На правах рукописи

Коваленко Анатолий Александрович

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСТАДИЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОДУКТИВНЫХ СИСТЕМ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ульяновск – 2019

Работа выполнена на кафедре прикладной математики в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ульяновский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, **Бутов Александр Александрович**
Официальные оппоненты:	**Жданов Александр Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», кафедра высшей математики и прикладной информатики, заведующий кафедрой
	Крашенинников Виктор Ростиславович, доктор технических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет», кафедра прикладной математики и информатики, заведующий кафедрой
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»

Защита диссертации состоится 18 декабря 2019 г. в 10-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.278.02 при ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет», расположенном по адресу: г. Ульяновск, ул. Набережная р. Свияги, 106, корп. 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа - https://www.ulsu.ru, с авторефератом - на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации - https://vak.minobrnauki.gov.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 432970, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан «___» ________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Волков М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическим и имитационным компьютерным моделям многостадийных процессов в стохастических продуктивных системах (и соответствующих процессах выполнения операций) посвящено большое количество классических и современных исследований, научных работ[1,2,3,4,5,6,7]. В современном промышленном производстве, как и при высокотехнологичной организации сельскохозяйственного производства, наблюдается определенная общность подходов и методов организации продуктивных процессов, обусловленная возможностями планирования. В значительной части работ такие исследования сводятся к логистическим (детерминистским) задачам. При этом теоретическая основа для описания и моделирования последовательных конечных процессов выполнения конструкторско-технологических и производственных операций, предусматривающих такие явления, как случайные срывы сроков, возвращения на переработку на любом из этапов разработки или изготовления, управление интенсивностями выполняемых работ, разработана недостаточно. И прежде всего из-за недостаточного учета стохастических явлений. Такие исследования также востребованных в достаточно новых для производства (а также для обучения, лечения, программирования и др.) системах, известных как *точно-в-срок* (являющихся важнейшим частным случаем многостадийных продуктивных систем выполнения операций). Они также находятся в начальной фазе разработки, особенно для стохастических случаев. Также востребованы и не исследованы возможности управления такими системами (необходимого именно из-за случайных воздействий на систему).

Отметим, что модели, применимые для стохастических продуктивных систем, могут рассматриваться в качестве первичных стохастических описаний процессов жизненного цикла (термин, используемый в конструировании и производстве, и воспринятый из биологии). Так, наряду с моделированием продуктивных систем в последние годы широко исследуются (как математическими, так и компьютерными методами) многостадийные процессы старения. Процессам старения, износа и разрушения посвящено большое число работ. Это обусловлено не только задачами противостояния разрушению (или его планируемой организации), но и универсальностью явления, которое, в отличие от развития, присуще практиче-

---

[1] Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Физматлит, 2001. – 2-е издание, исправленное – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-X.

[2] Chen J. Stochastic frontier analysis of productive efficiency in China's Forestry Industry / J. Chen [et al.] // Journal of Forest Economics. – 2017. – Vol. 28. – P. 87-95.

[3] Fazlirad A. Application of Model Predictive Control to Control Transient Behavior in Stochastic Manufacturing System Models / A. Fazlirad, T. Freiheit // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2016. – Vol. 138, № 8. – P. 081007.

[4] Gupta S. Stochastic modelling and availability analysis of a critical engineering system / S. Gupta // International Journal of Quality & Reliability Management. – 2019. – Vol. 36, Issue 5. – P. 782–796.

[5] Pan X. Optimal control of a stochastic production–inventory system under deteriorating items and environmental constraints / X. Pan, S. Li // International Journal of Production Research. – 2015. – Vol. 53, No. 2. – P. 607-628.

[6] Sugimori Y. Toyota production system and kanban system materialization of just-in-time and respect-for-human system. / Y. Sugimori, K. Kusunoki, F. Cho, S. Uchikawa // The International Journal of Production Research. – 1977. – № 15(6). – P. 553-564.

[7] Yavuz M. Production smoothing in just-in-time manufacturing systems: a review of the models and solution approaches. / M. Yavuz, E. Akçali // International Journal of Production Research. – 2007. – № 45(16). – P. 3579-3597.

ски всем материальным объектам. В различных моделях вместе с описанием стадий разрушения для таких систем учитываются явления системной адаптации, репарации и адаптивных изменений режимов функционирования. Поэтому, математические описания (модели) заведомо содержат непрерывные компоненты (как правило, в форме диффузионных процессов). При этом описания как процессов выполнения в продуктивных системах, так и ступенчатые изменения структур живых объектов в процессе старения (например, при укорочении теломер, размножении транспозонов, при нарушениях циркадных ритмов), укладываются в математическое описание в терминах точечных (считающих) процессов, обладающих общими свойствами – ограничениями как в количестве скачков, так и во времени изменений. Таким образом, можно говорить об единообразном подходе для широкого класса процессов выполнения (включая в него и разрушение).

В диссертационной работе рассматриваются многостадийные процессы в стохастических продуктивных системах (и соответствующих процессов выполнения операций) в достаточно общих случаях, разрабатываются их математические модели, формируются соответствующие имитационные компьютерные модели на основе численных методов, учитывающих алгоритмические особенности моделирования процессов.

При этом важными, рассматриваемыми в диссертационной работе, особенностями, являются стохастический характер процессов выполнения операций и возможности управления этими процессами.

Объектом исследования являются продуктивные системы с многостадийными процессами выполнения операций.

Предметом исследования выступают математические и имитационные компьютерные модели многостадийных продуктивных систем, а также многостадийных явлений износа и старения.

Целью диссертационной работы является формирование, разработка и развитие математических, а также компьютерных имитационных моделей многостадийных процессов в стохастических продуктивных системах, включающих описания процессов выполнения операций и процессов возвращений. Также при построении моделей требуется проведение анализа условий существования моделей таких систем, в т. ч., систем выполнения операций «точно-в-срок», а также исследование возможностей оптимального управления такими системами, в терминах точечных процессов. Также необходимо моделирование, анализ и сопоставления с продуктивными многостадийными системами с износом (старением) или разрушением. В общую цель исследования наряду с аналитическими методами включается разработка алгоритмов и численных методов для задач компьютерной реализации математических моделей в виде комплекса компьютерных программ.

Задачи, решаемые в диссертационной работе для достижения цели:

1. Разработать и исследовать математические модели процессов многостадийного выполнения операций в стохастических продуктивных системах в терминах точечных процессов.

2. Разработать математические модели управляемых многостадийных стохастических систем и решить отдельные задачи об оптимальном управлении такими системами.

3. Разработать и исследовать математические модели явлений износа и старения как формы многостадийного (в т. ч., продуктивного) процесса в терминах точечных процессов и при условии диффузионных возмущений.

4. Разработать комплекс программ для реализации стохастических численных методов имитационного моделирования для исследуемых моделей на языке высокого уровня.

Методы исследования, применяемые и разрабатываемые в диссертации, основаны принятом в современной теории случайных процессов, траекторном (семимартингальном) представлении точечных (считающих) процессов и процессов диффузионного типа. Также в работе используются стандартные методы оптимизации для случайных процессов с интегральными функционалами потерь квадратичного вида. При разработке методов и моделей, при аналитических исследованиях и доказательствах теоретических результатов использованы методы, разработанные в ряде работ А. А. Бутова[8], Р. Ш. Липцера и А. Н. Ширяева[9]. Компьютерные модели разработаны традиционными для имитационного стохастического моделирования численными методами, включающими разностные схемы (на основе метода Эйлера-Маруямы), сочетаемые с генерацией остаточных моментов остановки при неограниченном росте интенсивностей точечных процессов. При создании комплекса программ применяются стандартные методы программирования на языке Borland Delphi 7.0. Адекватность построенных компьютерных моделей проверяется сопоставлением результатов компьютерного эксперимента и аналитических зависимостей.

