

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

*На правах рукописи*

**Коваленко Анатолий Александрович**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСТАДИЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ  
СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОДУКТИВНЫХ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
профессор Бутов А.А.

Ульяновск – 2019

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава 1. Математическое моделирование многостадийных процессов в стохастических продуктивных системах в терминах точечных процессов</b> .....	15
§ 1.1. Введение и краткий обзор .....	15
§ 1.2. Описания в терминах точечных процессов .....	17
§ 1.3. Однородные процессы выполнения и системы «точно-в-срок». 23	
§ 1.4. Условия для систем «точно-в-срок» в случайной среде .....	28
§ 1.5. Выводы по главе 1 .....	40
<b>Глава 2. Оптимальное управление процессами выполнения</b> .....	42
§ 2.1. Анализ систем с множественными этапами выполнения .....	42
§ 2.2. Задача оптимального управления моментом смены этапа .....	45
§ 2.3. Метод последовательного перепланирования .....	47
§ 2.4. Задачи оптимального управления интенсивностями процессов 49	
§ 2.6. Выводы по главе 2 .....	52
<b>Глава 3. Стохастические модели процессов многостадийного износа и старения</b> .....	54
§ 3.1. Математические методы описания моделей стохастических процессов износа и разрушения .....	54
§ 3.2. Описание проблемы моделирования одно- и многостадийных процессов износа и старения .....	58
§ 3.3. Описание систем в терминах диффузионных процессов .....	71
§ 3.4. Смежные теоретические и прикладные задачи моделирования многостадийных процессов биологических систем при старении .....	89
§ 3.5. Выводы по главе 3 .....	93
<b>Глава 4. Компьютерное моделирование управляемых многостадийных продуктивных систем</b> .....	95

§ 4.1. Задачи, алгоритмы и особенности численных методов моделирования многостадийных стохастических процессов выполнения операций .....	95
§ 4.2. Компьютерное моделирование многостадийных стохастических процессов износа и старения .....	97
§ 4.3. Структура комплекса программ .....	94
§ 4.4. Проверка адекватности моделей .....	101
§ 4.5. Выводы по главе 4 .....	102
<b>Выводы и заключение .....</b>	<b>103</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>105</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А .....</b>	<b>117</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б .....</b>	<b>118</b>

## **Введение**

В диссертационной работе рассматриваются математические модели многостадийных процессов в стохастических продуктивных системах (и соответствующих процессов выполнения операций) в достаточно общих случаях. В современном промышленном производстве, как и при высокотехнологичной организации сельскохозяйственного производства, наблюдается определенная общность подходов и методов организации продуктивных процессов, обусловленная возможностями планирования.

Аналізу стохастических продуктивных систем посвящено большое количество работ (см., например, [25], [71], [75], [80] и [92], а также литературу в них). При этом, актуальной является задача исследования математическими методами и методами имитационного моделирования стохастических продуктивных систем, как в промышленном производстве, так и в сельскохозяйственном, в лесоводстве и др. При этом одной из самых важных является задача оптимального управления продуктивной системой, а также ее ключевой составляющей – процессом выполнения (управление процессами возвратов, как правило затруднительно или невозможно).

В настоящей диссертационной работе описания моделей таких систем осуществлены в терминах точечных процессов (см., например, [6], [20], [42], [65], [67], [69] и литературу в них).

Наряду с моделированием продуктивных систем в терминах точечных процессов в диссертационной работе исследуются (как математическими, так и компьютерными методами) многостадийные процессы старения. Таким процессам (старения, износа и разрушения) посвящено большое число работ. Это обусловлено не только задачами противостояния разрушению (или его планируемой организации), но и универсальностью явления, которое, в отличие от развития, присуще практически всем материальным объектам. Вместе с описанием стадий разрушения для таких систем учитываются явления системной адаптации, репарации и адаптивных изменений режимов функцио-

нирования. Поэтому, математические описания (модели) оказываются заведомо содержащими непрерывные компоненты – здесь в форме диффузионных процессов с обратными связями интегрального типа. Тем не менее, описания как процессов выполнения в продуктивных системах, так и ступенчатые изменения структур живых объектов при старении (при укорочении теломер, размножении транспозонов или при нарушениях циркадных ритмов), укладываются в математическое описание в терминах точечных (считающих) процессов, обладающих общими свойствами – ограничениями как в количестве скачков, так и во времени изменений. Таким образом, можно говорить об единообразном подходе для широкого класса процессов выполнения (включая в него и разрушение).

Объектом исследования являются продуктивные системы с многостадийными процессами выполнения операций.

Предметом исследования выступают математические и имитационные компьютерные модели многостадийных продуктивных систем, а также многостадийных явлений износа и старения.

Целью диссертационной работы является формирование, разработка и развитие математических, а также компьютерных имитационных моделей многостадийных процессов в стохастических продуктивных системах, включающих описания процессов выполнения операций и процессов возвратов. В работе предполагается проведение анализа условий построения (и существования) моделей таких систем, в т. ч., систем выполнения операций «точно-в-срок», а также исследование возможностей оптимального управления такими системами, в терминах точечных процессов. Также предполагается моделирование, анализ и сопоставления с продуктивными многостадийными системами с износом и разрушением (многостадийным старением). Наряду с аналитическими методами необходима разработка алгоритмов и численных методов для задач компьютерной реализации математических моделей в виде комплекса компьютерных программ.

Цели диссертационной работы достигаются решением следующих, приведенных ниже задач.

1. Разработать и исследовать математические модели процессов многостадийного выполнения операций в стохастических продуктивных системах в терминах точечных процессов.

2. Разработать математические модели управляемых многостадийных стохастических систем и решить отдельные задачи об оптимальном управлении такими системами.

2. Разработать и исследовать математические модели явлений износа и старения как формы многостадийного (в т. ч., продуктивного) процесса в терминах точечных процессов и при условии диффузионных возмущений.

3. Разработать комплекс программ для реализации стохастических численных методов имитационного моделирования для исследуемых моделей на языке высокого уровня.

В диссертации применяются и разрабатываются методы теории случайных процессов (в траекторном представлении), а также методы оптимизации. При разработке методов и моделей, при аналитических исследованиях и доказательствах теоретических результатов использованы методы, разработанные в ряде работ А. А. Бутова, Р. Ш. Липцера и А. Н. Ширяева [9], [41], [42], [58], [66], [68] и др.

Компьютерные модели разработаны традиционными для имитационного стохастического моделирования численными методами, включающими разностные схемы, сочетаемые с генерацией остаточных моментов остановки при неограниченном росте интенсивностей точечных процессов. Применяются методы программирования на языке Borland Delphi 7.0. Адекватность построенных компьютерных моделей проверяется сопоставлением результатов компьютерного эксперимента и аналитических зависимостей.

Все основные, представленные в диссертационной работе результаты являются современными, новыми, а также актуальными. В работе разработана схема построения новых математических моделей на основе описаний в траекторных (семимартингалных) терминах. В соответствии с разработанным здесь методом в диссертации создан ряд стохастических математических моделей, а также компьютерных имитационных моделей, позволяющих анализировать и исследовать продуктивные системы с многостадийными процессами выполнения операций в терминах точечных процессов, найдены критерии выполнения операций «точно-в-срок» для систем в случайной среде, разработаны математические модели управляемых многостадийных стохастических систем и решен ряд задач об оптимальном управлении такими системами. В работе также разработаны и исследованы математические модели многостадийного износа и старения как формы многостадийного (в т. ч., продуктивного) процесса в терминах точечных процессов и при условии диффузионных возмущений, разработан комплекс программ для соответствующего численного стохастического имитационного моделирования.

Основными положениями диссертации, выносимыми на защиту, являются:

1. Математические модели стохастических многостадийных продуктивных систем в терминах точечных процессов.
2. Математические модели многостадийных процессов выполнения операций в продуктивных системах класса «точно-в-срок».
3. Модели процессов выполнения операций в стохастических многостадийных продуктивных системах, функционирующих в случайной среде. Для этих систем найдены условия выполнения требования «точно-в-срок». Доказательства соответствующих теорем.
4. Математические модели управляемых многостадийных продуктивных систем. Условия оптимального управления этими системами в четырех постановках задачи. Доказательства соответствующих теорем.

5. Математические модели многостадийных процессов в продуктивных системах с износом и старением с описанием в терминах точечных процессов с возмущением диффузионного типа.
6. Комплекс программ для решения задач оптимального управления интенсивностями выполнения операций, управления многостадийными процессами в системах с износом и старением для проведения численных экспериментов.

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечена корректными формулировками задач, строгостью формулировок и доказательств лемм, теорем и предложений, использованием современных и актуальных методов при алгоритмизации, программировании и имитационном компьютерном моделировании на основе использования и развития численных методов, а также вследствие применения современных методов установления адекватности.

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в разработке математических методов моделирования многостадийных стохастических продуктивных систем, систем «точно-в-срок», критериями существования и условиями оптимальности, анализом процессов многостадийности систем с износом и старением, а также методами численного моделирования и программных реализаций компьютерных моделей.

Практическая значимость настоящей работы заключается в том, что результаты, а также методы, полученные в ней, могут использоваться в теории и практике организации и управления продуктивных (в том числе, производственных) систем, в управлении процессами «точно-в-срок» в педагогике, в медицине и биологии, в программировании. Комплекс программ, разработанный в диссертационной работе, также может иметь практическое применение в исследованиях продуктивных систем.



Постановку задач, рассматриваемых и решаемых в диссертационной работе, осуществил научный руководитель профессор Бутов А. А. Также профессор Бутов А. А. разработал общие математические методы стохастического траекторного описания систем и процессов «точно-в-срок» в терминах процессов в обратном времени. Выполненный здесь анализ, формирование конкретных исследуемых математических моделей проведены самостоятельно. Доказательства всех приведенных в диссертации лемм, теорем предложений, замечания и выводы выполнены и получены автором самостоятельно. Также построение и разработка численных алгоритмов и соответствующих симуляционных моделей осуществлены автором самостоятельно.

По теме диссертационной работы опубликовано 15 работ, включая 7 в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК (из них 1 статья, индексируемая Web of Science). Работы автора включены в общий список использованной литературы (в соответствии с алфавитным порядком расположения по первому автору в ссылке).

Работа состоит из введения, четырех глав (каждая из которых завершается выводами), общих выводов и заключения, списка литературы из 108 наименований источников (расположенных в алфавитном порядке по первому автору в ссылке), а также двух приложений. Общий объем диссертационной работы составляет 121 страницу, в том числе 116 страниц основного текста (включая 12 страниц списка литературы) и 5 страниц приложений. Диссертация содержит 19 рисунков. Нумерация всех формул, утверждений и рисунков в диссертационной работе сквозная.

В Главе 1 диссертационной работы осуществляется построение математической модели многостадийных процессов выполнения операций в стохастических продуктивных системах в терминах точечных процессов.

В параграфе 1.1 представлено описание объекта моделирования и краткий обзор методов и моделей, посвященных математическому описанию стохастических продуктивных систем и их важному классу – «точно-в-срок».

В параграфе 1.2 построена первичная (общая) математическая модель – дано строгое формальное математическое описание в траекторных (семимартингальных) терминах. Здесь же даны все основные определения для компонент описания математической модели.

В параграфе 1.3 рассматриваются однородные процессы выполнения операций в стохастических продуктивных системах (без возвращений операций на доработку). Рассматриваются методы описания таких систем в терминах процессов в обратном времени. В заключение параграфа доказана Лемма 1, являющаяся важной при дальнейшем анализе и решении задач оптимального управления системами «точно-в-срок».

В параграфе 1.4 приведено теоретическое обобщение – построена математическая модель процессов выполнения операций и процессов возвращений в стохастических продуктивных системах, функционирующих в случайной среде. В качестве случайной среды рассматривается набор неотрицательных случайных функций, являющихся коэффициентами интенсивности при выполнении операций или при возвращении операций на переработку. В этом параграфе приведены и доказаны Теорема 1, Теорема 2 и Предложение 1, в которых для указанных частных случаев случайных сред формулируются критерии того, что система оказывается «точно-в-срок».

Короткий параграф 1.5 содержит выводы по Главе 1.

Глава 2 посвящена формулировке и решению ряда задач оптимального управления процессами выполнения операций в стохастических продуктивных системах (без возвратов операций на доработку). Сформулированные и доказанные в главе результаты приведены в виде теорем.

Задачи управления для продуктивных систем возникают в случае нарушений условий однородности, либо при возможном нарушении требований, обеспечивающих выполнение условия «точно-в-срок».

Поэтому в параграфе 2.1 рассматривается задача планирования выполнения операций в течение ряда этапов, каждый из которых состоит из процесса многостадийного выполнения однородных операций. В параграфе сформулирована и доказана соответствующая Теорема 3 об оптимальном планировании этапов (к ней дано полезное Замечание 1).

В параграфе 2.2 сформулирована и решена задача об оптимальном моменте смены этапа в постановке, близкой рассматриваемой в 2.1. В качестве критерия оптимальности рассматривается среднеквадратичное отклонение от усредненной заданной плановой величины выполнения плана. Результат сформулирован в виде Леммы 2 (с необходимым Замечанием 2).

В параграфе 2.3 сформулирована и решена задача о множественных последовательных перепланировках, обобщающая результат § 2.2. На основе Леммы 2 доказана соответствующая Теорема 4. Дано полезное Замечание 3.

В параграфе 2.4 сформулирована и решена задача оптимального управления интенсивностями продуктивных процессов выполнения операций, для которой не выполняются строго условия, обеспечивающие и однородность, и поведение «точно-в-срок». Это имеет место в реальных системах, для которых увеличение интенсивности выполнения (обеспечивающее требование «точно-в-срок») ограничено, не может быть сколь угодно большим. Такие

системы здесь называются «почти-точно-в-срок». Результат об уровнях интенсивности и моменте перехода на режим с ограничениями сформулирован в виде Теоремы 5. Ее обобщение сформулировано в виде Замечания 4.

Параграф 2.5 содержит короткие выводы по Главе 2.

В Главе 3 рассматриваются математические модели явлений износа и старения как формы многостадийного (в т. ч., продуктивного) процесса в терминах точечных процессов и при условии диффузионных возмущений.

В параграфе 3.1 проводятся некоторые математические методы описания моделей стохастических процессов износа и разрушения. Дан краткий обзор и исторический анализ моделей.

В параграфе 3.2 представлена проблема моделирования одно- и многостадийных процессов износа и старения в терминах, позволяющих ее стохастическое описание. Показаны некоторые первичные модели, частично объясняющие возникновение явления многостадийности. Приведено Предложение 2, посвященное приближению в определении конечной длины стадии.

В параграфе 3.3 приводится математическая модель системы в терминах точечных процессов и диффузионных процессов. Дано объяснение многостадийности на основе анализа отрицательных обратных связей интегрального типа в системе с износом и старением.

В параграфе 3.4 представлены смежные теоретические и прикладные задачи моделирования многостадийных процессов биологических систем при старении и износе. Здесь кратко формулируются смежные задачи, требующие значительного отдельного изучения – задача о пересечении границы, задача о разладке и компенсации, проблема построения модели изменений

длин теломер, модели размножения транспозонов и модели изменений в гомеостатических циркадных режимах.

Параграф 3.5 содержит короткие выводы по Главе 3.

В Главе 4 рассматриваются задачи компьютерного моделирования управляемых многостадийных продуктивных систем. Здесь также рассматриваются модели систем с износом и старением.

Параграф 4.1 посвящен задачам, алгоритмам и особенностям численных методов моделирования многостадийных стохастических процессов выполнения операций. Основное внимание уделено процессам «точно-в-срок».

В параграфе 4.2 представлены результаты компьютерного моделирования многостадийных стохастических процессов износа и старения.

В параграфе 4.3 приведена структура комплекса программ, дана блок-схема, поясняющая принципы работы компьютерной программы.

В параграфе 4.4 приведены элементы проверки адекватности моделей.

Параграф 4.5 содержит краткие выводы по главе 4.

В выводах и заключении перечислены основные результаты диссертации, отмечена их новизна, а также теоретическая и практическая значимость.

В приложениях приведены дополнительные результаты компьютерного моделирования, представлены фрагменты листингов комплекса программ.

Автор настоящей диссертационной работы выражает глубокую благодарность научному руководителю, профессору, доктору физико-математических наук Бутову А. А. за формулировку задач, обсуждение полученных результатов, всестороннюю помощь и поддержку.

# Глава 1. Математическое моделирование многостадийных процессов в стохастических продуктивных системах в терминах точечных процессов

## § 1.1. Введение и краткий обзор

Построенные и рассматриваемые здесь модели являются теоретической основой для описания и моделирования последовательных конечных процессов выполнения конструкторско-технологических и производственных операций, предусматривающих такие явления, как случайные срывы сроков, возвращения на переработку на любом из этапов разработки или изготовления, управление интенсивностью выполняемых работ. В этой главе основное внимание уделено таким, достаточно новым для производства (а также обучения, лечения, программирования и др.) системам, как *точно-в-срок*. Также в настоящей главе рассматриваются близкие к ним по отдельным характеристикам системы, называемым далее *почти-точно-в-срок*. Основной особенностью полученных результатов является допущение случайных, стохастических отклонений в ходе выполнения операций. Заметим также, что предложенное описание позволяет средствами имитационного компьютерного моделирования осуществлять управление системой (например, интенсивностями выполняемых операций или моментами переключений режимов выполнения) в тех случаях, когда аналитические, математические методы оказываются малопродуктивными.

Принцип организации процессов выполнения в системах *точно-в-срок* в настоящее время достаточно хорошо известен и используется во многих областях. Примеры включают в себя производственные системы *точно-в-срок*, зачастую сокращаемые в публикациях как *JIT* – just-in-time [69], [101], [108], педагогические стратегии обучения *точно-в-срок* (часто сокращаемые как *JiTT*, см., например, [85] и [89]), а также методы компиляции *точно-в-срок* в компьютерном программировании [61], [93]. Также следует отметить

возникновение примыкающих к упомянутым методам процедуры лечения и тренировки *точно-в-срок*.

Заметим, что принцип *точно-в-срок* первоначально был разработан в автомобилестроении и хорошо известен как *Производственная система Toyota* или *kanban* – система [101], [108]. Этот принцип в настоящее время широко известен и, как отмечалось, используется в иных, далеких от производства, областях. В производственных системах методы *точно-в-срок* часто, как правило, рассматриваются в логистических задачах, и для их описания тогда используются детерминистические модели. Однако, методы логистики неприменимы в иных (отличных от первоначальных) областях применения, и, прежде всего, в управлении процессами разработки конструкторско-технологической документации. Также очевидно, что случайные события в таких системах и соответствующих процессах наблюдаются довольно часто (не только в новых областях применения, но и в транспортных, складских, производственных). Следовательно, формальное описание и моделирование систем *точно-в-срок* и *почти-точно-в-срок* представляет отдельный интерес ввиду их производственной актуальности, а также отсутствия соответствующих стохастических моделей.

Заметим, что в настоящее время математические, особенно стохастические модели для систем *точно-в-срок* недостаточно развиты. Такие модели необходимы для решения задач оптимального управления, что могло бы позволить *оптимизацию распределения* системных ресурсов и реализацию оптимального планирования достаточно произвольной стохастической системы *точно-в-срок*. Цель настоящего раздела диссертации - представить подход к стохастическому описанию систем *точно-в-срок*, который был бы подходящим как для аналитических методов, так и для компьютерного моделирования. В математических моделях таких систем следует предполагать, что траектории процессов должны принимать заданные значения в фиксированное время.



Такое поведение процессов известно для «стохастических мостов» и стохастических процессов в обратном времени. Таким образом, следует рассмотреть модели систем с требованием *точно-в-срок* в терминах процессов с поведением траекторий, близких к стохастическим мостам. Модели также должны позволить исследовать возможные нарушения этого требования, которые неизбежны для реальных систем.

Обращение времени стохастических процессов изучалось на протяжении многих лет. В качестве фундаментальных работ на эту тему следует отметить [74], [76], [84], [95] и некоторые другие. Отметим, что ряд работ, относящихся к исследованиям стохастических мостов (например, броуновского моста, Пуассоновского моста, также известного как мост Пуассона), посвящен исследованиям именно этих процессов. Кроме того, некоторые работы по обратимым Марковским процессам примыкают к описанию процессов в обратном времени [87], [95]. В настоящем разделе изучаются модели простых систем *точно-в-срок* в семимартингальных терминах для точечных процессов, аналогично упомянутому выше Пуассоновскому мосту. Здесь же допускаются некоторые предположения о процессах, присущих реальным системам. Так, рассматриваются простые случаи многостадийных систем *точно-в-срок*, а также системы с ограниченной интенсивностью. Для этих случаев во второй главе сформулированы и решены соответствующие задачи оптимального управления. Доказательства результатов используют семимартингальные методы.

## **§ 1.2. Описания в терминах точечных процессов**

Рассмотрим математическое описание стохастической модели продуктивной системы, задаваемой процессом выполнения операций и процессом возвращений. Это описание – математическая модель - на первом этапе представляет собой набор формальных математических определений, позволяющих проводить математическое, алгоритмическое и имитационное компью-

терное моделирование, прежде всего, для достаточно широкого класса систем выполнения операций производственных и конструкторско-технологических структур.

Предположим, что вероятностное пространство (см. определения следующих базовых понятий в [36] и [41], а также [28] и [42])  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  снабжено неубывающим непрерывным справа потоком  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , пополненным по мере  $P$  (т.е. при классических условиях [28]).

Рассмотрим некоторый продуктивный процесс, заключающийся в выполнении конечного количества  $K$  операций ( $K$  - положительное и целое). В модели предполагается, что процесс выполнения формализован как процесс  $X=(X_t)_{t \geq 0}$ , заданный на стохастическом базисе. Для его значений предполагается, что в каждый момент времени  $t \geq 0$  случайная величина  $X_t=X_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , является числом еще не выполненных операций. Траектории процесса  $X$  (не ограничивая общности) традиционно предполагаются непрерывными справа при любых  $t \geq 0$ , а также имеющими предел слева при любых  $t > 0$  [7], [20] и [42].

Для удобства изложения результатов и сокращения формулировок сформулируем ряд необходимых определений и обозначений, являющихся достаточно очевидными и относительно распространенными и встречающимися в [25], [34], [35], [42], [61], [69], [70], [71], [75], [80], [92] и некоторых других работах.

**Определение 1.** Назовем  $X=(X_t)_{t \geq 0}$  процессом выполнения (или процессом выполнения  $K$  операций), если начальное значение  $X_0=K \in \{1, 2, \dots\}$ , и для всех  $t \geq 0$  выполняется  $X_t \in \{0, 1, \dots, K\}$ .

**Определение 2.** Марковский момент, определенный на стохастическом базисе  $\mathcal{B}$ ,  $\tau = \inf\{t: t > 0, X_t = 0\}$  назовем моментом выполнения (или первым моментом выполнения всех операций).

**Определение 3.** Назовем процесс выполнения конечным, если  $P\{\tau < \infty\} = 1$ , т.е., если  $\tau$  является моментом остановки на стохастическом базисе  $\mathcal{B}$ .

Отметим, что для конечного процесса выполнения корректно определена функция распределения  $F_\tau(x) = P\{\tau \leq x\}$  при всех  $x \in (-\infty, \infty)$ . Заметим также, что в силу непрерывности справа процесса  $X$ , а также из условия  $X_0 = K > 0$  очевидно следует, что  $P\{\tau > 0\} = 1$ , и  $F_\tau(0) = 0$ .

**Определение 4.** Назовем конечный процесс выполнения процессом *точно-в-срок*, если существует такое число  $T \in (0, \infty)$ , что  $P\{\tau \leq T\} = 1$  и  $\forall \varepsilon > 0$  справедливо  $P\{\tau > T - \varepsilon\} > 0$ . Поскольку  $T = \inf\{t: t > 0, F_\tau(t) = 0\}$ , то условие *точно-в-срок*, очевидно, имеет вид  $T < \infty$ . Условие *точно-в-срок* в эквивалентной форме представляет собой одновременное выполнение для конечного строго положительного числа  $T$  условий (а) и (б):

$$(a) \quad F_\tau(T) = 1,$$

$$(б) \quad F_\tau(T - \varepsilon) < 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

**Определение 5.** Назовем конечный процесс выполнения процессом *почти-точно-в-срок*, если распределение момента  $\tau = \tau(r) = \tau(r; \omega), \omega \in \Omega$ , зависит от некоторого параметра  $r$  таким образом, что существует  $F(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} F_{\tau(r)}(t)$ , являющийся функцией распределения и удовлетворяющий условию *точно-в-срок*:  $T = \inf\{t: t > 0, F_\tau(t) = 0\} < \infty$ .

**Определение 6.** Назовем процесс выполнения процессом с поглощением, в случае, если его состояние  $\{i=0\}$  является поглощающим, т.е.  $X_t=0$  для всех  $t \in [\tau, \infty)$ .

**Определение 7.** Назовем процесс выполнения последовательным с возвращением, если выполнению любой  $i$ -й операции с номером  $i \in \{1, 2, \dots, K-1\}$  могут предшествовать только значения процесса  $j \in \{i+1, i-1, i-2, i-2, \dots, 1, 0\}$ . Если процесс выполнения – с поглощением, то номеру  $i$  могут предшествовать только операции с каким-либо номером  $j \in \{i+1, i-1, i-2, i-2, \dots, 1\}$  (т.е. из состояния  $\{i=0\}$  переходы не могут осуществляться).

**Определение 8.** В случае, если  $i$ -й операции может предшествовать только операция с номером  $j \in \{i+1\}$ , то процесс  $X$  называется процессом последовательного выполнения без возвращений (который заведомо является процессом выполнения с поглощением).

Таким образом, в рассматриваемой модели мы предполагаем, что процесс выполнения является случайным блужданием с кусочно-постоянными траекториями. При этом скачки процесса, считающего количество выполненных операций, может быть только единичными. Также единичными являются изменения номера выполненной операции, поскольку выполнение последовательное. А процесс возвращений может совершать скачки и на иные целые положительные величины, указывающие, на сколько шагов назад был осуществлен возврат в продуктивном процессе.

Следовательно, любой последовательный процесс выполнения с возвращением может быть единственным образом представлен [67], [69] в виде

$$X_t = K + A_t - B_t, \quad (1)$$

где  $A_0=B_0=0$ . При этом неубывающие процессы  $A=(A_t)_{t \geq 0}$  и  $B=(B_t)_{t \geq 0}$  равны, соответственно,

$$A_t = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s \cdot I\{\Delta X_s \geq 1\}$$

и

$$B_t = \sum_{0 < s \leq t} (-\Delta X_s) \cdot I\{\Delta X_s \leq -1\},$$

где  $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ ;  $X_{s-} = \lim_{t \rightarrow s-0} X_t$ .

Здесь и далее знаком  $I\{\cdot\}$  обозначена индикаторная функция, т.е.,  $I\{true\}=1$ ,  $I\{false\}=0$ ).

Точечные процессы  $A$  и  $B$  являются основными как для формулирования задач оптимального управления процессами выполнения, так и для задач имитационного моделирования. При последовательном выполнении они являются скачкообразными неубывающими субмартингалами со скачками процесса выполнений  $\Delta B_t \in \{0, I(X_{t-} \geq 1)\}$ . Процесс числа возвратов удовлетворяет соотношению  $\Delta A_t \in \{0, 1, \dots, K - X_{t-}\}$  для систем без поглощения, а также соотношению  $\Delta A_t \in \{0, I(X_{t-} \geq 1), 2 \cdot I(X_{t-} \geq 1), 3 \cdot I(X_{t-} \geq 1), \dots, (K - X_{t-}) \cdot I(X_{t-} \geq 1)\}$  для систем с поглощением. Следовательно, при последовательном выполнении  $A$  и  $X$  являются мультивариантными процессами, а  $B$  – является точечным считающим процессом. Эта модель позволяет представить процесс возвратов  $A$  без поглощений в виде

$$A_t = A_t(0) + \sum_{i=1}^{K-1} i \cdot A_t(i),$$

а в случае с поглощением

$$A_t = \sum_{i=1}^{K-1} i \cdot A_t(i), \quad (2)$$

где  $(A_t(i))_{t \geq 0}$  – точечные считающие процессы с интенсивностями (частотами) скачков  $a_t(i) \geq 0$ . Тогда их компенсаторы разложения Дуба-Мейера [20], [42], [66], [68] равны для  $i = 0$

$$\tilde{A}_t(0) = \int_0^t a_s(0) \cdot I\{X_s=0\} ds$$

и при  $i \geq 1$  соответственно равны

$$\tilde{A}_t(i) = \int_0^t a_s(i) \cdot I\{1 \leq X_s \leq K-i\} ds. \quad (3)$$

Если  $\tilde{B}$  – компенсатор считающего процесса  $B$ , являющегося числом выполнений операций, то для  $\tilde{B}$  оказывается справедливым следующее интегральное представление:

$$\tilde{B}_t = \int_0^t b_s \cdot I\{1 \leq X_s\} ds \quad (4)$$

где  $b_t \geq 0$  – интенсивность скачков (с  $b_t \geq 0$ ).

Поскольку выполняется неравенство  $1 \leq X_s \leq K$ , то оказывается справедливым довольно очевидное интегральное соотношение:

$$\tilde{B}_t = \int_0^t \beta_s \cdot X_s ds, \quad (5)$$

где интенсивность определяется из (определяющего  $\beta_s$ ) равенства  $\beta_s \cdot X_s = b_s \cdot I\{1 \leq X_s\}$ .

