

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ – УЛГТУ**

На правах рукописи

МЕНЬШОВ Евгений Николаевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАЗДЕЛЕНИЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЙ
В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ**

Специальность:

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант:

д.т.н. Булыжев Е. М.

Ульяновск, 2020

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ.....	7
Глава 1 АНАЛИЗ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ПО ПРОЦЕССАМ РАЗДЕЛЕНИЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЙ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ.....	20
1.1. Классификация ферромагнитных суспензий, состав и свойства ферромагнитных компонентов.....	20
1.2. Классификация и основные характеристики оборудования для разделения суспензий в магнитном поле.....	25
1.3. Математическое моделирование взаимодействия частиц ферромагнитных суспензий между собой и их структурирование во внешних магнитных полях.....	31
1.4. Математическое моделирование процесса магнитной сепарации как одного из основных вариантов разделения ферромагнитных суспензий.....	37
1.5. Цель и задачи исследования. Структура математической модели системы магнитной очистки ВТЖ. Критерии достижения цели.....	46
Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕМЕЙСТВ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЫКНОВЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ.....	53
2.1. Сущность метода моделирования. Использование метода интерполяции кривых экспоненциальными выражениями.....	53
2.2. Метод устранения паразитных колебаний при интерполяции кривых экспоненциальными выражениями.....	55
2.3. Понижение порядка линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	62
2.4. Принципы моделирования семейств характеристик обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.....	68
2.4.1. Структура исходных данных.....	68
2.4.2. Формулирование подхода к решению задачи.....	70

2.4.3. Методика идентификации математической модели	72
2.4.4. Пример реализации статической суррогатной математической модели ..	77
2.4.5. Пример решения класса задач с изменяющимися исходными данными ..	81
2.5. Восстановление характеристик нелинейных физических процессов	89
2.6. Выводы.....	92
Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ ПРИ МАГНИТНОЙ КОАГУЛЯЦИИ И СЕПАРАЦИИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ ..95	
3.1. Предварительные замечания.....	95
3.2. Математическое моделирование магнитного поля постоянных магнитов	96
3.2.1. Магнитные характеристики закритических ферромагнитных материалов	96
3.2.2. Компьютерно-аналитическое моделирование поля постоянного магнита в немагнитной среде.....	99
3.2.3. Математическое моделирование поля постоянного магнита в произвольной магнитной среде	106
3.3. Математическое моделирование распределения магнитных сил в магнитном сепараторе	119
3.3.1. Цепная модель распределения поля в магнитных сепараторах.....	119
3.3.2. Алгоритм расчета магнитного режима сепаратора.....	124
3.3.3. Математическая модель магнитных сил	130
3.4. Математическая модель магнитных сил диполь-дипольного взаимодействия.....	138
3.5. Обоснование возможности обезвоживания структурированных осадков на поверхности магнитных элементов	141
3.6. Выводы	143
Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗДЕЛЕНИЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЙ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ	
4.1. Методология математического моделирования характеристик разделения ферромагнитных суспензий в магнитных полях	146

4.2. Математическое моделирование процесса обтекания водным потоком решетки магнитных стержней-патронов.....	148
4.2.1. Численное моделирование линий растекания водного потока.....	148
4.2.2. Аналитическое моделирование распределения скоростей водного потока для первой ступени магнитной сепарации.....	152
4.3. Постановка задачи математического моделирования характеристик разделения монодисперсных суспензий в магнитных полях	154
4.4. Математическое моделирование траектории движения частицы на поступательном участке потока водной технологической жидкости	156
4.4.1. Исходная система уравнений.....	156
4.4.2. Представление системы уравнений в полярных координатах	158
4.4.3. Эквивалентная добавочная сила.....	165
4.4.4. Решение уравнения траектории ферромагнитной частицы.....	168
4.5. Система критериальных условий для сортировки траекторий ферромагнитных частиц	172
4.5.1. Система критериев осаждения ферромагнитных частиц.....	172
4.5.2. Дополнительные критериальные условия.....	179
4.6. Математическое моделирование начального участка характеристики разделения суспензии для первой секции магнитного сепаратора.....	181
4.6.1. Постановка задачи	181
4.6.2. Математическая модель траектории движения феррочастицы на вращательном участке потока водной технологической жидкости	184
4.7. Алгоритм расчета семейств основных характеристик зависимостей эффективности разделения монодисперсных ферромагнитных суспензий ...	188
4.8. Математическое моделирование характеристик разделения полидисперсных ферромагнитных суспензий в магнитных полях	192
4.8.1. Законы распределения механических примесей в дисперсной системе для задач магнитной сепарации и магнитной коагуляции.....	192
4.8.2. Характеристики процессов разделения полидисперсных ферромагнитных суспензий	195