Научная новизна. Основные, представленные в диссертационной работе, результаты являются новыми и актуальными. В частности, в работе разработана схема (представляющая собой метод общего математического описания исследуемых систем) построения новых математические моделей на основе описаний в траекторных семимартингальных терминах. В соответствии с разработанным здесь методом в диссертации создан ряд стохастических математических моделей, а также компьютерных имитационных моделей, позволяющих анализировать и исследовать продуктивные системы с многостадийными процессами выполнения операций в терминах точечных процессов, найдены критерии выполнения операций «точно-в-срок» для систем в случайной среде, разработаны математические модели управляемых многостадийных стохастических систем и решен ряд задач об оптимальном управлении такими системами. В работе также разработаны и исследованы математические модели многостадийного износа и старения как формы многостадийного (в т. ч., продуктивного) процесса в терминах точечных процессов и при условии диффузионных возмущений, разработан комплекс программ

[8] Butov A.A. Random walks in random environments of a general type / A.A. Butov // Stochastics and Stochastic Reports. – 1994. – Vol. 48, Iss. 3-4. – P. 145-160.
[9] Липцер Р.Ш. Теория мартингалов / Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

для соответствующего численного стохастического имитационного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Математические модели стохастических многостадийных продуктивных систем в терминах точечных процессов, включая системы «точно-в-срок», процессы в случайной среде, управляемые неоднородные системы.
2. Теоремы о необходимых и достаточных условиях «точно-в-срок» в общей модели процессов в случайной среде.
3. Теоремы об оптимальном планировании этапов выполнения с однородными многостадийными процессами «точно-в-срок».
4. Теорема об оптимальной интенсивности продуктивной системы с нарушениями условий «точно-в-срок».
5. Математические модели многостадийных процессов в системах с износом в терминах точечных процессов с возмущением диффузионного типа.
6. Комплекс программ на основе численных методов, модифицированных для моделирования процессов «точно-в-срок» и точечных процессов с возмущением диффузионного типа.

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечена корректными формулировками задач, строгостью формулировок и доказательств лемм, теорем и предложений, использованием современных и актуальных методов при построении алгоритмов, программировании и имитационном компьютерном моделировании на основе использования и развития численных методов, а также вследствие применения современных методов установления адекватности.

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в разработке математических методов моделирования многостадийных стохастических продуктивных систем, систем «точно-в-срок», критериев существования таких систем, условий оптимальности управления ними, анализе процессов многостадийности систем с износом и старением, а также методов численного моделирования и программных реализаций компьютерных моделей.

Практическая значимость работы заключается в том, что результаты, а также методы, полученные в ней, могут использоваться в теории и практике организации и управления продуктивных (в том числе, производственных) систем, в управлении процессами «точно-в-срок» в педагогике, в медицине и биологии, в программировании. Комплекс программ, разработанный в диссертационной работе, может иметь практическое применение в исследованиях продуктивных систем.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались на следующих конференциях: V Международной конференции и молодёжной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019) (Самара, 2019). VI Международная научно-практическая конференция «Достижения и перспективы естественных и технических наук» (Ставрополь, 2015 г.); XXXI международная научно-практическая конференция «Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии и биологии» (Москва, 2015 г.); XXXII Международная научно-практическая конференция «Естественные и математические науки в современном мире» (Новосибирск, 2015 год).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 15 работ, включая 7 в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК (из них 1 статья, индексируемая Web of Science).

Личный вклад автора. Постановку задач, решаемых в диссертационной работе, осуществил научный руководитель профессор Бутов А. А. Также профессор Бутов А. А. разработал общие математические методы стохастического траекторного описания систем и процессов «точно-в-срок» в терминах процессов в обратном времени. Выполненный в диссертационной работе анализ, формирование конкретных основных исследуемых математических моделей проведены самостоятельно. Доказательства всех приведенных в диссертации лемм, теорем предложений, замечания и выводы выполнены и получены автором самостоятельно. Также построение и разработка численных алгоритмов и соответствующих симуляционных моделей осуществлены автором самостоятельно.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырех глав (каждая из которых завершается выводами), общих выводов и заключения, списка литературы из 108 наименований источников (расположенных в алфавитном порядке по первому автору в ссылке), а также двух приложений. Общий объем диссертационной работы составляет 121 страницу, в том числе 116 страниц основного текста (включая 12 страниц списка литературы) и 5 страниц приложений. Диссертация содержит 19 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** показана актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования, выбраны методы, раскрыта научная новизна, теоретическая и практическая значимость проведенных исследований, перечислены основные положения, выносимые на защиту. Кратко представлено содержание диссертации.

В **Главе 1** диссертационной работы формулируется проблема, приведен краткий обзор и осуществляется построение математической модели многостадийных процессов выполнения операций в стохастических продуктивных системах в терминах точечных процессов.

В **параграфе 1.1** представлено описание объекта моделирования и краткий обзор методов и моделей, посвященных математическому описанию стохастических продуктивных систем и их важному классу – «точно-в-срок».

В **параграфе 1.2** построена первичная (общая) математическая модель – дано строгое формальное математическое описание в траекторных (семимартингальных) терминах. Здесь же даны все основные определения для компонент описания математической модели.

Рассматривается продуктивный процесс, заключающийся в выполнении конечного количества *K* операций (*K* - положительное и целое). В модели предполагается, что процесс выполнения формализован как процесс $X=(X_t)_{t\geq 0}$, заданный на некотором стохастическом базисе $\mathcal{B}$ с обычными условиями Деллашери[10]. Для процесса выполнения (или процесса выполнения K операций), предполагается, что его начальное значение $X_0 = K \in \{1, 2, \ldots\}$, и для всех $t \geq 0$ выполняется $X_t \in \{0, 1, \ldots, K\}$. Процесс выполнения конечен, если $P\{\tau < \infty\} = 1$, где $\tau = \inf\{t: t > 0, X_t = 0\}$ - момент выполнения всех K операций (достижения нулевой границы процессом X).

Конечный процесс выполнения является процессом *точно-в-срок* T, если существует такое число $T \in (0, \infty)$, что $P\{\tau \leq T\} = 1$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ справедливо $P\{\tau > T - \varepsilon\} > 0$.

В работе преимущественно рассматриваются последовательные процессы выполнения, для которых выполнению любой i-й операции с номером $i \in \{1, 2, \ldots, K-1\}$ могут предшествовать только значения процесса $j \in \{i+1, i-1, i-2, i-2, \ldots, 1, 0\}$. В случае, если i-й операции может предшествовать только операция с номером $j \in \{i+1\}$, то процесс X называется процессом последовательного выполнения без возвращений (в противном случае – с возвращением; см. Рисунок 1).

