факт.

Предложение 2.3.1 *Пусть I – ненулевой идеал слабо артиновой алгебры Ли L. Если I не является разрешимым, то существует нетривиальный идеал R, содержащийся в I, для которого $[R, R] = R$.*

Доказательство.

Пусть L – слабо артинова алгебра Ли, I – её ненулевой идеал.

Рассмотрим производный ряд

$$I' = [I, I], ..., I^{(n+1)} = [I^n, I^n], ... \ .$$

Имеют место включения $I \supset I' \supset I'' \supset ... \supset I^{(n)} \supset ...$.

Так как алгебра Ли L является слабо артиновой, убывающая последовательность идеалов стабилизируется, то есть $R = I^{(n+1)} = I^n$.

Получаем $[R, R] = R$.

Если $R = 0$, то $R = I^n = 0$, а это означает, что I является разрешимым идеалом, что противоречит условию.

Тогда $[R, R] = R \neq 0$. Что и требовалось доказать.

Заметим также, что теорема 2.2.1 дает ограничения при попытке построения контрпримера к проблеме Михалёва.

Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Обозначим через $P = P(L)$ ее первичный радикал.

Рассмотрим производный ряд

$$P' = [P, P], ..., P^{(n+1)} = [P^{(n)}, P^{(n)}], ...$$

Имеют место включения $P \supset P' \supset P'' \supset ... \supset P^{(n)} \supset ...$.

В виду того, что по условию алгебра Ли L является слабо артиновой, полученная последовательность идеалов производного ряда стабилизируется, т.е. $R = P^{(n+1)} = P^{(n)}$. Получаем $[R, R] = R$.

Для получения желаемого контрпримера необходимо подобрать такую слабо артинову алгебру R, которая, кроме того, что не является разрешимой, ещё удовлетворяет и условиям:

1) $[R, R] = R$;

2) $P(R) = R$.

В [42] показано, что первичный радикал локально нильпотентной слабо артиновой алгебры Ли разрешим.

Из теоремы 2.2.1 следует локальная нильпотентность алгебры Ли R. Мы доказали разрешимость алгебры Ли R.

Следовательно, если бы существовала алгебра Ли L, являющаяся контрпримером к проблеме Михалева, то она должна была бы удовлетворять условию $P(L) \neq L$.

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема 2.3.1 ([13, с. 21]) *Пусть I – идеал в алгебре Ли L. Предположим, что элемент $x \in L$ является произведением k элементов из L (при некоторой расстановке скобок), причем r из этих элементов содержатся в I. Тогда $x \in I^r$.*

Следствие 2.3.1 ([13, с. 21]) *Для любого нильпотентного идеала I алгебры Ли L степени нильпотентности r произведение k элементов алгебры Ли при любой расстановке скобок равно нулю, если оно содержит r элементов из I.*

Теперь рассмотрим доказательство теоремы, отвечающей на вопрос, сформулированный А. В. Михалёвым.

Теорема 2.3.2 *Первичный радикал $P(L)$ любой слабо артиновой алгебры Ли L является разрешимым.*

Доказательство.

1. Рассмотрим производный ряд первичного радикала P

$$P' = [P, P], ..., P^{(n+1)} = [P^{(n)}, P^{(n)}], ... \ . \qquad (2.3.1)$$

Имеют место включения $P \supset P' \supset P'' \supset ... \supset P^{(n)} \supset ...$.

Так как алгебра Ли L является слабо артиновой, убывающая последовательность идеалов стабилизируется, то есть $R_1 = P^{(n+1)} = P^{(n)}$. Получаем $[R_1, R_1] = R_1$.

Если $R_1 = 0$, первичный радикал P – разрешим и утверждение теоремы имеет место.

Предположим, что $R_1 \neq 0$.

Пусть идеал R_1 содержит собственный неразрешимый идеал P_1.

Строим для P_1 производный ряд (2.3.1) и так же показываем существование идеала R_2 такого,что $[R_2, R_2] = R_2$.

R_2 не может быть равно нулю, так как в противном случае такое равенство $R_2 = 0$ противоречило бы условию неразрешимости P_1.

Продолжая строить последовательность идеалов подобным образом, получим последовательность различных идеалов, не являющихся нулевыми, вида

$$R_1 \supset R_2 \supset ... \supset R_n \supset ...,$$

где $[R_k, R_k] = R_k, k = 1, 2, ...$.

В силу того, что L является слабо артиновой, данная последовательность стабилизируется.

Для последнего идеала в полученной цепи идеалов R_m введём обозначение в виде идеала K. Учитывая, каким способом были получены идеалы

$R_1, R_2, ...$ делаем вывод, что $[K, K] = K$ и каждый собственный идеал K является разрешимым.

2. На этом этапе доказательства будем применять для первичного радикала $P = P(L)$ его представление в виде радикала, являющегося нижним слабо разрешимым.

Заметим, что в случае равенства первичного радикала нулю утверждение теоремы будет выполнено, поэтому будем рассматривать случай, когда $P = P(L) \neq 0$.

Прежде всего отметим, что в любом разрешимом идеале алгебры Ли, отличном от нулевого, содержится ненулевой абелев идеал. В первичном радикале $P = P(L) \neq 0$ разрешимый идеал, отличный от нулевого, существует в силу конструктивного определения нижнего слабо разрешимого идеала. Тогда в первичном радикале алгебры Ли также будет существовать ненулевой абелев идеал, так как любой разрешимый идеал, отличный от нулевого, имеющийся в первичном радикале $P(L)$, обладает абелевым идеалом.

Рассмотрим число α, которое является порядковым. Поставим ему в соответствие идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ определённым образом, используя трансфинитную индукцию:

1. При $\alpha = 0$ идеал $\tau(0)$ равен нулю.

2. Будем считать, что для любых порядковых чисел α меньших некоторого β идеал $\tau(\alpha)$ определен, а для порядкового числа β идеал $\tau(\beta)$ задается следующим способом:

а) если число $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым, то идеал $\tau(\beta)$ – это такой идеал алгебры L, что фактор идеала $\tau(\beta)$ по идеалу $\tau(\gamma)$ совпадает с идеалом $\tau(L/\tau(\gamma))$;

б) в случае, когда β является предельным порядковым, идеал $\tau(\beta)$ представляет собой следующее объединение:

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \tau(\gamma).$$

Учитывая мощность множества порядковых чисел, получим, что для некоторого порядкового β выполняется условие $\rho(\beta) = \rho(\beta+1)$. Следовательно, $\tau(\beta) = P(L)$.

3. Покажем, что построенный в пункте 1 неразрешимый идеал $K = [K, K]$ равен $K = \tau(\omega)$ – занумерован первым бесконечным порядковым числом.

Идеал K не может равняться $K = \tau(n)$, где n – натуральное. В этом случае идеал K – разрешим как конечное последовательное расширение абелевых идеалов.

Заметим, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым – первый неразрешимый идеал в возрастающей последовательности идеалов $\tau(0) \subset \tau(1) \subset \ldots$.

Разрешимый идеал S_1 слабо артиновой алгебры Ли ступени k является последовательным расширением конечного числа идеалов.

У него конечное число n_1 абелевых идеалов, иначе нарушается слабая артиновость. Обозначим через J_1 сумму абелевых идеалов S_1.

Рассмотрим фактор-алгебру $S_2 = S_1/J_1$. Обозначим через J_2 сумму n_2 абелевых идеалов S_2.

Снова рассмотрим фактор-алгебру $S_3 = S_2/J_2$.

Профакторизуем по абелевым идеалам k раз, в результате получится алгебра, являющаяся нулевой.

Пересчитывая количество абелевых идеалов, получим

$$K = \tau(n), \tag{2.3.2}$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Равенство (2.3.2) противоречит предположению $K = \tau(\omega)$.

Мы доказали, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым.

4. На этом этапе доказательства будем применять ещё одно представление $P(L)$ по идеалам, которые являются нильпотентными.