Вместе с процессом  $X=(X_t)_{t \geq 0}$  (числа выполненных операций в продуктивной системе) для анализа условий существования системы, зачастую, оказывается необходимым рассматривать процесс одного скачка  $n=(n_t)_{t \geq 0}$  с

$$n_t = I\{X_t \geq 1\} = I\{\tau \geq t\}.$$

Для этого процесса на стохастическом базисе  $\mathcal{B}^n = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}, P_t^n)$  с  $\mathcal{F}_t^n = \sigma(n_s; s \leq t)$  – потоком, порожденным процессом  $n=(n_t)_{t \geq 0}$  – (т.е. в его минимальном представлении) разложение Дуба-Мейера по теореме Деллашери [28] для дифференцируемой функции распределения  $F_\tau(x)$  имеет вид

$$n_t = 1 - \int_0^t n_s \cdot \mu_s ds + m_t^n$$

с

$$\mu_t = \frac{dF_\tau(t)/dt}{(1-F_\tau(t))}$$

и процессом  $(m_t^n)_{t \geq 0}$  - квадратично-интегрируемым мартингалом. Отметим, что здесь  $\mu = (\mu_t)_{t \geq 0}$  - относительная частота полных выполнений (хорошо известная в задачах статистики и демографии как смертность, а при анализе разрушений технических систем – как относительный риск возникновения инцидентов).

### § 1.3. Однородные процессы выполнения и системы «точно-в-срок»

Рассмотрим однородную продуктивную систему выполнения операций без возвратов *точно-в-срок*, которая может быть описана в терминах точечных (считающих) процессов.

Для того, чтобы проиллюстрировать отличие системы *точно-в-срок* без возвратов и с возвратами [51], обратимся к Рисунку 1:

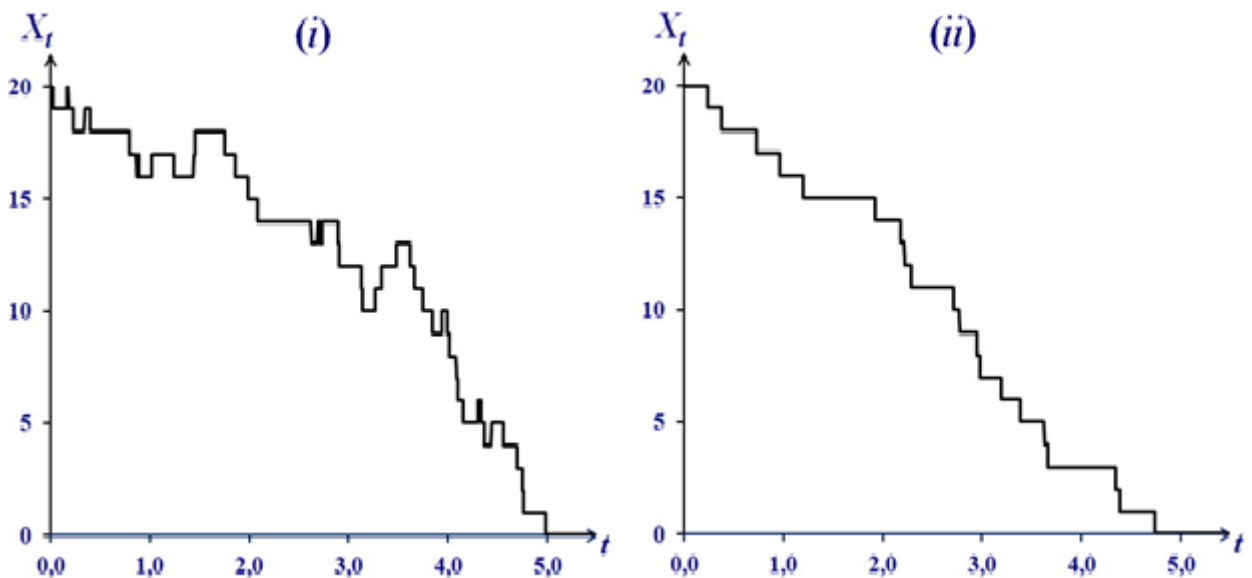


Рисунок 1 – Траектории продуктивного процесса *точно-в-срок*  $T$  с  $T=5$  и  $K=20$ . Область (i) – траектория процесса с возвращениями, область (ii) – траектория процесса без возвращений

На этом Рисунке 1 в области (i) приведен график траектории продуктивного процесса  $X$  *точно-в-срок*  $T$  со временем выполнения  $T=5$  и начальным значением  $K=2$ . Процесс возвращений  $A$  порожден пуассоновским процессом с компенсатором  $2,0 t$ . Точечный процесс выполнения  $B$  имеет компенсатор, обеспечивающий конечность продуктивного процесса *точно-в-срок*  $T$ .

В области (ii) на рисунке представлен график траектории продуктивного процесса без возвращений (т.е.  $A(t)=0$  при всех  $t$ ). Траектории процессов получены в результате имитационного компьютерного моделирования.

Предполагается, что в этой системе должно быть выполнено некоторое целое число операций  $K$  к некоторому фиксированному моменту времени  $T > 0$  (при начале отсчета времени с нулевого момента). Это означает, что в каждый момент времени  $t \in [0, T]$  количество оставшихся операций  $X_t$ , равно числу  $K$  за вычетом значения  $B_t$  некоторого считающего процесса  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ :  $X_t = K - B_t$ . То есть, количество скачков этого процесса  $N$  таково, что их общее число к моменту времени  $T$  равно точно  $K$ .

В рассматриваемом случае однородной продуктивной системы формальное описание такого процесса  $X$  соответствует пуассоновскому процессу в обратном времени. Он также соответствует условному пуассоновскому процессу при условии, что его значение в момент времени  $T$  равно точно  $K$  или, так называемому, пуассоновскому мосту [73], [84], [95] – процессу  $B$ .

Представим формальное описание математической этой модели. Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  - вероятностное пространство, снабженное неубывающим непрерывным справа семейством  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , пополненном по мере  $\mathbf{P}$  (т.е. выполняются условия [28]). Предполагается, что на стохастическом базисе  $\mathbf{B}$



$= (\Omega, F, F=(F_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  является точечным процессом с траекториями в пространстве Скорохода с  $X_t \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  и размером скачка

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-} \in \{-1, 0\},$$

которые исследованы в общем случае в [65], [66], [67]. Процесс  $X$  в случае без возвратов может быть представлен как разность:

$$X = X_0 - B = K - B, \quad (6)$$

где  $B=(B_t)_{t \geq 0}$  - процесс подсчета числа отрицательных скачков  $X$  с начальным значением  $X_0=K > 0$  (т.е.  $K \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $B_0 = 0$ , и  $X_t = K - B_t$  для всех  $t \geq 0$ ).

Мы также, естественно предполагаем, что субмартиггал  $N$  и супермартиггал  $X$  на  $B$  допускают хорошо известное разложение Дуба-Мейера [28], [42]:

$$B_t = \tilde{B}_t + m_t^B \quad X_t = \tilde{X}_t - m_t^B \quad (7)$$

с компенсаторами  $\tilde{B}=(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$  и  $\tilde{X}=(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ , и квадратично интегрируемым мартиггалом  $m^B=(m_t^B)_{t \geq 0}$  с квадратичной характеристикой

$$\langle m^B \rangle_t = \tilde{B}_t \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Также мы здесь предполагаем, что процесс удовлетворяет требованию однородности – представлению пуассоновского моста (аналогично семимартиггальному представлению броуновского моста):

$$\tilde{B}_t = \int_0^t (K - B_s) \cdot \frac{1}{T-s} \cdot I\{s < t\} ds. \quad (8)$$

Таким образом, из (7) и (8) следует, что процесс  $X$  имеет семимартиггальное разложение:

$$X_t = K - \int_0^t X_s \cdot \frac{1}{T-s} \cdot I\{s < t\} ds - m_t^X. \quad (9)$$

Заметим, что в общем (не обязательно однородном) случае, для базовой модели мы предполагается, что точечный процесс выполнения без возвратов  $X$  допускает представление:

$$X_t = K - \int_0^t h_s ds + m_t^X \quad (10)$$

с интенсивностью отрицательных скачков  $h=h(X) = (h_t(X))_{t \geq 0}$  и мартингалом  $m^X=(m_t^X)_{t \geq 0}$ . В рассматриваемом однородном случае (9), очевидно, выполняется следующее равенство:

$$h_t = h_t(X) = X_t \cdot I\{t < T\} / (T - t), \quad (11)$$

причем,  $m^X = -m^B$ , т. е.  $m_t^X = -m_t^B$  для всех  $t \geq 0$ .

Хорошо известно, что компенсатор точечного процесса, определяемого формулой (8), соответствует (как показано в ряде теорем в [73]) мосту Пуассоновского процесса. Следует в связи с этим (в порядке значимости методов представления процессов в обратном времени и процессов – мостов) отметить фундаментальные результаты, приведенные в основополагающих работах для метода обращения времени у случайных процессов [76], [84] и [74].

Рассмотрим стандартный пуассоновский процесс  $\pi = (\pi_s)_{s \in [0, T]}$  на стохастическом базисе  $\mathbf{B}$  с начальным значением  $\pi_0 = 0$  и с любой положительной интенсивностью  $\lambda > 0$ . Пусть

$$F_t^0 = \sigma\{\pi_s : T - t \leq s \leq T\}$$

для  $t \in [0, T]$ ,  $F_t^0 = F_T^0$  для  $t > T$ , и пусть при этом неубывающее семейство  $\sigma$ -алгебр  $F=(F_t)_{t \geq 0}$ , является непрерывным справа пополнением  $(F_t^0)_{t \geq 0}$ .

Определим супермартингал в обратном времени  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  как  $Y = \pi_{T-t}$  для  $t \in [0, T]$  и  $Y_t = \pi_0 = 0$  для  $t > T$ .

Тогда  $Y$  является  $F$ -согласованным, и он имеет разложение (как легко следует из Теоремы 2.6 в [84]):

$$Y_t = \pi_T - \int_0^t \frac{Y_s}{T-s} \cdot I\{s < t\} ds + m_t^Y, \quad (12)$$

где  $m^Y=(m_t^Y)_{t \geq 0}$  – локально квадратично интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой

$$\langle m^Y \rangle_t = \int_0^t \frac{Y_s}{T-s} \cdot I\{s < t\} ds.$$

Сравнение моделей (9) и (12) иллюстрирует факт, известный для процессов, являющихся «стохастическими мостами»: представление процесса  $X = K - B$  (с начальным значением  $K$  и пуассоновским мостом  $N$ ) совпадает с

представлением в обратном времени  $Y$  пуассоновского процесса  $\pi$  (с произвольной строго положительной интенсивностью  $\lambda$ ) при начальном значении  $Y_0 = \pi_T = K$ .

Таким образом, мы можем рассматривать поведение траекторий процесса  $X$  с  $X_0 = K$  и  $X_t = 0$  для  $t \geq T$  в качестве воплощения требования *точно-в-срок*. Поэтому основной идеей представленного описания систем *точно-в-срок* является реализация соответствующего поведения траекторий с помощью соответствующего управления  $h=(h_t)_{t \geq 0}$ , являющегося интенсивностью отрицательных скачков  $X$  в базовой модели (10). Эта интенсивность может рассматриваться как отрицательная обратная связь, стремящаяся к  $-\infty$  при  $t \rightarrow T$  в случае ненулевых значений  $X_t$ . Заметим, что в (12) эта интенсивность напрямую не зависит от параметра  $\lambda$  производящего процесса  $\pi$ .

Распределение основного процесса  $X$  в (10) определяется интенсивностью отрицательных скачков  $h$ , которая в частном случае (11) зависит от значений  $K$  и  $T > 0$ . Наряду с  $X$  мы определяем для базовой модели (10) вспомогательные функции, обозначающие  $\mathbf{E}X_t$ ,  $\mathbf{E}X_t^2$  и  $\mathbf{E}(X_t - R_t)^2 = G_t - R_t^2$  (т.е. среднее значение, второй момент и дисперсию  $X$ , соответственно). Для функционала  $h=h(X)$  общего вида в (10) и начального значения величины  $K$  предполагается, что

$$R_t = R_t(K; h) = \mathbf{E}X_t, \quad G_t = G_t(K; h) = \mathbf{E}X_t^2, \quad \text{и} \quad V_t = V_t(K; h) = \mathbf{E}(X_t - R_t)^2. \quad (13)$$

В частном случае (11) эти функции зависят только от значений  $t$ ,  $K$ , и  $T$ . Поэтому для (11) используются обозначения:

$$r_t(K, T) = R_t = \mathbf{E}(X_t / X_0 = K; X_T = 0), \quad (14)$$

$$g_t(K, T) = G_t = \mathbf{E}(X_t^2 / X_0 = K; X_T = 0), \quad (15)$$

$$v_t(K, T) = V_t = \mathbf{E}\{(X_t - R_t)^2 / X_0 = K; X_T = 0\} = g_t(K, T) - r_t(K, T)^2. \quad (16)$$

Приведем достаточно простой вспомогательный результат, необходимый для анализа и решения задач оптимального управления продуктивными системами во второй главе.

**Лемма 1.** Для функций (14), (15) и (16), определенных для  $X$  в (10) с интенсивностью (11) справедливы следующие равенства:

$$r_t(K, T) = K \cdot \frac{T-t}{T} \cdot I\{t \leq T\}, \quad (17)$$

$$g_t(K, T) = \left( K \cdot \frac{T-t}{T} \right)^2 \cdot I\{t \leq T\} + K \cdot \frac{(T-t) \cdot t}{T^2} \cdot I\{t \leq T\}, \quad (18)$$

$$v_t(K, T) = K \cdot \frac{(T-t) \cdot t}{T^2} \cdot I\{t \leq T\}. \quad (19)$$

**Доказательство.** Из (9) и (14) следует, что для всех  $K \in \mathbf{N}$ ,  $T > 0$  и  $t \geq 0$

$$r_t(K, T) = K - \int_0^t r_s(K, T) \cdot \frac{1}{T-s} \cdot I\{s < t\} ds. \quad (20)$$

Из (20) получаем (17). Тогда из (9), (15) и формулы Ито следует, что для всех  $t \geq 0$

$$g_t(K, T) = K^2 - 2 \cdot \int_0^t g_s(K, T) \cdot \frac{1}{T-s} \cdot I\{s < t\} ds + \frac{K}{T} \cdot t,$$

что приводит к (18). Из (17) и (18) и равенства  $v_t(K, T) = g_t(K, T) - r_t(K, T)^2$  получаем (19). Лемма 1 доказана.

#### § 1.4. Условия для систем «точно-в-срок» в случайной среде

В этом параграфе рассматриваются обобщения модели продуктивных систем в конструкции процессов выполнения. Эти обобщения касаются, прежде всего, коэффициентов интенсивностей для моделей с интенсивностями – случайными функциями. Все результаты об условиях существования процессов, о критериях *точно-в-срок*, очевидно применимы и рассматриваемому выше случаю детерминированных коэффициентов.

Рассмотрим математическую модель продуктивной системы, функционирующей в случайной среде. Дадим математическое описание стохастической модели выполнения операций для такой системы. Пусть  $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  - стохастический базис (т.е. вероятностное простран-

ство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , с непрерывным справа неубывающим потоком  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , который пополнен по мере  $P$  [42], [67]. На этом базисе  $\mathcal{B}$  определим продуктивный процесс  $X=(X_t)_{t \geq 0}$ , заключающийся в выполнении положительного и целого числа  $K$  операций (конечного). Реализации процесса  $X$  рассматриваются регулярными. Этот процесс рассмотрим в семимартингальных терминах с обычными условиями регулярности (т.е., непрерывными справа траекториями при  $t \geq 0$ , а также имеющими предел слева при каждом  $t > 0$  [28], [42]. Отличие этой схемы от рассмотренной выше (и соответствующего стохастического базиса) заключается в том, что поведение процессов определяется случайной средой.

Зададим случайную среду. Продуктивный процесс здесь - это процесс размножения и гибели в случайной среде  $\mathcal{E} = \{(\alpha_t)_{t \geq 0}, (\beta_t)_{t \geq 0}\}$ , где неотрицательные случайные функции  $\alpha_t$  и  $\beta_t$   $\mathcal{F}_0$ -измеримы при каждом  $t \geq 0$  [65 - 68].

Если случайная величина  $X_t = X_t(\omega)$  представляет собой число еще не выполненных операций (для продуктивного процесса), то для процесса  $X$ , рассматриваемого здесь как модель выполнения  $K$  операций (для  $K \geq 1$ ), оказывается справедливо:  $X_t \in \{0, 1, \dots, K\}$  при  $t \geq 0$ ,  $X_0 = K \in \{1, 2, \dots\}$  и  $\Delta X_t = X_t - X_{t-} \in \{-1, 0, 1\}$  при  $t > 0$  (где  $X_{t-} = \lim_{s \rightarrow t-0} X_s$ ).

Таким образом, продуктивный процесс представим в виде

$$X_t = K + A_t - B_t, \quad (21)$$

где  $A_0 = B_0 = 0$ , а неубывающие процессы  $A=(A_t)_{t \geq 0}$  и  $B=(B_t)_{t \geq 0}$ , соответственно, равны

$$A_t = \sum_{0 < s \leq t} I\{\Delta X_s = 1\} \cdot I\{1 \leq X_{s-} \leq K - 1\}, \quad (22)$$

и

$$B_t = \sum_{0 < s \leq t} I\{\Delta X_s = -1\} \cdot I\{X_{s-} \geq 1\}, \quad (23)$$

где  $I\{\cdot\}$  - определенная выше индикаторная функция.

Заметим, что в соответствии с определением (2) – (3) процесса  $X$ , очевидно, выполняется условие отсутствия одновременных скачков процессов  $A$  и  $B$ : т.е.  $P$ -п. н. выполняется равенство

$$\sum_{0 < s < \infty} \Delta A_s \cdot \Delta B_s = 0. \quad (24)$$

В случае невырожденности процесса выполнения и при последовательном процессе выполнения, процессы  $A$  и  $B$  – точечные, считающие. Следовательно,  $A$  и  $B$  являются скачкообразными неубывающими субмартингалами, имеющими скачки  $\Delta A_t \in \{0, I(1 \leq X_{t-} \leq K-1)\}$  и  $\Delta B_t \in \{0, I(X_{t-} \geq 1)\}$ . Это означает, что значения величин  $X_t$  процесса  $X$  являются неотрицательными и при этом не превышают уровень  $K$ .

Заметим, что в (21) процесс  $B=(B_t)_{t \geq 0}$  является процессом выполнения. То есть, величины  $B_t$  процесса  $B$  представляют собой количества операций, выполненных до момента  $t \geq 0$ . При этом  $A=(A_t)_{t \geq 0}$  – процесс количества возвратов, т.е.  $A_t$  – число возвращенных на переработку (или доработку) или, быть может, заявленных вновь к выполнению операций в продуктивной системе (в пределах  $X_t \in \{0, 1, \dots, K\}$ ) к моменту времени  $t \geq 0$ .

При достижении в некоторый (случайный) момент времени  $\tau$  (момент остановки) процессом  $X_t$  нулевого уровня, его значения остаются нулевыми, поскольку здесь рассматриваются модели продуктивных систем, в которых при полном выполнении продуктивного процесса, он завершается (т.е. цикличность или повторяемость продуктивных процессов – предмет дальнейших исследований, выходящих за рамки настоящей диссертационной работы).

Поскольку в параграфе, в настоящей модели предполагается, что распределение случайного процесса  $X$  определяется случайной средой  $\mathcal{E}$ , то функция распределения  $F_\tau(x)$  является абсолютно непрерывной (т.е. корректно определена плотность вероятности распределения моментов). Заметим, что из этого также следует, что компенсаторы процесса выполнения  $B=(B_t)_{t \geq 0}$  и процесса возврата  $A=(A_t)_{t \geq 0}$  являются абсолютно непрерывными

ми, а их производные – интенсивностями скачков, которые пропорциональны значению  $X_t$  в каждый момент  $t \geq 0$ . Следовательно, разложение Дуба-Мейера субмартингалов  $A=(A_t)_{t \geq 0}$  и  $B=(B_t)_{t \geq 0}$  определяется компенсаторами  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  [20], [28], [42]:

$$\tilde{A}_t = \int_0^t a_s \cdot I\{1 \leq X_s \leq K-1\} ds \text{ и } \tilde{B}_t = \int_0^t b_s \cdot I\{1 \leq X_s\} ds, \quad (25)$$

где  $a_t = \alpha_t \cdot X_t$  и  $b_t = \beta_t \cdot X_t$ , и случайные функции  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  (являющиеся  $\mathcal{F}_0$ -измеримыми) определяют случайную среду  $\mathcal{E}$ . Так, для процесса размножения и гибели  $X_t$  справедливы следующие выражения:

$$\tilde{A}_t = \int_0^t \alpha_s \cdot X_s \cdot I\{X_s \leq K-1\} ds \text{ и } \tilde{B}_t = \int_0^t \beta_s \cdot X_s ds. \quad (26)$$

Очевидно, что из (21), (25) и (26) вытекает, что для  $X$  (процесса выполнения) справедливо представление

$$X_t = K + \tilde{A}_t - \tilde{B}_t + M_t^X \quad (27)$$

с мартингалом  $(M_t^X)_{t \geq 0}$  (являющимся квадратично интегрируемым) с  $M_0^X = 0$ .

Также из (27), (25) и (26) мы получаем равенство (28), являющееся семимартингальным разложением:

$$X_t = K - \int_0^t (\beta_s - \alpha_s \cdot I\{X_s \leq K-1\}) \cdot X_s ds + M_t^X \quad (28)$$

В рассматриваемой в настоящем параграфе модели предполагаем, что интенсивности процесса числа возвратов удовлетворяют ограничениям на количество новых операций на интервале времени  $[0, T]$  (обеспечивающее конечность числа возвратов в силу невозможности одновременных скачков процессов  $A$  и  $B$ ,  $P$  - п. н.):

$$P\left\{\int_0^T \alpha_s ds < \infty\right\} = 1 \quad (29)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Если выполнено условие (29) для процесса числа возвратений, то условия (а) и (б) Определения 4 (обеспечивающие свойство точно-в-срок  $T$  процесса выполнения) являются эквивалентными условиям (30) – (31):

$$P\left\{\int_0^t \beta_s ds < \infty\right\} = 1 \text{ при } t < T, \quad (30)$$

и

$$P\left\{\int_0^T \beta_s ds = \infty\right\} = 1. \quad (31)$$

**Доказательство.** Покажем достаточность требований (30) и (31) Теоремы 1 для того, чтобы выполнялись условия (а) и (б) Определения 4. Зададим следующую вспомогательную случайную функцию:

$$\lambda_t = \beta_t - \alpha_t \text{ при } t \geq 0.$$

Очевидно, что  $\lambda_t$  –  $\mathcal{F}_0$ -измеримая функция. Из (29) следует, что условия

$$P\left\{\int_0^t \lambda_s ds < \infty\right\} = 1 \text{ при } t < T, \quad (32)$$

и

$$P\left\{\int_0^T \lambda_s ds = \infty\right\} = 1 \quad (33)$$

справедливы тогда и только тогда, если выполнено условие (29) Теоремы 1.



Чтобы доказать достаточность условия (31) для выполнения условия (а) Определения 4, докажем достаточность (33). Из (28) получаем, что

$$\begin{aligned} X_t &= K - \int_0^t (\beta_s - \alpha_s) \cdot X_s ds + M_t^X - \int_0^t \alpha_s \cdot X_s \cdot I\{X_s \geq K\} ds = \\ X_t &= K - \int_0^t \lambda_s \cdot X_s ds - \int_0^t \alpha_s \cdot X_s \cdot I\{X_s \geq K\} ds + M_t^X \end{aligned} \quad (34)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию  $r_t = E\{X_t | \mathcal{F}_0\}$ , являющуюся условным математическим ожиданием случайной величины  $X_t$  продуктивного процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ . Поскольку  $E\{M_t^X | \mathcal{F}_0\} = 0$  для любых  $t \geq 0$  (для мартингала  $M_t^X$ ), то из (34) вытекает равенство:

$$r_t = K - \int_0^t \lambda_s \cdot r_s ds - \int_0^t \alpha_s \cdot E\{X_s \cdot I\{X_s \geq K\} | \mathcal{F}_0\} ds. \quad (35)$$

Поскольку  $X_s \cdot I\{X_s \geq K\} \geq 0$  при  $s \geq 0$ , то, очевидно, получаем следующее неравенство:

$$r_t \leq K - \int_0^t \lambda_s \cdot r_s ds. \quad (36)$$

Из этого неравенства и из известного неравенства Гронуолла-Беллмана, по-

лучаем, что  $r_t \leq \bar{r}_t$ , где  $\bar{r}_t$  - решение  $\bar{r}_t = K - \int_0^t \lambda_s \cdot \bar{r}_s ds$ , равное

$$\bar{r}_t = K \cdot \exp\left\{-\int_0^t \lambda_s ds\right\}.$$

Следовательно, из (33) получаем, что

$$r_T \leq \bar{r}_T = \lim_{t \rightarrow T} \exp\left\{-\int_0^t \lambda_s ds\right\} = 0, \quad (37)$$

И, поэтому, условие (а) Определения 4 выполнено.

Докажем, что выполнено условие (б) Определения 4. Из (35) получаем, что (аналогично (36)), выполняется следующее неравенство (38):

$$r_t \geq K - \int_0^t \lambda_s \cdot r_s ds - \int_0^t \alpha_s \cdot r_s ds = K - \int_0^t \beta_s \cdot r_s ds. \quad (38)$$

Аналогично (37), при неотрицательных  $t < T$ , получаем что из (30) (или эквивалентного ему соотношения (32)) оказывается справедливо неравенство для  $r_t = E\{X_t | \mathcal{F}_0\}$ :

$$r_t \geq \bar{r}_t = \exp\left\{-\int_0^t \beta_s ds\right\} > 0, \quad (21)$$

которое и обеспечивает выполнение условия (б) Определения 4. Следовательно, достаточность условий Теоремы 1 доказана.

Докажем необходимость условий (30) и (31) Теоремы 1. Необходимость условия (30) (или эквивалентного ему (32)) является очевидной - в противном случае получалось бы из (36), что  $P\{X_u = 0\} = 0$ , и, следовательно,  $F_\tau(u) = 1$  при некотором значении  $u < T$ , что условию (б) Определения 4, противоречило бы.

Необходимость условия (31) докажем от противного. Пусть условие (31) не выполняется. Тогда для некоторых чисел  $n < \infty$  и  $\varepsilon > 0$  существует множество  $\Gamma = \Gamma(n, \varepsilon) \in \mathcal{F}_0$  для которого

$$\Gamma = \left\{ \omega \in \Omega : \int_0^T \beta_s ds \leq n \right\} \text{ и } P\{\Gamma\} \geq \varepsilon > 0. \quad (40)$$

Построим вспомогательный процесс  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ , у которого

$$Y_t = X_t \cdot I\{\Gamma\} = Y_t \cdot I\{\omega \in \Gamma\}.$$

Тогда из (40) вытекают соотношения

$$\Gamma \subseteq \{\omega: X_T(\omega) = Y_T(\omega)\} \text{ и } P\{X_T = Y_T\} \geq P\{\Gamma\} \geq \varepsilon > 0. \quad (41)$$

Обозначим  $v_t = E\{Y_t | \mathcal{F}_0\}$ . И, аналогично неравенствам (38) и (39) получаем, что выполняется

$$v_t \geq I\{\Gamma\} \cdot K - \int_0^t I\{\Gamma\} \cdot \beta_s \cdot v_s ds,$$

а также

$$r_T \geq \bar{r}_T = I\{\Gamma\} \cdot K \cdot \exp\left\{-\int_0^t \beta_s ds\right\} \geq I\{\Gamma\} \cdot K \cdot \exp\{-n\} > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что  $P\{\omega \in \Gamma: Y_T(\omega) > 0\} > 0$ . Поэтому из (41) вытекает неравенство  $P\{X_T(\omega) > 0\} > 0$ , противоречащее условию (а) Определения 4. Таким образом, необходимость (31) доказана. Теорема 1 доказана.

Для построения еще одного критерия условия *точно-в-срок* в случайной среде приведем некоторые дополнительные вспомогательные обозначения.

Рассмотрим модель с финитным носителем процессов выполнения операций без возвратов в случайной среде. На стохастическом базисе  $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ . В качестве процесса выполнения рассмотрим невозрастающий процесс случайного блуждания в случайной среде  $\mathcal{E} = \{(\lambda_t(1))_{t \geq 0}, \dots, (\lambda_t(K-1))_{t \geq 0}\}$ , где неотрицательные случайные функции  $\lambda_t(i)$  являются  $\mathcal{F}_0$ -измеримыми при всех  $i \geq 1$  и  $t \geq 0$  [66], [67]. Пусть случайная величина  $X_t = X_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , является числом еще не выполненных операций продуктивного процесса  $\forall t \geq 0$ :

$$X_t = K - B_t$$

где  $B_0 = 0$  и неубывающий процесс  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  определяется как

$$B_t = \sum_{0 < s \leq t} I\{\Delta X_s = -1\}.$$

Следовательно, в разложении Дуба-Мейера для компенсатора  $\tilde{B}$  [28], [67] справедливо равенство

$$\tilde{B}_t = \int_0^t b_s \cdot I\{1 \leq X_s\} ds \quad (42)$$

где интенсивность скачков  $a_t \geq 0$  определяется случайной средой  $\mathcal{E}$ :

$$b_t = \sum_{i=1}^K \lambda_t(i) \cdot I\{X_t = i\}. \quad (43)$$

На базисе  $\mathcal{B}$  для каждого последовательного номера  $i \in \{K, K-1, \dots, 1\}$  марковский момент  $\tau(i)$  является временем начала выполнения  $i$ -й операции:  $\tau(K) = 0$  и для  $i \in \{K-1, \dots, 1\}$

$$\tau(i) = \inf\{t > \tau(i+1) : X_t = i\}. \quad (44)$$

Момент завершения всего продуктивного процесса  $\tau(0)$  (не соответствующий началу выполнения операции) определяется аналогично:

$$\tau(0) = \inf\{t > \tau(1) : X_t = 0\}. \quad (45)$$

Для момента  $\tau(0)$  также имеет место равенство  $\tau(0) = \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$ . Для марковских моментов  $\tau(i)$   $P$ -п. н. справедливы неравенства:

$$\tau(K) < \tau(K-1) < \dots < \tau(1) < \tau(0). \quad (46)$$

Если  $P\{\tau(0) < \infty\} = 1$ , то процесс выполнения конечен. Тогда  $\tau(i)$  – моменты остановки на  $\mathcal{B}$ . В этом случае при всех  $x \in (-\infty, \infty)$  определены функция распределения  $F_{\tau(0)}(x) = P\{\tau(0) \leq x\}$  и для всех  $i \in \{K, \dots, 1\}$  – условные функции распределения

$$F_{\tau(i-1)}^{(i)}(x) = P\{\tau(i-1) \leq x \mid \mathcal{F}_{\tau(i)}\}.$$

Из (46) следует, что  $P$ -п. н. для всех  $i \in \{K, \dots, 1\}$  выполняются равенства

$$F_{\tau(0)}(0) = F_{\tau(i-1)}^{(i)}(\tau(i)) = 0. \quad (47)$$

Необходимо отметить, что в случае  $K > 1$ , заведомо детерминированная функция  $F_{\tau(0)}(x)$  не совпадает со случайной функцией  $F_{\tau(0)}^{(1)}(x)$ , поскольку  $F_{\tau(0)}^{(1)}(x) = 0$  при  $x \leq \tau(1)$ .