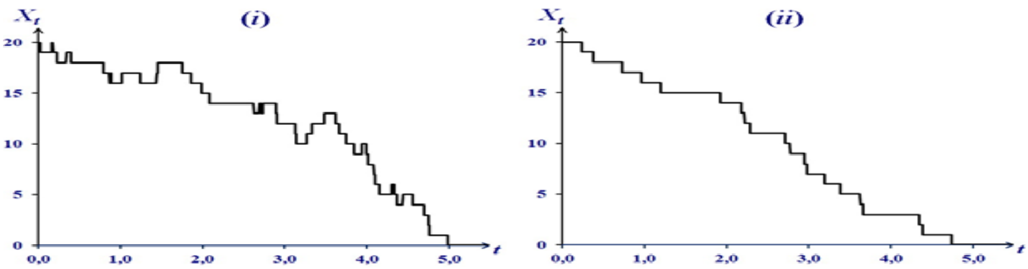

Рисунок 1 – Траектории продуктивного процесса *точно-в-срок* T с T=5 и K=20. Область (i) – траектория процесса с возвращениями, область (ii) – траектория процесса без возвращений

Любой последовательный процесс выполнения (в т. ч.. с возвращением) может быть единственным образом представлен в виде

$$X_t = K + A_t - B_t,$$

где $A_0 = B_0 = 0$, а неубывающие процессы $A = (A_t)_{t \geq 0}$ и $B = (B_t)_{t \geq 0}$ равны, соответственно,

$$A_t = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s \cdot I\{\Delta X_s \geq 1\} \quad \text{и} \quad B_t = \sum_{0 < s \leq t} (-\Delta X_s) \cdot I\{\Delta X_s \leq -1\},$$

При этом процесс возвращений A без поглощений в виде

$$A_t = A_t(0) + \sum_{i=1}^{K-1} i \cdot A_t(i),$$

а в случае с поглощающим нулевым состоянием,

$$A_t = \sum_{i=1}^{K-1} i \cdot A_t(i),$$

---

[10] Деллашери К. Емкость и случайные процессы / К. Деллашери – М.: Мир, 1975. – 192 с.

где $(A_t(i))_{t\geq 0}$ - точечные считающие процессы с интенсивностями скачков $a_t(i)\geq 0$. Их компенсаторы в разложении Дуба-Мейера равны для $i=0$

$$\tilde{A}_t(0)=\int_0^t a_s(0)\cdot I\{X_s=0\}ds\text{, а при } i\geq 1\ \ \tilde{A}_t(i)=\int_0^t a_s(i)\cdot I\{1\leq X_s\leq K-i\}ds.$$

Для считающего процесса B, являющегося числом выполнений операций,

$$\tilde{B}_t=\int_0^t b_s\cdot\ I\{1\leq X_s\}ds\ \ \text{и}\ \ \tilde{B}_t=\int_0^t \beta_s\cdot X_s ds,$$

В **параграфе 1.3** рассматриваются однородные процессы выполнения операций (т.е., представляющие собой в обратно времени пуассоновские процессы при условии фиксированного конечного значения), без возвращений операций на доработку. Рассматриваются методы описания таких систем в терминах процессов в обратном времени. Приводится семимартингальное разложение такого процесса. В заключение параграфа доказана Лемма 1, являющаяся важной при дальнейшем анализе и решении задач оптимального управления системами «точно-в-срок».

В **параграфе 1.4** приведено теоретическое обобщение – построена математическая модель процессов выполнения операций и процессов возвращений в стохастических продуктивных системах, функционирующих в случайной среде $\mathcal{E}=\left\{(\alpha_t)_{t\geq 0},(\beta_t)_{t\geq 0}\right\}$, где неотрицательные случайные функции α_t и β_t $\mathcal{F}_0$-измеримы при каждом $t\geq 0$ на стохастическом базисе $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$. В качестве случайной среды рассматривается набор неотрицательных случайных функций, являющихся коэффициентами интенсивности при выполнении операций или при возвращении операций на переработку. В этом параграфе приведены и доказаны Теорема 1, Теорема 2 и Предложение 1, в которых для указанных частных случаев случайных сред формулируются критерии того, что система оказывается «точно-в-срок»:

Теорема 1. *Если выполнено условие* $P\{\int_0^T \alpha_s ds<\infty\}=1$ *для процесса числа возвращений, то свойство точно-в-срок T процесса выполнения имеет место тогда и только тогда, когда*

$$P\{\int_0^t \beta_s ds<\infty\}=1\ \textit{при}\ t<T\ \ \text{и}\ \ P\{\int_0^T \beta_s ds=\infty\}=1.$$

В параграфе также рассматривается процесс без возвращений с $X_t=K-B_t$ и $B_t=\sum_{0<s\leq t} I\{\Delta X_s=-1\}$. Компенсатор $\tilde{B}$ определяется интенсивностями скачков, задаваемыми случайной средой $\mathcal{E}=\left\{\left(\lambda_t(1)\right)_{t\geq 0},\dots,\left(\lambda_t(K-1)\right)_{t\geq 0}\right\}$:

$$\tilde{B}_t = \int_0^t b_s \cdot I\{1 \le X_s\} ds \text{ с } b_t = \sum_{i=1}^{K} \lambda_t(i) \cdot I\{X_t = i\}.$$

Для такого процесса, при вспомогательных обозначениях

$$\varphi_t(i) = \int_0^t \lambda_s(i) ds \quad \text{и} \quad \Phi(t) = \min_{1 \le i \le K} \{\varphi_t(i)\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (критерий точно-в-срок). *Процесс X в случайной среде $\mathfrak{E}$ является точно-в-срок T тогда (а также только тогда), когда P - п. н. выполняются условия*

$$\Phi(t) < \infty \textit{ при } t < T \text{ и } \Phi(T) = \infty.$$

Доказательства теорем и дополнительных результатов выполнены траекторными (мартингальными) методами.

Короткий **параграф 1.5** содержит выводы по Главе 1.

Глава 2 посвящена формулировке и решению ряда задач оптимального управления процессами выполнения операций в стохастических продуктивных системах (без возвращений операций на доработку). Сформулированные и доказанные в главе результаты приведены в виде теорем.

Задачи управления для продуктивных систем возникают в случае нарушений условий однородности, либо при возможном нарушении требований, обеспечивающих выполнение условия «точно-в-срок».

Поэтому в **параграфе 2.1** рассматривается задача планирования выполнения операций в течение ряда этапов, каждый из которых состоит их процесса многостадийного выполнения однородных операций. Определим условие, обеспечивающее однородность выполнения рассматриваемых операций:

$$K(i) = K \cdot \varsigma(i)/T \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n,$$

где время T подразделяется на $n \in \mathbf{N}$ этапов: каждая последующая операция $K(i)$ должна выполняться на этапе i, который длится время $\varsigma(i)$, для всех $i=1, 2, \dots, n$ и выполняются естественные условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} \varsigma(i) = T \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} K(i) = K.$$

Модель этой системы *точно-в-срок*, следовательно, представляет собой набор отдельных процессов в обратном времени (или соответствующих пуассоновских мостов). Актуальной является задача обеспечения «равномерного» выполнения плана $\bar{\varsigma} = \{\varsigma(1), \varsigma(2), \dots, \varsigma(n)\}$ в смысле однородности, т.е. минимизируя взвешенную дисперсию отклонений от этого плана: необходимо найти такой (оптимальный) план $\bar{\varsigma}^* = \{\varsigma^*(1), \varsigma^*(2), \dots, \varsigma^*(n)\}$, для которого выполняется

$$\Phi(\bar{\varsigma}^*) = \inf_{\bar{\varsigma}} \Phi(\bar{\varsigma}),$$

где целевая функция $\Phi(\bar{\varsigma})$ является суммой взвешенных дисперсий для процессов с начальными значениями $K(i)$ и временами выполнений операций $\varsigma(i)$, $i=1, \dots, n$:

$$\Phi(\bar{\varsigma}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(i) \cdot \int_0^{\varsigma(i)} v_t\big(K(i), \varsigma(i)\big) dt,$$