Пусть $\varphi(L)$ – это сумма всех ненулевых абелевых идеалов из $P(L)$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что их конечное число.

В [13] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли – нильпотентна. Следовательно, идеал $\varphi(L)$ – нильпотентен.

Рассмотрим число α, которое является порядковым. Поставим ему в соответствие идеал $\rho(\alpha) \subset P(L)$ определённым образом, используя трансфинитную индукцию:

1. При $\alpha = 0$ идеал $\rho(0)$ равен нулю.

2. Будем считать, что для любых порядковых чисел α меньших некоторого β идеал $\rho(\alpha)$ определен, а для порядкового числа β идеал $\rho(\beta)$ задаётся следующим способом:

а) если число $\beta = \gamma+1$ не является предельным порядковым, то идеал $\rho(\beta)$ – это такой идеал алгебры L, что фактор идеала $\rho(\beta)$ по $\rho(\gamma)$ совпадает с идеалом $\rho(L/\rho(\gamma))$.

б) в случае, когда β является предельным порядковым, идеал $\rho(\beta)$ представляет собой следующее объединение:

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \rho(\gamma).$$

Учитывая мощность порядковых чисел, получим, что для некоторого порядкового β выполняется условие $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$. Следовательно, $\rho(\beta) = P(L)$.

Расширение нильпотентной алгебры Ли при помощи нильпотентной является нильпотентной алгеброй Ли [13].

Так как идеалы $\{\rho(n)|n \in \mathbb{N}\}$ являются конечной последовательностью расширений нильпотеных алгебр Ли, все они – нильпотентны.

Мы получили представление идеала K как последовательности возрастающих нильпотентных идеалов

$$\rho(0) \subset \rho(1) \subset ... \subset \rho(n) \subset ...,$$

при этом $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho(i)$.

Обозначим через $N(\rho(n))$ степень нильпотентности идеала $\rho(n)$.

Для каждого $x \in K$ обозначим через $\alpha(x)$ натуральное число α такое, что $x \in \rho(\alpha) \backslash \rho(\alpha - 1)$.

5. В этом разделе используется рассуждение из работы [42].

Далее применим теорему 2.3.1 и следствие 2.3.1.

Напомним, что для идеала K выполнено условие $[K, K] = K$.

Рассмотрим какой-нибудь ненулевой элемент b из K. Выбранный элемент b можно представить как сумму $b = \sum_{i=1}^{n} [b_i, b'_i]$, где элементы коммутаторов b_i, b'_i взяты из K. Тогда для некоторого i обязательно выполнится условие $[b_i, b'_i] \neq 0$. Введём для этого коммутатора обозначение $[b_1, b'_1]$.

Теперь элемент b'_1 представим как сумму коммутаторов $b_1 = \sum_{i=1}^{n} [b_i, b'_i]$, в которой элементы взяты также из K. Рассуждая аналогичным образом, также приходим к ненулевому коммутатору $[b_1, [b_2, b'_2]]$, где b_1, b_2, b'_2 принадлежат K. Так как выполняется равенство $[b_1, [b_2, b'_2]] = [[b_1, b_2], b'_2] - [[b_1, b'_2], b_2]$, то одно из слагаемых будет не равно нулю. Для его элементов введём следующее обозначение $[[b_1, b_2], b'_2]$.

Действуя далее по этой же схеме, приходим к такой бесконечной последовательности элементов $b_1, b_2, ...$, принадлежащих K, в которой все конечные коммутаторы с левой расстановкой не равны нулю, то есть $[b_1, b_2, ..., b_n] \neq 0$, где $n = 1, 2, ...$.

Рассмотрим цепочку идеалов J_k, порожденных элементами

$$J_k = ([b_1, ..., b_k]), k = 1, 2, ..., J_1 \supseteq J_2 \supseteq ... \supseteq J_k \supseteq ... .$$

Из слабой артиновости алгебры Ли L следует существование натурального n такого, что $J_n = J_{n+1}$.

Введем обозначение $a = [b_1, ..., b_n]$.

Пусть $\beta = max(\alpha(a), \alpha(b_{n+1}))$. Обозначим через $m = N(\rho(\beta))$ степень нильпотентности идеала $\rho(\beta)$.

Отметим, что элемент a отличен от нуля.

Существуют натуральное число r и элементы

$$c_{ij} \in L, i = 1, ..., r, j = 1, ..., k_i$$

такие, что

$$a = \sum_{i=1}^{r} [a, b_{n+1}, c_{i1}, ..., c_{ik_i}].$$

Подставляя выражение элемента a в правую часть получим

$$a = \sum_{i,j=1}^{r} [a, b_{n+1}, c_{i1}, ..., c_{ik_i}, b_{n+1}, c_{j1}, ..., c_{jk_j}].$$

Продолжая этот процесс m раз получим в каждом коммутаторе под знаком суммы не менее m элементов вида a, b_{n+1}.

Напомним, что элементы a, b_{n+1} лежат в нильпотентном идеале $\rho(\beta)$ степени нильпотентности m.

Согласно следствию 2.3.1, все коммутаторы под знаком суммы и, следовательно, элемент a равны нулю.

Это противоречит предположению, сделанному выше о том, что элемент a – ненулевой.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.3.2.

3 О проблеме М. В. Зайцева для нётеровых специальных алгебр Ли

В данной главе решается третья проблема, поставленная в задачах настоящего исследования.

Для решения проблем данного раздела используется конструкция центроида Мартиндейла, а также понятие центрального замыкания. При введении данных понятий использовался подход, единый, как для алгебр Ли, так и для ассоциативных алгебр, предложенный Ю. П. Размысловым.

В первом разделе дается определение нётеровых алгебр Ли, а также понятие размерности пространства над прямой суммой полей.

Во втором разделе рассматриваются основные понятия и результаты, связанные с конструкцией центроида Мартиндейла, которые необходимы для получения основного результата данной главы.

В третьем разделе представлено решение проблемы М. В. Зайцева для полупервичных нётеровых специальных алгебр Ли.

3.1 Основные определения и свойства

Проблема М. В. Зайцева относится к проблемам матричной реализации нётеровых специальных алгебр Ли. В 1992 г. М. В. Зайцев сообщил С. А. Пихтилькову следующую проблему: верно ли, что любая нётерова специальная алгебра Ли вложена в алгебру матриц над конечно порождённым коммутативным кольцом?

Рассмотрим следующее определение нётеровой алгебры Ли в соответствии с [38].

Определение 3.1.1 ([38, с. 108]) *Алгебра Ли называется нётеровой, если в ней стабилизируется любая возрастающая цепочка идеалов.*

Также, как и в случае со слабо артиновыми алгебрами Ли, очевидными примерами нётеровых алгебр Ли являются простые алгебры Ли, у которых только два идеала – тривиальный и сама алгебра Ли (примеры 2.1.1 и 2.1.2 данной работы).

Напомним, что определение специальной алгебры Ли приведено в пункте 1.3 первой главы данной работы (определение 1.3.6).

Теперь рассмотрим конечномерное пространство V над полем F и прямую сумму полей $C_1, C_2, ...C_n$, то есть $C = C_1 \oplus C_2 \oplus ... \oplus C_n$. Пусть $M = V \otimes_F C$.

Введем понятие размерности над C. Каждый C-подмодуль W однозначно представим в виде прямой суммы подпространств $W = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ над полями C_k. Каждое подпространство W_k конечномерно над полем C_k.

Определим размерность прямой суммы подпространств W над C следующим образом:

$$dim_C W = dim_{C_1} W_1 + dim_{C_2} W_2 + ... + dim_{C_n} W_n.$$

Далее нам необходимо выяснить, как соотносятся размерности C-подпростанств, являющихся вложенными друг в друга подпростанствами C-подпростанства, получающегося как тензорное произведение конечномерного пространства над полем F и прямой суммы полей. Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 3.1.1 *Пусть $M = V \otimes_F C$, где V – конечномерное пространство над полем F, $C = C_1 \oplus C_2 \oplus ... \oplus C_n$ – прямая сумма полей. Пусть K, L и M – C-подпространства такие, что $K \subset L \subset M$.*

Тогда $K = L \Leftrightarrow dim_C K = dim_C L$.