Поскольку предполагается, что распределение процесса  $X$  определяется случайной средой  $\mathcal{E}$ , то случайные функции и  $F_{\tau(i-1)}^{(i)}(x)$  при всех  $i \in \{K, \dots, 1\}$  и функция распределения  $F_{\tau(0)}(x)$  абсолютно непрерывны, т.е. существуют плотности распределения моментов. Наряду с процессом  $X$  в модели рассмотрим вспомогательный процесс одного скачка  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  с  $N_t = I\{X_t \geq 1\} = I\{t < \tau(0)\}$ . Разложения Дуба-Мейера для  $N$  на стохастическом базисе  $\mathcal{B}^N = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}, P)$  (с  $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s; s \leq t)$ ) по теореме Деллашери [28] имеет вид

$$N_t = 1 - \int_0^t N_s \cdot \mu_s ds + m_t^N, \quad (48)$$

где

$$\mu_t = \frac{dF_{\tau(0)}(t)/dt}{(1 - F_{\tau(0)}(t))}, \quad (49)$$

а  $(m_t^N)_{t \geq 0}$  - квадратично интегрируемый мартингал.

**Предложение 1.** *Условия (а) и (б) Определения 4 для свойства точно-в-срок  $T$  для процесса  $X$  эквивалентно (50):*

$$\int_0^t \mu_s ds < \infty \text{ при } t < T \quad \text{и} \quad \int_0^T \mu_s ds = \infty. \quad (50)$$

**Доказательство.** Как следует из (47) и (49), выполняется равенство

$$\int_0^t \mu_s ds = \log(1 - F_{\tau(0)}(t)),$$

из которого очевидным образом и следуют условия (а) и (б) Определения 4. Предложение доказано.

Рассмотрим еще один критерий для процессов выполнения операций в случайной среде. Для этого рассмотрим следующие вспомогательные функции: при  $t \geq 0$

$$\varphi_t(i) = \int_0^t \lambda_s(i) ds \quad \text{и} \quad \Phi(t) = \min_{1 \leq i \leq K} \{\varphi_t(i)\}.$$

**Теорема 2 (критерий точно-в-срок).** *Процесс  $X$  в случайной среде  $\mathcal{E}$  является точно-в-срок  $T$  тогда (а также только тогда), когда  $P$  - п. н. выполняются условия (51) и (52):*

$$\Phi(t) < \infty \quad \text{при} \quad t < T, \quad (51)$$

$$\Phi(T) = \infty. \quad (52)$$

**Доказательство.** Аналогично  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  рассмотрим для всех номеров  $i \in \{K, \dots, 1\}$  вспомогательные процессы  $N(i) = (N_t(i))_{t \geq 0}$  с

$$N_t(i) = I\{X_t \geq i\} = I\{t < \tau(i-1)\}$$

на стохастических базисах  $\bar{\mathcal{B}}^{(i)} = (\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}^{(i)} = (\bar{\mathcal{F}}_t^{(i)})_{t \geq 0}, P)$  с

$\bar{\mathcal{F}}_t^{(i)} = \sigma\{\tau(i), (N_s(i); s \leq t)\}$ . Разложения Дуба-Мейера процессов  $N(i)$  на  $\bar{\mathcal{B}}^{(i)}$

имеет вид

$$N_t(i) = 1 - \int_0^t N_s(i) \cdot \bar{\mu}_s(i) ds + m_t^{N(i)}, \quad (53)$$

где при всех  $i \in \{K, \dots, 1\}$

$$\bar{\mu}_t(i) = \frac{dF_{\tau(i-1)}^{(i)}(t)/dt}{(1-F_{\tau(i-1)}^{(i)}(t))},$$

а  $(m_t^{N(i)})_{t \geq 0}$  - соответствующие квадратично интегрируемые мартингалы.

Отметим, что в случае  $K > 1$ ,  $\mathfrak{B}^N \neq \bar{\mathfrak{B}}^{(1)}$ , поскольку  $\mathcal{F}_t^N \neq \bar{\mathcal{F}}_t^{(1)}$ . Поэтому  $\mu_t \neq \bar{\mu}_t(1)$ . Из представления для  $X$ , (42), (43) и (51) получаем, что при всех  $i \in \{K, \dots, 1\}$

$$\bar{\mu}_t(i) = \lambda_t(i) \cdot I\{X_t = i\}. \quad (54)$$

Покажем достаточность условий теоремы. Из (46) и (52) следует, что для каждого номера  $i \in \{K, \dots, 1\}$   $P$  - п. н.

$$\lim_{t \rightarrow T} \left\{ \varphi_t(i) - \varphi_{\tau(i)}(i) \right\} = \infty. \quad (55)$$

Пусть  $\nu_t(i) = E\{N_t(i) | \mathcal{F}_{\tau(i)}\}$  - условное математическое ожидание  $N_t(i)$ .

Тогда из (53) и (54) следует, что при  $t \leq \tau(i)$   $\nu_t(i) = 1$  и при  $t \in (\tau(i), T)$

$$\nu_t(i) = 1 - \int_{\tau(i)}^t \nu_s(i) \cdot \lambda_s(i) ds. \quad (56)$$

Решением (56) является случайный процесс

$$\nu_t(i) = I\{t > \tau(i)\} \cdot \exp\left\{ -(\varphi_t(i) - \varphi_{\tau(i)}(i)) \right\}. \quad (57)$$

Следовательно,  $\nu_T(i) = \lim_{t \rightarrow T} \exp\left\{ -(\varphi_t(i) - \varphi_{\tau(i)}(i)) \right\}$   $P$  - п. н. Из (55) получаем,

что для всех  $i \in \{K, \dots, 1\}$  выполняется  $\nu_T(i) = 0$   $P$  - п. н., откуда и получаем,

что  $P\{X_T \geq 1\} = P\{N_T \geq 1\} = N_T = E\{N_T(1)\} = 0$ . Из (64), (51) и (57) также полу-

чаем, что  $N_t > 0$  при любых  $t < T$ . Достаточность доказана.

Покажем необходимость условий теоремы. Условие (51), очевидно, необходимо (в противном случае из (57) следовало бы, что  $P\{X_u = 0\} = P\{N_u = 0\} = 1$  при каком-то значении  $u < T$ ).

Доказательство необходимости (52) проводится от противного. Определим для каждого номера  $i \in \{K, \dots, 1\}$  и для каждого числа  $n \geq 1$  множество

$$\Gamma^n(i) = \left\{ \omega \in \Omega : \int_0^T \lambda_s(i) ds \leq n \right\}.$$

Заметим, что  $\Gamma^n(i) \in \mathcal{F}_0$ . Если (52) не выполнено, то существуют такой номер  $i \in \{K, \dots, 1\}$  и конечное число  $n$ , что  $P\{\Gamma^n(i)\} > 0$ .

Рассмотрим процесс  $\bar{X} = (\bar{X}_t)_{t \geq 0}$  с  $\bar{X}_t = X_t \cdot I\{\Gamma^n(i)\}$ , а также  $x_t = E\{X_t | \mathcal{F}_t(i)\}$ . Из (57) получаем, что

$$x_T(i) = i \cdot I\{\Gamma^n(i)\} \cdot \lim_{t \rightarrow T} \exp\{-(\varphi_t(i) - \varphi_{\tau(i)}(i))\} \geq I\{\Gamma^n(i)\} \cdot \exp\{-n\} > 0,$$

что противоречит условиям (а) и (б) Определения 4, поскольку на множестве  $\Gamma^n(i)$  значения  $X_T$  и  $\bar{X}_T$  совпадают. Теорема 2 доказана.

## § 1.5. Выводы по главе 1

В главе построена общая модель многостадийной продуктивной системы выполнения операций в терминах точечных процессов. Здесь даны основные определения, позволяющие формировать модели различных многостадийных систем выполнения последовательных операций, а также не являющихся таковыми. Также здесь рассмотрены системы с возвращениями операций и без возвращений. Для систем последовательного выполнения операций без возвращений подробно рассмотрен случай однородных процессов, позволяющий исследовать системы «точно-в-срок». Показан основной метод исследования – рассмотрение случайных процессов в обратном времени. Для этого случая сформулирована и строго доказана Лемма 1, позволяющая вычислять квадратичные характеристики однородных (и не только, как следует из результатов Главы 2) процессов «точно-в-срок».



Также здесь рассмотрен широко известный тип случайных блужданий в случайной среде применительно к продуктивным системам. На практике, случайная среда означает неравномерность, нерегулярность и взаимные отличия (заданных внешними условиями) интенсивностей процессов выполнения каждой отдельной операции с различающимися порядковыми номерами. Именно этот случай представляется наиболее важным для прикладных целей.

Для продуктивных систем, эволюционирующих в случайной среде, в ряде случаев удастся найти условия, при которых система может относиться к классу «точно-в-срок». Рассмотренные в настоящей главе критерии являются очень важными для построения моделей продуктивных систем *точно-в-срок*, поскольку позволяют обеспечить соответствующее поведение системы на основе условий, предъявляемых только к характеристикам интенсивностей скачков.

Заметим, что, по-видимому, именно указанные здесь (в различных вариантах написания) требования обязательного отсутствия интегрируемости являлись до настоящего времени главным препятствием при исследовании систем *точно-в-срок*. Аналитическое рассмотрение и компьютерное моделирование систем *точно-в-срок* востребовано, и первые модели, позволяющие осуществлять оптимальное управление такими объектами проведено в [69]. Однако, в настоящей главе рассмотрена достаточно общая модель, основанная на теории случайных блужданиях в случайной среде, что представляет собой определенно достаточно общую и перспективную схему.

В теоретической Главе 1 сформулированы и доказаны одна лемма, две теоремы и одно предложение.

## Глава 2. Оптимальное управление процессами выполнения

Рассмотрим модель простых многостадийных систем *точно-в-срок* с точки зрения предложенного в первой главе описания. Предположим, что рассматривается набор отдельных процессов в обратном времени (или стохастических мостов соответствующих процессов) с единым планом всей их совокупности. В этом разделе представлено простое решение проблемы нахождения оптимальных моментов для изменений этапов (например, производственного процесса) в рамках этой модели. При этом каждый из этапов представляет собой многостадийный продуктивный процесс выполнения операций.

Отметим, что в рассматриваемых здесь случаях минимизируются среднеквадратичные отклонения траекторий от запланированных значений. В частности, рассматривается задача оптимальной реструктуризации планов для случая двух стадий и для ее многостадийного обобщения. Рассматривается и решается задача оптимального управления интенсивностями при ограничениях на их уровень. Рассматривается задача оптимального детерминированного планирования этапов, состоящих из однородных многостадийных процессов выполнения операций.

### § 2.1. Анализ систем с множественными этапами выполнения

Рассмотрим задачу оптимального управления для следующей модели планирования этапов выполнения операций. Предполагается, что весь процесс выполнения в продуктивной системе разделен на этапы, в пределах каждого из которых осуществляется (выполняется) однородный процесс *точно-в-срок*.

Пусть выполнение общего числа операций  $(K + 1)$  (включая последнюю – нулевую, заключающуюся, как правило в хранении готовой продукции) за время  $T$  подразделяется на  $n \in \mathbf{N}$  этапов: каждая последующая опера-

ция  $K(i)$  должна выполняться на этапе  $i$ , который длится время  $\zeta(i)$ , для всех  $i=1, 2, \dots, n$ . Предполагается, что при этом должны выполняться следующие условия (однородности «внутри» каждого из этапов) – для времени и для количества операций:

$$\sum_{i=1}^n \zeta(i) = T, \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^n K(i) = K. \quad (59)$$

Определим условие, обеспечивающее однородность выполнения рассматриваемых операций:

$$K(i) = K \cdot \zeta(i) / T \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (60)$$

Модель этой системы *точно-в-срок*, следовательно, представляет собой набор отдельных процессов в обратном времени (или соответствующих пуассоновских мостов).

Одной из актуальных является задача обеспечения «равномерного» выполнения плана  $\bar{\zeta} = \{\zeta(1), \zeta(2), \dots, \zeta(n)\}$  в смысле (60), т.е. минимизируя взвешенную дисперсию отклонений от этого плана.

Таким образом, необходимо рассмотреть задачу нахождения такого (оптимального) плана  $\bar{\zeta}^* = \{\zeta^*(1), \zeta^*(2), \dots, \zeta^*(n)\}$ , для которого выполняется

$$\Phi(\bar{\zeta}^*) = \inf_{\bar{\zeta}} \Phi(\bar{\zeta}), \quad (61)$$

где целевая функция  $\Phi(\bar{\zeta})$  является суммой взвешенных дисперсий (16) для процессов в (10) с начальными значениями  $K(i)$  и временами выполнения операций  $\zeta(i)$ ,  $i=1, \dots, n$ :

$$\Phi(\bar{\zeta}) = \sum_{i=1}^n \alpha(i) \cdot \int_0^{\zeta(i)} \nu_i(K(i), \zeta(i)) dt \quad (62)$$

при условиях (58) и (59). При этом предполагается, что в (62) рассматриваются строго положительные весовые коэффициенты:

$$\alpha(i) > 0 \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (63)$$

**Теорема 3.** Для плана, который минимизирует целевую функцию  $\Phi(\bar{\zeta})$ , выполняются равенства для продолжительности каждого из этапов:

$$\zeta^*(i) = T \cdot \{\alpha(i) \cdot n \cdot \sum_{j=1}^n 1/\alpha(j)\}^{-1/2} \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (64)$$

**Замечание 1.** Из Теоремы 3 следует тривиальное следствие о том, что в случае равных весов равные времена оказываются оптимальными: для  $\alpha(1) = \alpha(2) = \dots = \alpha(n) > 0$ ,

$$\zeta^*(i) = T/n \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (65)$$

**Доказательство Теоремы 3.** Для доказательства (64) рассмотрим последовательность функций  $v_t(K(i), \zeta(i))$ ,  $i=1, \dots, n$ . Из (7) и равенства (60) получаем

$$\int_0^{\zeta(i)} v_t(K(i), \zeta(i)) dt = K(i) \cdot \zeta(i) / 6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{K}{T} \cdot \zeta(i)^2,$$

что позволяет определить (62) с константами (63):

$$\Phi(\bar{\zeta}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{K}{T} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha(i) \cdot \zeta(i)^2. \quad (66)$$

Очевидно, что выполняется

$$\sum_{i=1}^n \alpha(i) \cdot \zeta(i)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\alpha(i)} \cdot \zeta(i) \right)^2.$$

Следовательно, из неравенства Коши-Буняковского и равенства (58) следует, что

$$\sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\alpha(i)} \cdot \zeta(i) \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left( 1/\sqrt{\alpha(i)} \right)^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n \zeta(i) \right)^2 = T^2,$$

что приводит к неравенству

$$\Phi(\bar{\zeta}) \geq \frac{K \cdot T}{6 \cdot \sum_{i=1}^n 1/\alpha(i)}. \quad (67)$$

Тогда из (66) и представления (64) следует, что

$$\Phi(\bar{\zeta}^*) = \frac{K \cdot T}{6 \cdot \sum_{j=1}^n 1/\alpha(j)}. \quad (68)$$

Из (67) и (68) заключаем, что множество  $\bar{\zeta}^* = \{\zeta^*(1), \zeta^*(2), \dots, \zeta^*(n)\}$  минимизирует целевую функцию  $\Phi(\bar{\zeta})$ .

## § 2.2. Задача оптимального управления моментом смены этапа

Как следует из (65), при  $n = 2$ , в случае равных весов, справедливо равенство

$$\zeta^*(1) = \zeta^*(2) = T/2. \quad (69)$$

Однако, в реальных системах наряду с априорным планированием стадий зачастую встречается процедура пересмотра плана во время его реализации – перепланирование (или реструктуризация). В этом случае операции системы *точно-в-срок* выполняются в соответствии с интенсивностью процесса, определенной в (9) для запланированных начального значения  $K$  и времени  $T$  для  $t \in [0, \sigma]$ ,  $\sigma \in [0, T]$ , где  $\sigma$  - время перепланирования. Таким образом, на первом этапе, для  $t \in [0, \sigma]$ , выполняется начальный план со значениями  $K$  и  $T$ . В момент времени  $\sigma$  осуществляется следующая процедура перепланирования.

Второй этап изменённого плана выполняется на интервале времени  $[\sigma, T]$ . Здесь, после перепланирования задаются начальное значение количества операций  $X_\sigma$  и новое время выполнения этого этапа в течение времени  $[\sigma, T]$  продолжительностью нового интервала  $(T - \sigma)$  для нового процесса в обратном времени. Для этой модели перепланирования для системы *точно-в-срок* задача заключается в том, чтобы найти момент времени  $\sigma$ , который позволил бы минимизировать интегральное стандартное отклонение от первоначального плана на первом этапе и отклонение от нового плана на второй стадии.

Таким образом, рассматривается задачу нахождения оптимального значения  $\sigma^*$ , для которой

$$\Psi(\sigma^*) = \inf_{\sigma} \Psi(\sigma), \quad (70)$$

где целевая функция  $\Psi(\sigma)$  является проинтегрированной дисперсией (13) для интенсивности  $h = h(X)$ , и равна

$$\Psi(\sigma) = \int_0^T V_t(K; h) dt. \quad (71)$$

Здесь интенсивность при перепланировании равна

$$h_t(X) = h_t^{(1)}(X) \cdot I\{t \in [0, \sigma]\} + h_t^{(2)}(X) \cdot I\{t \in [\sigma, T]\}, \quad (72)$$

где

$$h_t^{(1)}(X) = X_t / (T - t), \quad h_t^{(2)}(X) = X_t / (T - \sigma - t). \quad (73)$$

В приведенных обозначениях задача оптимизации (70) имеет довольно простое решение, сформулированное здесь в виде леммы.

**Лемма 2.** *Для момента времени  $\sigma$ , который минимизирует целевую функцию  $\Psi(\sigma)$ , выполняется*

$$\sigma^* = T/3. \quad (74)$$

**Замечание 2.** *Заметим, что  $\sigma^* \neq \zeta^*(1)$ , где величина  $\zeta^*(1)$  определяется в задаче (61), и для которой выполняется (69) при  $n = 2$ .*

**Доказательство Леммы 2.** Из (71), (72) и (73) следует, что

$$\Psi(\sigma) = \int_0^{\sigma} v_t(K, T) dt + \int_0^{T-\sigma} v_t(r_{\sigma}(K, T), T - \sigma) dt.$$

Поэтому, из выражений (17) и (19), найденных в Лемме 1, получаем равенство

$$\Psi(\sigma) = \frac{K}{6 \cdot T^2} \cdot (T^3 - 2 \cdot T^2 \cdot \sigma + 4 \cdot T \cdot \sigma^2 - 2 \cdot \sigma^3). \quad (75)$$

Заметим, что  $\Psi(\sigma) < \Psi(T) = K \cdot T/6$  для  $\sigma \in (0, T)$ . Значение  $\sigma^*$  в (70) и (75) легко вычислить из требования  $\partial \Psi(\sigma) / \partial \sigma = 0$ , приводящего к равенству (74). Для целевой функции получаем значение целевой функции  $\Psi(\sigma^*) = (19/27) \cdot (K \cdot T/6)$ . Таким образом, Лемма 2 доказана.

### § 2.3. Метод последовательного перепланирования

Процедура перепланирования, представленная в параграфе 2.2, определяется априорно - в момент времени  $t = 0$ . Она заключается в интенсификации производственного (или учебного, медицинского и пр.) процесса – оптимального увеличения интенсивности соответствующего точечного процесса в некоторый момент остановки  $u$ . Если в системе нет ограничений на уровни интенсификации, то такая процедура после момента остановки  $u(1) = \sigma$  может повторяться в момент остановки  $u(2) > u(1)$ , и т.д.

Процедура перепланирования может быть предустановлена для всех  $i \in \mathbf{N}$ . Однако, если для некоторого номера операции  $j$ ,  $X_{u(j)}=0$ , то, очевидно,  $h_t(X) = 0$  для всех  $t \geq u(j)$ . И поэтому перепланирование не имеет смысла для всех номеров  $i \geq j$ , т.е. после того, как процесс  $X$  достигает нулевого значения. Пусть  $\tau = \tau(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , является Марковским моментом на стохастическом базисе  $\mathbf{B}$  при котором  $X$  достигает нуля:

$$\tau = \inf \{t: t > 0, X_t = 0\}.$$

Тогда число всех возможных процедур перепланирования для процесса  $X$  равно

$$J\{X\} = \sum_{i=1}^{\infty} I\{u(i) < \tau\}. \quad (76)$$

Таким образом, любое множество последовательных моментов остановки процедур перепланирования представляет собой вектор значений

$$\bar{u} = \{u(1), \dots, u(J(X))\},$$

где

$$0 < u(1) < u(2) < \dots < u(i) < \dots < u(J(X)) < T\}.$$

Рассмотрим задачу нахождения такого (оптимального) множества  $\bar{u}^* = \{u^*(1), \dots, u^*(J(X))\}$  моментов последовательного перепланирования  $u^*(i)$ ,  $i \leq J(X)$ , для которого

$$\Gamma(\bar{u}^*) = \inf_{\bar{u}} \Gamma(\bar{u}). \quad (77)$$

В (77) целевая функция  $\Gamma(\bar{u})$  представляет собой проинтегрированную дисперсию, определенную в (13), для интенсивности  $\hat{h} = \hat{h}(X)$ :

$$\Gamma(\bar{u}) = \int_0^T V_t(K; \hat{h}) dt,$$

где интенсивность  $\hat{h} = \hat{h}(X) = (\hat{h}_t(X))_{t \geq 0}$  задается числом  $J(X)$  из (76) и множеством моментов  $\bar{u}$ . Дополнительно мы доопределяем вспомогательные моменты остановки  $u(0) = 0$  и  $u(J(X)+1) = T$ . Кроме того, чтобы обобщить определение (72) - (73) функционала  $h_t(X)$ , на случай последовательного (многостадийного) перепланирования, мы используем следующее (достаточно очевидное) выражение:

$$\hat{h}_t(X) = X_t \cdot I\{t < T\} \cdot \sum_{i=0}^{J(X)} (T - u(i) - t)^{-1} \cdot I\{u(i) < t \leq u(i+1)\}. \quad (78)$$

Для этой модели системы «точно-в-срок» без ограничений на уровень интенсификации, Лемма 2 влечет следующий (более общий, чем сформулированный в ней) результат.

**Теорема 4.** *Для множества моментов перепланирования  $\bar{u}^*$ , минимизирующего целевую функцию  $\Gamma(\bar{u})$ , выполняется равенство для компонентов:*

$$u^*(i) = T \cdot \{1 - (2/3)^i\} \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, J(X). \quad (79)$$

**Замечание 3.** *Отметим, что этот оптимальный план конечен, но имеет стохастическое (случайное) время  $u^*(J(X))$  момента последнего перепланирования.*



**Доказательство Теоремы 4.** Из (78) и Леммы 2 следует, что при каждом последовательном перепланировании с номером  $i \geq 1$  процесс  $X$  эволюционирует в соответствии с моделью § 2.2, но с начальным значением  $X_{u(i)}$  и в интервале времени  $[u(i), T]$  продолжительностью  $(T - u(i))$ . Следовательно, из (74) получаем, что  $u(i + 1) - u(i) = (T - u(i)) / 3$ , откуда следует, что утверждение (79) истинно. Теорема 4 доказана.

#### **§ 2.4. Задачи оптимального управления интенсивностями процессов**

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые предположения о возможных нарушениях условия *точно-в-срок* в процессах, присущих реальным системам. Так, мы предполагаем, что интенсивности точечных процессов могут быть ограниченными. Заметим, что такое представление процесса  $X$  в (10) не соответствует процедуре обращения времени для точечного процесса с фиксированным начальным значением. Тем не менее такая формализация в терминах точечных процессов очень полезна для описания управляемой системы с нарушением условия *точно-в-срок*.

Для такой модели возникает задача оптимального управления - найти значение максимального уровня интенсивности точечного процесса для каждой операции в условиях платы за значение этой границы и за плату несоблюдения требования *точно-в-срок*.

Предположим, что интенсивность  $h$  в (10) может быть представлена как

$$h_t = h_t(X) = X_t \cdot \min\{\Lambda, I\{t < T\}/(T - t)\}, \quad (80)$$

где  $\Lambda \in [0, \infty)$  - некоторый конечный максимальный уровень интенсивности для каждой операции. При этом «ограничении» для  $h$  условие  $X_T = 0$  может и не выполняться и, очевидно,  $\mathbf{P}\{\omega: X_T(\omega) \geq 1\} > 0$  и  $\mathbf{E}X_T > 0$ .

Здесь предполагается, что плата за это нарушение условия *точно-в-срок* пропорциональна математическому ожиданию количества незавершенных операций  $\mathbf{E}X_T$ . Коэффициент пропорциональности обозначен  $\alpha$ . Чем выше верхний уровень  $\Lambda$ , тем меньше значение  $\mathbf{E}X_T$ , и система «ближе» к выполнению требования *точно-в-срок*. Поскольку ресурсы реальной системы обеспечивают уровень  $\Lambda$ , он также имеет определенную положительную стоимость с коэффициентом пропорциональности  $\beta$ . Более того,  $\Lambda$  может служить управляющим параметром в системе (10).

Таким образом, в этом параграфе рассматривается задача оптимального управления процессом  $X$  в (10) при фиксированных  $K \in \mathbf{N}$  и  $T > 0$ , а также в предположении (80) для  $h$ .

Необходимо найти такое (оптимальное) значение  $\Lambda^*$ , для которого задача оптимизации аналогична задачам (61), (70) и (77):

$$\Theta(\Lambda^*) = \inf_{\Lambda \geq 0} \Theta(\Lambda), \quad (81)$$

где целевая функция  $\Theta(\Lambda)$  равна

$$\Theta(\Lambda) = \alpha \cdot \mathbf{E}X_T + \beta \cdot \Lambda \quad (82)$$

при соблюдении следующих (естественных) условий:

$$\alpha > 0, \beta > 0. \quad (83)$$

**Теорема 5.** *Для максимального уровня интенсивности, который минимизирует целевую функцию  $\Theta(\Lambda)$ ,*

$$\Lambda^* = \sqrt{\frac{\alpha \cdot K}{\beta \cdot e \cdot T}}, \text{ если } \alpha \cdot K \cdot T / \beta \in [e, +\infty), \quad (84)$$

$$\Lambda^* = [\ln(\alpha \cdot K \cdot T / \beta)] / T, \text{ если } \alpha \cdot K \cdot T / \beta \in (1, e) \quad (85)$$

и

$$\Lambda^* = 0, \text{ если } \alpha \cdot K \cdot T / \beta \in (0, 1]. \quad (86)$$

**Замечание 4.** Как легко видеть из доказательства теоремы, коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  можно рассматривать как функции времени  $T$ . В этом случае утверждение теоремы остается верным с соответствующей заменой  $\alpha$  на  $\alpha(T)$  и  $\beta$  на  $\beta(T)$ . Таким образом, для целевой функции

$$\bar{\Theta}(\Lambda) = \alpha \cdot \mathbf{E}X_T + \gamma \cdot \Lambda \cdot T \quad (87)$$

при выполнении условий (83) для  $\alpha$  и  $\beta = \beta(T) = \gamma \cdot T$ , задача (88) (являющаяся прямым аналогом (81)):

$$\bar{\Theta}(\bar{\Lambda}^*) = \inf_{\Lambda \geq 0} \bar{\Theta}(\Lambda) \quad (88)$$

имеет аналогичное (84), (85) и (86) решение.

Так, для уровня интенсивности, который минимизирует целевую функцию  $\bar{\Theta}(\Lambda)$ ,

$$\bar{\Lambda}^* = \sqrt{\frac{\alpha \cdot K}{\gamma \cdot e}} / T, \text{ если } \alpha \cdot K / \gamma \in [e, +\infty),$$

$$\bar{\Lambda}^* = [\ln(\alpha \cdot K / \gamma)] / T, \text{ если } \alpha \cdot K / \gamma \in (1, e)$$

и

$$\bar{\Lambda}^* = 0, \text{ если } \alpha \cdot K / \gamma \in (0, 1].$$

Заметим, что случай (87) (являющийся аналогом (82)) интересен для моделей систем с платежами за максимальный уровень ресурсов и пропорциональными времени их резервирования.