где обозначена функция $v_t(K, T) = V_t = \mathbf{E}\{(X_t - \mathbf{E}(X_t \mid X_0 = K; X_T = 0))^2 \mid X_0 = K; X_T = 0\}$ для произвольных K и T. а произвольные весовые коэффициенты $\alpha(i)$ строго положительны. В параграфе сформулирована и доказана теорема об оптимальном планировании этапов:

Теорема 3. *Для плана, который минимизирует целевую функцию* $\Phi(\bar{\varsigma})$, *выполняются равенства для продолжительности каждого из этапов:*

$$\varsigma^*(i) = T \cdot \{\alpha(i) \cdot n \cdot \sum_{j=1}^{n} 1/\alpha(j)\}^{-1/2} \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, n.$$

В **параграфе 2.2** сформулирована и решена задача об оптимальном моменте смены этапа в постановке, близкой к рассматриваемой в 2.1. В качестве критерия оптимальности рассматривается среднеквадратичное уклонение от усредненной заданной плановой величины выполнения плана. Результат сформулирован в виде Леммы 2 (с необходимым Замечанием 2).

В **параграфе 2.3** сформулирована и решена задача о множественных последовательных перепланировках, происходящих в моменты времени $\bar{u} = \{u(1), \ldots, u(J(X))\}$ с $0 < u(1) < u(2) < \ldots < u(i) < \ldots < u(J(X)) < T\}$. Рассматривается задача нахождения оптимального) множества $\bar{u}^* = \{u^*(1), \ldots, u^*(J(X))\}$ моментов последовательного перепланирования $u^*(i)$, $i \le J(X)$, для которого

$$\Gamma(\bar{u}^*) = \inf_{\bar{u}} \Gamma(\bar{u}),$$

где $\Gamma(\bar{u}) = \int_0^T V_t\left(K; \hat{h}\right) dt$, а $V_t(K; \hat{h}) = \mathbf{E}(X_t - \mathbf{E}X_t)^2$ для заданного плана (т.е. переменную интенсивность скачков) $\hat{h}$, представляющего собой $\hat{h}_t(X) = X_t \cdot I\{t < T\} \cdot \sum_{i=0}^{J(X)} \left(T - u(i) - t\right)^{-1} \cdot I\{u(i) < t \le u(i+1)\}$ (точечный процесс выполнения без возвращений X допускает представление $X_t = K - \int_0^t h_s ds + m_t^X$).

Результат, обобщающий лемму предыдущего параграфа сформулирован в виде теоремы.

Теорема 4. *Для множества моментов перепланирования* $\bar{u}^*$*, минимизирующего целевую функцию* $\Gamma(\bar{u})$*, выполняется равенство для компонент:*

$$u^*(i) = T \cdot \{1 - (2/3)^i\} \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, J(X).$$

В **параграфе 2.4** сформулирована и решена задача оптимального управления интенсивностями продуктивных процессов выполнения операций, для которой не выполняются строго условия, обеспечивающие и однородность, и поведение «точно-в-срок». Это имеет место в реальных системах, для которых увеличение интенсивности выполнения (обеспечивающее требование «точно-в-срок») ограниченно, не может быть сколь угодно большим:

$$h_t = h_t(X) = X_t \cdot \min\{\Lambda,\ I\{t < T\}/(T - t)\},$$

где $\Lambda \in [0, \infty)$ - некоторый конечный максимальный уровень интенсивности для каждой операции. Такие системы здесь называются «почти-точно-в-срок», поскольку при этом «ограничении» для h условие $X_T = 0$ может не выполняться и, $\mathbf{P}\{\omega: X_T(\omega) \ge 1\} > 0$ и $\mathbf{E}X_T > 0$. Необходимо найти оптимальное значение Λ^*, для которого решается задача оптимизации при $\alpha > 0$, $\beta > 0$:

$$\Theta\left(\Lambda^*\right) = \inf_{\Lambda \geq 0} \Theta\left(\Lambda\right),$$

где целевая функция $\Theta(\Lambda)$ равна $\Theta(\Lambda) = \alpha \cdot \mathbf{E} X_T + \beta \cdot \Lambda$.

Результат об уровнях интенсивности и моменте перехода на режим с ограничениями сформулирован в виде теоремы.

Теорема 5. *Для максимального уровня интенсивности, который минимизирует целевую функцию $\Theta(\Lambda)$,*

$$\Lambda^* = \sqrt{\frac{\alpha \cdot K}{\beta \cdot e \cdot T}}, \text{ если } \alpha \cdot K \cdot T/\beta \in [e, +\infty),$$

$$\Lambda^* = [\ln(\alpha \cdot K \cdot T/\beta)]/T, \text{ если } \alpha \cdot K \cdot T/\beta \in (1, e)$$

и

$$\Lambda^* = 0, \text{ если } \alpha \cdot K \cdot T/\beta \in (0, 1].$$

Этот результат допускает существенное обобщение, сформулированное в диссертации в виде Замечания 4.

Параграф 2.5 содержит короткие выводы по Главе 2.

В **Главе 3** рассматриваются математические модели явлений износа и старения как формы многостадийного (в т. ч., продуктивного) процесса в терминах точечных процессов и при условии диффузионных возмущений.

В **параграфе 3.1** кратко упоминаются методы описаний для основных теорий старения для биологических. Дан краткий обзор.

В **параграфе 3.2** представлена проблема моделирования одно- и многостадийных процессов износа и старения в терминах, позволяющих ее стохастическое описание. Показаны некоторые первичные модели (построенные в виде обобщения классической модели Гомпертца[11]-Мейкхама[12]), частично объясняющие возникновение явления многостадийности. Приведено (довольно очевидное) Предложение 2, посвященное приближению в определении конечной длины стадии на основе методов анализа уровней адаптированности. В параграфе проанализированы некоторые методы моделирования многостадийных изменений в процессах адаптации, восстановления, защиты и разрушения при старении.

В **параграфе 3.3** приводится математическая модель системы в терминах точечных процессов и диффузионных процессов. Дано объяснение многостадийности на основе анализа отрицательных обратных связей интегрального типа в системе с износом и старением.

На стохастическом базисе $\mathcal{B}$ с обычными условиями регулярности определен стандартный винеровский процесс $W = \left(W_t\right)_{t \in J} = \left(W_t(\omega)\right)_{t \in J}$, $\omega \in \Omega$. В качестве модели физиологической адаптации рассматриваются два случайных процесса $A = \left(A_t\right)_{t \in J}$ и $B = \left(B_t\right)_{t \in J}$, определяемые уравнениями

[11] Gompertz B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies / B. Gompertz // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1825. – Vol. 115. – P. 513-585.