Доказательство.

$K = L \Leftrightarrow dim_C K_i = dim_C L_i$ для всех $i = 1, ..., n$.

Отличие подпространств K и L возможно только при отличии размерностей, то есть если $dim_C K \neq dim_C L$.

3.2 Центроид Мартиндейла алгебр Ли

Конструкция центроида Мартиндейла является действенным инструментом, позволяющим проводить исследование структуры алгебр Ли, называемых специальными.

Для изложения основных вопросов данного раздела нами также будет использоваться центральное замыкание.

При введении данных понятий будем использовать подход, единый, как для алгебр Ли, так и для ассоциативных алгебр. Результаты в неассоциативном случае рассмотрены в работах [46, с. 40], [53]. Вслед за Ю. П. Размысловым будем следовать подходу, описанному при рассмотрении универсальных алгебр [46, с. 51].

Для начала рассмотрим понятия модуля и оболочки, называемых инъективными.

Определение 3.2.1 *Модуль M над ассоциативной алгеброй с единицей A называется инъективным, если для любых двух модулей M_1, M_2, любого мономорфизма $\varphi : M_1 \to M_2$ и любого гомоморфизма $\psi : M_1 \to M$ существует гомоморфизм $\rho : M_2 \to M$, для которого $\rho \circ \varphi = \psi$.*

Определение 3.2.2 *Подмодуль M модуля P называется большим в P, если любой ненулевой подмодуль в P имеет с M ненулевое пересечение.*

Определение 3.2.3 *A-модуль P называется инъективной оболочкой A-модуля M, если выполнены условия:*

а) P – инъективный A-модуль;

б) M – подмодуль в P;

в) M – большой подмодуль в P.

Инъективная оболочка существует для каждого модуля M, и она единственна с точностью до изоморфизма.

Ю. П. Размыслов для каждой F-алгебры L сигнатуры Ω определил связанную с ней ассоциативную подалгебру $A = A(L)$ в множестве эндоморфизмов $End_F A$ [46, с. 40]. В случае лиевых алгебр алгебра $A(L)$ является присоединенной алгеброй AdL алгебры L, порожденной в множестве эндоморфизмов $End_F L$ всеми внутренними дифференцированиями adx ($x \in L$).

Если L – ассоциативная F-алгебра, то $A(L)$ является алгеброй умножений алгебры L, порожденной в $End_F L$ элементами вида r_a,l_b, $(a, b \in L\ )$, где

$$a, x \in L, r_a(x) = xa, l_a(x) = ax.$$

Пусть L – F-алгебра сигнатуры Ω и $A = A(L)$ – связанная с ней ассоциативная подалгебра в $End_F A$. Пусть P – инъективная оболочка A-модуля L, $E = End_A P$ – алгебра всех эндоморфизмов A-модуля P, $S = EL$ – A-подмодуль в P.

Далее относительно введенных объектов рассмотрим некоторые утверждения (без доказательств).

Лемма 3.2.1 ([46, с. 42]) *Пусть L – полупервичная F-алгебра сигнатуры Ω. Тогда ограничение ρ действия алгебры E на A-модуль S коммутативно.*

Замечание. Определение первичных и полупервичных алгебр для случая универсальных алгебр определяется аналогично этим понятиям в случае алгебр Ли и ассоциативных алгебр. Так как в дальнейшем эти понятия применяются только в только в случае ассоциативных алгебр и алгебр Ли, то отдельно для универсальных алгебр определения рассматривать нет необходимости.

В связи с тем, что S у нас есть EL и, учитывая утверждение леммы 3.2.1, алгебра $C(L) = E/Ker\rho$ коммутативна, то можно распространить все операции сигнатуры Ω по C-линейности с алгебры L на алгебру S и наделить S структурой Z-алгебры сигнатуры Ω.

Определение 3.2.4 *Алгебра $C = C(L)$ называется центроидом Мартиндейла полупервичной алгебры L.*

Определение 3.2.5 *C-алгебра S называется центральным замыканием полупервичной алгебры L.*

Предложение 3.2.1 ([46, с. 43]) *Если L – полупервичная F-алгебра сигнатуры Ω, то центроид $C = C(L)$ и центральное замыкание $S = S(L)$ являются полупервичными алгебрами, характеризующимися следующими свойствами:*

1) C– коммутативная F-алгебра с единицей и $S = CL$;

2) всякий A-подмодуль из замыкания S, за исключением нулевого, пересекается с L по ненулевому идеалу алгебры L;

3) Для любого φ, представляющего собой A-гомоморфизм ненулевого A-подмодуля I, и A-модуля S в замыкании S найдётся элемент c, принадлежащий центроиду C, для которого $ci = \varphi(i)$, где i – произвольный элемент модуля I. Более того, если I – большой A-подмодуль в замыкании S, то найденный элемент c однозначно определяется гомоморфизмом φ.

Предложение 3.2.2 ([46, с. 43]) *Если L – первичная F-алгебра сигнатуры Ω, то центроид $C(L)$ есть поле, $S(L)$ – первичная F-алгебра, а C-алгебра S обладает следующими характеристическими свойствами:*

1) $S = CL$;

2) произвольный ненулевой A-подмодуль в S имеет ненулевое пересечение с L;

3) любой частичный A-эндоморфизм φ ненулевого идеала I алгебры L в L однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на I совпадает с φ.

Нам потребуется также теорема Познера.

Теорема 3.2.1 (Познера, [59]) *Пусть A – первичная ассоциативная PI-алгебра, K – поле частных центра $Z(A)$,*

$$Q(A) = K \otimes_{Z(A)} A$$

– алгебра центральных частных A. Тогда $Q(A)$ – простая алгебра, конечномерная над своим центром, и $Z(Q(A)) = K$.

Теорема 3.2.2 *Пусть A – первичная ассоциативная PI-алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d. Тогда A конечномерна над своим центроидом Мартиндейла $C(A)$, и ее размерность над C меньше, либо равна $[d/2]^2$.*

Доказательство.

По условию A – первичная ассоциативная PI-алгебра.

Пусть K – поле частных центра $Z(A)$,

$$Q(A) = K \otimes_{Z(A)} A$$

– алгебра центральных частных A.

Учитывая, что $Q(A)$ – это тензорное произведение алгебры A на коммутативную алгебру K. Тогда $Q(A)$ удовлетворяет тому же тождеству степени d, что и A. Следовательно, для $Q(A)$ выполняются условия теоремы Капланского [49, с. 151], из которой следует, что $Q(A)$ является конечномерной простой над своим центром и размерность $Q(A)$ над K меньше, либо равна $[d/2]^2$. Так как K содержится в центроиде $C(A)$, то размерность A над $C(A)$ также меньше, либо равна $[d/2]^2$.

Таким образом, теорема доказана.

Пусть A – ассоциативная PI-алгебра, L – алгебры Ли, и пусть они удовлетворяют какому-либо тождественному соотношению. Далее приведём определение характеристики рассматриваемых алгебр, связанной с их конечномерностью. Пусть $P(A)$ и $P(L)$ – первичные радикалы алгебр A и L соответственно. Фактор-алгебрам $A/P(A)$ и $P/P(L)$ поставим в соответствие множества матричных алгебр, которые обозначим M_α.

Определение 3.2.6 *Наименьший из порядков M_α будем называть сложностью A (или L) и обозначать $n(A)$(или $n(L)$).*

Заметим, что теорема Познера сформулирована для первичной ассоциативной PI-алгебры. Эта теорема также будет выполняться и для специальных алгебр Ли. Данный вывод вытекает из положений теоремы о ранге, сформулированной Ю. П. Размысловым для более общего случая ([46, с. 47]). Мы же будем её применять для алгебры Ли и ассоциативных алгебр.