**Доказательство Теоремы 5.** Из (10), (13) и (80) следует, что

$$R_t(K; h) = K - \int_0^t R_s(K; h) \cdot \min\{\Lambda, I\{s < T\} / (T - s)\} ds .$$

Обозначим  $U = T - 1/\Lambda$  (откуда  $\Lambda = 1/(T - U)$ ). Тогда из (13) и (17) следует, что при  $\Lambda \geq 1/T$ ,  $\mathbf{E}X_t = R_T(K; h) = R_{T-U}(\mathbf{E}X_U; X \cdot \Lambda)$ . Следовательно,  $\mathbf{E}X_t = R_{T-U}(r_U(K, T); X \cdot \Lambda) = R_{1/\Lambda}(K/(T \cdot \Lambda); X \cdot \Lambda) = \exp\{-1\} \cdot K/(T \cdot \Lambda)$ . Для  $\Lambda \in [0, 1/T)$  выполняется  $\mathbf{E}X_t = K \cdot \exp\{-\Lambda \cdot T\}$ . Поэтому для  $\Theta(\Lambda)$  из (82) получаем выражение

$$\Theta(\Lambda) = \alpha \cdot K \cdot [I\{\Lambda \geq 1/T\} \cdot \exp\{-1\} / (T \cdot \Lambda) + I\{\Lambda \in [0, 1/T)\} \cdot \exp\{-\Lambda \cdot T\}] + \beta \cdot \Lambda \quad (89)$$

Величина  $\Lambda^*$  в (81) тривиально вычисляется из (89) и требования  $\partial\Theta(\Lambda)/\partial\Lambda = 0$  при рассмотрении случаев  $\alpha \cdot K \cdot T / \beta \in [e, +\infty)$ ,  $\alpha \cdot K \cdot T / \beta \in (1, e)$  и  $\alpha \cdot K \cdot T / \beta \in (0, 1]$ . Теорема 5 доказана.

## § 2.5. Выводы по главе 2

Основная цель этой главы - показать возможности управления (в том числе, оптимального управления) в задачах, относящихся к продуктивным системам *точно-в-срок* или *почти-точно-в-срок*. Здесь продемонстрированы достаточно простые методы оптимизации планирования работы неоднородных стохастических систем *точно-в-срок* систем. Описания в терминах точечных (считающих) процессов, представленных в семимартингальных терминах, оказались работоспособными не только для них, но и в случае нарушения условий, обеспечивающих режим поведения *точно-в-срок*. Отметим также, что метод замены времени оказался эффективным при расчете оптимальных значений параметров.

Вторая глава является аналитической – в ней исследуются случаи продуктивных многостадийных систем, реализующий принцип «точно-в-срок», но с определенными (присущими реальным объектам моделирования) нарушениями в «поведении».

Так, первом, втором и третьем параграфах рассматриваются системы, допускающие нарушения однородности выполнения операций. Здесь рассматриваются случаи «планирования» серии этапов процессов выполнения, на каждом из которых процесс может считаться однородным. Доказана теорема об оптимальных соотношениях размеров таких этапов при априорном планировании (в зависимости от весовых коэффициентов в целевых функциях). Для случая возможных изменений плана в ходе выполнения операций рассмотрена модель од оптимальных моментах перепланирования (также доказаны соответствующие результаты в форме леммы и теоремы).

В четвертом параграфе решена задача об оптимальном управлении интенсивностями процесса выполнения операций, когда продуктивная система имеет ограничения по интенсивности и, следовательно, строго говоря, «точно-в-срок» быть не может. Для такой системы «почти-точно-в-срок» доказана теорема об оптимальных уровнях ограниченной (весовыми коэффициентами целевой функции) интенсивности выполнения операций.

Доказательства проводились мартингальными методами с существенным использованием Леммы 1, представленной в первой главе

Таким образом, из этого следует, что обсуждаемый в Главе 2 подход может служить в качестве важного шага для анализа стохастических систем *точно-в-срок* и близких к ним по поведению продуктивных систем при постановке и решении задач управления ними.

В Главе 2 сформулированы и строго доказаны одна лемма и три теоремы, а также приведены четыре полезных замечания.

## **Глава 3. Стохастические модели процессов многостадийного износа и старения**

### **§ 3.1. Математические методы описания моделей стохастических процессов износа и разрушения**

Явление многостадийности характерно для многих процессов развития и достаточно распространено, универсально. Попытки его объяснить предпринимались на разных уровнях развития знаний – от распространенного в философии вывода – «принципа развития по спирали» (следовавшего, например, из догматов диалектического материализма «единство и борьба противоположностей», «перехода количества в качество» и «отрицания отрицания») до исследований отрицательных обратных связей интегрального типа, приводящих к колебательным явлениям и, по существу, являющихся численным воплощением упомянутых философских суждений. Однако следует заметить, что наряду с хорошо изученным процессом развития необходимо (и естественно) рассматривать также и деградацию (в т. ч. в форме старения), от которой тоже следует ожидать изменений (инволюции) «по спирали», но по спирали «сходящейся», что может соответствовать колебаниям значений параметров с убывающей амплитудой. При таком описании каждое многостадийное явление, протекающее в ходе старения или износа сложной многосвязной (а также ремонтируемой) системы, неизбежно подвергается случайным воздействиям, разбросу значений параметров и коэффициентов и отклонениям исходных структур. Также управляющие воздействия могут содержать различные случайные составляющие. Следовательно, говорить о математического вида цикличности или о математического же вида периодичности нельзя [4].

Известные методы анализа многостадийных явлений, протекающих в условиях износа или старения, опираются на описания, достаточно развитые в рамках геронтологии. Отметим, что современная геронтология (как наука об общих законах старения живых организмов) представляет собой раздел

естественных наук, наиболее продвинувшийся в области математических описаний, а также наиболее подготовленный для формализации в терминах математических моделей. Такая ситуация произошла, главным образом, благодаря параллельному сосуществованию в рамках геронтологической науки большого числа самых различных теорий старения. Эти теории как дополняют друг друга, так и друг другу противоречат.

Модели колебательных явлений, протекающих в живых системах, занимают значительное место в работах, посвященных моделированию [1], [2], [29], [52], [53], [54], [55], [56].

Так или иначе, достаточно распространены модели (и математические, и имитационные) разнообразных физиологических явлений, включая изменения артериального давления (прежде всего, связанные с возрастом) в соответствии с циркадными ритмами, возрастные изменения гормонального регулирования месячных циклов (как женщин, так и мужчин), возрастные изменения цикличности в суточных метаболических – в узком смысле этого слова – процессах (например, изменения в чередовании липидного/ночного и углеводного/дневного метаболизма, фазы развития метаболического синдрома и др.), возрастные изменения в требуемом для восстановления регламенте чередования труда и отдыха (восстановления), возрастные изменения в сокращениях миокарда и многое другое [2], [11], [13], [14], [16], [17], [18], [19], [29], [44], [45], [52-55], [77]. Во многих из приведенных примеров у рассматриваемых явлений существует какой-либо «водитель ритма». Так, циркадные ритмы обусловлены суточной цикличностью, месячные циклы связаны с периодичностью геофизических условий, вызванной движением Луны. Могут быть объяснены и некоторые другие явления, обусловленные «внешним водителем ритма». Например, смена сезонов года определяет некоторые изменения в гормональной системе, изменения в интенсивностях процессов регенерации и репарации, в процессах роста и развития и др.

Наряду с «внешними водителями ритма» традиционно исследуются явления с их «внутренними» аналогами (примерами служат ритмы сердца, раз-

нообразные ритмы электромагнитной активности мозга, электромагнитные колебания при межклеточном обмене сигналами и др.). Для этих физиологических явлений известны многочисленные и разнообразные математические методы моделирования [53], [54], [56].

Данный параграф посвящен явлению многостадийности, обусловленному онтогенетическими проявлениями, а также с процессами старения или износа долгоживущей особи, т.е. представителя вида, не связанного онтогенетическими рамками с суточной цикличностью.

Как известно, функции распределения онтогенетических моментов не только «далеки» от ректангулированности, но и претерпевают увеличение разброса с возрастом [104], [106].

Таким образом, для смены стадий старения, обусловленной стадийностью онтогенеза, необходимо учитывать при моделировании существенные стохастические индивидуальные различия. У ряда долгоживущих особей смена стадий старения может и не наблюдаться (впрочем, подобное встречается и в ряде ритмов с «внешним водителем ритма» – например, существование дневных и ночных уровней для «притяжения» артериального давления не наблюдается у значительной части здоровых людей). В моделях, как правило, смена стадий предполагается обусловленной как взаимодействием процессов, так и их системным рассогласованием. При модельных описаниях исследуемого явления также допускается существование онтогенетической программы, определяющей соответствующие разнообразные стадии. Для разработки математической модели, как правило, реализуется модульный принцип: для каждого процесса восстановления, адаптации, разрушения или защиты допускается начальная модель многостадийных изменений, связанных со старением. Взаимодействие таких процессов, меняющихся в согласовании со стадиями, а также при условии формирования стадий и их взаимодействии (или рассогласовании при старении является достаточно сложной задачей, предполагающей отдельное и дополнительное существенное исследование.



Приведем далее основные модели и теории старения. К ним (наиболее известным теориям старения) традиционно относят следующие:

- a. гипотеза износа (теория «Deterioration» или теория «Wear and tear»),
- b. гипотеза генетически запрограммированной предопределенности – «Genetic theory» [62], [86], [90], [91], [98]
- c. гипотеза о дисбалансе систем,
- d. гипотеза о накоплении факторов повреждения (чаще – внешних факторов),
- e. гипотеза о главенствующей роли свободных радикалов (частный случай теории накопления общих повреждающих факторов, с существенной эндогенной компонентой) [81]
- f. гипотеза о накоплении повреждений в ДНК (в геноме индивидуума – разновидность теории накопления, также с эндогенной компонентой, допускающей свободно-радикальную составляющую,
- g. гипотеза о роли социальных факторов – разновидность эволюционно обоснованного выбора смертности в популяции: в том числе, теория активности, дезинтеграции (или теория разобщения), непрерывности, теории когорт, накопления и увеличения различий в преимуществах и недостатках [105], [107]
- h. гипотеза о значении конструктивистских теорий (рассматривающих старение в качестве результата экспериментальных и описанных данных вне общих теорий и предпосылок)

и многие другие [1], [3], [8], [43], [49], [50].

Отметим, что одна из основных и наиболее исследованных, это – теория износа, по своей сути, должна рассматриваться как механистической.

Она – одна из первых среди проработанных и развитых, одна из основных, хотя (при этом, заведомо не полная), оказывается и заведомо недостаточной.

Становление этой теории во многом объясняется простым и наглядным описанием, хорошо согласующимся с каждым (в т. ч., и отдельным) экспериментом, проводимым с биологически и структурно однородными живыми существами. Также она хорошо соответствует экспериментальным данным по износу и поломкам у устройств и объектов механических, а также сложных технических систем.

Концепция теории износа становится ясно при анализе запрограммированного старения. В качестве примера теории биологического старения с износом принято предполагать, что старение у людей и животных является результатом универсальных разрушительных процессов, которые действуют в любой организованной системе. По этим теориям, люди стареют по тем же причинам и из-за тех же процессов, которые вызывают старение и износ в автомобилях и краске для здания. Если рассматривать автомобиль или другую сложную машину и рассматривать начало ее эксплуатации, то можно ожидать определенные проблемы, фактически называемые в популяции людей «младенческая смертность». По истечении этого периода ожидается относительно бесперебойная работа в течение значительного периода, «времени службы». После этого времени начинается увеличение частоты инцидентов, а также проблемы (инциденты) становятся более похожими для различных автомобилей. Например, все машины страдают от коррозии и механического износа. Процессы, которые здесь описаны, довольно похожи на то, что происходит при старении человека. Фактически, используется одно и то же слово «старение», для описания постепенного ухудшения состояния людей, автомобилей или окраски фасадов, и поэтому ряд исследователей считают биологическое старение процессом износа.

### **3.2. Описание проблемы моделирования одно- и многостадийных процессов износа и старения**

Математические (в том числе стохастические) описания и модели процессов старения можно условно подразделить на популяционные и индиви-

дуальные. Исторически можно выделить популяционные, и, прежде всего, модели износа (Гомпертца), давления среды (в т. ч. модели «хищник-жертва» В. Вольтерра [105], в каком-то смысле обобщающие законы Мальтуса - геометрического возрастания численности или убывания, а также модели процессов размножения и гибели [83], также являющиеся обобщением закона Мальтуса), а также комбинацию их в форме, ставшей уже классической в модели Гомпертца-Мейкхама.

Достаточно полный исторический анализ построения математических моделей выполнен в работах [49], [50] в которых отмечено, что первыми являются таблицы продолжительности жизни, построенные для жителей Лондона в 1662 г. Д. Граунтом. Затем анализ таблиц был продолжен В. Лейбницем. Но первые проверенные таблицы продолжительности жизни были разработаны Э. Галлеем. Л. Эйлером дополнил работы Галлея. Вероятностный подход в анализе таблиц осуществлен П. Лапласом и, его учеником А. Кетле (для исследования продолжительностей жизни различных животных).

Важной (если не важнейшей) фазой в математическом моделировании процессов геронтологии оказалось появление в 1825 г. актуарной (т.е. в области страховой и финансовой математики) работы Б. Гомпертца, посвященной моделированию изменений уровней смертности человека и отдельных видов животных, зависящих от возраста, [78]. Таким образом, Б. Гомпертцем впервые было показано и обосновано характерное для многих экспериментальных наблюдений увеличение интенсивности смертности с возрастом и представлено определенное теоретическое объяснение такой зависимости.

В 1860 г. формула Б. Гомпертца была дополнена У. Мейкхам в [88] аддитивной для значений смертности константой, характеризующей влиянием окружающей среды. В работах [49] и [94] прямо отмечается, что теория, развитая Б. Гомпертцем, по существу, является теорией увеличения уязвимостей организмов к различным воздействиям. Ее можно назвать старением как таковым (аналогично проявлениям явления рассеяния энергии и, следовательно-

но, увеличения энтропии как меры неупорядоченности произвольной системы).

В последствии, на основе этой фундаментальной работы Б. Гомпертца (полагающих геометрически возрастающий уровень износа как собственно старение в понимании Гомпертца и его последователей) возникло множество моделей, в которых учитываются дополнительные компоненты в функциях, описывающих старение [43]. Однако, принципиально новых систем и подходов в математическом описании не появилось.

Живые системы обладают рядом отличительных черт. Эти особенности могут встречаться и у неживых объектов, однако, для живых они характерны и присутствуют, как правило, в совокупности [9], [26]. По-видимому, основной особенностью живых организмов является *адаптация*.

Однако, адаптация может быть присуща и «неживым» объектам, например, довольно простым техническим системам (автоматическая работа кондиционера, подстройка яркости экрана в зависимости от освещенности и другое) [56].

Отдельной значимой особенностью является то, поддержанию чему должна служить адаптация – *гомеостаз* [46].

Еще одной особенностью служит *восстановление* [9] (в форме компенсации, регенерации, репарации, а также замещения).

Отметим такое свойство, как *защита* [9] или *разрушение, нейтрализация или элиминация*, реализующие защитную функцию.

К ним также можно отнести способность к *изоляции* [9].

Но такое свойство, как *разрушение, гибель, (смерть)* присуще практически всем объектам, как живым, так и не живым.

Однако для живых объектов старение, гибель или разрушение связано с инцидентами (при давлении среды), различными патологиями и заболеваниями, нарушениями гомеостаза, старением, а также с возможностями защитных функций и явлений восстановления [48].

Рассмотрим схему Гомпертца, построенную на основе теории износа, которая была дополнена существенно позже Мейкхамом. Рассуждения проводились в терминах так называемой «жизнеспособности» или «жизненной силы».

Предположим, что величина некоторой гипотетической и абстрактной (являющейся объединенной, интегральной для организма) характеристики, будет обозначена при  $t \geq 0$  значением  $X(t)$  (здесь 0 – момент рождения индивидуума) с начальным значением  $X(0)$ :  $X(0) > 0$ . Момент смерти любой особи обозначим  $\tau$  (с  $\tau \geq 0$ ). В рассматриваемой механистической модели предполагается, что уровень жизнеспособности уменьшается с некоторой постоянной «скоростью»  $\alpha \geq 0$ :

$$\frac{d}{dt}X(s) = -\alpha \cdot X(s), \quad X(0) > 0, \quad (90)$$

записанное в интегральной форме как

$$X(u) = X(0) - \int_0^u \alpha \cdot X(s) ds. \quad (91)$$

У этого уравнения решение – очевидно и широко известно:

$$X(u) = X(0) \cdot \exp\{-\alpha \cdot u\}. \quad (92)$$

Основное существенное предположение в модели Гомпертца это то, что  $\mu^H(t)$  является обратно пропорциональной величиной вот этой гипотетической величине жизнеспособности  $X(t)$ :

$$\mu^H(t) = (X(t))^{-1}, \quad (93)$$

т.е. она равна

$$\mu^H(t) = X(0)^{-1} \cdot \exp\{\alpha t\}. \quad (94)$$

Приведенная выше формула принадлежит Б. Гомпертцу (которая позже была усовершенствована У. Мейкхамом, добавившим некоторый постоянный коэффициент  $R > 0$  в формулу Гомпертца, и который не зависел от возраста и имел экономическую, либо социальную или экологическую природу). Этот

коэффициент меняется в ходе «эволюции» людей. Называется коэффициент  $R$  параметром давления среды. Общая модель Гомпертца-Мейкхама характеризуется уровнем смертности  $\mu^{H-M}(s)$ , равным  $R + \mu^H(s)$ :

$$\mu^{H-M}(s) = R + X(0)^{-1} \cdot \exp\{\alpha \cdot s\} \quad (95)$$

Распределение Гомпертца-Мейкхама и сегодня используется при описании смертности у различных биологических видов и при описании поломок технических систем.

Поскольку, по теореме Деллашери о семимартингальном, сформулированной для разложения процесса с одним скачком, для функции распределения  $F_\tau(t)$  справедливо соотношение для моментов  $\tau \geq 0$  гибели индивидуумов в популяции со смертностью  $\mu(t)$

$$\frac{dF_\tau(t)}{1 - F_\tau(t-)} = \mu(t) dt, \quad (96)$$

то из него в абсолютно непрерывном случае функции распределения следует соотношение  $d \ln\{1 - F_\tau(t)\} = -\mu(t) dt$ . Решением при условиях  $F_\tau(0) = 0$  и  $F_\tau(+\infty) = 1$ , очевидно, является

$$F_\tau(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \mu(s) ds\right\}. \quad (97)$$

Это выражение для (95) приводит к формуле

$$F_\tau(t) = 1 - \exp\left\{-Rt - \frac{1}{X(0) \cdot \alpha} (e^{\alpha t} - 1)\right\} \quad (98)$$

и для функции плотности распределения  $\rho_\tau(t) = \frac{dF_\tau(t)}{dt}$  определяет формулу

$$\rho_\tau(t) = (R + X(0)^{-1} \cdot e^{\alpha t}) \cdot \left\{-Rt - \frac{1}{X(0) \cdot \alpha} (e^{\alpha t} - 1)\right\}. \quad (99)$$

В связи с этим функция дожития  $G_\tau(u) = 1 - F_\tau(u)$  равна

$$G_\tau(u) = \exp\left\{-R \cdot u - \frac{1}{X(0) \cdot \alpha} (e^{\alpha \cdot u} - 1)\right\}. \quad (100)$$

Естественно, приведенная модель является одностадийной и явлению многостадийности соответствовать, вообще говоря, не может (как в случаях биологических объектов и систем, так и при рассмотрении различных технических систем и устройств). Эта модель не может учитывать различные события, характеризующиеся как разрядки или как онтогенетические события, связанные с перестройкой физиологических процессов. Также модель в случае технических систем или изделий не учитывает такие события, как регулярные или эпизодические технические обслуживания, как капитальные ремонты, возможные текущие ремонты с частичной заменой узлов или деталей.

Моменты таких событий обслуживания или действий по капитальному ремонту можно условно обозначить  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$  с  $\tau_0=0$  и  $\tau_n < \tau_{n+1}$  для всех  $n=0,1,2,\dots$ . Заметим, что после каждого из моментов  $\tau_n$  может наблюдаться период некоторого повышения инцидентности, частоты разрушений, поломок в случае технических изделий (а в случае биологического объекта – заболеваемости или смертности). Такой период повышения уязвимости обусловлен некоторой дезадаптацией с последующим периодом возможной адаптации (либо – для устройств – приработки и технической отладки). Так, при  $\tau_0=0$  такому явлению соответствует увеличенной «младенческой» (детской) смертности. Заметим, что период ранних гарантийных возвратов технических устройств соответствует как раз таким поломкам в начале эксплуатации. Поздний этап детской заболеваемости соответствует периоду приработки. В начале этапа фертильности – подъему уровня юношеской смертности, при наступлении климактерической паузы или андропавзы также наблюдается увеличение уровня смертности. И этим онтогенетическим моментам перестройки стадий соответствуют в различных технических системах определенные моменты смены режимов эксплуатации.

Поэтому в настоящей работе при построении модели целесообразно в рамках механистической модели (или ее сужении для процесса износа) для каждого случайного момента  $\tau_n, n=0,1,2,\dots$  учитывать при увеличении уров-

ней смертности  $\Delta_n, n=0,1,2,\dots$  соответствующую скоростью «отладки»  $\gamma_n, n=0,1,2,\dots$ . Одновременно, «техническое обслуживание» (а в случае биологического объекта – онтогенетическая перестройка или разладка) в каждый ее момент  $\tau_n, n=0,1,2,\dots$  инспирирует появление соответствующей дезадаптации. Естественно предполагать, что в моменты  $\tau_n$  устраняются только отдельные элементы или части накопленного износа. При этом часть износа оказывается неустранимой, также, как и вся совокупная компонента в смертности, соответствующая давлению среды.

Следовательно, наряду с уравнениями (90) или (91) мы должны рассматривать при каждом  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1}), n=0,1,2,\dots$  формулу смертности:

$$\mu(t) = R + x_\alpha^{-1} \cdot \exp\{\alpha \cdot t\} + x_\beta^{-1} \cdot \exp\{\beta \cdot (t - \tau_n)\} + \Delta_n \cdot \exp\{-\gamma_n \cdot (t - \tau_n)\}. \quad (101)$$

Здесь первое слагаемое – давление среды (константа), второе – неустранимый износ, т. е. убывание внутренних ресурсов, третье – устранимая компонента износа (на основе онтогенетической перестройки), четвертое – возмущение, привнесенное онтогенетической перестройкой, которое устраняется в результате отладок.

Функция дожития при этом определяется, как и в модели Гомпертца-Мейкхама по общей теореме Деллашери:

$$dG(t) = -G(t)\mu(t)dt \quad (102)$$

с  $G(0)=1$ . Решением является

$$G(t) = \exp\left\{-\int_0^t \mu(s)ds\right\}, \quad (103)$$

Однако из-за стохастичности моментов  $\tau_n, n=0,1,2,\dots$  при явном представлении переусложнена.

Для анализа этой схемы оказывается необходимо и удобно воспользоваться методами имитационного моделирования.

Рассмотрим математическое описание модели, которая бы могла объяснять возникновение множественных стадий в процессе старения.



Основным для такого математического моделирования служит следующее предположение. Предполагается, что метаболические и онтогенетические кардинальные изменения (разладки, перестройки и т. п.) не могут осуществляться очень часто, а также в постоянном режиме из-за того, что такие разладки вызывают текущее нарушение адаптации, вследствие чего увеличивается уязвимость, в результате чего и возникает рост параметров смертности.

В этой модели каждая такая структурная перестройка обеспечивает системе возможность устойчиво работать, «обходясь» как можно дольше без изменений структуры.

Как в живых системах, так при эксплуатации сложных технических систем можно наблюдать перевод системы в форсированный режим (например, выработки энергии), либо такое изменение «поведения» или уровня интенсивности эксплуатации, которое приводит к снижению затрат ресурсов (что, очевидно, также является формой адаптации).

Достаточно известным [21], [22], [24] оказывается следующее модельное описание явления возникновения дезадаптации: процесс уровня соответствия  $A=(A(t))_{t \geq 0}$  в каждый момент  $t \geq 0$ , равен

$$A(t)=\frac{C(t)}{R(t)}, \quad (104)$$

где  $C(t)$  – потенциальная «мощность», вырабатываемая субъектом износа,  $R(t)$  – приведенная требуемая мощность [16], [17], [18], [19].

Моменты смены стадий обозначим  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$  с  $\tau_0 = 0$  и  $\tau_n < \tau_{n+1}$  для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ . На каждом интервале  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$  предполагается выполнение соотношения Гомпертца

$$dA(s)=-\alpha_n \cdot A(s)ds. \quad (105)$$

Это означает, что значения параметров  $\alpha_n$  на множестве  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$  постоянны. Для того, чтобы стадия сохранялась (продолжалась), предполага-

ется при всех  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ , а также для каждого номера стадии  $n = 0, 1, 2, \dots$ , выполнение следующего неравенства

$$A(s) = \frac{C(s)}{R(s)} > 1. \quad (106)$$

Состояние, которое приводит к адаптивной замене стадии, возникает при дезадаптационном состоянии: в случае  $A(s) \leq 1$ .

В общем случае мы по этому описанию рекуррентно определяем все (случайные) моменты изменений номеров стадии:  $\tau_0 = 0$ , а при  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\tau_{n+1} = \inf \{s: s > \tau_n, A(s) \leq 1\}. \quad (107)$$

Решение при каждом  $n = 0, 1, 2, \dots$  для  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$  имеет вид

$$A(t) = A(\tau_n) - \int_{\tau_n}^t \alpha_n \cdot A(s) ds. \quad (108)$$

Рассмотрим первую стадию при  $t \in [\tau_0, \tau_1) = [0, \tau_1)$  и сформулируем задачу оптимального выбора продолжительности стадии. В рамках модели, по формуле (108) получаем

$$A(t) = x - \int_0^t \alpha_0 \cdot A(s) ds, \quad (109)$$

Со значениями  $A(0) = x$ , а также  $\alpha_0 = \alpha \cdot x + \mu$ . Коэффициент  $\alpha > 0$  задает уровень з износа в зависимости от мощности, и параметр  $\mu \geq 0$  введен для учета тех процессов разрушения, которые не зависят от расходований энергии. В этом случае  $t \in [0, \tau_1)$

$$A(s) = x \cdot e^{-\alpha x s} \cdot e^{-\mu s}. \quad (110)$$

Равенство интенсивностей по указанной аддитивной схеме дано в этой модели по предположению о том, что возможности к адаптации исчерпываются в линейной зависимости при заданных мощностях и при постоянном режиме эксплуатации. Заметим, что в случае биологических объектов такое предположение служит обоснованием одной из самых распространенных теорий старения – теории свободных радикалов (поскольку их уровень пропорционален потребляемому кислороду и, следовательно, энергетической

продуктивности этой системы выполнения). Также она используется в качестве обоснования той из генетических теорий старения, в которой частота повреждений ДНК (мутаций, следовательно) пропорциональна значениям уровней метаболизма и, поэтому, интенсивности экспрессии генов.

Здесь, в этой модели, смена стадий по соотношению (107) происходит в некоторый неслучайный (детерминированный) момент  $T = T(x)$ , когда функция  $A(t)$  достигает уровня дезадаптации – здесь единицы, т. е. при равенстве

$$A(u) = x \cdot e^{-\alpha x u} \cdot e^{-\mu u} = 1. \quad (111)$$

Это равенство (111) означает, что  $\tau_1 = T = T(x)$ . Так возникает задача нахождения оптимальной величины  $x$ , доставляющей максимум  $T = T(x)$ :

$$T = T(x) \rightarrow \max, x > 1. \quad (112)$$

Решение этой задачи приводит к выражению  $e^{\alpha x T + \mu T} = x$ . Из него найдем функцию  $T(x)$  в явном виде:

$$T(x) = \frac{\ln x}{\alpha \cdot x + \mu}. \quad (113)$$

Поскольку экстремум достигается при  $T'_x(x) = 0$ , то получаем [ ]

$$\frac{\mu}{x} = \alpha \cdot (\ln x - 1). \quad (114)$$

Уравнение (114) является трансцендентным, и оно не может иметь в общем случае явное решение. Однако искомую величину мы можем численно определить с любой требуемой точностью.

В задаче (112) оптимальная величина  $x$ , равная  $x^*$ , находится из решения уравнения:

$$\text{ю } x^* \cdot (\alpha \cdot T + \alpha \cdot x^* \cdot T'(x^*) + \mu \cdot T'(x^*)) = 1. \quad (115)$$

С учетом того, что  $T'(x^*) = 0$ , получаем

$$x^* \cdot \alpha \cdot T = 1. \quad (116)$$

Так, получаем, что величина максимальной стабильной стадии  $T$  определяется из (116), зависит от  $x^*$ :

**Предложение 2.** В схеме (109)–(116) функция  $T^*(x)$  определяется как

$$T^*(x) = \frac{1}{\alpha \cdot x^*}, \quad (117)$$

где  $x^*$  является решением трансцендентного уравнения (114).

Заметим, что доказательство этого предложения тривиально, очевидным образом вытекает из описания математической модели и из (116).

Поскольку найденные здесь пары значений  $\{x^*, T^*\}$  не зависят от порядкового номера стадии, то их можно рассматривать в качестве повторяющихся для общего процесса старения.

Эта модель – первое, детерминистское приближение. Она может допускать различные обобщения (в том числе, стохастические) для построения моделей многостадийных явлений при старении.