[12] Makeham W. M. On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables // J. Inst. Actuaries and Assur. – Mag. 8 – 1860 – pp. 301–310.

$$A_t = a + \int_0^t \alpha(s)\cdot(v_s - B_s)ds + \int_0^t \lambda(s)\cdot(u_s - A_s)ds + \int_0^t \gamma(s)dW_s$$

$$B_t = b + \int_0^t \beta(s)\cdot(A_s - u_s)ds + \int_0^t \mu(s)\cdot(v_s - B_s)ds + \int_0^t \delta(s)dW$$

с начальными значениями $A_0 = a > 0$ и $B_0 = b > 0$, неотрицательными детерминированными функциями $u = (u_t)_{t\in J}$ и $v = (v_t)_{t\in J}$, неотрицательными переменными детерминированными коэффициентами обратной связи $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t), \lambda(t)$ и $\mu(t)$. В этой модели в качестве базовых функций $u = (u_t)_{t\in J}$ и $v = (v_t)_{t\in J}$ рассматриваются как средние, характерные для популяции значения, являющиеся оптимальными для индивидуума по каким-либо модельным критериям. Предложенная модель является очевидным диффузионным обобщением стохастических уравнений Ланжевена, позволяющим рассматривать процессы с колебательными компонентами, в том числе с затухающей амплитудой и меняющейся частотой. Так в простом (со стохастической точки зрения – вырожденном) примере – в случае коэффициентов волатильности $\gamma(t) \equiv 0$, $\varepsilon(t) \equiv 0$ и экспоненциально снижающимися коэффициентами обратной связи $\alpha(t) = \beta(t) = 0{,}3\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$, $\lambda(t) = 0{,}03\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$, $\mu(t) = 0{,}006\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$ и базовыми функциями $u_t = 1{,}2\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$, $v_t = 0{,}5\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$ график показателя уровня адаптации имеет вид, представленный на Рисунке 2. При соответствии уровня смертности $h(t)$ (hazard rate) уровню адаптации по методу, предложенному Гомпертцем

$$h(t) = h(0)/A_t$$

при $h(0) = 0{,}02$ получаем зависимость, представленную на Рисунке 3. Коэффициенты определены в соответствии с показателями смертности $h^{эксп}(t)$, определяемыми средними демографическими показателями стран Европы.

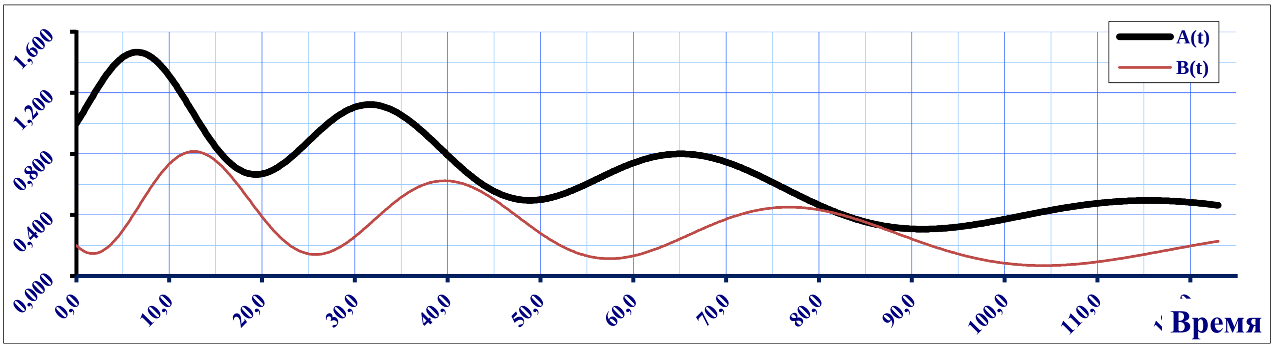

Рисунок 2 – Функции A_t и B_t при $\alpha(t) = \beta(t) = 0{,}3\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$, $\lambda(t) = 0{,}03\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$, $\mu(t) = 0{,}006\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$, $u_t = 1{,}2\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$, $v_t = 0{,}5\cdot\exp\{-0{,}01\cdot t\}$

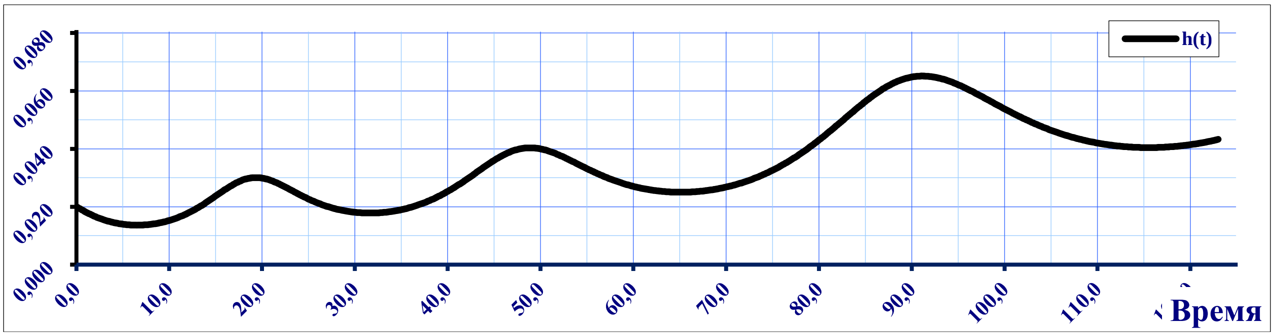

Рисунок 3 – Уровень смертности $h(t)$ при начальном значении $h(0)=0{,}02$

В случае «умеренных» случайных возмущений кривые, представленные на Рисунке 2 и Рисунке 3 претерпевают стохастические искажения, не меняющие их общее поведение. При значениях коэффициентов волатильности $\gamma(t)=0{,}03$ и $\delta(t)=0{,}01$ траектории процессов $A=\left(A_t\right)_{t\in J}$, $B=\left(B_t\right)_{t\in J}$ и процесса $h(t)$ имеет вид, представленный на Рисунке 4 и Рисунке 5, соответственно.

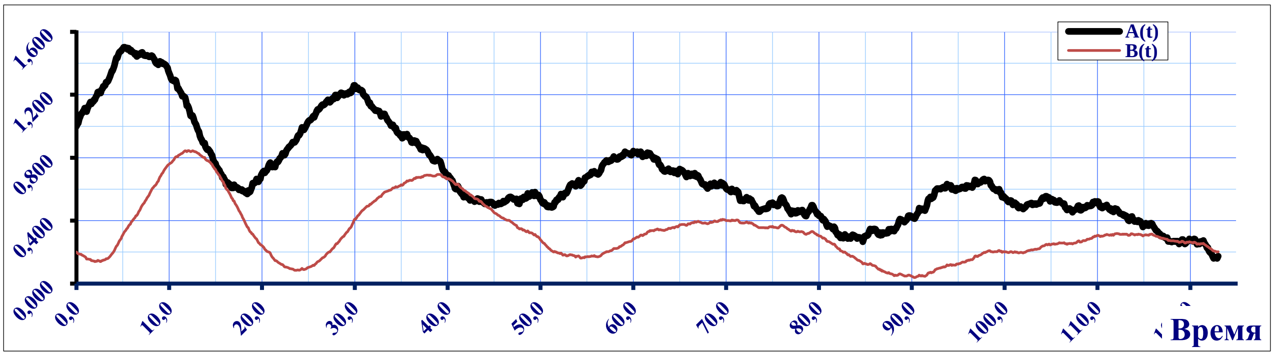

Рисунок 4 – Графики (траектории) процессов A_t и B_t при $\alpha(t)=\beta(t)=0{,}3\cdot\exp\{-0{,}01t\}$, $\lambda(t)=0{,}03\cdot\exp\{-0{,}01t\}$, $\mu(t)=0{,}006\cdot\exp\{-0{,}01t\}$, $u_t=1{,}2\cdot\exp\{-0{,}01t\}$, $v_t=0{,}5\cdot\exp\{-0{,}01t\}$, $\gamma(t)=0{,}03$, $\delta(t)=0{,}01$