4.9. Выводы.....	199
Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОЙ КОАГУЛЯЦИИ	202
5.1. Методология моделирования преобразования дисперсного состава ферромагнитных частиц на основе математической операции свертки вероятностных функций.....	202
5.2. Синтез весовой функции процесса магнитной коагуляции в однородном магнитном поле	206
5.2.1. Вероятность бинарного соединения для дискретного распределения ферромагнитных частиц в дисперсной системе	206
5.2.2. Синтез дискретной весовой функции процесса коагуляции	215
5.2.3. Оператор магнитной коагуляции для непрерывных функций распределения дисперсного состава ферромагнитных примесей.....	220
5.2.4. Определение интервала дискретизации массы ферромагнитных агрегатов.....	224
5.3. Синтез весовой функции магнитной коагуляции при неоднородном магнитном поле	230
5.4. Определение коэффициента глубины магнитной коагуляции.....	239
5.5. Выводы.....	249
Глава 6. МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МАГНИТНЫХ СЕПАРАТОРОВ. РАСЧЕТ ПАТРОННЫХ МАГНИТНЫХ СЕПАРАТОРОВ ...	252
6.1. Математическая модель параметрической оптимизации конструктивных параметров сепаратора	252
6.1.1. Постановка задачи оптимизации и формирование целевой функции... 252	
6.1.2. Разработка условия, гарантирующего качество очистки ВТЖ..... 253	
6.1.3. Определение оптимальных конструктивных параметров сепаратора..... 256	
6.2. Научно-обоснованная методика расчета эффективных патронных магнитных сепараторов и их экспериментальные исследования	260
6.3. Расчет оптимальных конструктивных параметров патронного магнитного сепаратора.....	267

6.4. Оценка погрешности расчета патронного магнитного сепаратора	274
6.5. Выводы.....	285
Глава 7. ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПТИМИЗИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ СЕПАРАТОРОВ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ИХ ОСНОВЕ.....	
7.1. Оптимизированные магнитные сепараторы и системы на их основе. Технические характеристики систем	287
7.2. Методика расчета годового экономического эффекта от внедрения магнитных сепараторов при очистке СОЖ в металлообрабатывающих производствах	300
7.3. Экономическая эффективность разработанных магнитных сепараторов в системах применения СОЖ в металлообрабатывающих производствах	302
7.4. Выводы.....	305
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	306
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	311
ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ АББРЕВИАТУР И ОБОЗНАЧЕНИЙ	337
Приложение 1. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА	339
Приложение 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПРОГРАММЫ.....	346
Приложение 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ ДАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА....	351
Приложение 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА.....	358
Приложение 5. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК СТЕПЕНИ ОЧИСТКИ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА	366
Приложение 6. СОПОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КАЧЕСТВА ОЧИСТКИ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА.....	374
Приложение 7. АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ.....	385

ВВЕДЕНИЕ

подавляющее большинство технологических процессов выполняется в присутствии водных жидкостей.

Дефицит пресной воды уже сейчас становится мировой проблемой. Все более возрастающие потребности в воде заставляют все страны, ученых мира искать разнообразные средства для решения этой проблемы. Это явление усугубляется возрастающим антропогенным воздействием на водные объекты.

Потребность в оздоровлении водной среды, на 80% определяющей физическое состояние и трудовую активность населения нашей страны, отражена в национальном проекте «Экология». Преодолению негативных тенденций посвящена Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года (утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 17 ноября 2008 г. N 1662-р), в которой *к приоритетным направлениям развития водохозяйственного комплекса* в долгосрочной перспективе отнесены совершенствование технологии подготовки питьевой воды и *очистка сточных вод, внедрение новых технологий водочистки, модернизация* промышленных предприятий и внедрение в технологические схемы производственных объектов *оборотного водоснабжения*. Для актуализации поставленных задач разработана ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА "РАЗВИТИЕ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННОГО КОМПЛЕКСА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ В 2012-2020 ГОДАХ (с изменениями на 19 сентября 2015 года)" и ряд федеральных проектов, таких как «Чистая вода», «Оздоровление Волги», «Сохранение озера Байкал» и др., которые направлены на повышение рациональности использования водных ресурсов, на сокращение негативного антропогенного воздействия на водные объекты на основе реконструкции комплексов очистных сооружений и систем оборотного и повторно-последовательного водоснабжения.