При построении различных моделей многостадийных изменений в процессах адаптации, восстановления, защиты и разрушения при старении оказываются возможны следующие основные подходы (или – методы исследования при моделировании):

- 1) метод первого приближения, основанный на предположении о независимости процессов: осуществляется изолированное (отдельное) описание и моделирование каждого из перечисленных процессов;
- 2) метод общего управления (или единого – как правило, внешнего для подсистем – регулятора, определяющего для всех моделируемых процессов моменты смены стадий при старении – предположение о существовании своеобразного «водителя ритма», синхронизирующего рассматриваемые процессы);
- 3) метод иерархической зависимости (представимой в форме дерева) моделируемых процессов, при котором роль общего регулятора выполняет верхний уровень моделируемых процессов;

- 4) метод блокового описания, при котором каждый из процессов проявляет собственную многостадийность, но взаимная зависимость (или взаимное влияние) процессов влечет частичную синхронизацию;
- 5) метод обратных связей, при котором предполагается наличие зависимостей между процессами и отрицательных обратных связей для отдельных компонент, приводящих к колебательным режимам;
- 6) метод системного исчерпания, основанный на «переключениях» многомерных областей значений параметров, оказывающихся близкими к оптимальным при общем их изменении в ходе старания (или износа).

Заметим, что существуют иные подходы, и допустимы различные их комбинации. Так для анализа близких моделей рассмотрены и использованы методы, представленные в [1], [8-14], [16-19], [36], [43], [45], [48-50], [52-55].

При разработке адекватных моделей естественным является построение стохастических описаний вместе с разнообразными детерминистскими подходами. Такие описания оказываются очень продуктивным, поскольку стохастичность характерна для всего разнообразия данных в геронтологии и демографии.

Наиболее продуктивным оказывается семимартингальный подход с отдельным представлением некоторых процессов в виде диффузионных процессов, а некоторых – как точечные, а также мультивариантные процессы. Также в моделях необходимо предусмотреть их сочетание, что позволяет избежать «формализованного» и плохо ассоциируемого с реальными физиологическими и физическими явлениями т.н. «канонического представления». Для формального описания моментов онтогенетических событий, для исследования эволюции рассматриваемых процессов вводится в рассмотрение соответствующий стохастический базис, являющийся первичной моделью – системой аксиом, определяющих общие правила для всех рассматриваемых в модели вероятностных объектов. Конкретные зависимости для параметров, процессов, объектов, моментов и пр. определяются исходя из соответствующей

щих физиологических явлений, что и составляет конкретную стохастическую модель.

Для построенной математической (здесь – стохастической) модели проводится аналитическое исследование. Оно сводится к анализу областей определения и множеств значений соответствующих функций и процессов, исследованию экстремумов и возможного асимптотического поведения. Наряду с этим анализируются вероятностные характеристики – распределения, моменты и пр. При удачной реализации (либо после коррекции) осуществляется дискретизация для задач построения алгоритмов. Алгоритмы при соответствующем компьютерном имитационном моделировании позволяют осуществить проверку адекватности модели и, в случае ее достаточности, проводить компьютерные эксперименты для задач оценивания, экстраполяции и интерполяции, поиска оптимального управления (если такого рода задачи формулируются).

Таким образом, для каждого рассматриваемого здесь физиологического процесса (адаптации, восстановления, защиты и разрушения) предполагается построение отдельного модуля модели. При этом допустимо описание, в котором все процессы эволюционируют на общем вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с заданным на нем стохастическим базисом  $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in J = [0, T]}, P)$  в качестве единой вероятностной модели [8], [9], [36], [42], [67], [68]. Пространство элементарных исходов отвечает перечню допустимых состояний (и их реализаций во времени) значений физиологических параметров. Вероятностная мера определяется в соответствии со статистическими данными, доступными по результатам измерений при экспериментах. Максимальное время моделирования должно превышать наблюдаемую экспериментально максимальную продолжительность жизни индивидуумов.

Следует отдельно отметить, что процессы адаптации, восстановления и защиты условно можно отнести к процессам «антистарения», в то время как

процесс разрушения имеет двойственную природу. С одной стороны этот термин применим в отношении «антистарения»: для отдельных физиологических механизмов защиты (например, разрушение токсинов, вирусов, бактерий, поврежденных или трансформировавшихся клеток), отдельных фаз онтогенеза (например, апоптоз рудиментарных тканей, разрушение и удаление отдельных тканей при смене зубов), отдельных механизмов адаптации (например, онтогенетическая инволюция тимуса, заведомо являющаяся разрушением, может также рассматриваться как элемент адаптивной перестройки организма, обеспечивающий при завершении этапа «обучения» иммунной системы снижение аутоиммунных реакций; также как адаптивные могут рассматриваться процессы элиминации активных Т-клеток при прямом механизме их супрессии и т.д.). С другой стороны, сами процессы износа и старения могут трактоваться как процессы разрушения.

Как в первом, рассмотренном выше случае, так и во втором – процессы разрушения обязательно участвуют в соответствующих модулях общей модели. Заметим, что в классической модели Гомпертца [78] процесс разрушения является ключевым и трактуется как снижение жизнеспособности. В [94] В. Перкс отметил, что старение эквивалентно росту энтропии как меры неупорядоченности в произвольной системе.

Не углубляясь в известные термодинамические модели, приведем стохастическое, траекторное описание, отвечающее принятым физиологическим подходам при рассмотрении процессов адаптации, восстановления, защиты и разрушения в рамках единообразных (и, по возможности, единых) моделей.

### **§ 3.3. Описание систем в терминах диффузионных процессов**

Пусть задан (в соответствии с терминологией и определениями [8], [9], [42]) некоторый стохастический базис  $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (F_t)_{t \in J = [0, T]}, P)$ , позволяющий формально задавать случайные процессы, отвечающие изменениям ос-

новых физиологических параметров в базовых системах «антистарения». Построим на этом базисе  $\mathcal{B}$  и рассмотрим последовательно математические модели физиологических процессов адаптации, восстановления, защиты и разрушения, предполагая в этом приближении их условную независимость. В качестве условия в каждый момент времени  $t \in J = [0, T]$  могут рассматриваться  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_t^N$  потока  $\mathcal{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t \in J = [0, T]}$ , порожденные точечным процессом  $N = (N_t(\omega))_{t \in J}$ , считающим моменты смены стадий  $N_t(\omega) \in \mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  (или фаз, как онтогенетических, так и старения):  $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N_s = N_s(\omega), \omega \in \Omega; s \leq t\}$ . Таким образом, здесь реализуются первый и второй подходы, указанные в предыдущем параграфе. Заметим, что в рамках этого описания могут рассматриваться как случаи ограниченной продолжительности жизни  $t \in J = [0, T]$ , так и его обобщение  $t \in J = [0, +\infty)$ . Это обобщение бывает полезно при тестировании имитационной модели, включающей анализ гипотетических экстремальных режимов.

**А.** Для исследования механизмов физиологической адаптации, рассматриваемой в качестве одной из компонент системы «антистарения», естественным является описание в терминах простых стохастических адаптивных систем. Следует отметить, что к многостадийности (здесь – изменениям колебательного вида) может приводить существование в системе не только отрицательной обратной связи интегрального типа, но и различные нелинейные компоненты, приводящие к перерегулированию [23]. В первом случае – отрицательной обратной связи интегрального типа – заведомо реализуется первый же подход классификации предыдущего параграфа. Вторым случаем (нелинейных систем при моделировании) может быть использован как при построении моделей в рамках первого подхода, так и второго. При этом второй подход классификации предыдущего параграфа заведомо легче использовать в рамках описаний в терминах нелинейных стохастических систем. Этот



формализм проще всего реализовать, привлекая в качестве «внешнего водителя ритма» некоторый считающий (точечный) процесс, моменты скачков которого соответствуют относительно коротким промежуткам времени, в которые происходит смена стадий. Рассмотрим примеры моделей для обоих указанных случаев.

**A.1.** Пусть на стохастическом базисе  $\mathcal{B}$  определен стандартный винеровский процесс  $W=(W_t)_{t \in J}=(W_t(\omega))_{t \in J}$ ,  $\omega \in \Omega$ . В качестве модели физиологической адаптации рассмотрим два случайных процесса  $A=(A_t)_{t \in J}$  и  $B=(B_t)_{t \in J}$ , определяемые уравнениями

$$A_t = a + \int_0^t \alpha(s)(v_s - B_s) ds + \int_0^t \lambda(s)(u_s - A_s) ds + \int_0^t \gamma(s) dW_s \quad (118)$$

$$B_t = b + \int_0^t \beta(s)(A_s - u_s) ds + \int_0^t \mu(s)(v_s - B_s) ds + \int_0^t \delta(s) dW \quad (119)$$

с начальными значениями  $A_0 = a > 0$  и  $B_0 = b > 0$ , неотрицательными детерминированными функциями  $u=(u_t)_{t \in J}$  и  $v=(v_t)_{t \in J}$ , неотрицательными переменными детерминированными коэффициентами обратной связи

$$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t), \lambda(t) \text{ и } \mu(t).$$

Процесс  $A=(A_t)_{t \in J}$  рассматривается в качестве кумулятивного уровня адаптации, процесс  $B=(B_t)_{t \in J}$  характеризует скорость дезадаптации. Удобным для описания физиологических соответствий параметров модели является ее представление, которое мы получаем после следующих замен переменных: пусть  $\bar{A}=(\bar{A}_t)_{t \in J}$  и  $\bar{B}=(\bar{B}_t)_{t \in J}$  – процессы с  $\bar{A}_t = A_t - u_t$ ,  $\bar{B}_t = B_t - v_t$ , детерминированные функции  $\bar{u}=(\bar{u}_t)_{t \in J}$  и  $\bar{v}=(\bar{v}_t)_{t \in J}$ , представляющие собой от-

клонения от начальных значений уровней притяжения для  $A=(A_t)_{t \in J}$  и  $B=(B_t)_{t \in J}$ , имеют вид  $\bar{u}_t = a - u_t$ , и  $\bar{v}_t = a - v_t$ . Тогда начальные значения равны  $\bar{A}_0 = \bar{u}_0 = a - u_0$  и  $\bar{B}_0 = \bar{v}_0 = b - v_0$ . Уравнения (118) - (119) очевидно преобразуются к виду (120) – (121):

$$\bar{A}_t = \bar{u}_t - \int_0^t \alpha(s) \cdot \bar{B}_s ds - \int_0^t \lambda(s) \cdot \bar{A}_s ds + \int_0^t \gamma(s) dW_s \quad (120)$$

$$\bar{B}_t = \bar{v}_t + \int_0^t \beta(s) \cdot \bar{A}_s ds - \int_0^t \mu(s) \cdot \bar{B}_s ds + \int_0^t \delta(s) dW_s \quad (121)$$

В каждый момент времени  $t \in J$   $\bar{A}_t$  – величина отклонения уровня адаптации  $A_t$  от базового уровня  $u_t$  – убывает со скоростью  $\alpha(t) \cdot \bar{B}_t$ , пропорциональной случайной величине  $\bar{B}_t$ , а также имеет нулевую область притяжения с коэффициентом обратной связи  $\lambda(t)$ , что соответствует «притяжению»  $A_t$  к величине  $u_t$ . Уровень случайных возмущений компоненты  $\bar{A}_t$  характеризуется коэффициентом волатильности  $\gamma(t)$ . Характеристика убывания  $\bar{B}_t$  (представляющая собой величину отклонения индивидуальной стохастической скорости убывания адаптации  $B_t$  от базовой скорости убывания  $v_t$ , обусловленной работой – и износом – механизма адаптации) нарастает пропорционально  $\beta(t) \cdot \bar{A}_t$  и имеет нулевую область притяжения с коэффициентом обратной связи  $\mu(t)$ , что соответствует «притяжению»  $B_t$  к величине  $v_t$ . Уровень случайных возмущений этой компоненты характеризуется коэффициентом волатильности  $\delta(t)$ .

В рассматриваемой модели в качестве базовых функций  $u=(u_t)_{t \in J}$  и  $v=(v_t)_{t \in J}$  могут рассматриваться как средние или характерные для популяции значения, так и являющиеся оптимальными для индивидуума по каким-либо модельным критериям. Заметим, что молчаливо подразумеваемая гипотеза о

единичной кратности процесса адаптации влечет представление, сводящееся к виду (118) - (119) даже в случае исходной двумерной записи с различными винеровскими процессами, как это следует из возможности минимального представления процессов с обновляющим мартингалом в соответствии с уравнениями фильтрации Калмана. Необходимо также отметить, что предложенная модель является очевидным диффузионным обобщением стохастических уравнений Ланжевена, позволяющим рассматривать процессы с колебательными компонентами, в том числе с затухающей амплитудой и меняющейся частотой. Так в очень простом (со стохастической точки зрения – вырожденном) примере – в случае коэффициентов волатильности  $\gamma(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon(t) \equiv 0$  и экспоненциально снижающимися коэффициентами обратной связи  $\alpha(t) = \beta(t) = 0,3 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $\lambda(t) = 0,03 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $\mu(t) = 0,006 \cdot \exp\{-0,01t\}$  и базовыми функциями  $u_i = 1,2 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $v_i = 0,5 \cdot \exp\{-0,01t\}$  график показателя уровня адаптации имеет вид, представленный на Рисунке 2.

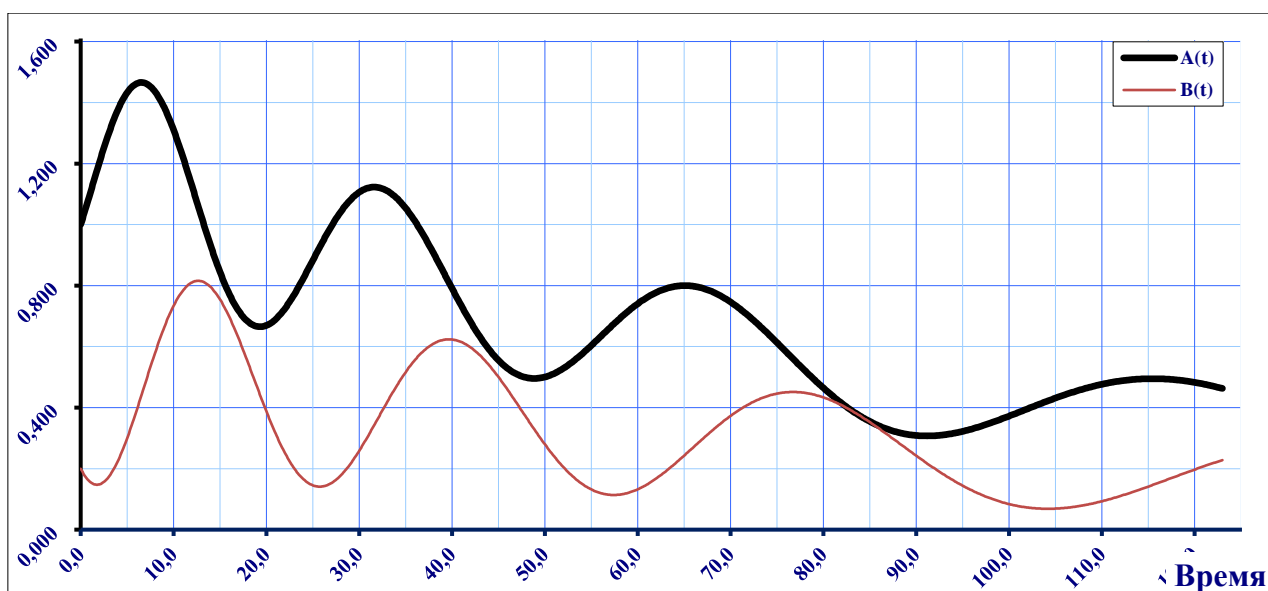


Рисунок 2 – Функции  $A_i$  и  $B_i$  при  $\alpha(t) = \beta(t) = 0,3 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $\lambda(t) = 0,03 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $\mu(t) = 0,006 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $u_i = 1,2 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $v_i = 0,5 \cdot \exp\{-0,01t\}$

Заметим, что в качестве естественных стадий старения здесь могут рассматриваться интервалы  $[\tau(n-1), \tau(n))$ , отделенные моментами  $\tau(n)$ ,  $n \geq 1$ , локальных минимумов функции адаптации. Как следует из уравнений (118)-(119), в этих точках выполняется соотношение

$$\alpha(\tau) \cdot (v_\tau - B_\tau) + \lambda(\tau) \cdot (u_\tau - A_\tau) = 0, \quad (122)$$

а вторая производная (для детерминированного случая) положительна. Таковыми точками в рассматриваемом примере являются моменты  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(1) = 19,3$ ,  $\tau(2) = 48,9$ ,  $\tau(3) = 91,2$ .

При соответствии уровня смертности  $h(t)$  (hazard rate) уровню адаптации по методу, предложенному Гомпертцем

$$h(t) = h(0) / A \quad (123)$$

при  $h(0) = 0,02$  получаем зависимость, представленную на Рисунке 3.

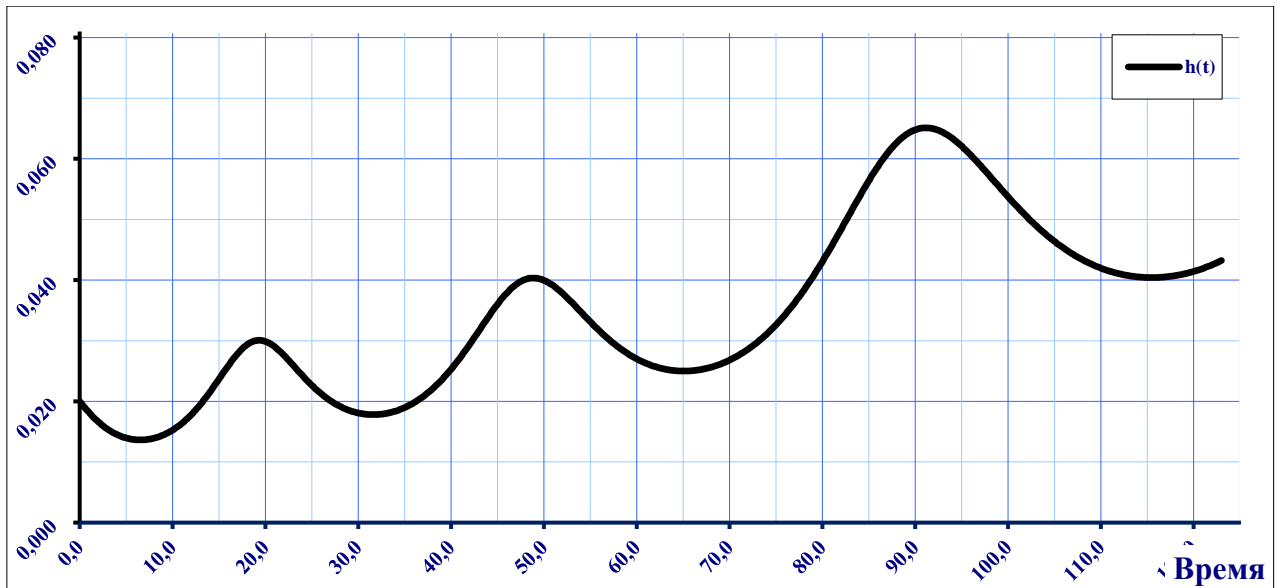


Рисунок 3 – Уровень смертности  $h(t)$  при начальном значении  $h(0) = 0,02$

Соответствующая этой функции смертности кривая дожития – график функции дожития  $G(t)$  – приведена на Рисунке 4.

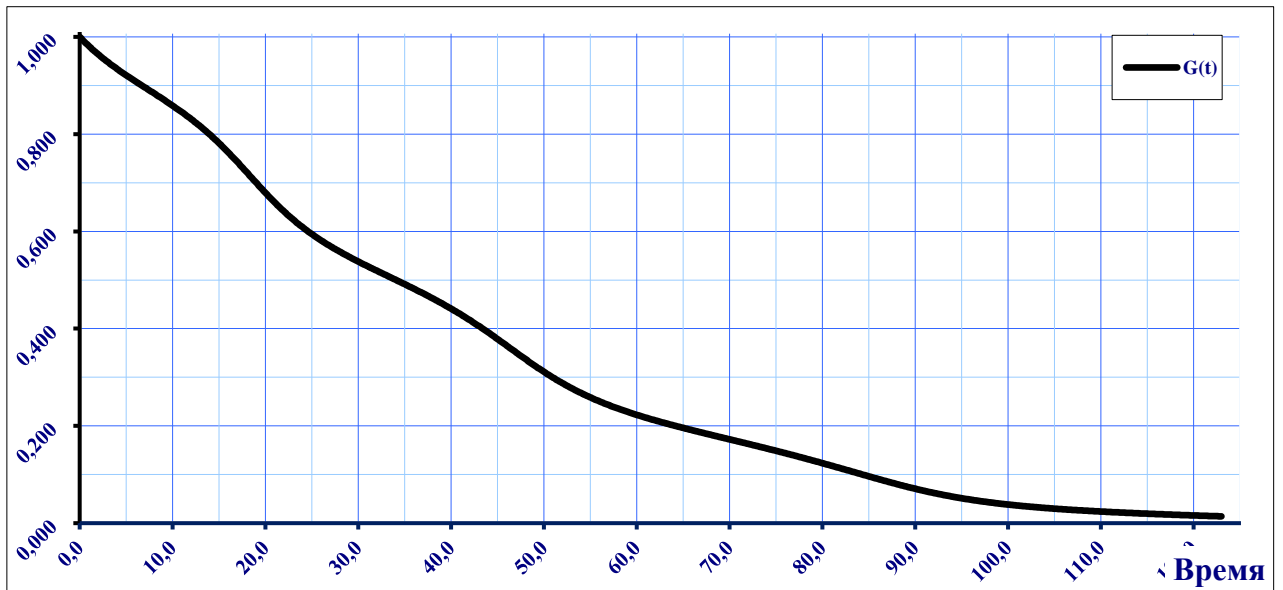


Рисунок 4 –Функция дожития  $G(t)$ , соответствующий примеру функции  $h(t)$ , график которой приведен на Рисунке 3

Отметим, что (как это принято в геронтологии) функция дожития  $G(t)$  определена как

$$G(t)=1-F(t), \quad (124)$$

где  $F(t)$  – функция распределения моментов гибели при рассчитанных для этой модели уровнях смертности исходя из приведенных в этом примере значений показателя адаптации. Значения непрерывной функции  $G(t)$  могут быть рассчитаны в соответствии с теоремой Деллашери [28] по формуле

$$G(t)=\exp\left\{-\int_0^t h(s)ds\right\} \quad (125)$$

Отметим, что на Рисунке 6 легко заметить характерные для ортогенетических переломных моментов изменения в кривизне при указанных значениях  $\tau(0)$ ,  $\tau(1)$ ,  $\tau(2)$  и  $\tau(3)$ .

В случае «умеренных» случайных возмущений кривые, представленные на Рисунке 2, Рисунке 3 и Рисунке 4, претерпевают стохастические искажения, не меняющие их общее поведение. Так при значениях коэффициентов волатильности  $\gamma(t)=0,03$  и  $\delta(t)=0,01$  траектории процессов  $A=(A_t)_{t \in J}$  и  $B=(B_t)_{t \in J}$ , процесса  $h(t)$  и случайной функции дожития  $G(t)$  имеет вид, представленный на Рисунке 5, Рисунке 6 и Рисунке 7, соответственно.

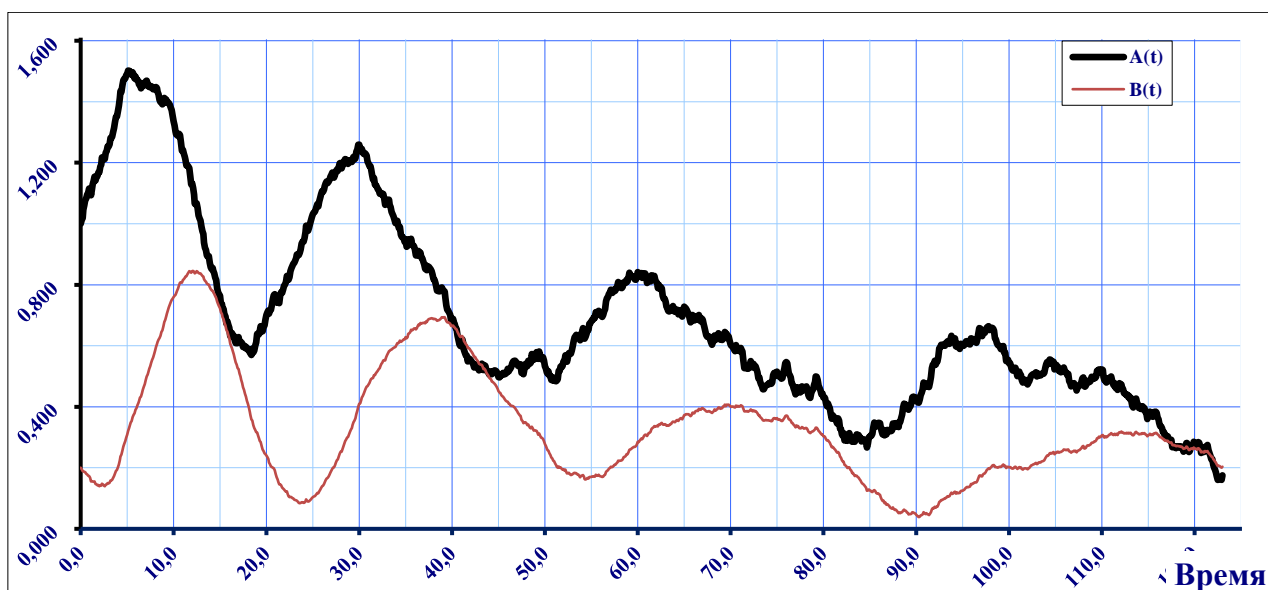


Рисунок 5 – Графики (траектории) процессов  $A_t$  и  $B_t$  при  $\alpha(t)=\beta(t)=0,3 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $\lambda(t)=0,03 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $\mu(t)=0,006 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $u_t=1,2 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $v_t=0,5 \cdot \exp\{-0,01t\}$ ,  $\gamma(t)=0,03$ ,  $\delta(t)=0,01$

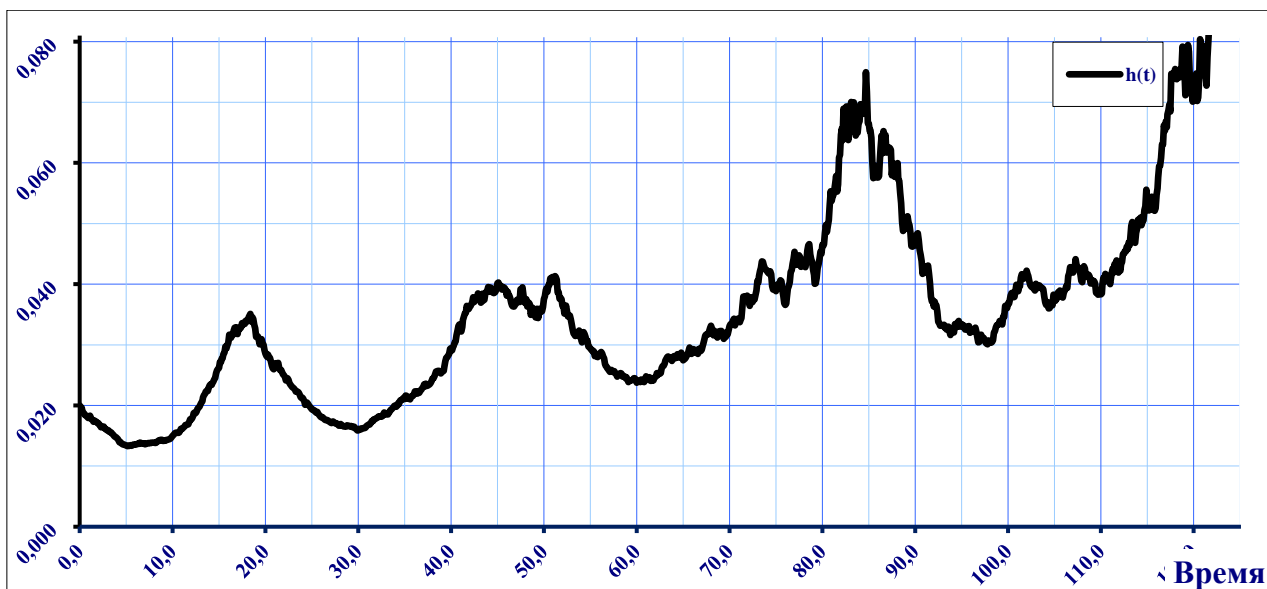


Рисунок 6 – График (траектория) процесса уровня смертности  $h(t)$  при начальном значении  $h(0)=0,02$ ,  $\gamma(t)=0,03$ ,  $\delta(t)=0,01$

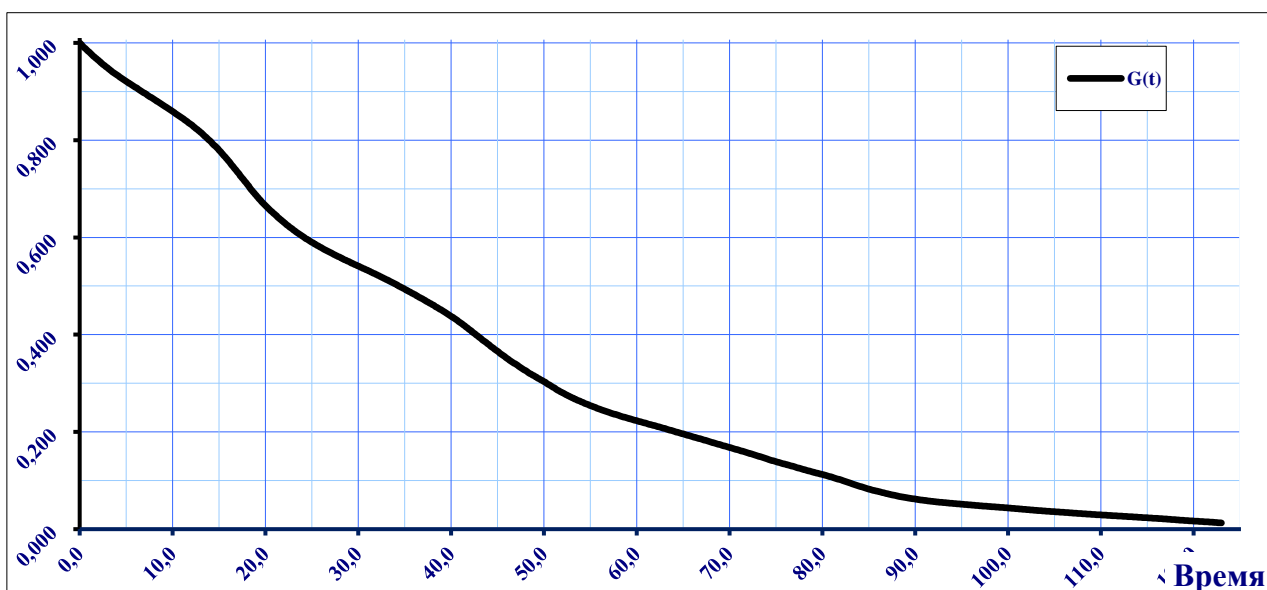


Рисунок 7 – Функция дожития  $G(t)$ , соответствующий примеру функции  $h(t)$  и  $\gamma(t)=0,03$ ,  $\delta(t)=0,01$ , график которой приведен на Рисунке 6

**А.2.** Пусть на стохастическом базисе  $\mathcal{B}$  определены стандартный винеровский процесс  $W=(W_t)_{t \in J}=(W_t(\omega))_{t \in J}$  и точечный (считающий) процессом  $N=(N_t)_{t \in J}=(N_t(\omega))_{t \in J}$ ,  $\omega \in \Omega$ , в моменты скачков которого происходят

смены стадий  $N_t(\omega) \in \mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ :  $\tau(n) = \inf\{t : t > 0, N_t \geq n\}$ ,  $n \in \mathcal{N}_0$ . И тогда для процесса  $N = (N_t)_{t \in J}$  с начальным значением  $N_0 = 0$  и  $\tau(0) = 0$  справедливо представление

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} I\{\tau(n) \leq t\} \quad (126)$$

Таким образом, каждая  $n$ -я стадия для  $n \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  протекает на интервале времени  $[\tau(n-1), \tau(n))$ .