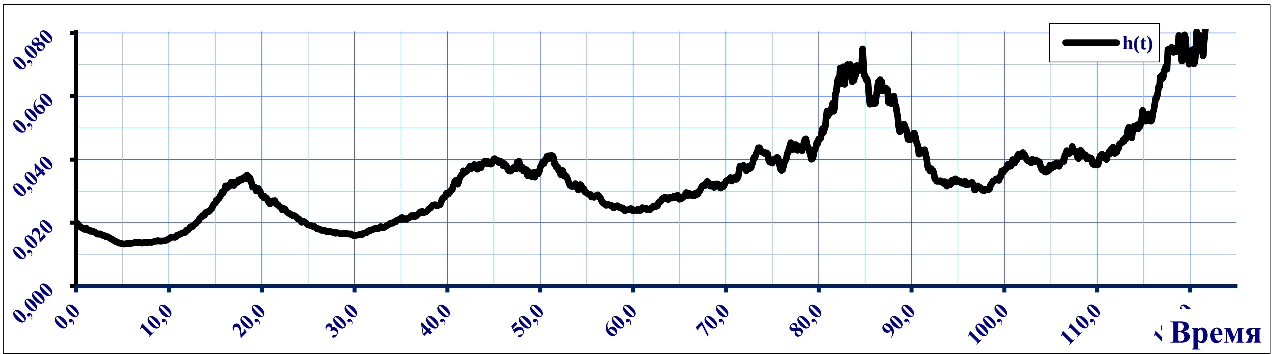

Рисунок 5 – График (траектория) процесса уровня смертности $h(t)$ при начальном значении $h(0)=0{,}02$, $\gamma(t)=0{,}03$, $\delta(t)=0{,}01$

В случае описания в терминах процессов, считающих число стадий старения моменты скачков которого происходят смены стадий $N_t(\omega)\in\mathcal{N}_0=\{0,1,2,3,4,\ldots\}$: $\tau(n)=\inf\{t:t>0,\,N_t\geq n\}$, $n\in\mathcal{N}_0$. И тогда для процесса $N=\left(N_t\right)_{t\in J}$ с начальным значением $N_0=0$ и $\tau(0)=0$ справедливо представление

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} I\{\tau(n) \le t\}$$

Таким образом, каждая n-я стадия для $n \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ протекает на интервале времени $[\tau(n-1), \tau(n))$. В этой модели предполагается, что система функционирует нормально, если значение процесса $A = (A_t)_{t \in J}$, характеризующего уровень адаптации, превышает некоторый порог. Предполагается, что значение этого порога равно 1, и, следовательно, n-я смена стадий происходит при нарушении условия адаптированности (или адаптации): $A_t > 1$, т.е. в момент времени $\tau(n) = \inf\{t : t > \tau(n-1), A_t \le 1\}$. На каждой такой n-ной стадии, т.е. при $t \in [\tau(n-1), \tau(n))$ эволюция процесса $A = (A_t)_{t \in J}$ протекает по некоторому (в этом предположении – автономному) закону

$$A_t = a(n) - \int_{\tau(n-1)}^{t} \Phi(A, s) ds + \int_{\tau(n-1)}^{t} \varphi(A, s) dW_s,$$

с начальным значением $A_{\tau(n-1)} = a(n) > 1$. При этом момент первой после $\tau(n-1)$ дезадаптированности и является моментом скачка процесса $N = (N_t)_{t \in J}$. На Рисунке 6 приведен график детерминированного процесса (т.е. функции) $A = (A_t)_{t \in J}$ и вспомогательной функции $B = (B_t)_{t \in J}$, являющейся «областью притяжения» для уровня адаптации системы A. Так на каждой n-й стадии старения, т.е. при $t \in [\tau(n-1), \tau(n))$ выполняется

$$B_t = b(n) - \int_{\tau(n-1)}^{t} B_s \cdot \mu(s) ds,$$

где $b(n) = b(0) \cdot \exp\{-k_b \cdot \tau(n-1)\}$, $\mu(t) = \mu(0) \cdot \exp\{-k_\mu \cdot t\}$. Неотрицательные коэффициенты k_b и k_μ являются интенсивностями снижения начального (после онтогенетической перестройки) значения уровня адаптации и снижения скорости истощения ресурсов адаптации (обусловленной снижением интенсивности эксплуатации) соответственно. Функция $A = (A_t)_{t \in J}$ при $t \in [\tau(n-1), \tau(n))$ равна $A_t = a(n) - \int_{\tau(n-1)}^{t} \lambda \cdot (A_s - B_s) ds$, где значения $a(n)$ определяются начальным значением $A_0 = a(1)$ и для всех $n \ge 2$ выполняется $a(n) = 1$, как следует из непрерывности A и определения моментов $\tau(n)$.

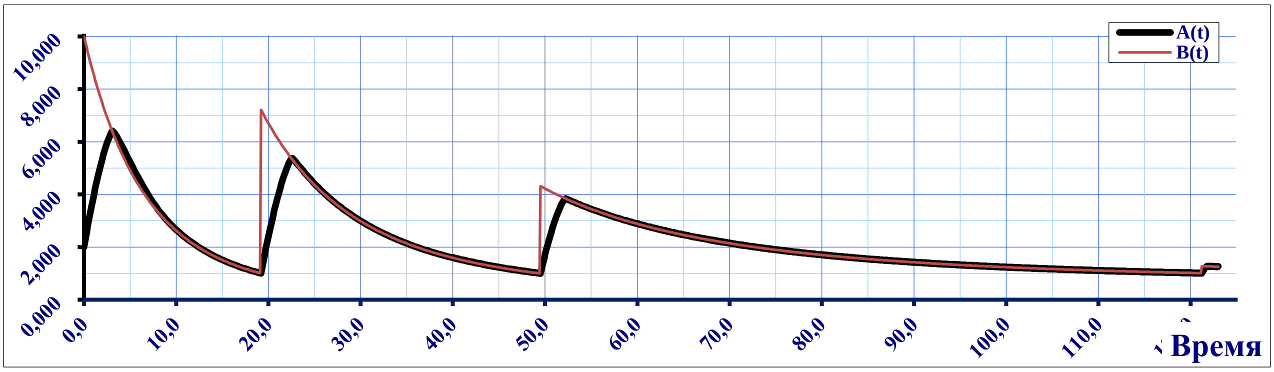

Рисунок 6 – Графики (траектории) процессов A_t и B_t в детерминированной модели при $b(0)=10{,}0$, $k_b=0{,}017$, $k_\mu=0{,}025$, $\mu(0)=0{,}15$, $\lambda=1{,}0$, $A_0=a(1)=2{,}0$

На Рисунке 7 при тех же значениях коэффициентов, определяющих функцию $B=\left(B_t\right)_{t\in J}$, приведен график случайного процесса $A=\left(A_t\right)_{t\in J}$ со значениями $A_t=a(n)-\int\limits_{\tau(n-1)}^{t}\lambda\left(A_s-B_s\right)ds+\int\limits_{\tau(n-1)}^{t}\gamma dW_s$ при указанных в прежнем примере значениях λ и $a(n)$, но ненулевым коэффициентом волатильности.