Многообразие видов вод и загрязняющих их вредных веществ без разработки новой высокоэффективной техники и технологий их очистки и оздоровления делают невозможным решение задач, которые ставятся на данном этапе руководством страны.

Одним из физических явлений, недостаточно изученных на сегодня, но способных

служить основой новых и высокоэффективных процессов очистки является разделение ферромагнитных суспензий (РФС) в магнитных полях. РФС происходит в магнитных полях: неоднородном, полиградиентном и вращающемся.

Несомненно, разнообразие проявления РФС в магнитных полях определяет их отличительные особенности во всех аспектах: терминологическом, системно-описательном, методов и средств моделирования. Все эти особенности значительно осложняют разработку и оптимизацию конкретных технологических процессов, невыполнимые в настоящее время без математического моделирования. *Для реализации последнего необходима методологическая основа, которая на сегодня не достроена и имеет множество «белых пятен» и не позволяет во многих случаях исследовать конкретные проявления РФС.*

Разработка комплекса методов, постановка и решение задач моделирования, доводимых до практического применения, обеспечивает научную сущность предлагаемой работы.

Большинство современных технологических процессов обработки металлов в машиностроительных и металлургических производствах невозможно без применения водных технологических жидкостей (ВТЖ). Отработанные ВТЖ должны стать оборотными, а не являться одним из главных источников загрязненности.

В машиностроительных производствах широко используется особый вид водных технологических жидкостей – смазочно-охлаждающие жидкости (СОЖ). Применение СОЖ существенно улучшает технико-экономические показатели процессов обработки: увеличивается производительность, повышается качество продукции, повышается стойкость инструментов, уменьшаются энергозатраты на механическую обработку. При этом отработанные оборотные СОЖ содержат ферромагнитные примеси. Присутствие ферромагнитных и иных примесей в СОЖ приводит к ухудшению качества обработанных поверхностей заготовок, снижению стойкости инструментов и производительности обработки. Поэтому целесообразность очистки оборотных СОЖ от твердых примесей, которая осуществляется при помощи широкого внедрения в технологические циклы различных сепараторов, не вызывает сомнения.

Вопросы разработки и применения магнитных устройств для разделения ферромагнитных суспензий отражены в публикациях (Быков И. Ю., Бульжев Е. М., Епугаев Г. А., Казаков Ю. Б., Кармазин В. В., Орлов Д. В., Полянсков Ю. В., Сандуляк А. В., Солоденко А. Б., Худобин Л. В., Barbosa D. (Исп.), Griffiths I. M. (Анг.), Mariani G. (Итал.), Smith K. A. (США), Song S. (Кит.).

Для очистки водных технологических жидкостей (ВТЖ) от ферромагнитных примесей успешно применяются магнитные сепараторы, как один из видов устройств для разделения суспензий. Современные магнитные сепараторы изготавливаются из постоянных магнитов, в том числе, выполненные из редкоземельных магнитотвердых материалов (например, феррито-бариевые, неодим-боровые магниты), создающих высокоградиентные магнитные поля.

Такие сепараторы надежно обеспечивают нормы чистоты от феррочастиц размером более 10 мкм. Однако эти требования трудно обеспечить за длительное время эксплуатации для ферромагнитных примесей размером менее 5 - 10 мкм, вследствие постепенного накопления тонких частиц в оборотных СОЖ. Проблема заключается в том, что в настоящее время нет *технологически эффективной и экономически доступной техники очистки жидкости от тонкодисперсных ферромагнитных частиц.*

Решение этой проблемы позволит успешно применять оборотные ВТЖ в следующих технологических процессах:

- в обрабатывающих машиностроительных производствах, так как процесс накопления тонкодисперсных феррочастиц в оборотных СОЖ приводит со временем к нарушению допустимых нормы чистоты и деградации СОЖ;
- в машиностроительных производствах, так как накопление тонких ферромагнитных частиц в ВТЖ способствует адсорбции на их поверхности масел, которые приводят к забиванию фильтров и трубопроводов оборотных систем;
- в технологии металлопрокатки, так как процесс накопления тонких ферромагнитных частиц стимулирует адгезию масел на прокатанном листе, наличие которых из-за плохой проводимости тепла приводит к нарушению однородности температурного поля на поверхности прокатываемых листов и потерей качества проката;

– в металлургии при обогащении руды с целью повышения концентрации ферромагнитного концентрата;

– в ЖКХ для водоподготовки, очистки сточных вод и т.д. (ферромагнитная дисперсионная среда используется в качестве утяжелителя и уплотнителя флоккул).

В научно-технической литературе имеются научные предположения об эффективности при тонкой очистке явления наведенной магнитной коагуляции (агрегатирование намагниченных во внешнем магнитном поле ферромагнитных частиц), которая происходит в очистителях и приводит к *преобразованию* дисперсных характеристик ферропримесей. Однако теория применения магнитной коагуляции, как, впрочем, и коагуляция в целом, в технологии очистки ВТЖ от ферромагнитных примесей во многом не разработана. А существующие методы математического моделирования процессов коагуляции чрезвычайно сложны.

Вопросы коагуляции отражены в публикациях (Волков В. А., Галкин В. А., Гетманцев Ф. Р., Дубовский П. В., Еремин Н. И., Иванов А. О., Кандаурова Н. В., Кармазин В. В., Налетов В. А., Падалка В. В., Пеньков Н. В., Просвирнин В. И., Пшеничников А. Ф., Шелихов Г. С., Griffiths I. M. (Англ.), Judd S.J. (Англ.), Nguyen A.V. (Кит.), Spicer P.T. (Австрал.), Vella D. (Англ.)). Традиционная теория (немагнитной) коагуляции, базирующаяся на нелинейных интегро-дифференциальных уравнениях Смолуховского, ставит целью определение стохастических характеристик частиц взвесей. Из-за сложности уравнений при произвольных исходных распределениях дисперсного состава твердой фазы задача становится непреодолимой для практики.

Создание общей методологии математического моделирования процессов магнитной коагуляции полидисперсных ферромагнитных суспензий в силовых полях и аспекты её практического применения при создании эффективной техники тонкой очистки ВТЖ являются основой данной работы.

Важнейшим фактором, определяющим эффективность магнитной сепарации, является минимизация потерь воды на собственные нужды при операциях отделения осадка (потери до 20 – 30% от отработанной жидкости, что экономически невыгодно).

Объект исследования – математические методы, численные методы и ком-

плексы программ для моделирования процессов очистки водных жидкостей от твердых примесей.

Предмет исследования – функциональность и эффективность аналитических методов и математических моделей, численных методов и алгоритмов комплексов проблемно-ориентированных программ при моделировании разделения ферромагнитных суспензий в магнитном поле с помощью высокопроизводительных магнитных сепараторов.

Целью работы является разработка научных основ и аппарата математического моделирования, новых математических моделей и комплекса программ, необходимых для создания эффективной техники тонкого разделения ферромагнитных суспензий в магнитных полях, в том числе при магнитной сепарации водных технологических жидкостей.

Диссертация имеет следующую структуру:

– в первой главе на основе анализа научно-технической информации показано единство и особенности РФС в магнитных полях как явления используемого в самых различных технологических процессах (например, извлечение и концентрация ферромагнитной компоненты, сгущение осадков феррочастиц, очистка самых различных вод: природной, технической, сточной и др. от магнитных и немагнитных примесей и взвесей, обогащение полезных ископаемых, подготовка питьевой воды и т.д.).

Общность всех этих конкретных проявлений в технологических процессах явления разделения заключается во взаимодействующих объектах системы:

– распределенные совокупности частиц механических примесей по размерам и физическим свойствам;

– взаимодействие феррочастиц и мехпримесей в суспензиях между собой через водные прослойки;

– структурирование частиц в суспензии (в проявлениях: коагуляция, флокуляция, осаждение на полюсы, образование концентрированного обводненного осадка и т.д.);

– извлечение осадков феррочастиц из суспензий и т.д.

