Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кремлевская ул., д.18, Казань, 420008
тел. (843) 2926977, факс (843) 2924448
email: public.mail@kpfu.ru
ОКПО 02066730, ОГРН 1021602841391,
ИНН/КПП 1655018018/165501001

8.10.2019 № 04-09/1586

На № _____ от _____

В диссертационный совет
Д 212.278.02
при ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»

Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу Грехова Михаила Владимировича
“Гладкие целые модели алгебраических торов”,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Целые модели алгебраических групп интересны в связи с теоретико-числовыми приложениями. Исторически одной из первых рассматривалась задача о редукциях в положительную характеристику абелевых многообразий, определённых над числовыми полями. Как известно, существование хороших редукций может нарушаться в конечном множестве максимальных идеалов дедекиндова кольца. Модель Нерона представляет собой наилучшую замену абелевой схемы над кольцом с сохранением гладкости многообразия. Что касается аффинных алгебраических групп, они допускают аналогичные модели только при достаточно серьёзных ограничениях. Видимо по этой причине в аффинном случае на модели Нерона внимание было обращено существенно позднее. Им посвящена одна из глав известной монографии, опубликованной в 1990 г. (S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud).

Для алгебраических торов вопрос о существовании моделей Нерона всегда решается положительно, если отказаться от условия конечного типа в их определении. Модели Нерона уникальны среди всех гладких моделей, но определяются неконструктивно. В связи с этим возникает вопрос о явном описании этих моделей, которому собственно и посвящена диссертация М.В. Грехова.

В главе 2 исследован алгоритм построения моделей Нерона для анизотропных алгебраических торов размерности 2 над локальными полями характеристики нуль. В качестве исходного пункта были использованы стандартные

730030

целые модели торов, появившиеся ранее в работах В.Е. Воскресенского. Причина, по которой в диссертации рассматриваются только анизотропные торы состоит в том, что именно для них модели Нерона имеют конечный тип. В размерности 2 имеется 10 различных типов таких торов. Для каждого из них найдены уравнения, задающие модель Воскресенского, и последовательность дилатаций, приводящая эту модель к гладкой схеме. Тем самым становится возможным выписать в явном виде систему уравнений, задающую модель Нерона, что и сделано в диссертации в большинстве случаев. Как показывают вычисления, эти уравнения весьма сложны даже для торов размерности 2, причём громоздкость заметно возрастает, по мере того как увеличивается степень поля разложения тора над исходным полем.

Глава 3 совершает переход к глобальному полю характеристики нуль. Здесь доказывается для произвольного тора, определённого над конечным расширением поля рациональных чисел, совпадение его стандартных целых моделей, полученных из двух различных подходов. Этот результат важен для обоснования возможности построения модели Нерона в явном виде, хотя в самой диссертации набора уравнений, задающих модель Нерона глобально над кольцом целых элементов числового поля, не приводится ни в одном случае. В конце диссертации рассмотрены максимальные торы в полупростых алгебраических группах типа A_n и B_n при определённом условии на группы Галуа полей разложения. Изучены слои стандартных моделей этих торов. Эта часть работы намечает направление дальнейшего исследования интересного класса алгебраических торов произвольной размерности.

Замечания.

В начале главы 1 излагаются некоторые базовые факты из теории групповых схем. Выглядит нелогично, что наряду с другими примерами не приводятся определения постоянных групповых схем и функторов ограничения Вейля, которые в дальнейшем используются для явного задания некоторых торов.

Иногда встречаются опечатки в формулах. На стр. 22 $\hat{G}(k)$ следует заменить на $\hat{G}(\bar{k})$. На стр. 25 равенство $G(L) = D(\hat{G})$ следует исправить как $G_L = D(\hat{G})$ (это равенство групповых схем, а $G(L)$ — группа L-значных точек). На стр. 28 в формуле $X_{\wp} = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec}_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$ нужно заменить $\operatorname{Spec} k$ на S. В конце стр. 28 фразу "G-алгебра Хопфа" нужно поправить.