Пусть A – алгебра Ли или ассоциативная алгебра над полем F. Любой полином

$$d_k(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l)$$

из свободной алгебры Ли $F(X)$ или ассоциативной соответственно, который полилинеен и кососимметричен относительно $x_1, ..., x_k$, называется полиномом Капелли порядка k. Пусть V – произвольное векторное F-подпространство в алгебре A. Скажем, что на V выполнены все тождества Капелли порядка k, если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов

$$v_1, ..., v_k \in V, a_1, ..., a_l \in A$$

в алгебре A выполняются равенства

$$d_k(v_1, ..., v_k, a_1, ..., a_l) = 0.$$

Рангом векторного F-подпространства V относительно алгебры A называется наименьшее число k, для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k. Это число обозначается $\mathrm{rank}(A, V)$.

Легко заметить, что для конечномерной алгебры A размерности n над F ранг любого подпространства относительно алгебры A не превосходит $n + 1$. То же можно сказать и про все алгебры, лежащие в многообразии, порожденном алгеброй A.

Теорема 3.2.3 ([6]) *Пусть L – специальная алгебра Ли.*

1) Если L – первичная, то у нее существует первичная PI-оболочка, которая может быть получена как гомоморфный образ любой PI-оболочки.

2) У простой специальной алгебры Ли существует простая PI-оболочка, которая может быть получена как гомоморфный образ любой PI-оболочки.

Теорема 3.2.4 (Размыслова о ранге, [46, с. 47]) *Пусть V – векторное F-подпространство в первичной ассоциативной алгебре A или алгебре Ли. Если* $\mathrm{rank}(A, V) < \infty$*, то в центральном замыкании $S(A)$ алгебры A справедливо равенство*

$$dim_{C(A)}C(A)V = \mathrm{rank}(A, V) - 1.$$

Теорема 3.2.5 *Пусть L – первичная специальная алгебра Ли. Тогда*

1) L является матричной алгеброй Ли;

2) если сложность $n(L)$ равна n, то L конечномерна над своим центроидом Мартиндейла размерности не выше n^2.

Доказательство.

1. Согласно теореме 3.2.3 у алгебры L существует первичная PI-оболочка A. Из теоремы Познера получаем вывод о том, что для алгебры A выполняются все тождества алгебры матриц некоторого порядка. Тогда и для алгебры L выполняются лиевы тождества некоторой алгебры матриц. Таким образом, L будет матричной.

2. Пусть сложность $n(L)$ алгебры L равна n. Тогда для L выполняются все лиевы тождества алгебры матриц, порядок которых равен n.

Ранг любого подпространства V алгебры $Sl(n, F)$ меньше, либо равен $n^2 + 1$.

Применяя теорему 3.2.4, получим, что $dim_{C(L)}L \leq n^2$.

Что и требовалось доказать.

3.3 О вложении нётеровой специальной алгебры Ли в матричную алгебру над центроидом Мартиндейла

Пусть U – подмножество в алгебре Ли L. Ясно, что аннулятор $Z_L(U)$ будет подалгеброй в L. Более того, если U – идеал в L, то $Z_L(U)$ также является идеалом в L.

Идеал U в L называется аннуляторным, если существует такой ненулевой идеал V в L, что идеал U совпадает с аннулятором идеала V, то есть $U = Z_L(V)$. Если V – идеал в L и $U = Z_L(V)$, то аннулятор аннуляторного идеала будет равен аннуляторному идеалу:

$$Z_L(Z_L(U)) = U.$$

Действительно, идеал V является подмножеством аннулятора $V \subseteq Z_L(U)$ и поэтому идеал $U = Z_L(V)$ содержит аннулятор $Z_L(Z_L(U))$, то есть $U = Z_L(V) \supseteq Z_L(Z_L(U))$. С другой стороны, $[U, Z_L(U)] = 0$ и, следовательно, $U \subseteq Z_L(Z_L(U))$.

Пусть L – полупервичная алгебра Ли и V – идеал в L. Тогда $V \cap Z_L(V)$ – идеал с нулевым умножением. Следовательно,

$$V \cap Z_L(V) = 0$$

в силу полупервичности L.

Аннуляторный идеал алгебры Ли L называется максимальным, если он не является собственным подмножеством любого другого аннуляторного идеала.

В [40] получен критерий представимости специальной алгебры Ли в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр. Приведём его формулировку.

Лемма 3.3.1 *Пусть L – полупервичная алгебра Ли. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) L не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов;

(ii) L не содержит бесконечных множеств ненулевых попарно непересекающихся идеалов;

(iii) L удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей аннуляторных идеалов;

(iv) каждый максимальный аннуляторный идеал в L является первичным;

(v) множество максимальных аннуляторных идеалов в L конечно и их пересечение равно нулю;

(vi) L представимо в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр Ли.

Далее сформулируем и докажем теорему, которая частично отвечает на вопрос о матричной реализации нётеровых специальных алгебр Ли.

Теорема 3.3.1 *Пусть алгебра Ли L – нётерова полупервичная специальная. Тогда L вложена в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.*

Доказательство.

По условию алгебра L является полупервичной. Тогда к ней можно применить лемму 3.3.1.

По условию алгебра L также является нётеровой, то есть выполняется пункт (*iii*) данной леммы.

Пункты (*iii*) и (*vi*) леммы 3.3.1 эквивалентны. Тогда можно получить представление алгебры L в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр Ли.

Эти первичные алгебры из подпрямого произведения являются специальными алгебрами, так как лежат в многообразии, порожденном специальной алгеброй Ли L, и имеют тривиальные центры ([3, с. 254], следствие 6.3.5).

Тогда центроид $C(L)$ алгебры Ли L представим в виде прямой суммы центроидов первичных алгебр Ли, то есть полей.

Согласно теореме 3.2.5, размерности всех первичных алгебр над своими центроидами Мартиндейла не превосходят некоторой константы $m = [d/2]^2$, где d – степень тождества выполненного в PI-оболочке.

Итак, теорема доказана.

Можно считать, что L вложена в матричную алгебру порядка не выше m над центроидом Мартиндейла $C(L)$.

Таким образом, проблема М. В. Зайцева решена для нётеровых полупервичных специальных алгебр Ли.

4 Первичный радикал градуированных Ω-групп

В данной главе представлено обобщение свойства локальной нильпотентности первичного радикала алгебр Ли на градуированный первичный радикал градуированных Ω-групп.

В первом разделе рассматриваются основные понятия теории градуированных Ω-групп и теории первичного градуированного радикала.

Во втором разделе доказывается локальная нильпотентность градуированного первичного радикала градуированных Ω-групп.

В процессе решения рассматриваемой проблемы используются определения и свойства нижнего слабо разрешимого градуированного радикала, абелевых, нильпотентных и разрешимых градуированных идеалов градуированных Ω-групп, а также представление первичного градуированного радикала градуированной Ω-группы по нильпотентным градуированным идеалам.

4.1 Градуированные Ω-группы

Отметим, что отдельные свойства первичного радикала слабо артиновых алгебр Ли могут быть верными и для других алгебраических структур, в частности в более общем случае – для градуированных Ω-групп.

При решении первой и второй задач, поставленных в диссертационном исследовании, дополнительно получено доказательство одного свойства градуированного первичного радикала градуированных Ω-групп.

Далее здесь будут изложены элементы теории Ω-групп, которые понадобятся для доказательства свойства локальной нильпотентности градуированного первичного радикала. При этом изложение теоретических положений будет проводиться в соответствии с работами [16], [30].

Для начала приведём определение градуированной Ω-группы.

Определение 4.1.1 *Аддитивная группа A, градуированная группой*

G, называется градуированной Ω-группой, если в ней наряду с операцией сложения задана система n-арных алгебраических операций Ω, удовлетворяющая такому условию, что для каждой операции ω из множества операций Ω должно быть выполнено соотношение, согласно которому результат выполнения операции ω над нулевыми элементами равен нулю:

$$(0, 0, ..., 0)\omega = 0.$$

Множество Ω должно обладать не менее, чем одной операцией ω, арности, равной двум или более.