В соответствии с этой целью в диссертации решались **следующие задачи**.

1. Разработка двух методов моделирования магнитного поля постоянного магнита (ПМ), учитывающих неэквипотенциальность его поверхности, на основе электрофизического и схемного подходов.

2. Разработка схемного метода численного моделирования силового поля, создаваемого решеткой постоянных магнитов в неоднородной магнитной среде.

3. Разработка научных основ магнитной сепарации водных сред с помощью поиска приближенного решения нелинейного уравнения траекторий ферромагнитных частиц в ламинарном потоке.

4. Разработка численно-аналитического метода моделирования семейств характеристик эффективности разделения ферромагнитных суспензий в магнитных сепараторах.

5. Разработка научных основ и метода математического моделирования магнитной коагуляции феррочастиц, направленной на решение задач магнитной сепарации водных технологических жидкостей от феррочастиц.

6. Разработка метода аппроксимации семейств аperiодических характеристик интегральными кривыми в классе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

7. Разработка метода параметрической оптимизации конструктивных параметров и научно обоснованной методики расчета эффективных патронных магнитных сепараторов для тонкой очистки водных технологических жидкостей от феррочастиц.

8. Разработка метода конструкторско-технологических аспектов процесса и техники выделения связанной жидкости из отделяемых шламов.

Методология и методы исследования

Методы исследования базируются на основе: физического и математического моделирования; методологии и теории ЭМП, методологии и теории цепей; методов анализа и синтеза линейных детерминированных и стохастических, дискретных и непрерывных систем; теории линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений; теории вероятностей и комбинаторной математики; теоремы отсчетов.

Научная новизна работы

1. Разработана математическая модель поля постоянного магнита в немагнитной среде на основе скалярного магнитного потенциала. Отличается от известных тем, что она свободна от сингулярностей и позволяет получать с более высокой точностью оценку характеристик при создании высокоэффективных средств разделения ферромагнитных суспензий.

2. Разработан метод синтеза схем замещений постоянного магнита, который отличается от известных тем, что учитывает поток рассеяния магнитного поля через боковую поверхность ПМ. Синтезированные схемы позволяют повысить точность исследования систем из ПМ и применить схемные методы их численного моделирования.

3. Построены эквивалентные магнитные схемы (с распределенными и с сосредоточенными параметрами) цилиндрических постоянных магнитов, на основе которых разработан алгоритм численного расчета характеристик силового поля, создаваемого решеткой постоянных магнитов. В отличие от известных в алгоритме учитывается не принимаемое ранее в расчет экранирующее влияние слоя ферромагнитных примесей, осаждаемых при сепарации ВТЖ на поверхность магнитной системы.

4. Разработан метод анализа процесса магнитной сепарации ВТЖ на основе преобразования исходной системы нелинейных ДУ в приближенное линейное неоднородное ДУ, описывающее траектории феррочастиц. В отличие от известных метод позволяет определять предельные режимы магнитных сепараторов, проводить моделирование характеристик качества очистки и решать задачу по учету процесса магнитной коагуляции при проектировании и оптимизации эффективных средств очистки ВТЖ.

5. Обоснован метод математического моделирования преобразования дисперсного состава ферромагнитных частиц при магнитной коагуляции на основе свертки функций распределения случайных величин. Он отличается от известных методов тем, что дает полное решение задачи при произвольных законах стохастического распределения исходных частиц и позволяет повысить эффективность проектирования магнитных сепараторов для разных областей применения.

6. Разработана двухуровневая математическая модель на основе математической операции свертки, по сути, представляет собой новый тип математической модели магнитной коагуляции, в которой весовая функция оператора свертки параметрически зависит от коэффициента глубины магнитной коагуляции, введенного для оценки степени коагуляции на основе закона сохранения массы дисперсной фазы. Первый уровень такой модели выражает фундаментальную зависимость семейства распределения дисперсного состава агрегированных феррочастиц от глубины коагуляции. Второй уровень выражает зависимость коэффициента глубины магнитной коагуляции от времени и физико-технических параметров индивидуального сепаратора, что чрезвычайно важно для задач проектирования и оптимизации магнитных сепараторов.