В этой модели предполагается, что система функционирует нормально, если значение процесса  $A = (A_t)_{t \in J}$ , характеризующего уровень адаптации, превышает некоторый порог. Не ограничивая общности, можно полагать значение этого порога равным 1, и, следовательно,  $n$ -я смена стадий происходит при нарушении условия адаптированности (или адаптации):

$$A_t > 1, \quad (127)$$

т.е. в момент времени  $\tau(n) = \inf\{t : t > \tau(n-1), A_t \leq 1\}$ . На каждой такой  $n$ -ной стадии, т.е. при  $t \in [\tau(n-1), \tau(n))$  эволюция процесса  $A = (A_t)_{t \in J}$  протекает по некоторому (в этом предположении – автономному) закону

$$A_t = a(n) - \int_{\tau(n-1)}^t \Phi(A, s) ds + \int_{\tau(n-1)}^t \varphi(A, s) dW_s, \quad (128)$$

с начальным значением  $A_{\tau(n-1)} = a(n) > 1$ . При этом момент первой после  $\tau(n-1)$  дезадаптированности (т.е. нарушения условия (127)) и является моментом скачка процесса  $N = (N_t)_{t \in J}$ .

На Рисунке 8 приведен график детерминированного процесса (т.е. функции)  $A = (A_t)_{t \in J}$  и вспомогательной функции  $B = (B_t)_{t \in J}$ , являющейся



«областью притяжения» для уровня адаптации системы  $A$ . Так на каждой  $n$ -й стадии старения, т.е. при  $t \in [\tau(n-1), \tau(n))$  выполняется

$$B_t = b(n) - \int_{\tau(n-1)}^t B_s \cdot \mu(s) ds, \quad (129)$$

где  $b(n) = b(0) \cdot \exp\{-k_b \cdot \tau(n-1)\}$ ,  $\mu(t) = \mu(0) \cdot \exp\{-k_\mu \cdot t\}$ . Неотрицательные коэффициенты  $k_b$  и  $k_\mu$  являются интенсивностями снижения начального (после онтогенетической перестройки) значения уровня адаптации и снижения скорости истощения ресурсов адаптации (обусловленной снижением интенсивности эксплуатации) соответственно. Непрерывная функция  $A = (A_t)_{t \in J}$  при  $t \in [\tau(n-1), \tau(n))$  равна

$$A_t = a(n) - \int_{\tau(n-1)}^t \lambda (A_s - B_s) ds \quad (130)$$

где значения  $a(n)$  определяются начальным значением  $A_0 = a(1)$  и для всех  $n \geq 2$  выполняется  $a(n) = 1$ , как следует из непрерывности и определения моментов  $\tau(n)$ .

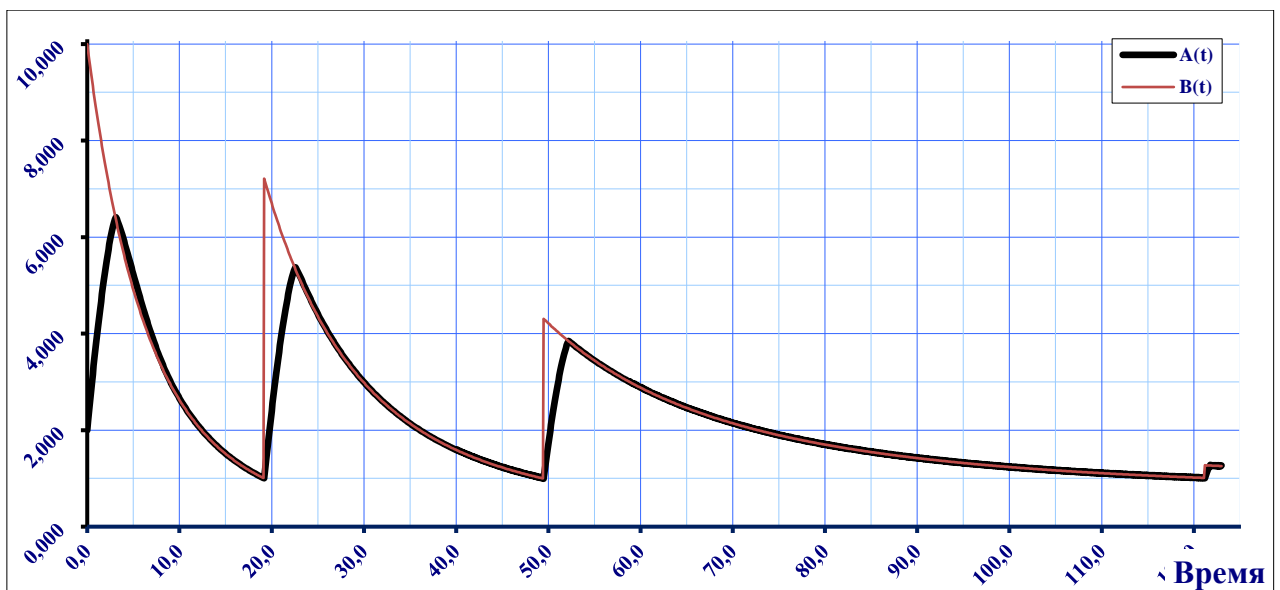


Рисунок 8 – Графики (траектории) процессов  $A_t$  и  $B_t$  модели (129) - (130) при  $b(0)=10,0$ ,  $k_b=0,017$ ,  $k_\mu=0,025$ ,  $\mu(0)=0,15$ ,  $\lambda=1,0$ ,  $A_0=a(1)=2,0$

На Рисунке 9 при тех же значениях коэффициентов, определяющих функцию  $B=(B_t)_{t \in J}$ , наряду с графиком  $B$  приведен график случайного процесса  $A=(A_t)_{t \in J}$  со значениями

$$A_t = a(n) - \int_{\tau^{(n-1)}}^t \lambda(A_s - B_s) ds + \int_{\tau^{(n-1)}}^t \gamma dW_s \quad (131)$$

при указанных в прежнем примере значениях  $\lambda$  и  $a(n)$ , но ненулевым коэффициентом волатильности.

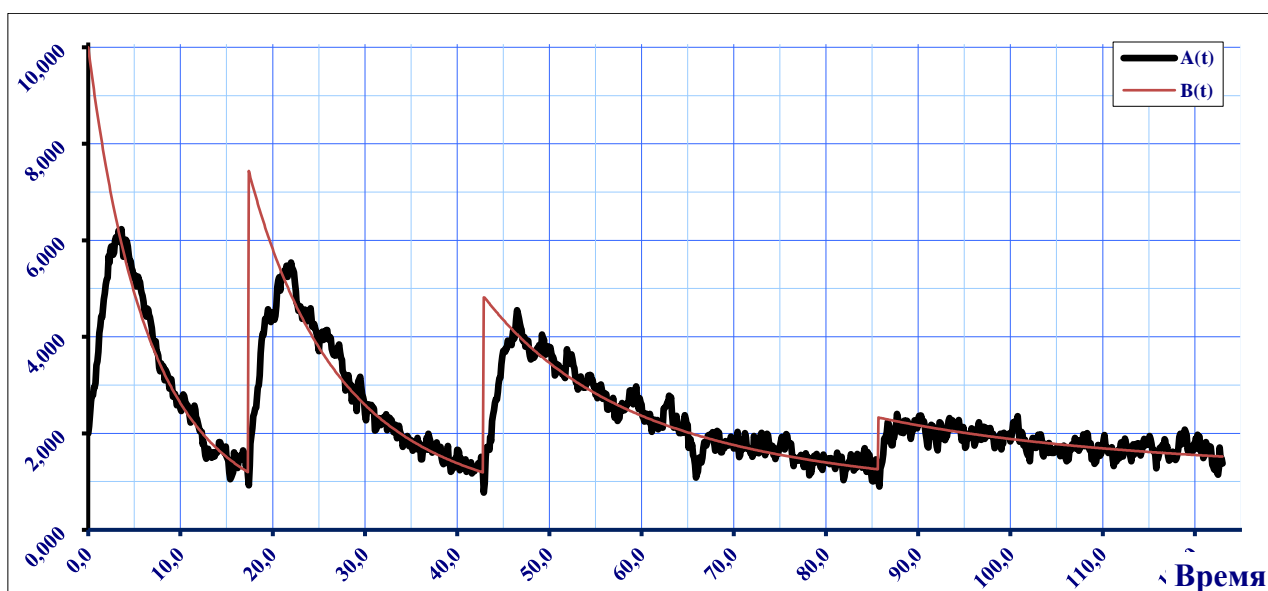


Рисунок 9 – Графики функции  $B_t$  и процесса  $A=(A_t)_{t \in J}$  в модели (129) - (131) при  $\gamma(t)=0,4$

Графики процессов уровня смертности  $h=(h(t))_{t \in J}$ , определяемого по формуле (123) для моделей (129) - (130) и (129) - (131) при начальном значении  $h(0)=0,04$  приведены на Рисунке 10 и Рисунке 11, соответственно.

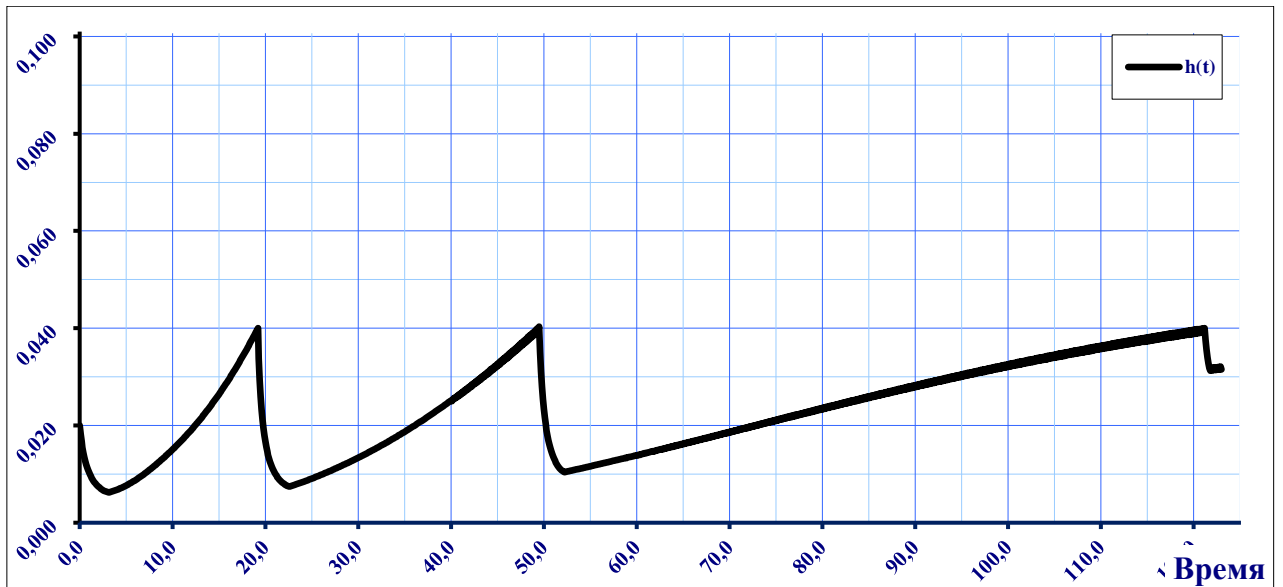


Рисунок 10 – График уровня смертности  $h(t)$  при начальном значении  $h(0)=0,04$  в детерминированной модели (129) - (130)

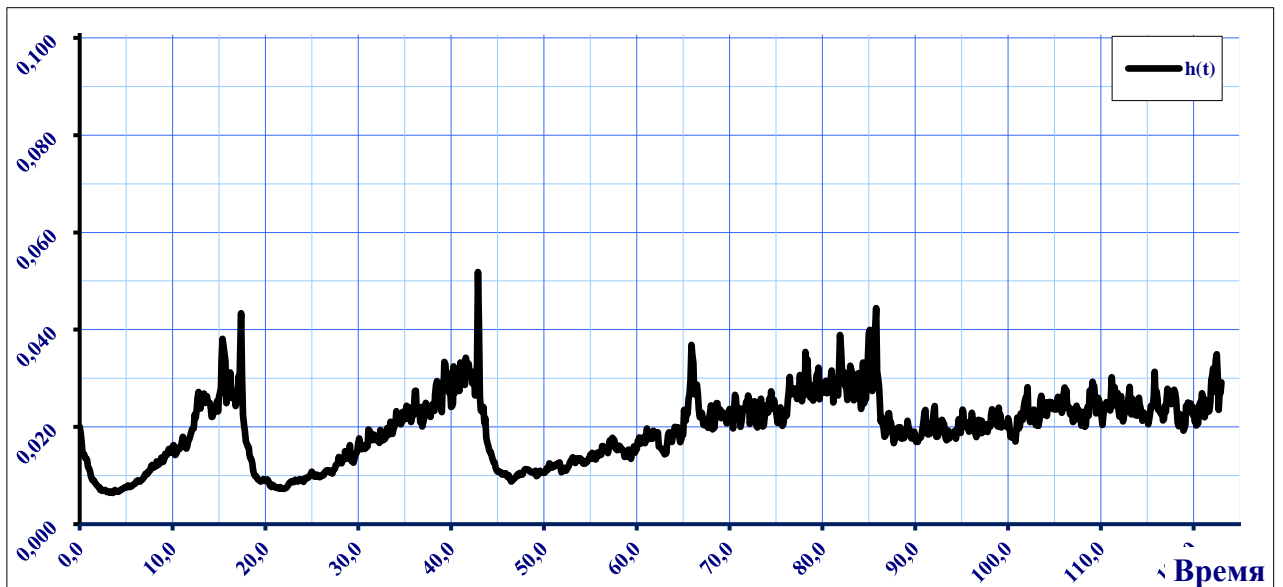


Рисунок 11 – График (траектория) процесса уровня смертности  $h(t)$  при начальном значении  $h(0)=0,04$  в стохастической модели (129) - (131)

Следует, отметить, что случайный характер поведения процесса  $A=(A_t)_{t \in J}$  существенным образом влияет на моменты смены стадий и, таким образом, на поведение траекторий процесса  $N=(N_t)_{t \in J}$ . Траектории этого

процесса, соответствующие приведенным примерам моделей (129) - (130) и (129) - (131) с указанными коэффициентами и для приведенных на рисунках графиках реализаций показаны на Рисунке 12 и Рисунке 13, соответственно.

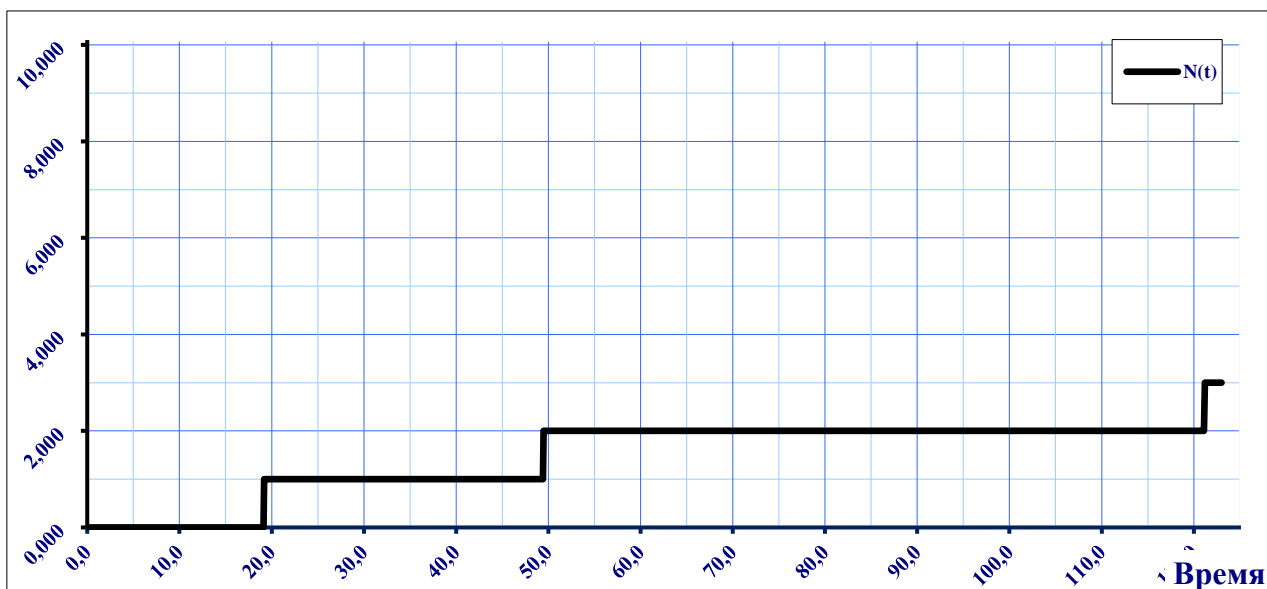


Рисунок 12 – Траектория считающего процесса смены стадий в детерминированной модели (129) - (130)

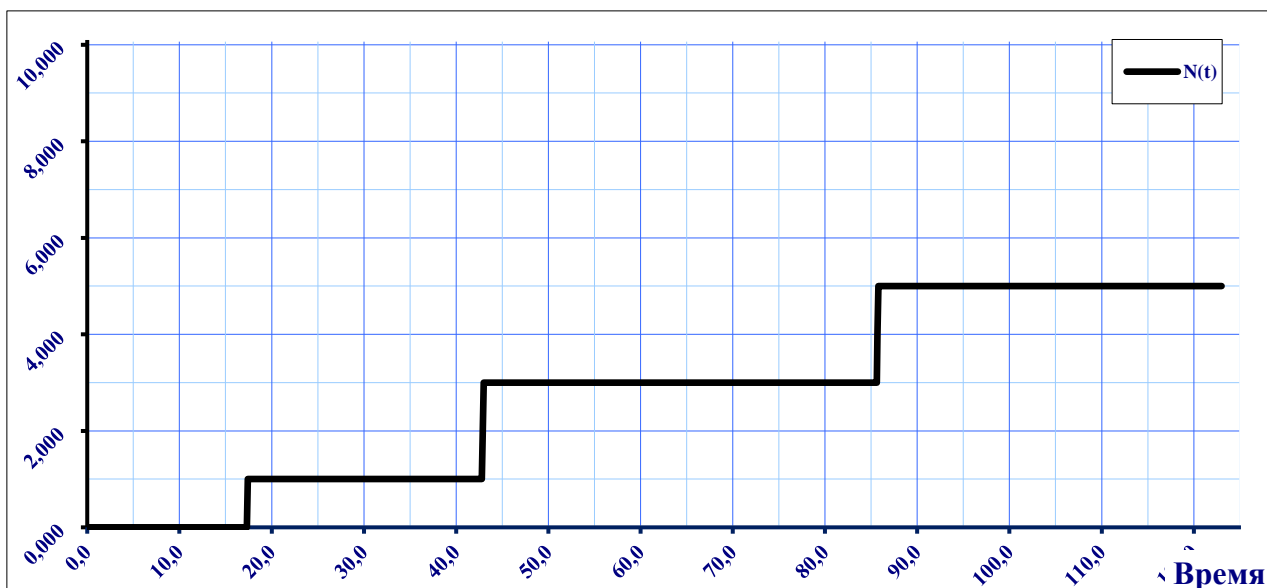


Рисунок 13 – Траектория считающего процесса смены стадий в стохастической модели (129) - (131)

Для процессов смертности, траектории которых показаны на Рисунке 12 и Рисунке 13, по формуле (126) определяются функции дожития  $G(t)$ , графики которых приведены на Рисунке 14 и Рисунке 15, соответственно.

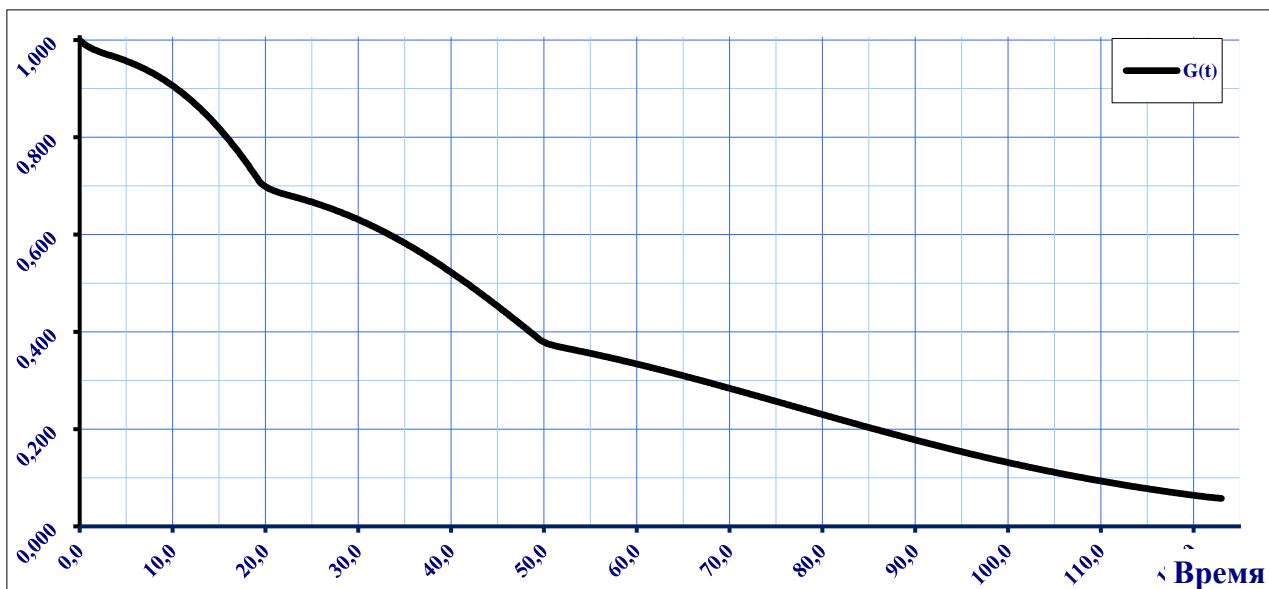


Рисунок 14 – Функция дожития  $G(t)$ , соответствующий детерминированному примеру функции  $h(t)$ , график которой приведен на Рисунке 10

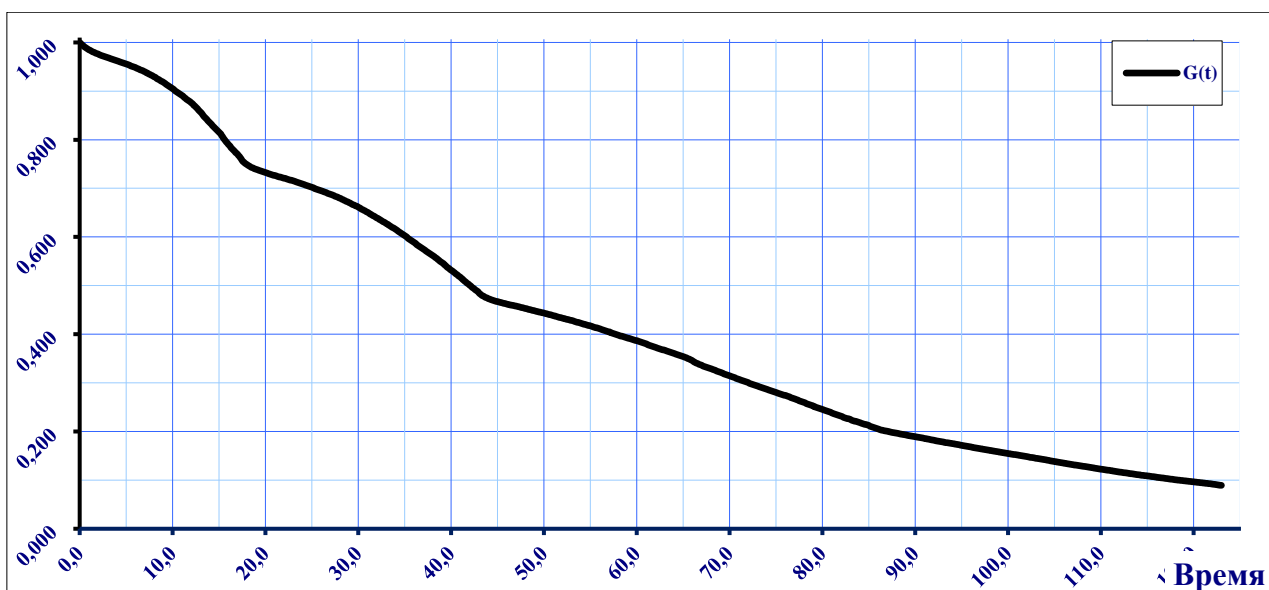


Рисунок 15 – Функция дожития  $G(t)$ , соответствующий стохастическому примеру функции  $h(t)$ , график которой приведен на Рисунке 11

В рассмотренных моделях отдельные компоненты могут рассматриваться как элементы физиологических процессов восстановления, защиты и разрушения. И хотя эти процессы предполагают отдельное описание и моделирование, на первом этапе исследования необходимо указать и в рассмотренных моделях то, что отвечает за перечисленные физиологические функции (наряду с основным исследованием – процесса адаптации).

**Б.** Математическая формализация физиологических механизмов восстановления (как защитной компоненты «антистарения») в рамках модели процесса адаптации имеет вид отдельных компонент, присутствующих в представлениях стохастических процессов.

**Б.1.** Так в описании, основанном на модели с отрицательной обратной связью интегрального типа, приведенных в формулах (118) - (119), а также в приведенном виде (120) - (121), отдельные компоненты могут рассматриваться как элементы восстановления. В частности, в уравнении (118) таковыми могут полагаться любые компоненты, обеспечивающие положительные изменения процесса  $A=(A_t)_{t \in J}$ . Например, таковыми могут полагаться значения  $R=(R_t)_{t \in J}$  с

$$R_t = a + \int_0^t \alpha(s)(v_s - B_s)^+ ds + \int_0^t \lambda(s)(u_s - A_s)^+ ds, \quad (132)$$

где  $A_t$  - решение (118) - (119), и использовано обозначение положительной части числа ( $x^+ = x$  при  $x \geq 0$ , и  $x^+ = 0$  при  $x < 0$ ).

**Б.2.** В примере (126) - (127) в качестве компоненты восстановления следует рассматривать положительные скачки процесса  $B=(B_t)_{t \in J}$  в моменты  $\tau(n), n \geq 0$

$$R_t = B_0 + \sum_{s \leq t} \Delta B_s = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta B_s \cdot I\{\tau(n-1) \leq t\}, \quad (133)$$

либо процесс «отслеживания» этих скачков компенсатором  $\tilde{A}=(\tilde{A}_t)_{t \in J}$  процесса уровня адаптации  $A=(A_t)_{t \in J}$ :

$$R_t = \int_0^t (d\tilde{A}_s)^+ = \sum_{n=1}^{\infty} I\{\tau(n) < t\} \cdot \int_{\tau(n-1)}^t \lambda(B_s - A_s)^+ ds. \quad (134)$$

**В.** Функция защиты в приведенных моделях реализуется в форме заданных временных зависимостей коэффициентов.

**В.1.** В рассмотренном в (118) - (119) и (120) - (121) примере с отрицательной обратной связью интегрального типа в качестве защиты, очевидно, необходимо рассматривать возрастное снижение коэффициента этой отрицательной обратной связи  $\alpha(t)$ . Так в рассмотренном численном примере предполагалось экспоненциальное снижение  $\alpha(t) = 0,3 \cdot \exp\{-0,01t\}$ .