Группу A можно представить в виде $A = \bigoplus\limits_{g \in G} A_g$, где A_g – нормальные подгруппы, именуемыми однородными компонентами.

Для всякой n-арной операции $\omega \in \Omega$ и любых $a_i \in A_{g_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ справедливо условие $(a_1, a_2, ..., a_n)\omega \in A_{g_1 g_2 \cdots g_n}$.

В данной работе нас интересуют Ω-группы с условием конечности. Назовём градуированную Ω-группу A, удовлетворяющей условию конечности, если множество элементов, представляющих собой результат операции $\omega \in \Omega$ над всякими элементами $a_1, a_2, ..., a_n$ (где $n \geq 2$), взятыми из любого конечного подмножества $X \subseteq A$, конечно.

Теперь рассмотрим множество, представляющее собой объединение множеств A_g, $g \in G$. Его элементы называются однородными элементами A, ненулевой элемент $a_g \in A_g$ – однородным элементом степени g.

Всякий элемент $a \in A$, за исключением нулевого, может быть представлен как конечная сумма однородных компонент элемента a в виде

$$a = a_{g_1} + a_{g_2} + ... + a_{g_n}, \text{ где } a_g \in A_g,$$

причём единственным образом. Все элементы a_{g_i} должны быть ненулевыми и однородными.

Отметим, что при определённых, дополнительно установленных условиях, градуированные Ω-группы могут быть преобразованы в алгебры Ли.

Для градуированных Ω-групп можно ввести понятия разрешимой, нильпотентной, локально разрешимой и локально нильпотентной градуированных Ω-групп, а также градуированных первичных идеала и радикала.

Следующие определения приводятся в соответствии с традиционными понятиями теории первичного радикала, рассматриваемые нами ранее для алгебр Ли.

Определение 4.1.2 *Пусть A – градуированная Ω-группа. N – подмножество A, не являющееся пустым.*

Назовём N градуированным идеалом, если:

1) N – нормальная подгруппа группы A (в этом случае группа A рассматривается как аддитивная);

2) для любых элементов $x_1, x_2, ..., x_n$, взятых из A, выполняется условие

$$-(x_1, x_2, ..., x_n)\omega + (x_1, ..., x_{i-1}, a, x_{i+1}, ..., x_n)\omega \in N,$$

где $\omega \in \Omega$, a – произвольный элемент из N;

3) для элемента x из N, представимого в виде следующей суммы однородных элементов

$$x = x_{g_1} + x_{g_2} + ... + x_{g_n}, x_{g_i} \in A_{g_i}, g_i \in G,$$

все x_{g_i} принадлежат N.

Определение 4.1.3 *Пусть $I, J \in A$ – градуированные Ω-подгруппы градуированной Ω-группы A. Взаимным коммутантом $[I, J]$ называется Ω-подгруппа Ω-группы A, порождённая в ней множеством элементов $(c_1, c_2, ..., c_n)\omega$, где $n \geq 2$, $\omega \in \Omega$, элементы c_i, $i = 1, 2, ..., n$, принадлежат I или J, при этом элементы как I, так и J обязательно встречаются среди c_i.*

Для того чтобы ввести понятие разрешимости градуированной Ω-группы A, необходимо рассмотреть ряд градуированных идеалов A следующего вида:

$$A^{(0)} = A, A^{(1)} = [A^{(0)}, A^{(0)}], A^{(2)} = [A^{(1)}, A^{(1)}], ..., A^{(k)} = [A^{(k-1)}, A^{(k-1)}], ...$$

Определение 1.1.1 ([13, с. 17]) *Градуированная Ω-группа A называется разрешимой, если для некоторого натурального n выполняется условие*

$A^{(n)} = 0$, *а* $A^{(n-1)} \neq 0$. *Натуральное* n *называется ступенью разрешимости* A.

Для того, чтобы ввести понятие нильпотентности градуированной Ω-группы A, необходимо рассмотреть ряд градуированных идеалов A следующего вида:

$$A_0 = A, A_1 = [A_0, A_0], A_2 = [A_1, A_1], ..., A_k = [A_{k-1}, A_{k-1}], ...$$

Определение 4.1.5 *Градуированная* Ω*-группа* A *называется нильпотентной , для некоторого натурального* n *выполняется условие* $A_n = 0$, *а* $A_{n-1} \neq 0$. *Натуральное* n *называется ступенью нильпотентности* A.

4.2 О свойствах градуированного первичного радикала градуированных Ω-групп

Определение 4.2.1 *Будем называть первичной такую градуированную* Ω*-группу , для которой выполняется следующее условие: для любых двух градуированных идеалов* $I, J \subseteq A$ *из равенства коммутантов этих идеалов нулю* $[I, J] = 0$ *должно следовать, что либо градуированный идеал* $I = 0$, *либо градуированный идеал* $J = 0$.

Определение 4.2.2 *Первичным градуированным идеалом градуированной* Ω*-группы* A *называется такой градуированный идеал* P, *для которого градуированная* Ω*-фактор-группа* A/P *является первичной.*

Определение 4.2.3 *Пусть* P_α *– все первичные градуированные идеалы градуированной* Ω*-группы . Тогда их пересечение* $\bigcap P_\alpha$ *будем называть градуированным первичным радикалом и обозначать* $P(A)$. *Если у градуированной* Ω*-группы нет градуированных первичных идеалов, то в качестве градуированного первичного радикала будем считать саму градуированную* Ω*-группу* A.

Свойства градуированного первичного радикала градуированных Ω-групп рассмотрены в статье [30]. В частности, доказано, что градуированные нижний слабо разрешимый и первичный радикалы любой градуированной Ω-группы, на которую наложено условие конечности, совпадают.

Определение 4.2.4 *Градуированная Ω-группа называется абелевой, если $[A, A] = 0$.*

Лемма 4.2.1 *Любой ненулевой разрешимый градуированный идеал градуированной Ω-группы содержит ненулевой абелев градуированный идеал.*

Доказательство.

Пусть I – ненулевой разрешимый градуированный идеал градуированной Ω-группы .

Так как I – разрешимый, то существует такое натуральное k, что $I^{(k)} = 0$. То есть $I^{(k)} = [I^{(k-1)}, I^{(k-1)}] = 0$, причём $I^{(k-1)} \neq 0$. Таким образом, $I^{(k-1)}$ является ненулевым абелевым градуированным идеалом.

Доказательство завершено.

Лемма 4.2.2 *Сумма нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω-группы A – нильпотентна.*

Доказательство.

Рассмотрим случай для суммы двух нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω-группы A.

Пусть I и J – нильпотентные градуированные идеалы градуированной Ω-группы A.

Тогда существует натуральные n и m, что $I_n = 0$, $I_{n-1} \neq 0$, $J_n = 0$, $J_{n-1} \neq 0$.

Пусть $l = max(n, m)$.

Рассмотрим градуированный идеал B. Для любой операции ω, элемент

$$(x_1^p, x_2^p, ..., x_{k-1}^p, (...(x_1^2, x_2^2, ..., x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1)\omega)\omega)...)\omega,$$

в котором s сомножителей из B, а остальные – из градуированной Ω-группы A, содержится в B_s. Тогда идеал $(I+J)_{2l}$ содержится в сумме элементов вида

$$y = (x_1^p, x_2^p, ..., x_{k-1}^p, (...(x_1^2, x_2^2, ..., x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1)\omega)\omega)...)\omega, \qquad (4.2.1)$$

где x_i^j либо содержится в I, либо в J.

Каждый элемент y вида (4.2.1) содержит или l раз сомножителем I, или l раз сомножителем J. То есть y содержится в I_l или J_l. Отсюда следует, что

$$(I+J)_{2l} \subseteq I_l + J_l.$$

Так как $I_l = 0$ и $J_l = 0$, то $(I+J)_l = 0$, то есть $I+J$ – нильпотентна.