7. Разработан метод аппроксимации семейств аperiodических характеристик интегральными кривыми в классе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такой метод необходим для аппроксимации распределения силового поля решетки постоянных магнитов физически реализуемыми экспоненциальными зависимостями, а также для аппроксимации характеристик качества очистки ВТЖ функциональной зависимостью от двух (и более) независимых переменных, учитывающих осаждаемый слой феррошлама, при решении задачи оптимизации магнитных сепараторов. Структура и параметры дифференциального оператора определяются непосредственно из условий решаемой задачи, что существенно расширяет область его применения в отличие от существующих на основе жестко заданных структур аппроксимационных выражений (полиномы, сплайны, линейные и нелинейные регрессии).

8. Разработан метод параметрической оптимизации конструктивных параметров стержневых магнитных сепараторов, который позволяет создавать более эффективные высокопроизводительные магнитные сепараторы для тонкой очистки ВТЖ от ферромагнитных примесей.

Значимость работы для теории

1. Метод аппроксимации семейств аperiodических характеристик интегральными кривыми в классе линейных дифференциальных уравнений с постоянными

ными коэффициентами использован для моделирования характеристик электротехнических и энергетических объектов: а) для синтеза схем замещения пассивных электротехнических объектов, в базисе физически реализуемых элементов; б) для моделирования семейства статических петель магнитного гистерезиса (симметричных и частных) ферритов и магнитодиэлектриков, которые описывают любую предысторию их намагничивания; в) для моделирования семейств характеристик распределения силового поля решетки постоянных магнитов физически реализуемыми экспоненциальными зависимостями; для моделирования характеристик машиностроительных объектов; г) для моделирования семейства характеристик степени очистки магнитных и гравитационных очистителей технологических жидкостей от твердых примесей.

2. Метод синтеза магнитных схем замещения ПМ из фундаментальных уравнений магнитного поля и разработанная физическая модель ПМ могут быть использованы для решения задач синтеза активных магнитных цепей.

3. Математическое моделирование стохастических характеристик процесса магнитной коагуляции сверткой функций распределения случайных величин и математическое моделирование сил диполь-дипольного взаимодействия намагниченных феррочастиц во внешнем магнитном поле позволило впервые и в общем виде решить задачу построения математической модели магнитной коагуляции. Метод использован также для построения математической модели гравитационной коагуляции в гравитационных очистителях.

Значимость работы для практики

1. Разработанная двухуровневая математическая модель магнитной коагуляции направлена на решение прикладных задач совершенствования технологии и техники очистки ВТЖ от феррочастиц.

2. Определены предельные режимы работы магнитных сепараторов, необходимые при их проектировании.

3. Созданы научные основы проектирования эффективной высокопроизводительной техники очистки ВТЖ от тонкодисперсных ферромагнитных примесей (размером частиц менее 5 мкм).

4. Разработан комплекс программ расчета и аппроксимации семейств характеристик силового поля и характеристик качества очистки ВТЖ, предназначенных для проектирования патронных магнитных сепараторов.

5. На основе комплекса программ разработана научно-обоснованная методика оптимизации и расчета патронных магнитных сепараторов.

6. Повышена эффективность магнитных сепараторов (в два раза уменьшена стоимость магнитов, приходящих на единицу производительности) и снижены потери водных СОЖ в 2,5 раза. Суммарный расчетный годовой экономический эффект от реализации теоретико-экспериментальных исследований составляет 70 млн. руб.

На защиту выносятся:

- математическая модель распределения скалярного магнитного потенциала цилиндрического постоянного магнита в немагнитной среде;
- метод синтеза эквивалентных магнитных схем постоянного магнита, учитывающий поток рассеивания через его боковую поверхность;
- две новые эквивалентные схемы (с распределенными и с сосредоточенными параметрами) цилиндрического постоянного магнита;
- новая математическая модель диполь-дипольного взаимодействия ферромагнитных частиц во внешнем магнитном поле, раскрывающая наличие поперечных сил;
- метод анализа процесса магнитной сепарации ВТЖ на основе предложенного способа преобразования исходной системы нелинейных ДУ в приближенное неоднородное ЛДУ, описывающего траектории феррочастиц;
- новый подход математического моделирования преобразования дисперсного состава ферромагнитных частиц при магнитной коагуляции на основе свертки функций распределения случайных величин;
- двухуровневая математическая модель магнитной коагуляции, в которой весовая функция оператора свертки параметрически зависит от коэффициента глубины магнитной коагуляции, введенного для оценки степени коагуляции на основе закона сохранения массы дисперсной фазы;
- метод синтеза весовой функции оператора свертки соответственно при однородном и при градиентном магнитных полях;