**В.2.** В примере (126) - (127) аналогичную роль играет экспоненциальное снижение скорости истощения уровня адаптации  $\mu(t) = \mu(0) \cdot \exp\{-k_{\mu} \cdot t\}$ .

**Г.** Функции разрушения, как уже отмечалось, могут рассматриваться в моделях двояко.

**Г.1.** Аналогично предыдущему примеру, в качестве функции «антистарения» процессов разрушения (по существу – защитной функции) может рассматриваться уменьшение коэффициентов, характеризующих скорость накопления повреждений. Так в примере (121) - (119) может рассматриваться «разрушение» отрицательной обратной связи, обусловленное поведением коэффициента  $\beta(t)$ . В рассмотренном численном примере предполагалось экспоненциальное снижение  $\beta(t) = 0,3 \cdot \exp\{-0,01t\}$ . В примере (126) - (127) снижение скорости истощения уровня адаптации  $\mu(t) = \mu(0) \cdot \exp\{-k_{\mu} \cdot t\}$ , имеющее защитные функции, также может рассматриваться как разрушение накопленных повреждающих воздействий.

**Г.2.** Наряду с таким подходом в качестве механизмов разрушения может рассматриваться прямое разрушение системы адаптации [78], [88] и [94]. Тогда процесс разрушения совпадает с процессом смертности  $h(t)$  и определяется формулой (123).

Для анализа результатов проведенных описаний и исследований определим место настоящей работы в системе моделирования. Рассмотрим предложенную в [53] классификацию моделей различных биологических систем: на качественные (иначе, базовые), на регрессионные и на имитационные.

Такая классификация является довольно общей, хотя и условной, поскольку большинство современных развитых моделей представляют собой сложные комплексы, состоящие из отдельных блоков, узлов, подмоделей. Эти комплексы, так или иначе, включают в себя элементы, обладающие характеристиками всех этих моделей из предложенной классификации.

Рассмотренная в диссертационной работе модель в качестве начального этапа представляет собой базовое математическое (и сугубо качественное) описание процессов многостадийности в ходе старения или при износе. Эта качественная модель восходит к модели Б. Гомпертца, построенной по фенотипическим, статистическим регрессионным моделям.



Результатом качественного описания многостадийных изменений в системах адаптации, восстановления, защиты и разрушения при старении и износе, приведенного выше, явилось формирование базовой модели. Здесь приведено описание имитационных моделей многостадийных изменений в системах адаптации, восстановления, защиты и разрушения при старении и износе. Все модели этих взаимосвязанных процессов объединяются в две группы, отвечающие двум уровням доступности информации о наличии «водителя ритма», формирующего стадии, процесс смены стадий. В первой группе предполагается существование отрицательных обратных связей интегрального типа, а во второй – наличие нелинейности, приводящей к смене стадии при исчерпании ресурсов системы с регулируемыми параметрами. Обе группы представлены и в детерминистском описании, т.е. для детерминистического построения функций распределения и кривых дожития, и в стохастическом – для соответствующих диффузионных процессов, определяющих уровни смертности.

Результаты проведенного компьютерного имитационного моделирования представлены здесь графически на рисунках. Уровень соответствия обеспечивается на показателях максимальных отклонений моментов смены стадий в демографических и статистических данных – в пределах 10 % продолжительности стадии, что укладывается в допустимый разброс самих длительностей стадий.

### **§ 3.4. Смежные прикладные задачи моделирования многостадийных процессов биологических систем при старении**

А. Рассмотрим задачу о позиционировании и распространении по ДНК транспозонов – подвижных, «вирусоподобных» участков ДНК [10], [12], [64]. Пусть на стохастическом базисе, удовлетворяющем условиям Деллашери [28], определены точечные процессы  $A^\lambda = (A_t^\lambda)_{0 \leq t \leq 1}$  и  $B^\mu = (B_t^\mu)_{0 \leq t \leq 1}$ , при

каждом  $t \in [0,1]$ . Пусть эти процессы задают пространственные позиции транспозонов на хромосомах с нормированными длинами, здесь равными 1.

При этих обозначениях присутствие активных транспозонов в каком-то месте хромосомы с координатой  $t \in [0,1]$  может выражаться единичным значением для процесса телеграфного типа

$$X_t = \int_0^t (1 - X_{s-}) dA_s^\lambda - \int_0^t X_{s-} dB_s^\mu \quad (135)$$

с  $A^\lambda$  и  $B^\mu$ , имеющими компенсаторы

$$\tilde{A}_t^\lambda = \lambda t, \quad \tilde{B}_t^\mu = \mu t, \quad [A^\lambda, B^\mu] \equiv 0. \quad (136)$$

Обозначим среднее значение  $x_t = EX_t$ . Тогда, очевидно, справедливо соотношение

$$x_t = \int_0^t (1 - x_s) \lambda ds - \int_0^t x_s \mu ds. \quad (137)$$

Пусть средняя длина транспозона равна  $\beta$  ( $\beta > 0$ ). При наблюдаемом в экспериментах стационарном распределении выполняется равенство  $x' = 0$ . Следовательно, из (137) вытекает легко получаем выражение для среднего значения позиции:

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (138)$$

Тогда, очевидно выполняется равенство:

$$\left\{ \int_0^1 (1 - X_{s-}) dA_s^\lambda \right\} \cdot \beta = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (139)$$

Из него получаем соотношение для частот затухания активностей транспозонов и их средних длин:

$$\mu = \frac{1}{\beta}. \quad (140)$$

Вывод этого соотношения продемонстрировал возможности анализа явления (ограниченного сверху и снизу) размножения транспозонов на хромосоме в терминах продуктивных систем и точечных процессов [31], [72], [99].

Б. Рассмотрим близкую по структуре модели задачу анализа и обработки данных мониторинга артериального давления на основе выборочных данных (см. подробное описание эксперимента в [33]). Данные, полученные на основе обработки традиционных существенно нерегулярных показаний при измерении уровней давления, сравнивались с экспериментальными, полученными на основе использования монитора и предположения о поведении усредненных значений давления, соответствующих циркадному поведению [27] сигнала телеграфного типа, порождаемому точечными процессами (аналогично предыдущему описанию модели для транспозонов) [11], [13], [14], [32], [33], [59].

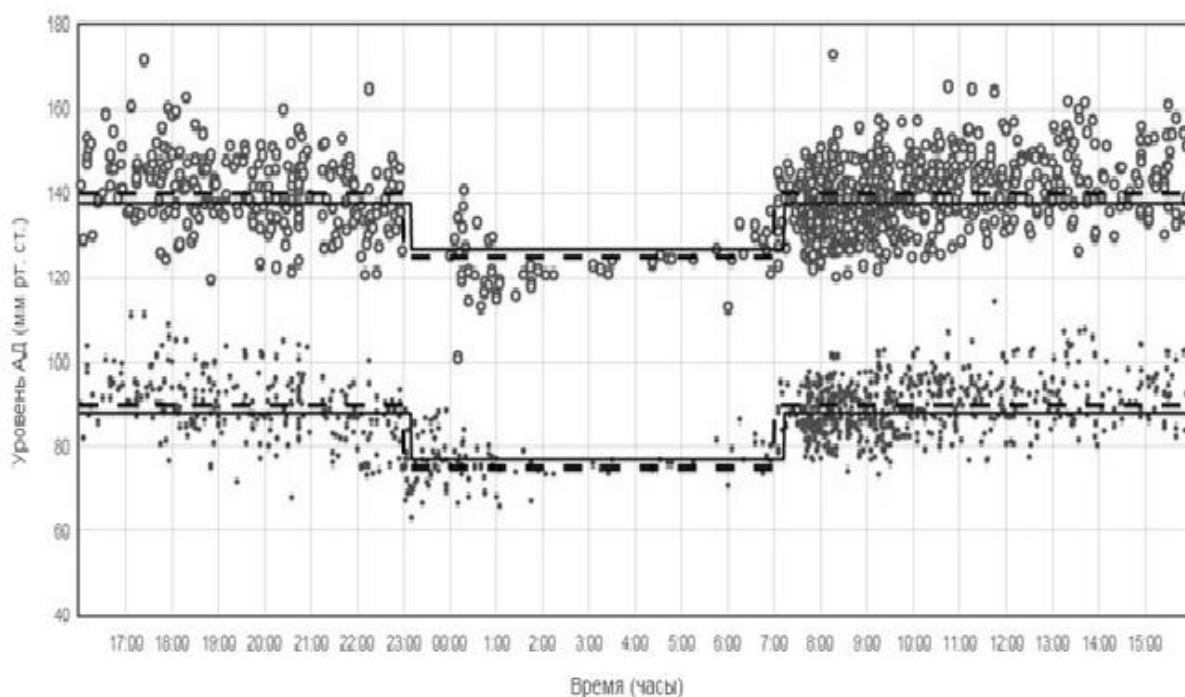


Рисунок 16 – Систолическое и диастолическое артериальное давление (для дня и для ночи) при использовании монитора (пунктир), границы, полученные в модели при анализе интенсивностей (сплошная линия)

Не повторяя такие же выкладки (совпадающие с описаниями модели в терминах процессов телеграфного типа на основе точечных считающих процессов в их семимартингальном представлении) продемонстрируем поведение изменений давления наглядным Рисунком 16.

В. Модель изменения доли белой жировой ткани, построенная на основе многостадийных онтогенетических изменений у грызунов и в популяции людей. Поведения синхронности моделей удастся добиться методом замены времени [11], [102], [103]

. При этом анализ для любой из популяций, проведенных на основе стохастической продуктивной модели в терминах точечных процессов, переносим при замене времени на иную, частично наблюдаемую популяцию (подробное описание моделей приведено в [15]).

Г. Анализ процессов укорочения теломер делящихся клеток. Присутствие и активность фермента теломеразы в модели соответствует наличию процесса возвращений в продуктивной системе. Общая начальная длина теломеры соответствует величине начального значения процесса выполнения. Описание полностью укладывается в схему стохастических продуктивных систем в терминах точечных процессов. Описание теломерной теории старения Хейфлика [82] и гипотезы Оловникова [47] является сегодня классическим [1], [38], [39], [43]. Здесь отметим описания моделей на основе точечных процессов выполнения в [11], [37], [60], [63], [79], [83], [96], [97] (в семимартингальном представлении).

Д. Заметим, что рассматриваемые проблемы моделирования с оказываются тесно связанными с задачами о пересечении границы, а также о разладке и компенсациях [58], [100]. Подробное описание модели в [5] выходит

за рамки общего анализа и отмечается здесь в связи с общностью метода описания «точечный процесс выполнения плюс диффузионное возмущение», подробно проанализированного в предыдущем параграфе.

Процесс, допускающий ступенчатое изменение параметров с аддитивным диффузионным возмущением в модели настоящей главы соответствует обобщенной «жизненной силой» по Гомпертцу. При этом ее пересечение границы – минимального критического уровня и соответствует моменту разрушения (или гибели). Если же в системе присутствует какой-либо тип компенсаций (в форме описанных выше восстановления, репарации, элиминации повреждающих факторов), то это соответствует любой абстрактно определенной компенсации разладки. И это чередование разладок и компенсаций, собственно, и означает исследуемую в диссертационной работе многостадийность стохастической продуктивной системы.

### **§ 3.5. Выводы по главе 3**

Рассмотрение явлений многостадийных, а также репаративных изменений представляется приемлемым при развитии механистической модели в случае ее пополнения стохастическими компонентами. Процессы физиологической адаптации, репарации, защитные механизмы и защитные функции разрушений – это те составляющие первичного построения простых моделей для задач исследования многостадийности при старении и износе. Также они частично объясняют некоторые наблюдаемые статистически демографические явления, например, популяционные увеличения смертности при сменах стадий. В третьей главе реализуется разработка, а также анализ методов исследования многостадийных процессов разрушения (старения, износа) как процесс жизненного цикла с недоопределенным моментом его (конечного) завершения. Этот момент завершения (или, что то же самое, выполнения – для продуктивных систем) определяется изменениями в параметрах самой

системы выполнения и внешними воздействиями. В главе построен ряд моделей с многостадийным поведением, обусловленным наличием отрицательных обратных связей интегрального типа с возмущениями характеристик диффузионного типа. Также рассмотрены модели с заданным точечным (скачкообразным) процессом, считающим моменты смены стадий выполнения операций и с аналогичными возмущениями параметров диффузионного типа. Показана принципиальная возможность эквивалентного представления этими моделями наблюдаемого в демографии многостадийного старения. В главе проанализированы факторы, присущие живым системам и влияющие на поведение уровней смертности и функции дожития.

Также в третьей главе приведены примеры моделирования смежных циклических, повторяющихся или многостадийных физиологических процессов, которые удалось единообразно представить в терминах точечных процессов, включающих в описания моделей либо диффузионные отклонения (как в моделях циркадных ритмов артериального давления, а также в моделях многостадийных изменений в жировой ткани), либо ограничения по уровням дискретных состояний (как в моделях размножения транспозонов в хромосомах, а также в моделях укорочения длин теломер).

Глава 3 содержит одно доказанное предложение.

## **Глава 4. Компьютерное моделирование управляемых многостадийных продуктивных систем**

### **§ 4.1. Задачи, алгоритмы и особенности численных методов моделирования многостадийных стохастических процессов выполнения операций**

В основных моделях старения рассматриваются или детерминистические описания распределений (для функций распределения моментов смертей, или для эквивалентных функций дожития), или результаты их имитационного компьютерного построения. Для этого проводится алгоритмизация уравнений, соотношений и порожденных ими формул. Также рассматриваются аналогично стохастические уравнения с некоторыми явлениями, объявляемыми критическими, например, события пересечения границы допустимой области, комбинации моментов со стохастическим «выпадением» критического события и другое [5].

Основными недостатками компьютерных моделей являются: неполное соответствие описаний (математических) реальным объектам, пренебрежение случайными факторами, в том числе возникающими под воздействием среды, нехватка экспериментальных данных для выявления причинно-следственных связей в моделируемых объектах, несоответствие математических и биологических описаний.

Также к недостаткам относится недостаточность вычислительных мощностей для численного моделирования стохастических соотношений и уравнений.

Это может быть устранено при рассмотрении регенерации, эпизодических явлений адаптивной и онтогенетической перестроек, при рассмотрении комбинированной системы восстановления, а также износа и рассогласования в подсистемах восстановления (некоторые из которых заключаются в восстановлении иных подсистем регенерации).

Дискретизация для математических моделей при их алгоритмизации для задач численного моделирования проводилась на основе классического метода Эйлера-Маруямы [25], [27], [30], [40], [52]. Дискретная алгоритмизация непрерывных моделей и их переход к компьютерным моделям разделяется на два этапа. На первом этапе каждая рассматриваемая непрерывная область  $[0; T]$  заменяется на дискретную область — конечное множество точек  $\left\{ t_k : t_k = \frac{k}{L}, k = 0, 1, \dots, [LT] \right\}$ , где  $[x]$  — обозначает целую часть  $x$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Это множество — является равномерной разностной сеткой, для которой шаг дискретизации равен  $\Delta = \frac{1}{L}$ , с некоторым натуральным числом  $L$ . На следующем этапе, как правило, проводится переход от непрерывных случайных процессов к дискретным аналогам — то есть, дифференциалы заменяются конечными разностями.

Однако, проблемы компьютерного моделирования стохастических продуктивных систем заключаются в особенностях, связанных с генерацией точечных процессов, участвующих в построении систем «точно-в-срок». Это вызвано тем, что во всех таких системах при «приближении» к моменту срока выполнения (или завершения), интенсивность скачков процесса выполнения должна возрастать неограниченно, обеспечивая условие «точно-в-срок». Однако генерация точечных процессов с неограниченной интенсивностью — трудная задача. Решать ее можно только динамически увеличивая дискретность при приближении к времени выполнения (завершения процесса «точно-в-срок», например), либо генерацией случайной величины, являющейся продолжительностью последней стадии выполнения операций. Эта задача разрешима лишь в частных случаях — например, в случае однородных процессов выполнения. И, более того, для ее корректного решения требуется знание функций распределения всех моментов достижения уровней процессом выполнения. А эта задача предполагает дополнительные аналитические исследования, которые заведомо могут не всегда иметь решение.



Тем не менее, для демонстрационных примеров (при точности решений в пределах разрешающей способности демонстрационных средств) доступные вычислительные мощности оказываются достаточными для реализации как однородных продуктивных систем «точно-в-срок», так и процессов с возвращениями с интенсивностями (процесса возвращения) ограниченными значениями до 100 при времени протекания процесса также до 100 и дискретностью 0,1.

#### § 4.2. Компьютерное моделирование многостадийных стохастических процессов износа и старения

Рассмотрим иллюстративный пример компьютерного моделирования многостадийной стохастической системы процессов износа и старения.

Так уравнению (102) при численном моделировании соответствует разностная схема с моментами  $t_k, k=0,1,2,\dots$ , для которых  $t_0=0$ ,  $t_{k+1}-t_k=\delta$  при  $\delta \leq 0,5$  и  $t_k \in [0,120]$  (т.е. проводится анализ объектов в возрасте до 125 лет):

$$G(0)=1, G(t_{k+1})=-G(t_k) \cdot \mu(t_k) \cdot \delta, \quad (141)$$

где  $\mu(t_k)$  при каждом  $k=0,1,2,\dots$  вычисляется по формуле

$$\mu(t_k)=R+x_{\alpha}^{-1} \cdot \exp\{\alpha \cdot t_k\}+x_{\beta}^{-1} \cdot \exp\{\beta \cdot (t_k-\tau_n)\}+\Delta_n \cdot \exp\{-\gamma_n \cdot (t_k-\tau_n)\} \quad (142)$$

Результат моделирования процесса  $\{\mu(t_k), t_k \in [0,125]\}$  представлен на Рисунке 17.

При  $\alpha=0,021$  моделировании были выбраны  $\delta=0,1$ ,  $R=1$ ,  $\alpha=0,021$ ,  $\alpha=0,021$ ,  $\Delta_0=0,09$ ,  $\gamma_0=0,9$ ,  $\Delta_1=0,012$ ,  $\gamma_1=0,8$ ,  $\Delta_2=0,015$ ,  $\gamma_2=0,2$ ,  $\Delta_3=0,08$ ,  $\gamma_3=0,1$ ,  $\Delta_4=0,06$ ,  $\gamma_4=0,15$  при  $\tau_0=0$ ,  $\tau_1=15$ ,  $\tau_2=50$ ,  $\tau_3=75$ ,  $\tau_4=105$ .

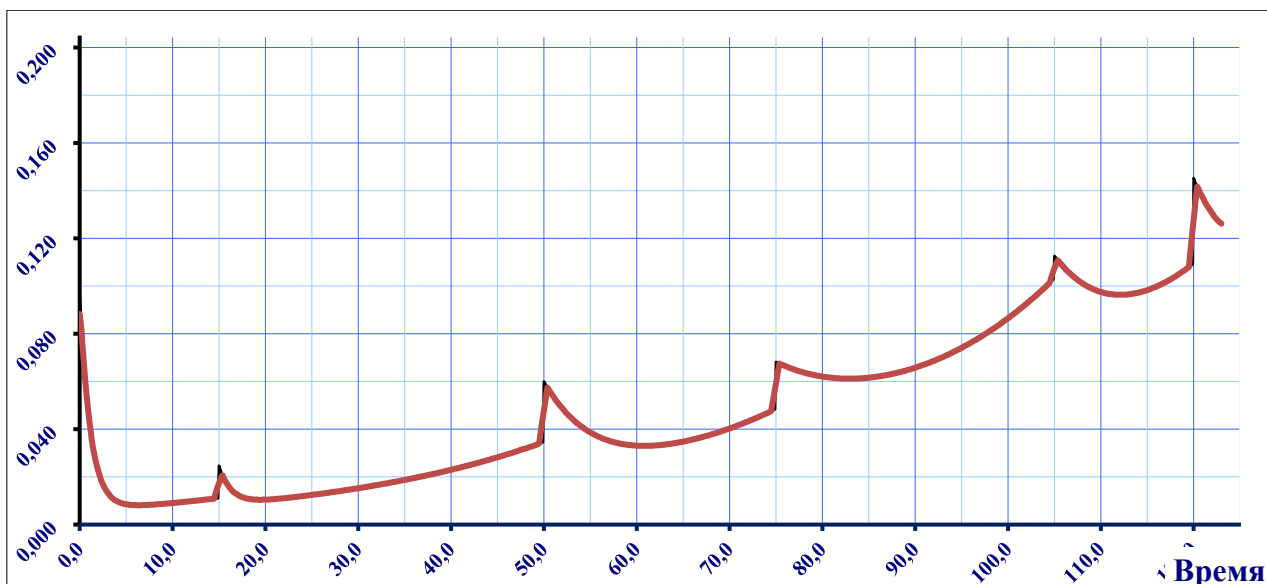


Рисунок 17 – Зависимость  $\mu(t)$  от времени (в годах)

При построении осуществляется последовательное усреднение по пяти ближайшим временным имитированным точкам. Полученный график функции дожития  $G(t)$ , генерированный в соответствии с формулой (142), показан на Рисунке 18.

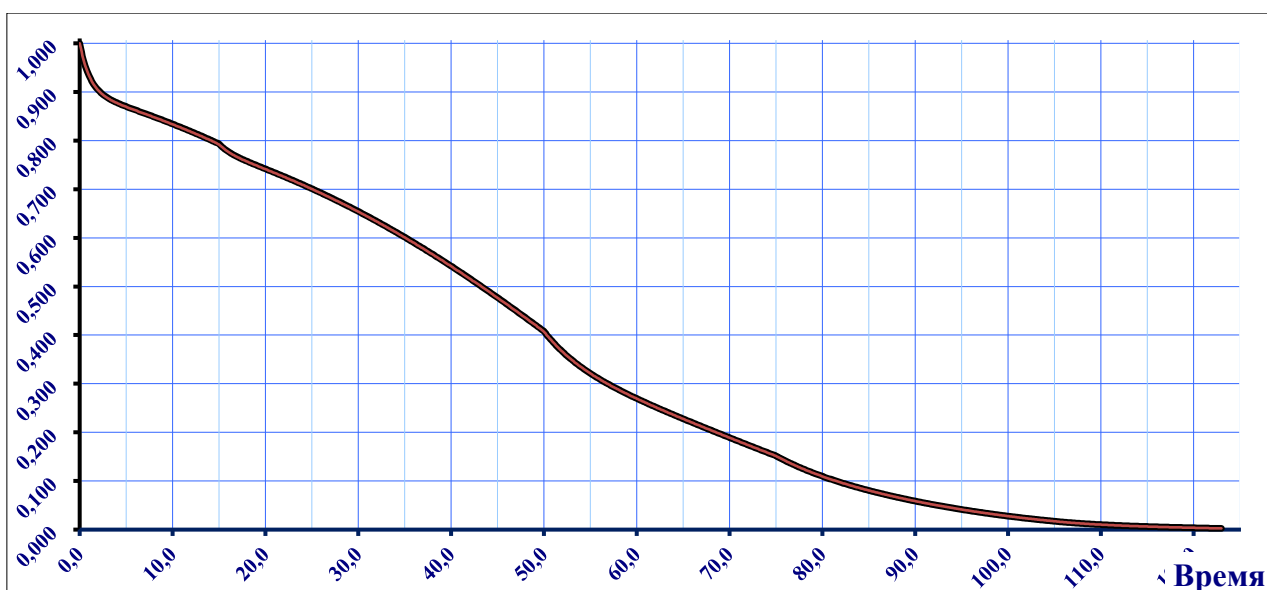


Рисунок 18 – Функция дожития  $G(t)$

### § 4.3. Структура комплекса программ

На Рисунке 19 показана блок-схема структуры комплекса программ, реализующего имитационное моделирование многостадийной стохастиче-

ской продуктивной системы и многостадийной системы (износа и старения) с диффузионными возмущениями.

Реализация программ осуществлена на языке программирования Borland Delphi 7.0.

Блок-схема состоит из 12 блоков. Блоки 1–3 соответствуют вычислительному эксперименту оптимального управления многостадийным продуктивным процессом. Соответствующие уравнения для компенсаторов точечных процессов и для диффузионных аналогов в системе с износом записаны в виде стохастических соотношений в блоке 4. В блоке 5 вычисляются известные параметры моделей. В блоке 6 неизвестные параметры подстраиваются при работе оптимизационной программы в блоке 9. В блоке 7 формируются дискретные (во времени) имитационные модели, соответствующие исходным математическим моделям. В блоке 8 реализуются дискретные модели в виде компьютерной программы. Полученные данные и параметры оптимизации сохраняются в текстовых файлах в блоке 10. В 10-м блоке также реализована возможность записи графиков. В 11 блоке результаты компьютерного моделирования сопоставляются с аналитическими функциональными зависимостями при помощи метрики Леви-Прохорова. В блоке 12 определяется оптимальный уровень интенсивности в задаче оптимизации системы «почти-точно-в-срок».

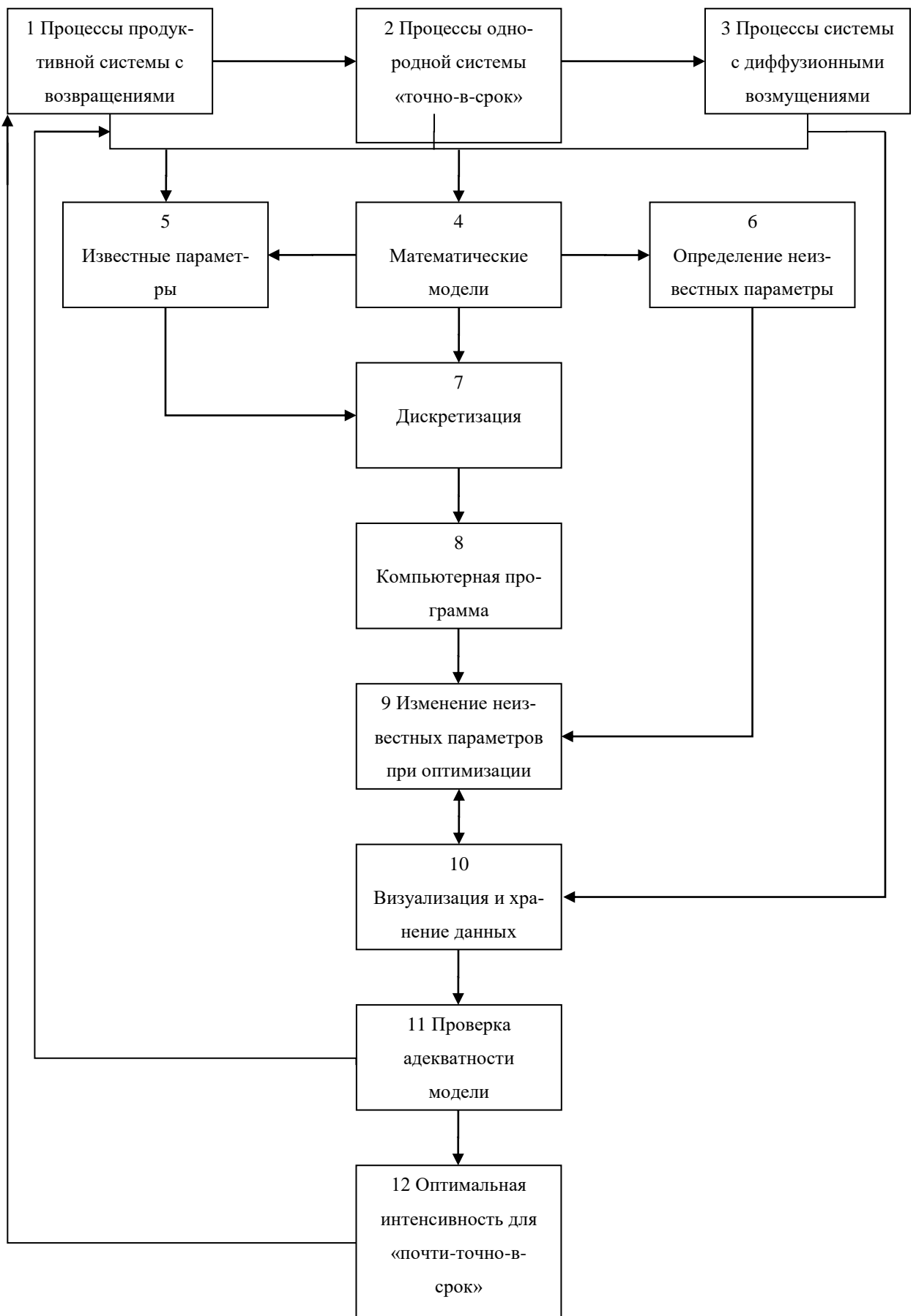


Рисунок 19 – Блок-схема последовательности этапов моделирования много-стадийных процессов выполнения операций

#### § 4.4. Проверка адекватности моделей

Адекватность методов численного компьютерного моделирования на каждом из этапов проверялась сопоставлением полученных в результате имитационного моделирования распределений с функциями, полученными аналитически. Разумеется, такое сопоставление возможно лишь в части случаев моделирования (как и при любой проверке адекватности).