Что и требовалось доказать.

Определение 4.2.4 *Градуированная Ω-группа называется локально нильпотентной, если любая её конечно порождённая градуированная Ω-подгруппа нильпотентна.*

Теорема 4.2.1 *Градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω-группы A с условием конечности, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей градуированных идеалов, является локально нильпотентным.*

Условие обрыва убывающих цепей градуированных идеалов означает, что в A любая убывающая цепь вида

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_k \supseteq ...$$

стабилизируется, то есть $I_k = I_{k+1} = ...$ для некоторого k. Данное условие аналогично условию слабой артиновости для алгебр Ли, которое рассмотрено в главе 2 настоящей работы.

Доказательство.

Одним из свойств градуированного первичного радикала $P(A)$ градуированной Ω-группы с условием конечности, связанным со свойствами совпадения или включения радикалов друг в друга, является возможность представить его с помощью радикала, называемого нижним градуированным слабо разрешимым. Данное представление рассмотрено в работе [30].

Пусть $\sigma(A)$ – это любой ненулевой абелев идеал из $P(A)$. Такой идеал существует, так как идеал $\sigma(A)$ содержится в первичном радикале.

Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом градуированном идеале градуированного первичного радикала $P(A)$, который существует согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(A) \neq 0$ [30] (в случае равенства $P(A) = 0$ утверждение теоремы выполнено).

Любой ненулевой разрешимый градуированный идеал содержит ненулевой абелев градуированный идеал.

Рассмотрим число α, которое является порядковым. Поставим ему в соответствие градуированный идеал $\tau(\alpha) \subset P(A)$ определённым образом, используя трансфинитную индукцию:

1. При $\alpha = 0$ градуированный идеал $\tau(0)$ равен нулю.

2. Будем считать, что для любых порядковых чисел α меньших некоторого β идеал $\tau(\alpha)$ определен, а для порядкового числа β идеал $\tau(\beta)$ задается следующим способом:

а) если число $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым, то идеал $\tau(\beta)$ – это такой градуированный идеал из A, что фактор идеала $\tau(\beta)$ по идеалу $\tau(\gamma)$ совпадает с идеалом $\tau(A/\tau(\gamma))$;

б) в случае, когда β является предельным порядковым, идеал $\tau(\beta)$ представляет собой следующее объединение:

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \tau(\gamma).$$

Учитывая мощность множества порядковых чисел, получим, что для некоторого порядкового β выполняется условие $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$. Следовательно, $\tau(\beta) = P(A)$.

Для получения дальнейших результатов нам необходимо воспользоваться также и представлением $P(A)$ по идеалам, являющимися градуированными нильпотентными.

Обозначим сумму всех абелевых градуированных идеалов, отличных от нулевого, которые лежат в $P(A)$, через $\sigma(A)$. Так как градуированная Ω-группа A, удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей градуированных идеалов, то таких идеалов будет конечное число.

Согласно лемме 4.2.2 сумма нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω-группы A – нильпотентна. Следовательно, градуированный идеал $\sigma(A)$ будет нильпотентен.

Рассмотрим число α, которое является порядковым. Поставим ему в соответствие градуированный идеал $\sigma(\alpha) \subset P()$ определённым образом, используя трансфинитную индукцию:

1. При $\alpha = 0$ градуированный идеал $\sigma(0)$ равен нулю.

2. Будем считать, что для любых порядковых чисел α меньших некоторого β градуированный идеал $\sigma(\alpha)$ определен, а для порядкового числа β градуированный идеал $\sigma(\beta)$ задается следующим способом:

а) если число $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым, то идеал $\sigma(\beta)$ – это такой градуированный идеал из A, что фактор идеала $\sigma(\beta)$ по идеалу $\sigma(\gamma)$ совпадает с идеалом $\sigma(A/\sigma(\gamma))$;

б) в случае, когда β является предельным порядковым, градуированный идеал $\sigma(\beta)$ представляет собой следующее объединение:

$$\sigma(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \sigma(\gamma).$$

Учитывая мощность множества порядковых чисел, получим, что для некоторого порядкового β выполняется условие $\sigma(\beta) = \sigma(\beta + 1)$. Следовательно, $\sigma(\beta) = P(A)$.

Обозначим через $N(\sigma(A))$ степень нильпотентности идеала $\sigma(A)$.

Пусть $X \subset P(A)$ непустое конечное множество. Докажем, что все операции $\omega \in \Omega$ над элементами $x_1, x_2, ..., x_l$ множества X равны 0 для некоторого натурального r.

Для каждого $x \in X$ обозначим через $\alpha(x)$ порядковое число α такое, что $x \in \sigma(\alpha)\backslash\sigma(\alpha - 1)$, если $\alpha - 1$ определено и α, если $x \in \sigma(\alpha)$ и $\alpha - 1$ не определено.

Пусть

$$\alpha_1 = max(\alpha((x_1^{2l}, x_2^{2l}, ..., x_{k-1}^{2l}(...$$

$$...(x_1^2, x_2^2, ..., x_{k-1}^2(x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1)\omega)\omega)...)\omega | x_i^j \in X)),$$
$$m = N(\sigma(\alpha_1)).$$

Рассмотрим все элементы вида

$$y = x_1^{2l}, x_2^{2l}, ..., x_{k-1}^{2l}(...(x_1^2, x_2^2, ..., x_{k-1}^2(x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1)\omega)\omega)...)\omega.$$

Они удовлетворяют условию

$$\alpha(x_1^{2l}, x_2^{2l}, ..., x_{k-1}^{2l}(...(x_1^2, x_2^2, ..., x_{k-1}^2(x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1)\omega)\omega)...)\omega) < \alpha_1.$$

Введем множество

$$X_2 = \big\{(x_1^{2l}, x_2^{2l}, ..., x_{k-1}^{2l}(...(x_1^2, x_2^2, ..., x_{k-1}^2(x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1)\omega)\omega)...)\omega | x_i^k \in X)\big\}.$$

Пусть $\alpha_2 = max_{x \in X_2}(\alpha(x))$, $m_2 = N(\sigma(\alpha_2))$.

Из сказанного выше следует, что $\alpha_2 < \alpha_1$.

Аналогично введем множество X_3.

Получим последовательность множеств $X_1, X_2, ...$ и убывающую последовательность ординальных чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > ...$, которая не может быть бесконечной.

Следовательно, для некоторого k все элементы множества X_k равны нулю.

Это означает нильпотентность градуированной Ω-группы, порожденной множеством X, и локальную нильпотентность первичного радикала $P(A)$.

Таким образом, теорема доказана.

Заключение

Проведённое исследование по теме «Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли» позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, классические радикалы, построенные в теории конечномерных алгебр Ли, не всегда могут рассматриваться и применяться в качестве радикалов бесконечномерных алгебр Ли. В различных исследованиях приводятся примеры, доказывающие несостоятельность такого применения. В данной работе приведён пример бесконечномерной локально нильпотентной алгебры Ли, которая не является нильпотентной.

Во-вторых, свойства радикалов конечномерных и бесконечномерных алгебр Ли могут существенно отличаться. Более того, свойства радикалов бесконечномерных алгебр Ли могут отличаться и в случае наложения на алгебры Ли различных дополнительных условий. Поэтому исследование свойств радикалов является актуальной задачей в области структурной теории бесконечномерных алгебр Ли. В работе рассмотрены свойства первичного радикала алгебр Ли, удовлетворяющих условию стабилизации для убывающих цепей идеалов. Доказано, что первичный радикал слабо артиновых алгебр Ли является локально нильпотентным. При решении проблемы А. В. Михалёва установлено свойство разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

В-третьих, помимо радикалов, для изучения структуры алгебр Ли полезной оказывается конструкция центроида Мартиндейла, применение которой при решении проблемы М. В. Зайцева позволило доказать вложимость полупервичной нётеровой специальной алгебры Ли над полем F в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.