- математическая модель коэффициента глубины магнитной коагуляции;
- метод аппроксимации семейств апериодических характеристик интегральными кривыми в классе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами;
- параметрическая оптимизация конструктивных параметров многорядного магнитного сепаратора при полидисперсном распределении феррочастиц в ВТЖ;
- программа для ЭВМ, реализующая схемный метод численного моделирования силового поля решетки постоянных магнитов в неоднородной магнитной среде, создаваемой в процессе осаждения на поверхность магнитной системы слоя ферромагнитных примесей;
- предельные режимы магнитных сепараторов, математические модели их семейств характеристик качества очистки ВТЖ и программа к ЭВМ имитационного моделирования этих семейств с применением численных методов;
- методика проектирования высокоэффективных патронных магнитных сепараторов на основе разработанного комплекса программ;
- метод организации прерывисто-шаговой кинематики движения шламосьемных манжет, обеспечивающих эффективный отжим осадков на магнитном патроне.

Достоверность полученных результатов:

- обеспечивается корректным применением фундаментальных законов и математических методов, теории электромагнитного поля, теории электрических цепей и динамических систем;
- подтверждается совпадением разработанных математических моделей при определенных граничных условиях с известными частными классическими выражениями;
- подтверждается согласованием результатов расчетов по предложенным в работе моделям, методикам и программам с данными экспериментов и результатами заводских испытаний в ЗАО "Системы водоочистки", г. Ульяновск.

Соответствие работы требованию формулы специальности 05.13.18

В работе присутствуют оригинальные результаты одновременно из трех областей:

- 1) *математического моделирования* (раскрытых в пунктах «Научная новизна» и

«Значимость работы для теории»); **2) численных методов** (*a* – метод аппроксимации семейств апериодических характеристик и метод восстановления по ограниченным фрагментам одиночной характеристики на основе обыкновенных ЛДУ; *b* – применение схемного метода для численного анализа систем с ПМ на основе смоделированной более строгой схемы замещения ПМ); **3) комплексов программ**, которые с целью снижения временных и ресурсных затрат для задач проектирования и оптимизации магнитных сепараторов построены на схемных принципах расчета систем с ПМ (раньше не могли применяться) и на основе сочетания численных методов с разработанными аналитическими критериями разделения фаз суспензии.

Соответствие работы областям исследований специальности 05.13.18:

- разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (п.п. 1-3, 5-8 «Научная новизна»);
- развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 4 «Научная новизна», четвертая глава);
- реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (п. 4 «Значимость работы для практики» на основе п.п. 3, 8 «Научная новизна»; главы 2, 3, 4, 5, 6);
- комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента (по всей работе);
- разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели (влияние магнитной коагуляции на характеристики осаждения ферропримесей «Пятая глава»).

Апробация работы. Теоретические положения и практические результаты диссертации работы докладывались и обсуждались на: Всесоюзной. науч.-техн. конф. «Проблемы нелинейной электротехники» (Киев, 1988); Международной конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроматематика в науке, технике и экономике» (Ульяновск, 2002, 2006, 2007); Всероссийской науч.-практ. конф. «Образование, наука, бизнес» (Череповец, 2005); 2-й Международной научн.-практ. конф. «Актуальные проблемы энергетики АПК» (Саратов 2011); Международной научн.-практ.

конф. «*Электрические аппараты и электротехнические комплексы и системы*» (Ульяновск, 2012); 24-47 научн.-техн. конф. ППС УлПИ-УлГТУ (Ульяновск, 1990-2014); XIX Международной научной конференции «Теория и практика современной науки» (Москва, 2015); IX Международной научной конференции «Тенденции развития науки и образования» (Самара, 2015); 8-й Международной научн.-технич. конф. «Наукоемкие технологии на современном этапе развития машиностроения» (Москва, 2016); II Межд. науч. конф. «Передовые технологии в аэрокосмической, механической и автоматизированной технике» – MIST: Aerospace – 2019, 18–21 ноября 2019 г., Красноярск, Россия.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 56 научных работ (в том числе 5 статей, индексируемых в базе данных Scopus (Q3), 17 работ в изданиях, входящих в перечень ВАК) и 2 свидетельства о государственной регистрации программ к ЭВМ.