Так, например, адекватность методов анализа и обработки данных мониторинга систолического, а также одновременно и диастолического артериального давления, данным, полученным в медицинском учреждении при нерегулярном обследовании, устанавливалась с помощью известной метрики Леви-Прохорова [7], [33], [41], [57]. Эта метрика используется в качестве вероятностного критерия достоверности выбранных параметров при заданном значении ошибки  $\varepsilon^*$ :

$$\varepsilon^* = L(F^{\text{exp}}, F^{\text{mod}}) = \inf\{ \varepsilon \geq 0 : F^{\text{exp}}(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F^{\text{mod}}(x) \leq F^{\text{exp}}(x + \varepsilon) + \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R} \}, \quad (143)$$

Так в системе моделирования рассматривается  $F^{\text{exp}}(x)$  – функция распределения, построенная для распределения количеств клеток по размеру теломер. Функция формировалась как традиционная эмпирическая функция распределения по экспериментальным данным. А функция распределения  $F^{\text{mod}}(x)$  была получена на основе имитационного компьютерного моделирования. Тогда оказалось, что модель по методу процесса выполнения в терминах точечных процессов дает значение  $\varepsilon^* = 0,21$ .

Данные, полученные на основе обработки традиционных показаний при измерении уровней давления, сравнивались с экспериментальными, по-

лученными на основе использования монитора [11], [33]. Результаты проверки привели к приемлемому значению  $\varepsilon^* = 0,19$ .

В случае сопоставления кривых дожития, в качестве широко применяемого критерия служит оценка усредненного метода наименьших квадратов, показывающего нормированную ошибку не более 0,05, что также является хорошим экспериментальным результатом.

При проверке адекватности методов имитационного моделирования для систем «точно-в-срок» проверка осуществлялась для однородных систем при  $K=20$  и  $T=5,0$ . Результат моделирования оценивался по сравнению при  $0 < x < T$  эмпирической функции распределения  $F^{\text{exp}}(x)$  момента выполнения продуктивного процесса с функцией, полученной аналитически для простого случая пуассоновского процесса в обратном времени:

$$F(x) = 1 - (T - t)^K / T^K. \quad (144)$$

Результат дал ошибку по метрике Леви-Прохорова, приведенной в (143) и для указанных  $T$  и  $K$  величину  $\varepsilon^* = 0,04$ , что считается для демонстрационных экспериментов очень хорошим результатом.

Моделирование осуществлялось на основе генерации псевдослучайных последовательностей, алгоритмы которых показаны в Приложении 1 и Приложении 2.

#### **§ 4.5. Выводы по главе 4**

Компьютерное моделирование стохастических продуктивных процессов осуществимо даже средствами доступных персональных компьютеров. Результаты соответствуют требованиям визуальных демонстрационных экспериментов. Ввиду этого основной проблемой при анализе таких систем является недостаточно развитая теоретическая база. Требуется значительные усилия для развития математических моделей и их анализа.

## Выводы и заключение

В настоящей диссертационной работе разработаны и исследованы новые модели для анализа процессов выполнения операций и возвратов в многостадийных продуктивных системах. Для продуктивных систем, функционирующих в случайной среде, установлены и доказаны критерии, которые обеспечивают стохастическое поведение траекторий «точно-в-срок» для процессов с неинтегрируемыми характеристиками. Для ряда моделей автором доказаны теоремы об оптимальном управлении многостадийными продуктивными системами. Также автором разработана модель многостадийного износа и старения, представляющая собой процесс выполнения операций с возмущениями диффузионного типа.

Основными результатами, полученными автором в диссертационной работе и выносимыми на защиту, являются:

1. Математические модели стохастических многостадийных продуктивных систем в терминах точечных процессов.
2. Математические модели многостадийных процессов выполнения операций в продуктивных системах класса «точно-в-срок».
3. Модели процессов выполнения операций в стохастических многостадийных продуктивных системах, функционирующих в случайной среде. Для этих систем найдены условия выполнения требования «точно-в-срок». Доказательства соответствующих теорем.
4. Математические модели управляемых многостадийных продуктивных систем. Условия оптимального управления этими системами в четырех постановках задачи. Доказательства соответствующих теорем.
5. Математические модели многостадийных процессов в продуктивных системах с износом и старением с описанием в терминах точечных процессов с возмущением диффузионного типа.
6. Комплекс программ для решения задач оптимального управления интенсивностями выполнения операций, управления многостадийными

процессами в системах с износом и старением для проведения численных экспериментов.

Полученные результаты могут применяться при разработке методов оптимального управления и планирования для широкого класса многостадийных стохастических продуктивных систем. При дальнейших исследованиях основное внимание может быть уделено задачам оптимального управления и статистики для оценки параметров распределённых продуктивных систем и частично наблюдаемых многостадийных систем.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов, В.Н. Молекулярные и физиологические механизмы старения : [в 2 томах] / В.Н. Анисимов – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Наука, 2008. – Т.1. – 481 с. – Т.2. – 434 с.
2. Анисимов, В.Н. Основные принципы построения многостадийной многоуровневой математической модели старения / В.Н. Анисимов [и др.] // Успехи геронтологии. – 2010. – Т. 23, № 2. – С. 163-167.
3. Анисимов, В.Н. Эволюция концепций в геронтологии / В.Н. Анисимов, М.В. Соловьев. – СПб.: Эскулап, 1999. – 130 с.
4. Ашофф, Ю Биологические ритмы : / Ю. Ашофф, К. Питтендрих, Т. Павлидис. – Мир, 1984. – 414 с.
5. Бурмистрова, В.Г. Некоторые способы оценивания момента пересечения границы процессом с разладкой : Материалы V Международной конференции и молодёжной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019); СБОРНИК ТРУДОВ ИТНТ-2019 / В.Г. Бурмистрова, А.А. Бутов, А.А. Коваленко [и др.] ; Самара, 2019. – С. 243-248.
6. Бутов, А.А. Теория случайных процессов : учеб. пособие / А.А. Бутов, К.О. Раводин. – Ульяновск: УлГУ, 2009. – 62 с.
7. Бутов, А.А. Относительная компактность и слабая сходимости процессов : учеб. пособие / А.А. Бутов, М.А. Волков, А.А. Коваленко, К.О. Раводин. – Ульяновск : УлГУ, 2012. – 32 с.
8. Бутов, А.А. Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов : учебное пособие. Ч. 1. Формальные математические основы стохастического моделирования в биологии и медицине / А.А. Бутов. – Ульяновск : УлГУ, 2013. – 20 с.
9. Бутов, А.А. Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов: учеб. пособие. Ч. 2. Объекты моделирования в физиологии, их особенности и математические методы описания и моделирования / А.А. Бутов. – Ульяновск : УлГУ, 2015. – 23 с.

10. Бутов, А.А. Анализ нарушений метаболизма как следствия активизации транспозонов в полиплоидных клетках / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // *Фундаментальные исследования*. – 2015. – № 2(27). – С. 6030-6031. Режим доступа : [http://www.rae.ru/fs/?section=content&op=show\\_article&article\\_id=10007881](http://www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10007881)
11. Бутов, А.А. Метод оптимизации процедур усреднения при анализе циркадных ритмов артериального давления / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // *Достижения и перспективы естественных и технических наук : сб. материалов 6 международной научно-практической конференции*. – Изд. «Логос». – 2015. – С. 39-45.
12. Бутов, А.А. К вопросу о роли полиплоидии при анализе нарушений метаболизма, обусловленных активизацией транспозонов / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // *Естественные и математические науки в современном мире : сб. статей по материалам 32 международной научно-практической конференции*. – Изд. «Сибак». – 2015. – №7(31). – С. 42-47. Режим доступа : <https://sibac.info/conf/naturscience/xxxii/42561>
13. Бутов, А.А. О процедурах усреднения и их оптимизации в процессе анализа суточных ритмов артериального давления / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // *Фундаментальные исследования*. – 2015. – № 8-3. – С. 462-465. Режим доступа : <https://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=38919>
14. Бутов, А.А. Операции усреднения и их оптимизация при исследовании циркадных ритмов артериального давления / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // *Естественные и технические науки*. – 2015. – № 7(85). – С.82-83.
15. Бутов, А.А. Стохастическая имитационная модель сопоставления возраста лабораторных животных (млекопитающих) и человека / А.А. Бутов, А.С. Шабалин // *Успехи геронтологии*. – 2015. – Т. 28. № 4. – С. 620-623.
16. Бутов, А.А. Математическая модель многостадийного старения адаптивных систем / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // *Фундаментальные*

исследования. – 2015. – № 9-2. – С. 219-222. Режим доступа: <http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=39077>

17. Бутов, А.А. Обзор математических моделей многостадийного старения / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Естественные и технические науки. – 2015. – № 7 (85). – С. 84-87.

18. Бутов, А.А. Обзор математических моделей процессов многостадийного старения и износа организма / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. статей по материалам XXXI международной заочной научно – практической конференции. – 2015. – №7(26). – С. 15-19.

19. Бутов, А.А. Стохастическая модель изменения количества жировой ткани человека по результатам исследований / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Достижения и перспективы естественных и технических наук : сб. материалов VI Международной научно-практической конференции. – 2015. – № 6. – С. 36-39.

20. Бутов, А.А. Теория случайных процессов и её дополнительные главы : учеб. пособие. Ч. 1. Введение в стохастическое исчисление / А.А. Бутов. – Ульяновск : УлГУ, 2016. – 48 с.

21. Бутов, А.А. Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов: учеб. пособие. Ч. 3. Старение как явление износа и разрушения. Модель Гомпертца / А.А. Бутов, А.А. Коваленко. – Ульяновск : УлГУ, 2016. – 19 с.

22. Бутов, А.А. Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов: учеб. пособие. Ч. 4. Явление многостадийности старения. Обобщение модели Гомпертца / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин. – Ульяновск : УлГУ, 2018. – 28 с.

23. Бутов, А.А. Управление по неполным данным: учеб. пособие. Ч. 1 / А.А. Бутов, М.А. Волков, А.А. Коваленко, С.А. Хрусталева. – Ульяновск : УлГУ, 2018. – 31 с.

24. Бутов, А.А. Математическая модель изменений в компенсации износа при старении / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2018. – № 4. – С. 14-17.
25. Бутов, А.А. Компьютерное моделирование дискретных многостадийных процессов разрушения и выполнения операций в стохастических продуктивных системах / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, М.В. Самохвалов // Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии. – 2019. – № 1. – С. 20-23.
26. Винер, Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине / Н. Винер. – издание 2-е – М.: Наука, 1983. – 344 с.
27. Гаврилова, М.С. Имитационные семимартингалные модели процессов изменения артериального давления : дис. ... канд. ф.-м. наук : 05.13.18 / М.С. Гаврилова. – Ульяновск, 2013. – 190 с.
28. Деллашери, К. Емкость и случайные процессы / К. Деллашери – М.: Мир, 1975. – 192 с.
29. Емельянов, И.П. Структура биологических ритмов человека в процессе адаптации: статистический анализ и моделирование / И.П. Емельянов, Н.Н. Василевский, – Наука, Сибирское отделение АН, 1986. – 182. с.
30. Ерешко, А.Ф. Анализ явных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений / А.Ф. Ерешко, Д.В. Филатова // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. – М.: ЛКИ, 2008. – Т. 32 (2). – С. 164–172.
31. Карев, М.А. Имитационная стохастическая модель динамики размножения транспозонов / М.А. Карев, А.А. Бутов // Естественные и технические науки. – 2013. – № 5(67). – С.310-315.
32. Карев, М.А. Усредненный суточный мониторинг артериального давления / М.А. Карев, А.А. Бутов, В.И. Рузов // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. статей по материалам 30 международной

научно-практической конференции. – Международный центр науки и образования. – 2015. – №6(25). – С. 31–35.

33. Карев, М.А. Моделирование стохастических объектов с переменным числом однородных структурных элементов : дис. ... канд. ф.-м. наук : 05.13.18 / Карев М.А. – Ульяновск, 2016. – 141 с.

34. Коваленко, А.А. Модели стохастических продуктивных систем: критерий процессов размножения и гибели «точно-в-срок» / А.А. Коваленко // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 2(26). – С. 145-149.

35. Коваленко, А.А. Несовместность двух классов математических моделей стохастических продуктивных систем / А.А. Коваленко // Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии. – 2019. – № 1. – С. 47-51.

36. Колмогоров, А.Н. Основные понятия теории вероятностей / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1974, – 120 с.

37. Колмогоров, А.Н. Об одном новом подтверждении законов Менделя / А.Н. Колмогоров // ДАН СССР. – 1940. – Т. 27. – С. 38–42.

38. Крутько, В.И. Общие причины, механизмы и типы старения / В.И. Крутько, А.А. Подколзин, В.И. Донцов // Успехи геронтологии. – 1997. – Т. 1. – С. 34–40.

39. Крутько, В.Н. Математические основания геронтологии / В.Н. Крутько, М.Б. Славин, Т.М. Смирнова. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 384 с.

40. Кузнецов, Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов / Д.Ф. Кузнецов. – СПб.: Наука, 1999. – 458 с.

41. Липцер, Р.Ш. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы) / Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

42. Липцер, Р.Ш. Теория мартингалов / Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

43. Марчук, Г.И. Геронтология in silico: становление новой дисциплины: математические модели, анализ данных и вычислительные эксперименты :

- сборник науч. тр. / Г.И. Марчук [и др.]. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 2-е изд. – 535 с.
44. Марчук, Г.И. Математические модели в иммунологии / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1985. – 240 с.
45. Марчук, Г.И. Математические модели в иммунологии и медицине / Г.И. Марчук, Л.Н. Белых. – М.: Мир, 1986. – 310 с.
46. Новосельцев, В.Н. Гомеостаз и здоровье: анализ с позиций теории управления / В.Н. Новосельцев // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №. 5. – С. 97–110.
47. Оловников, А.М. Принцип маргинотомии в матричном синтезе полинуклеотидов / А.М. Оловников // Доклады Академии Наук. – 1971. – Т. 201. – С. 1496-1499.
48. Петров, И.Б. Математическое моделирование в медицине и биологии на основе моделей механики сплошных сред / И.Б. Петров // Труды МФТИ, 2009. – № 1(1). – С. 5-16.
49. Подколзин, А.А. Количественная оценка показателей смертности, старения, продолжительности жизни и биологического возраста / А.А. Подколзин, В.Н. Крутько, В.И. Донцов // Профилактика старения. – 1999. – № 2. – С. 5–25.
50. Подколзин, А.А. Количественная оценка показателей смертности, старения, продолжительности жизни и биологического возраста : учебно-методическое пособие для врачей. / А.А. Подколзин [и др.]. – Москва : МГМСУ, 2001. – 56 с.
51. Полянсков, Ю.В. Имитационная дискретно-событийная стохастическая модель процесса разработки и согласования конструкторско-технологической документации на авиастроительном предприятии / Ю.В. Полянсков, А.А. Бутов и О.В. Железнов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. №. 1-5. – С. 1568-1572.

52. Ризниченко, Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г.Ю. Ризниченко. – М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, – 184 с.
53. Ризниченко, Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии / Г.Ю. Ризниченко. – М.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2011. – 560 с.
54. Самарский, А.А. Математическое моделирование / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320 с.
55. Смирнов, К.Ю. Разработка и исследование методов математического моделирования и анализа биоэлектрических сигналов / К.Ю. Смирнов, Ю.А. Смирнов. – СПб.: Научно-исследовательская лаборатория «ДИНАМИКА», 2001. – Т. 60. – 60 с.
56. Цыпкин, Я.З. Основы теории автоматических систем / Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1977. – 560 с.
57. Шабалин, А.С. Моделирование многостадийных процессов старения методами замены времени : дис. ... канд. ф.-м. наук : 05.13.18 / А.С. Шабалин. – Ульяновск, 2016. – 140 с.
58. Ширяев, А.Н. Статистический последовательный анализ / А.Н. Ширяев. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 1976. – 272 с.
59. Ahmed, S.A. Multichannel Blind Deconvolution Using the Stochastic Calculus for the Estimation of the Central Arterial Pressure / S.A. Ahmed, M.El-S. Waheed, M.E. Nermeen // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2010. – P. 1-21.
60. Arino, O. Mathematical modeling of the loss of telomere sequences / O. Arino, M. Kimmel, G.F. Webb // *Journal of Theoretical Biology*. – 1995. – Vol. 177. – P. 45-57.
61. Aycock, J. A brief history of just-in-time / J. Aycock // *ACM Computing Surveys*. – 2003. – 35(2). – P. 97-113.
62. Blagosklonny, M.V. Aging is not programmed: genetic pseudo-program is a shadow of developmental growth / M.V. Blagosklonny // *Cell Cycle*. – 2013. – Vol. 12. No. 24. – P. 3736-3742. DOI: <https://doi.org/10.4161/cc.27188>

63. Blasco, M.A. Telomere length, stem cells and aging / M.A. Blasco // *Nature Chemical Biology*. – 2007. – Vol. 3. – P. 640-649.
64. Branciamore, S. Epigenetics and Evolution : Transposons and the Stochastic Epigenetic Modification Model / S. Branciamore, A.S. Rodin, G. Goroshin, A.D. Riggs // *AIMS Genetics*. – 2015. – № 1(2). – P. 148-162.
65. Butov, A.A. Some estimates for a one-dimensional birth and death process in a random environment / A.A. Butov // *Theory Probab. Appl.* – 1991. – 36(3). – P. 578-583.
66. Butov, A.A.: Martingale methods for random walks in a one-dimensional random environment / A.A. Butov // *Theory Probab. Appl.* – 1994. – 39(4). – P. 558-572.
67. Butov, A.A. Random walks in random environments of a general type / A.A. Butov // *Stochastics and Stochastic Reports*. – 1994. – Vol. 48, Iss. 3-4. – P. 145-160. DOI: <https://doi.org/10.1080/17442509408833904>
68. Butov, A.A. On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death processes / A.A. Butov // *Statistics and Probability Letters*. – 2015. – Iss. 101. – P. 49-53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.02.021>
69. Butov, A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time / A.A. Butov, A.A. Kovalenko // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки*. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 518-531. DOI: [10.14498/vsgtu1633](https://doi.org/10.14498/vsgtu1633)
70. Chakrabarty, R. A production-inventory model with stochastic lead time and JIT set up cost / R. Chakrabarty, T. Roy, K. Chaudhuri // *International Journal of Operational Research*. – 2018. – Vol. 33, no. 2. – P. 161-178. DOI: [0.1504/IJOR.2018.095196](https://doi.org/10.1504/IJOR.2018.095196)
71. Chen, J. Stochastic frontier analysis of productive efficiency in China's Forestry Industry / J. Chen [et al.] // *Journal of Forest Economics*. – 2017. – Vol. 28. – P. 87-95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfe.2017.05.005>



72. Chia, N. Dynamics of gene duplication and transposons in microbial genomes following a sudden environmental change / N. Chia, N. Goldenfeld // *Physical Review*. – 2011. – № 83(2). – P. 021906.
73. Conforti, G. Bridges of Markov counting processes. Reciprocal classes and duality formulas / G. Conforti, C. Léonard, R. Murr, S. Roelly, // *Electron. Electronic Communications in Probability*. – 2015. – № 20(18). – P. 1-12.
74. Elliott, R.J. Time reversal of non-Markov point processes / R.J. Elliott, A.H. Tsoi // *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques*. – 1990. – Vol. 26(2). – P. 357-373.
75. Fazlirad, A. Application of Model Predictive Control to Control Transient Behavior in Stochastic Manufacturing System Models / A. Fazlirad, T. Freiheit // *Journal of Manufacturing Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 138, № 8. – P. 081007. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4031497>
76. Föllmer, H. Random fields and diffusion processes / H. Föllmer // *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV-XVII (1985-87)*. – 1988. – P. 101-203.
77. Frank, S.A. A multistage theory of age-specific acceleration in human mortality / S.A. Frank // *BMC biology*. – 2004. – Vol. 2, №. 1. – P. 16.
78. Gompertz, B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies / B. Gompertz // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. – 1825. – Vol. 115. – P. 513-585.
79. Grasman, J. Stochastic modelling of length dependent telomere shortening in *Corvus monedula* / J. Grasman, H.M. Salomons, S. Verhulst // *Journal of Theoretical Biology*. – 2011. – Vol. 282. – P. 1-6.
80. Gupta, S. Stochastic modelling and availability analysis of a critical engineering system / S. Gupta // *International Journal of Quality & Reliability Management*. – 2019. – Vol. 36, Issue 5. – P. 782–796. DOI: <https://doi.org/10.1108/IJQRM-07-2018-0167>
81. Harman, D. Aging: a theory based on free radical and radiation chemistry / D. Harman // *The Journal of Gerontology*. – 1956. – №11. – P. 98-300.

82. Hayflick, L. The serial cultivation of human diploid cell strains / L. Hayflick, P.S. Moorhead // *Experimental Cell Research*. – 1961. – Vol. 253. – P. 585-621.
83. Ho, L.S.T. Birth/birth-death processes and their computable transition probabilities with biological applications / L.S.T. Ho [et al.] // *Journal of mathematical biology*. – 2018. – Vol. 76, №. 4. – P. 911-944. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00285-017-1160-3>
84. Jacod, J. Time Reversal on Levy Processes / J. Jacod, P. Protter, // *The Annals of Probability*. – 1988. – 16 (2). – P. 620-641.
85. Killi, S. Just-in-Time Teaching, Just-in-Need Learning: Designing towards Optimized Pedagogical Outcomes / S. Killi, A. Morrison // *Universal Journal of Educational Research*. – 2015. – 3(10). – P. 742-750. DOI: <https://doi.org/10.13189/ujer.2015.031013>
86. Kowald, A. Can aging be programmed? A critical literature review / A. Kowald, T.B.L. Kirkwood // *Aging Cell*. – 2016. – Vol. 15, №. 6. – P. 986-998. DOI: <https://doi.org/10.1111/acel.12510>
87. Longla, M. Remarks on limit theorems for reversible Markov processes and their applications / M. Longla // *Journal of Statistical Planning and Inference*. – 2017. – № 187. – P. 28-43.
88. Makeham, W.M. On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables / W.M. Makeham // *J. Inst. Actuaries and Assur. Mag.* –1860. – № 8. – P. 301-310.
89. McGee, M. Just-in-Time Teaching in Statistics Classrooms / M. McGee, L. Stokes, P. Nadolsky // *Journal of Statistics Education*. – 2016. – 24(1). – P. 16-26.
90. Mitteldorf, J. Programmed and non-programmed theories of aging / J. Mitteldorf // *Russian Journal of General Chemistry*. – 2010. – T. 80, №. 7. – C. 1465-1475.
91. Mitteldorf, J. Can Aging Be Programmed? / J. Mitteldorf // *Biochemistry (Moscow)*. – 2018. – T. 83, № 12–13. – C. 1524-1533.

92. Pan, X. Optimal control of a stochastic production–inventory system under deteriorating items and environmental constraints / X. Pan, S. Li // *International Journal of Production Research*. – 2015. – Vol. 53, No. 2. – P. 607-628. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207543.2014.961201>
93. Pape, T. Adaptive just-in-time value class optimization for lowering memory consumption and improving execution time performance / T. Pape, C.F. Bolz, R. Hirschfeld // *Science of Computer Programming*. – 2017. – 140. – P. 17-29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scico.2016.08.003>
94. Perks, W. On some experiments on the graduation of mortality statistics / W. Perks // *Journal of the Institute of Actuaries*. – 1932. – № 63. – P. 12-40.
95. Privault, N. Markovian bridges and reversible diffusion processes with jumps. / N. Privault, J-C. Zambrini // *Annales de l'I.H.P. Probabilit'es et statistiques*. – 2004. – № 40(5). – P. 599-633.
96. Proctor, C.J. Modelling telomere shortening and the role of oxidative stress / C.J. Proctor, T. Kirkwood // *Mechanisms of Ageing and Development*. – 2002. – Vol. 123. – P. 351-363.
97. Qi, Q. *Mathematical modelling of telomere Dynamics* / Q. Qi. – Nottingham, 2011. – 210 p.
98. Sears, K.E. Ontogenetic scaling of metabolism, growth and assimilation: testing metabolic scaling theory with *Manduca sexta* larvae / K.E. Sears [et al.] // *Physiological and biochemical zoology*. – 2012. – № 85. – P. 159-173.
99. Shan, E. Transposon amplification in rapid intrabaraminic diversification / E. Shan // *Journal of Creation*. – 2009. – № 23(2). – P. 110-117.
100. Stimberg, F. Inference in continuous-time change-point models / F. Stimberg [et al.] // *Advances in Neural Information Processing Systems*. – 2011. – № 24. – P. 2717–2725.
101. Sugimori, Y. Toyota production system and kanban system materialization of just-in-time and respect-for-human system. / Y. Sugimori, K. Kusunoki, F. Cho, S. Uchikawa // *The International Journal of Production Research*. – 1977. – № 15(6). – P. 553-564. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207547708943149>

102. Sutton, G.M. Biological Aging Alters Circadian Mechanisms in Murine Adipose Tissue Depots / G.M. Sutton [et al.] // *Age*. – 2013. – № 35(3). – P. 533 – 547.
103. Taylor, A.W. *Physiology of Exercise and Healthy Aging* / A.W. Taylor, M.J. Johnson. – Human Kinetics, 2008. – 304 p.
104. Van Raamsdonk, J.M. Mechanisms underlying longevity: A genetic switch model of aging / J.M. Van Raamsdonk // *Experimental gerontology*. – 2018. – Vol. 107. – P. 136-139. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.exger.2017.08.005>
105. Volterra, V. *Variazione e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* / V. Volterra // *Mem. Accad. naz. Lincei*. – 1926. – ser. VI (vol. II). – P. 31-113.
106. Weinert, B.T. Invited review: Theories of aging / B.T. Weinert, P.S. Timiras // *Journal of applied physiology*. – 2003. – Vol. 95, №. 4. – P. 1706–1716. DOI: <https://doi.org/10.1152/jappphysiol.00288.2003>
107. Yang, P. A Birth and Death Process Model with Blocking Growth and its Numerical Simulation Research / P. Yang [et al.] // 2018 3rd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM 2018). Atlantis Press. – 2018. – P. 16-19. DOI: <https://doi.org/10.2991/msam-18.2018.4>
108. Yavuz, M. Production smoothing in just-in-time manufacturing systems: a review of the models and solution approaches. / M. Yavuz, E. Akçali // *International Journal of Production Research*. – 2007. – № 45(16). – P. 3579-3597. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207540701223410>

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

1. Фрагмент программы для генератора псевдослучайных чисел, построенного на линейно-конгруэнтной последовательности. Период для данного генератора равен  $2^{48}$ .

```
#include <dos.h>
unsigned long _x0=0,_x1=0,_x2=0;
void rnd_set(void)
    {struct time t;
  gettime(&t);
  _x0=t.ti_hund*41;
  _x1=t.ti_hund*43;
  _x2=t.ti_hund*57;
  }

long double urv(void)
  {unsigned long h0,h1,h2;
  h0=18829*_x0+58525;
  h1=18829*_x1+6909*_x0+47936;
  h2=18829*_x2+6909*_x1+7*_x0;
  _x0=h0 & 0xFFFF; h1+=h0 >>16;
  _x1=h1 & 0xFFFF; h2+=h1 >>16;
  _x2=h2 & 0xFFFF;
  return ((long double)_x0)/2.81474976710656e14+
  ((long double)_x1)/4.294967296e9+
  ((long double)_x2)/6.5536e4;
  }
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

2. Фрагмент программы для модели продуктивной системы с невырожденным процессом возвращения.

```
while (t<=Tb) do
  begin
    progressbar1.Position:=round(100*t/tb);
    //Nt:= 0.0;
    Ft:=0.0;
    Gt:= 0.0;

    //процесс размножения и гибели
    for k:=0 to M-1 do
      begin
        if random<qw*asd[k]*del then
          begin
            if (k<>0) then
              if (asd[k]>0) then
                begin
                  asd[k]:=asd[k]-1;
                  asd[k-1]:=asd[k-1]+2;
                end;
            end;
          if random<d*asd[k]*del then
            if (asd[k]>0) then
              asd[k]:=asd[k]-1;
```

```

//1 часть
if random<b*zxc[k]*del then
begin
  if (k<>0) then
    if (zxc[k]>0) then
      zxc[k]:=gtk[k]+1;
end;
if random<d*zxc[k]*del then
  if (gtk[k]>0) then
    zxc[k]:=gtk[k]-1;

//
//процесс возвращения
for l:=1 to k do
begin
  if random<r*asd[k]*del then
    if (k<>0) then
      if (l<>k) then
        if (asd[k]>0) then
          begin
            asd[k]:=asd[k]-1;
            asd[k-1]:=asd[k-1]+1;
          end;
end;
end;

```

```

//2 часть
for nn:=1 to k do
begin
  if random<u*zxc[k]*del then
    if (k<>0) then
      if (1<>k) then
        if (zxc[k]>0) then
          begin
            zxc[k]:=zxc[k]-1;
            zxc[k-1]:=zxc[k-1]+1;
          end;
        end;
      end;
    end;
  //

  //
  if random<t*zxc[k]*del then
    if (zxc[k]>0) then
      begin
        zxc[k]:=zxc[k]-1;
        asd[k]:=asd[k]+1;
      end;
    end;
  //

```



```

//
for k:=0 to M-1 do
  Ft:=Ft+asd[k];
for k:=0 to M-1 do
  Gt:=Gt+zxc[k];
Ns := Gs + Fs;
if (s>step) then
begin
  st:=st+stk;
  srednee[y]:=(srednee[y]*(j-1)/(j)+Ns/j);
  inc(y);
end;
Chart1.SeriesList[i].AddXY(s,Ns,"");
if Ns<=0 then
  break;
deltf:=0.2/(qw*Ns);
deltg:=0.2/(bg*Ns);
if deltg<deltf then
  del := deltg else
  del := deltf;
t:=t+del;
end;
end;

```