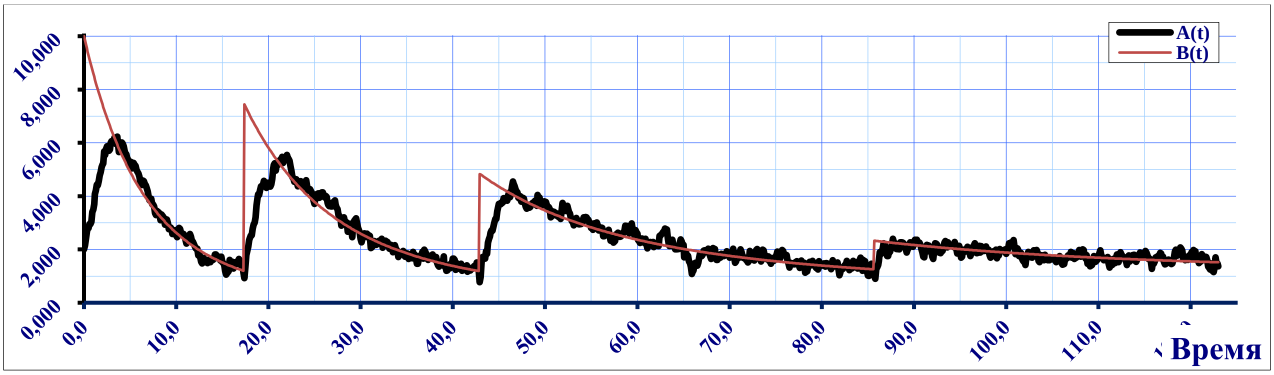

Рисунок 7 – Графики функции B_t и процесса $A=\left(A_t\right)_{t\in J}$ в стохастической модели при $\gamma(t)=0{,}4$

Графики процессов уровня смертности $h=(h(t))_{t\in J}$ при начальном значении $h(0)=0{,}04$ для случаев без диффузионного возмущения и при возмущении, соответственно, приведены на Рисунке 8 и Рисунке 9, соответственно.

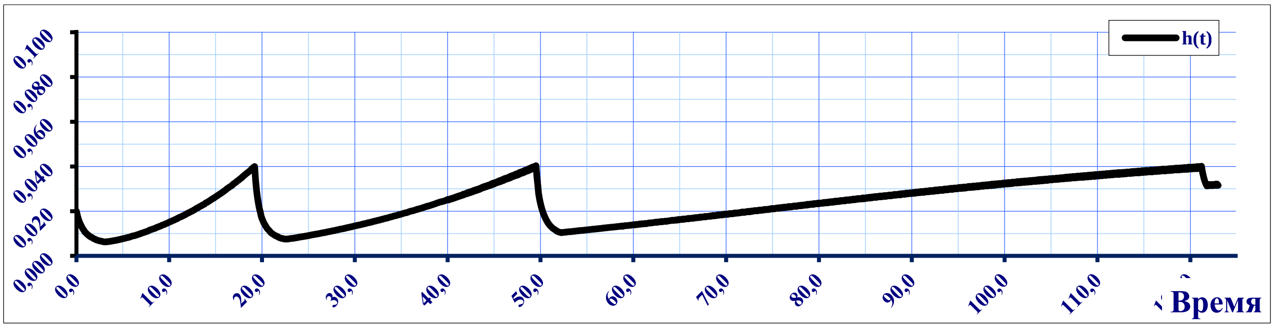

Рисунок 8 – График уровня смертности $h(t)$ при начальном значении $h(0)=0{,}04$ в детерминированной модели

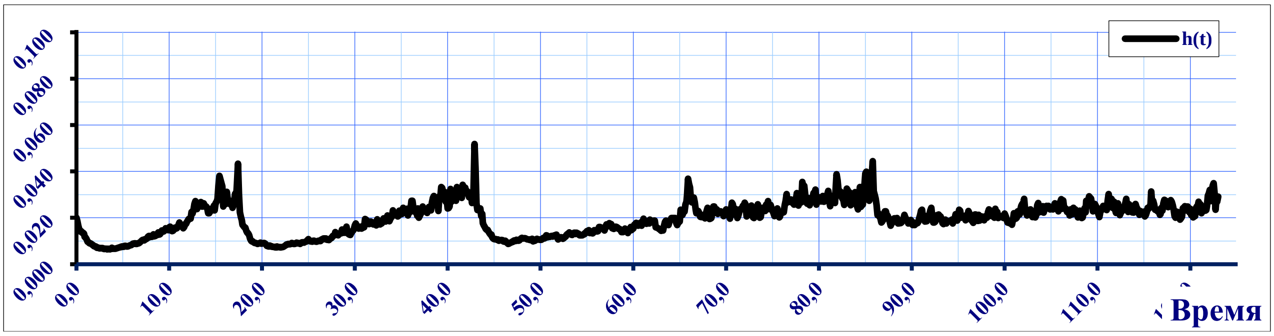

Рисунок 9 – График (траектория) процесса уровня смертности $h(t)$ при начальном значении $h(0)=0{,}04$ в стохастической модели

Следует, отметить, что случайный характер поведения процесса $A=\left(A_t\right)_{t\in J}$ существенным образом влияет на моменты смены стадий и, таким образом, на поведение траекторий процесса $N=\left(N_t\right)_{t\in J}$. Траектории процесса, соответствующие приведенным примерам моделей с указанными коэффициентами показаны на Рисунке 10 и Рисунке 11, соответственно.

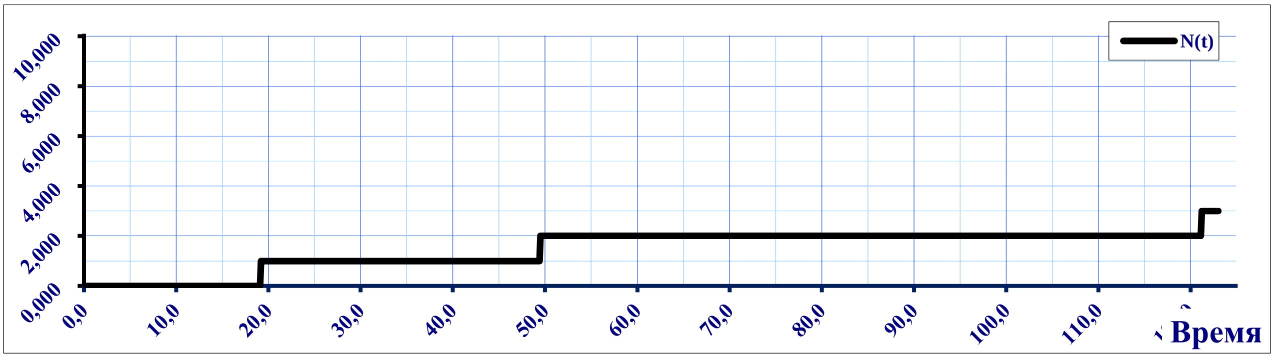

Рисунок 10 – Траектория считающего процесса смены стадий в детерминированной модели