В-четвёртых, некоторые свойства радикалов могут быть верны и в более общей ситуации. Так, свойство первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли быть локально нильпотентным оказалось справедливым и для градуированного первичного радикала градуированных Ω-групп.

Следует отметить, что в теории радикалов алгебр Ли остаются нерешёнными множество задач, среди которых интерес для дальнейших исследований представляют следующие:

1. Пусть $P(L)$ и $N(L)$ – первичный и локально нильпотентный радикалы специальной алгебры Ли L соответственно. Верно ли, что $N(L) \subset P(L)$?

2. Пусть $J(L)$ и $IrrPI(L)$ – радикал Джекобсона и неприводимо PI-представленный радикал алгебры Ли L соответственно. Для каких алгебр Ли верно, что $J(L) \subset IrrPI(L)$?

3. Можно ли привести пример алгебры Ли такой, что $N(L)$ не является локально разрешимым?

4. Является ли неприводимо PI-представленный радикал специальной алгебры Ли локально нильпотентным?

5. Является ли неприводимо PI-представленный радикал слабо артиновой (слабо нётеровой) алгебры Ли локально нильпотентным?

Список литературы

[1] Андрунакиевич, В. А. Радикалы алгебр и структурная теория / В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин. – М.: Наука, 1979. – 495 с.

[2] Балаба, И. Н. Первичный радикал специальных супералгебр Ли / И. Н. Балаба, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2003. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 51–60.

[3] Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли / Ю. А. Бахтурин. – М.: Наука, 1985. – 448 с.

[4] Бейдар, К. И. О первичном радикале специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Успехи матем. наук. – 1994. – № 1. – С. 233.

[5] Бейдар, К. И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 643–648.

[6] Бейдар, К. И. О PI-оболочках специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Тезисы докладов международной конференции «Универсальная алгебра и ее приложения». – Волгоград, 1999. – С. 18–19.

[7] Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли: часть I / Н. Бурбаки. – М.: Книга по требованию, 2012. – 496 с.

[8] Грибов, А. В. Первичный радикал для луп и Ω-луп. I / А. В. Грибов, А. В. Михалёв // Фундаментальная и прикладная математика. – 2014. – Т. 19. – Вып. 2. – С. 25–42.

[9] Грибов, А. В. Первичный радикал для альтернативных колец и луп / А. В. Грибов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2015. – Т. 20. – Вып. 1. – С. 145–166.

[10] Джекобсон, Н. Строение колец / Н. Джекобсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 392 с.

[11] Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. – М.: Мир, 1964. – 356 с.

[12] Зубрилин, К. А. О наибольшем нильпотентном идеале в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли / К. А. Зубрилин // Математический сборник. – 1997. – Т. 188. – № 8. – С. 93–102.

[13] Капланский, И. Алгебры Ли и локально компактные группы Ли / И. Капланский. – М.: Мир, 1974. – 150 с.

[14] Кострикин, А.И. Вокруг Бернсайда / А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1986 – 232 с.

[15] Кочетова, Ю.В. Первичный радикал решёточно κ-упорядоченных алгебр / Ю.В. Кочетова, Е.Е. Ширшова // Фундаментальная и прикладная математика. – 20013. – Т. 18. – Вып. 1. – С. 85–158.

[16] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

[17] Кучеров, А. А. О гомологическом описании локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли / А. А. Кучеров, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2010. – № 9. – С. 40–43.

[18] Кучеров, А. А. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли / А. А. Кучеров, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2010. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 71–76.

[19] Кучеров, А.А. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли / А. А. Кучеров // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2013. – № 1. – С. 121–125.

[20] Ламбек, И. Кольца и модули / И. Ламбек. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 283 с.

[21] Латышев, В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями / В. Н. Латышев // Сибирский математический журнал. – 1963. – Т. 4. – № 4. – С. 821–829.

[22] Латышев, В. Н. О сумме локально разрешимых идеалов алгебр Ли / В. Н. Латышев, А. В. Михалёв, С. А. Пихтильков // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2003. – № 3. – С. 29–32.

[23] Мещерина, Е. В. О проблеме А. В. Михалёва для алгебр Ли / Е. В. Мещерина, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 4(2). – С. 84–89.

[24] Мещерина, Е. В. Первичный радикал алгебр Ли, удовлетворяющих специальным условиям: монография / Е. В. Мещерина, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова. – Оренбургский государственный университет, Оренбург – 2018. – 120 с.

[25] Мещерина, Е. В. Развитие понятия «артиновость» для алгебр Ли / Е. В. Мещерина, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19. – Вып. 1. – С. 167–175.

[26] Михалёв, А. В. Гомологическая классификация колец / А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков // Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1977–1985. – Т.1: А-Г. – С. 1052.

[27] Михалёв, А. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Сборник работ по алгебре. – М.: Изд-во Московского университета, 1989. – С. 178–184.

[28] Михалёв, А. В. Первичный радикал решеточно-упорядоченных групп / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Вестник Московского университета.– 1990. – № 2. – С. 84–86.

[29] Михалёв, А. В. Первичный радикал Ω-групп и Ω-l-групп / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Фундаментальная и прикладная математика.– 1998. – Т. 4. – № 4. – С. 1405–1413.

[30] Михалёв, А. В. Первичный радикал градуированных Ω-групп / А. В. Михалёв, И. Н. Балаба, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 159–174.

[31] Михалёв, А. В. Первичные радикалы AO-групп / А. В. Михалёв, Е. Е. Ширшова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 8. – С. 197–206.

[32] Михалёв, А. В. Первичный радикал pl-групп / А. В. Михалёв, Е. Е. Ширшова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. –Вып. 2. – С. 193–199.

[33] Парфёнов, В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли / В. А. Парфёнов // Сибирский математический журнал. – 1971. – Т. 12. – № 1. – С. 171–176.

[34] Пихтильков, С. А. Об использовании разрешимого радикала в теории многообразий алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Межвузовский сборник «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». – Тула: Изд-во ТГПУ, 1990. – С. 60–65.

[35] Пихтильков, С. А. Артиновые специальные алгебры Ли / С. А. Пихтильков // Межвузовский сборник «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». – Тула: Изд-во ТГПУ, 2001. – С. 189–194.

[36] Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 769–782.

[37] Пихтильков, С. А. О некоторых классических радикалах для специаль-

ных алгебр Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2008. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 153–157.

[38] Пихтильков, С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков. – Оренбургский государственный университет, Оренбург – 2013. – 171 с.

[39] Пихтильков, С. А. Локальная разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57. – № 3. – С. 697–699.

[40] Пихтилькова, О. А. О специальных алгебрах Ли, имеющих точный модуль с размерностью Крулля / О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков // Известия РАН. Серия математика. – 2017. – Т. 81. – Вып. 1. – С. 93–100.

[41] Пихтильков, С. А. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли и локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. А. Горелик, Л. Б. Усова / Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – Вып. 2. – С. 195–204.

[42] Поляков, В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли / В. М. Поляков, С. А. Пихтильков // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6. – Вып. 1. – С. 163–169.

[43] Поляков, В. М. Об аналоге теоремы Амицура-Маккоя для алгебр Ли / В. М. Поляков, С. А. Пихтильков // Вестник ТГПУ им. Л.Н. Толстого. – 2005. – № 2. – С. 125–126.

[44] Размыслов, Ю.П. Об энгелевых алгебрах Ли / Ю.П. Размыслов // Алгебра и логика.– 1971. – Т. 10. – № 10. – С. 33–44.

[45] Размыслов, Ю. П. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах / Ю. П. Размыслов // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13. – № 3. – С. 337–360.

[46] Размыслов, Ю. П. Тождества алгебр и их представления / Ю. П. Размыслов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

[47] Симонян, Л. А. О радикале Джекобсона алгебры Ли / Л. А. Симонян // Латвийский математический ежегодник. – 1993. – Вып. 34. – С. 230-234.