Определение 1.4 на стр. 29 более правильно было бы назвать известным критерием гладкости групповых схем, и следовало бы дать соответствующие ссылки. Общее определение гладкости, пригодное для схем, не являющихся групповыми, в диссертации почему-то не приводится.

На стр. 37 говорится об алгоритме построения модели Нерона, но в действительности описывается только процесс сглаживания при помощи дилатаций, который в книге [18] не исчерпывает всех этапов построения. Следовало бы точно сформулировать утверждение, на основании которого можно сделать вывод, что определённые последовательности дилатаций приводят к целой модели алгебраического тора, удовлетворяющей свойству универсальности для морфизмов из гладких схем, которое характеризует модели Нерона. Можно отметить, что лишние дилатации нарушают это свойство.

При рассмотрении случая 3) на стр. 42 многочлен, задающий расширение L поля k взят вида $x^2 - b$, т.е. коэффициент при x предполагается равным нулю. Однако многочлен Эйзенштейна степени 2 может содержать ненулевой моном степени 1, и в случае, когда поле вычетов имеет характеристику 2, от него не всегда можно избавиться заменой переменной, оставаясь в классе многочленов Эйзенштейна. Другие случаи рассмотрены при аналогичных упрощениях.

В предложении 3.1 величины c_j, m, n не понятны из формулировки пункта 2) на стр. 65, а фразу "$I \equiv J$ по модулю кручения" следовало бы переформулировать, например в виде "I является решёткой (бесконечного ранга) в векторном пространстве J".

На стр. 95 говорится, что расширение L/k вполне разветвлено. Но здесь это высказывание не имеет смысла, так как рассматривается конечное расширение глобального поля. Можно говорить только о том, что расширение разветвляется или вполне разветвляется в каких-то простых идеалах кольца целых элементов. Известно, что множество таких идеалов конечно, и следовательно расширение заведомо не может разветвляться всюду. По всей видимости, для построения модели Нерона нужно учитывать слои стандартной целой модели, соответствующие всем простым идеалам, в которых расширение полей разветвляется, пусть даже с индексом ветвления меньшим степени расширения.

Далее, группа Галуа G действует тривиально на факторгруппе $\hat{T}/I\hat{T}$ по построению, а тогда G действует тривиально и на групповом кольце. Становится непонятно, почему во 2-ом абзаце на стр. 96 говорится о кольце инвариантов $(r_k[\hat{T}/I\hat{T}])^G$.

В то же время некоторые аргументы, приводимые в тексте, переусложнены. В качестве примера можно привести простое утверждение о том, как ядро гомоморфизма групповых колец описывается в терминах ядра гомоморфизма групп (см. доказательство предложения 3.1). Длинные объяснения даются для вычисления орбит на стр. 87 и стр. 92, хотя общеизвестен факт, что для любой неприводимой системы корней орбитой корня является множество всех корней фиксированной длины.

Несмотря на отдельные неаккуратности, в диссертации решены интересные задачи. Можно дискутировать о том, насколько явным является описание моделей Нерона торов над глобальным полем, но этот случай существенно более сложен по сравнению с локальным случаем и представляет собой тему для последующих исследований.

Наиболее важные итоги диссертационной работы состоят в построении моделей Нерона анизотропных алгебраических торов размерности 2 над локальными полями и доказательстве совпадения двух стандартных целых моделей торов над глобальными числовыми полями. Эти результаты представлены в законченном виде, а их значимость подтверждается опубликованием в российских научных журналах. Они могут найти дальнейшие применения в разработке арифметических вопросов теории алгебраических групп. Соискатель освоил технику работы со сложными алгебро-геометрическими объектами. Имеющиеся неточности в изложении не носят принципиальный характер.

С учётом вышесказанного считаю, что представленная работа “Гладкие целые модели алгебраических торов” удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, а её автор, Михаил Владимирович Грехов, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
(01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел),
профессор кафедры алгебры и математической логики
Казанского (Приволжского) федерального университета

С.М. Скрябин

Институт математики и механики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлёвская 18, г. Казань 420008
E-mail: serge.skryabin@kpfu.ru
7 октября 2019 г.

Проректор по научной
деятельности КФУ

Данис Карлович Нургалиев