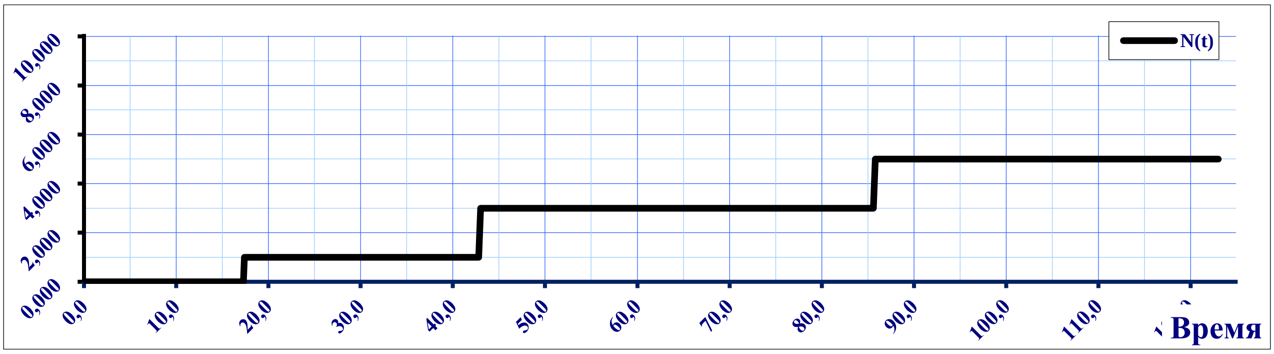

Рисунок 11 – Траектория считающего процесса смены стадий в стохастической модели

В рассмотренных моделях компоненты уравнений рассматриваются как элементы физиологических процессов восстановления, защиты и разрушения. На первом этапе моделирования указано то, что отвечает за перечисленные физиологические функции наряду с исследованием процесса адаптации.

В **параграфе 3.4** представлены смежные теоретические и прикладные задачи моделирования многостадийных процессов биологических систем при старении и износе. Здесь кратко формулируются смежные задачи, требующие значительного отдельного изучения – задача о пересечении границы, задача о разладке и компенсации, проблема построения модели изменений длин теломер, модели размножения транспозонов и модели изменений в гомеостатических циркадных режимах. Для каждой из приведенных задач в совместных работах формулировались и реализовывались модели, в основе которых лежало описание в терминах процессов размножения и гибели (и, следовательно, продуктивных систем) со значениями, ограниченными сверху и снизу. Кратко приведен ряд соответствующих моделей в терминах точечных считающих процессов (для задач анализа процесса размножения транспозонов, укорочения теломер, смены стадий при старении, циркадных ритмов) со ссылками на совместно выполненные работы.

Параграф 3.5 содержит короткие выводы по Главе 3.

В **Главе 4** рассматриваются задачи компьютерного моделирования управляемых многостадийных продуктивных систем. Здесь также рассматриваются особенности численных методов, используемых при разработке алгоритмов моделей систем с износом и старением.

Параграф 4.1 посвящен задачам, алгоритмам и особенностям численных методов моделирования многостадийных стохастических процессов выполнения операций. Основное внимание уделено процессам «точно-в-срок».

В **параграфе 4.2** представлены результаты компьютерного моделирования многостадийных стохастических процессов износа и старения.

В **параграфе 4.3** приведена структура комплекса программ, дана блок-схема, поясняющая принципы работы компьютерной программы.

В **параграфе 4.4** приведены элементы проверки адекватности моделей.

Параграф 4.5 содержит краткие выводы по главе 4.

В **выводах и заключении** приведены основные результаты диссертации:

1) разработаны математические модели стохастических многостадийных продуктивных систем в терминах точечных процессов;
2) разработаны математические модели многостадийных процессов выполнения операций в продуктивных системах класса «точно-в-срок»;
3) разработан класс математических моделей процессов выполнения операций в стохастических многостадийных продуктивных системах, функционирующих в случайной среде. Для этих систем сформулированы условия выполнения требования «точно-в-срок». Доказаны соответствующие теоремы;
4) разработаны математические модели управляемых многостадийных продуктивных систем. Сформулированы условия оптимального управления этими системами в четырех постановках задачи. Доказаны соответствующие теоремы;
5) разработаны и исследованы математические модели многостадийных процессов в системах с износом в терминах точечных процессов с возмущением диффузионного типа;
6) разработаны алгоритмы численных методов стохастического имитационного моделирования продуктивных систем «точно-в-срок» и точечных процессов с возмущениями диффузионного типа;

7) разработан комплекс программ для решения задач оптимального управления интенсивностями выполнения операций, управления многостадийными процессами в системах с износом и проведены численные эксперименты.

В **приложениях** приведены листинги фрагментов комплекса программ.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, профессору, доктору физико-математических наук, Александру Александровичу Бутову за постановку задач, обсуждение полученных результатов и всестороннюю поддержку.

Публикации автора по теме диссертации.

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК, индексируемые Web of Science:

[1] Butov, A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time / A.A. Butov, A.A. Kovalenko // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 518-531. DOI: 10.14498/vsgtu1633

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК:

[2] Коваленко, А.А. Модели стохастических продуктивных систем: критерий процессов размножения и гибели «точно-в-срок» / А.А. Коваленко // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 2(26). – С. 145-149.
[3] Бутов, А.А. Операции усреднения и их оптимизация при исследовании циркадных ритмов артериального давления / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // Естественные и технические науки. – 2015. – № 7(85). – С.82-83.
[4] Бутов, А.А. О процедурах усреднения и их оптимизации в процессе анализа суточных ритмов артериального давления / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 8-3. – С. 462-465.
[5] Бутов, А.А. Обзор математических моделей многостадийного старения / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Естественные и технические науки. – 2015. – № 7 (85). – С. 84-85.
[6] Бутов, А.А. Анализ нарушений метаболизма как следствия активизации транспозонов в полиплоидных клетках / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2(27). – С. 6030-6031.
[7] Бутов, А.А. Математическая модель многостадийного старения адаптивных систем / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 9-2. – С. 219-222.

Публикации в прочих изданиях:

[8] Коваленко, А.А. Несовместность двух классов математических моделей стохастических продуктивных систем / А.А. Коваленко // Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии. – 2019. – № 1. – С. 47-51.
[9] Бутов, А.А. Компьютерное моделирование дискретных многостадийных процессов разрушения и выполнения операций в стохастических продуктивных си-

стемах / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, М.В. Самохвалов // Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии. – 2019. – № 1. – С. 20-23.
[10] Бурмистрова, В.Г. Некоторые способы оценивания момента пересечения границы процессом с разладкой : Материалы V Международной конференции и молодёжной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019); СБОРНИК ТРУДОВ ИТНТ-2019 / В.Г. Бурмистрова, А.А. Бутов, А.А. Коваленко [и др.] ; Самара, 2019. – С. 243-248.
[11] Бутов, А.А. Математическая модель изменений в компенсации износа при старении / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2018. – № 4. – С. 14-17.
[12] Бутов, А.А. Обзор математических моделей процессов многостадийного старения и износа организма / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. статей по материалам XXXI международной заочной научно – практической конференции. – 2015. – №7(26). – С. 15-19.
[13] Бутов, А.А. Метод оптимизации процедур усреднения при анализе циркадных ритмов артериального давления / А.А. Бутов, М.А. Карев, А.А. Коваленко, Г.В. Кононова // Достижения и перспективы естественных и технических наук : сб. материалов 6 международной научно-практической конференции. – Изд. «Логос». – 2015. – С. 39-45.
[14] Бутов, А.А. Обзор математических моделей процессов многостадийного старения и износа организма / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. статей по материалам XXXI международной заочной научно – практической конференции. – 2015. – №7(26). – С. 15-19.
[15] Бутов, А.А. Стохастическая модель изменения количества жировой ткани человека по результатам исследований / А.А. Бутов, А.А. Коваленко, А.С. Шабалин // Достижения и перспективы естественных и технических наук : сб. материалов VI Международной научно-практической конференции. – 2015. – № 6. – С. 36-39.