[48] Терехова, Ю.А. О теореме Леви для специальных алгебр Ли / Ю.А. Терехова // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп.– Тула.: Изд-во ТГПУ, 1994. – С. 97-103.

[49] Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. – М.: Мир, 1972. – 192 с.

[50] Щукин, К. И. RI^*–разрешимый радикал групп / К. И. Щукин // Математический сборник. – 1960. – Т. 52. – № 4. – С. 1024–1031.

[51] Amayo, R. Infinite dimensional Lie algebras / R. Amayo, I. Stewart. – Leyden: Noordhoof, 1974. – 436 p.

[52] Amitsur, S. A. Radicals of polynomials rings / S. A. Amitsur // Canad. J. of Math. – 1956. – V. – 8. – P. 355–361.

[53] Baxter, W. E. Central closure of semiprime nonassociative rings / W. E. Baxter, W. S. Martindale // Commun. of Algebra. – 1979. – V. 7. – № 11. – P. 1105–1132.

[54] Beidar, K.I. Rings with generalized identities. Pure and Applied Mathematics / K.I. Beidar, W.S. Martindale, A.V. Mikhalev. – New-York: Marcel-Dekker, 1996.

[55] Buys, A. The prime radical for Ω-groups / A. Buys, G. K. Gerber // Commun. in Algebra. – 1982. – V. 10. – P. 1089-1099.

[56] Cohen, M. Group-graded rings, smash products, and group action / M. Cohen, S. Montgomery // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 282. – № 1. – P. 237–258.

[57] Hartley, B. Locally nilpotent ideals of a Lie algebra / B. Hartley // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1967. – V. 63, part 2. – P. 257-272.

[58] Hawkins, T. Wilhelm Killing and the Structure of Lie Algebras / T. Hawkins // Archive for History of Exact Science. – 1982. – 26. – P. 126-192.

[59] Jacobson, N. PI-algebras / N. Jacobson. – Springer-Verlag: Berlin-Heideilburg, New York, 1975. – 120 p.

[60] Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras / N. Kamiya // Hiroshima Math. J. – 1979. – V. 9. – P. 37–40.

[61] Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical / F. Kubo // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. – 1991. – V. 38. – P. 23–30.

[62] McCoy, N. H. Prime ideals in general rings / N. H. McCoy // Amer. J. Math. – 1949. – № 71. – P. 823–833.

[63] Marshall, E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra / E. I. Marshall // J. London Math. Soc. – 1967. – V. 42. – P. 416–422.

[64] Pikhtilkov, S. A., Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras / S. A. Pikhtilkov // Comm. in Algebra. – 2001. – V. 29. – № 10. – P. 3781–3786.

[65] Pikhtilkov, S. On a prime radical of algebras and superalgebras Lie / S. Pikhtilkov, V. Polyakov //Abstracts of Internetional conference on radicals dadicated to the memory of Prof. V. Andrunakievich. – August 2003. – Chisinau, Moldova. – P. 33.

[66] Togo, S. Radicals of infinite-dimensional Lie algebras / S. Togo // Hiroshima Math. J. – 1972. – V. 2. – P. 179–203.

[67] Togo, S. Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras / S. Togo, N. Kavamoto // Hiroshima Math. J. – 1972. – V. 2. – P. 253–261.

Работы автора по теме диссертации

[68] Blagovisnaya, A. A prime radical of weakly artinian Ω-groups with finite condition is locally nilpotent / A. Blagovisnaya, S. Pikhtilkov, O. Pikhtilkova // Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 2015. – Vol. 9. – Iss. 2.

[69] Pikhtilkov, S. A. On the embeddabillity of Noetherian semiprime special Lie algebra in $sl_m(F) \otimes_F C$ / S. A. Pikhtilkov, O. A. Pikhtilkova, A. N. Blagovisnaya // Алгебра и логика: теория и приложения: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию В. М. Левчука. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2016. – P. 110–111.

[70] Пихтильков, С. А. О локальной нильпотентности первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихтильков, А. Н. Благовисная, О. А. Пихтилькова // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. – 2016. – № 8. – С. 121–122.

[71] Пихтильков, С. А. О разрешимости первичного радикала слабоартиновых алгебр Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. Н. Благовисная // Университет XXI века: научное измерение: материалы Всероссийской конференции. – Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2016. – С. 134–136.

[72] Благовисная, А. Н. О проблеме М. В. Зайцева для нётеровых специальных алгебр Ли / А. Н. Благовисная, О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 5. – С. 26–31.

[73] Пихтильков, С. А. О различных радикалах алгебр Ли / С. А. Пихтильков, А. Н. Благовисная, А. Н. Павленко // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы Всероссийской научно-методической конференции. – Оренбург: ОГУ, 2017. – С. 3174–3177.

[74] Пихтильков, С. А. О свойствах первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. Н. Благовисная // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – № 1 (61). – С. 134–142.

[75] Пихтильков, С. А. Разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. Н. Благовисная // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов: тезисы докладов 6-й школы-конференции. – Москва: МЦНМО, 2017. – С. 65–67.

[76] Blagovisnaya, A. N. On the A.V. Mikhalev Problem for Weakly Artinian Lie Algebras / A. N. Blagovisnaya, O. A. Pikhtilkova, S. A. Pikhtilkov // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2018. – Vol. 233. – Issue 5. – C. 635–639.

[77] Благовисная, А. Н. О примерах построения артиновых алгебр Ли / А. Н. Благовисная, А. А. Горелик, О. А. Пихтилькова // Вестник современных исследований. – 2018. – № 12.14 (27). – С. 65–67.

[78] Благовисная, А.Н. Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли // Чебышевский сборник. – 2019. – № 1(69). – С. 311-351.

Список обозначений

$[U, V]$ – коммутант идеалов U и V алгебры Ли или градуированной Ω-группы или алгебре Ли

$A^{(-)}$ – ассоциативная алгебра A по отношению к операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$

$A(M)$ – ассоциированная алгебра представления, порожденная элементами алгебры L в алгебре $\mathrm{End}(M)$ как ассоциативная алгебра, где M – L-модуль

$\mathrm{Ad}\, L$ – присоединенная ассоциативная алгебра для алгебры Ли L

$End(M)$ – алгебра эндоморфизмов модуля M

$F[x_1, x_2, ..., x_n]$ – кольцо многочленов над полем F

$F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – свободная ассоциативная алгебра над полем F с образующими $x_1, x_2, ..., x_n$

$F(X)$ – свободная алгебра Ли над полем F

$Jrr(L)$ – неприводимо представленный радикал алгебры Ли L

$JrrFin(L)$ – конечно неприводимо представленный радикал алгебры Ли L

$JrrPI(L)$ – PI-неприводимо представленный радикал алгебры Ли L

$J(D)$ – радикал Джекобсона алгебры D

L' или L^2– коммутант алгебры Ли L

$L^{(n)}$ – элементы производного ряда алгебры Ли L

L_n – элементы нижнего центрального ряда алгебры Ли L

$L_1 \oplus L_2$ – прямая сумма алгебр Ли L_1 и L_2

$L_1 \odot L_2$ – полупрямое произведение алгебр Ли L_1 и L_2

$M_1 \dot{+} M_2$ – полупрямое произведение векторных пространств M_1 и M_2

$n(A)$ – сложность алгебры A

$C(A)$ – центроид Мартиндейла алгебры A

$N(L)$ – нильпотентный, локально нильпотентный радикал алгебры Ли L

$P(L)$ – первичный радикал алгебры Ли L

$P(A)$ – первичный радикал градуированной Ω-группы A

$R(L)$ – разрешимый радикал алгебры Ли L

$sl_n(F)$ – специальная линейная алгебра порядка n над полем F

SPI-алгебра Ли – специальная алгебра Ли

$T(L)$ – наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли L

$U(L)$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли L

$Z(A)$ – центр алгебры A

Предметный указатель