Личный вклад автора. Выносимые на защиту результаты получены автором лично. В совместных работах автору принадлежит: [15-18, 20, 22-23, 78, 91-93, 125, 127, 161- 162, 214, 216-217] – идея, теория, метод моделирования, математические модели; [17] – алгоритм; [21] – теория; [25, 75, 81-87, 90, 99, 106, 108, 110-112, 159, 163] – идея, теория, метод моделирования, математические модели и алгоритмы; [116] – семьдесят процентов; [123] – тридцать пять процентов; [126] – сорок процентов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, списка литературы, включающего 269 наименования, семи приложений. Общий объем работы 398 страниц, основной текст 338 страниц, рисунков 106, таблиц 49.

Глава 1. АНАЛИЗ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ПО ПРОЦЕССАМ РАЗДЕЛЕНИЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЙ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

1.1. Классификация ферромагнитных суспензий, состав и свойства ферромагнитных компонентов

Процесс магнитного разделения основан на различиях магнитных свойствах компонентов суспензии (с разной магнитной восприимчивостью χ_f и коэрцитивной силой H_c , А/м). Явление разделения ферромагнитной суспензии в магнитных полях используется в самых различных технологических процессах: обогащение полезных ископаемых; извлечение и концентрация ферромагнитной компоненты; гидроклассификация (разделение зерен на классы различной крупности по скоростям их осаждения в водной среде); сгущение осадков феррочастиц (процесс повышения концентрации твердого вещества вследствие осаждения твёрдых частиц с одновременным удалением (сливом) слоя очищенной воды) [9, 40, 43, 46, 54, 132-133, 142-144, 173, 208, 222-223, 225, 233-234, 247]; очистка самых различных вод (природных, технических и сточных) от магнитных и немагнитных примесей и взвесей [116, 130, 131, 133-135, 137-141, 236, 243, 257], подготовка питьевой воды и т.д.

Решающую роль при выборе схемы разделения играет крупность и равномерность распределения частиц и зерен в объеме. Например, для задач обогащения по вкрапленности руды к тонко вкрапленным относятся размеры 20 – 100 мкм, а весьма тонко вкрапленные имеют размеры 5 – 20 мкм (гравитационные методы обогащения минералов находят применение при крупности более 40 – 50 мкм [116, 120, 123]). В технологии очистки водной среды от ферропримесей к тонким примесям относятся частицы с размером менее 5-10 мкм.

Магнитное разделение наиболее широко применяют для обогащения железосодержащих магнетитовых руд и для очистки самых различных вод от ферропримесей, состоящих из частиц различной крупности. Когда размеры включений изменяются в широких пределах при извлечении крупных и мелких частиц, то

применяются комплексные способы обогащения минералов (например, при обогащении магнетитовых руд), где магнитное разделение выступает основным.

В практике магнитного разделения все твердые компоненты суспензии по их удельной магнитной восприимчивости χ делятся на три группы.

Сильномагнитные минералы с удельной магнитной восприимчивостью $\chi > 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{кг}$ (магнетит, франклинит и пирротин, феррочастицы шлифовальных операций [2, 43, 55, 129, 173, 179]).

Слабомагнитные минералы с удельной магнитной восприимчивостью χ в пределах $7,5 \cdot 10^{-6} - 1,26 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кг}$ (окислы, гидроокислы и карбонаты железа и марганца, ильменит, вольфрамит, гранат, биотит и др. [9, 73, 179]).

Немагнитные минералы с удельной магнитной восприимчивостью $\chi < 1,26 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кг}$.

Аналогично при очистке жидкостей от феррочастиц с немагнитными включениями процесс разделения твердой и жидкой фаз проводят по комбинированным схемам, в которых в качестве основного процесса выступает магнитное разделение [24, 123, 192, 232, 235, 256, 260].

На рисунке 1.1 представлена классификация по размерам загрязненных феррошламом используемых в промышленности водных технологических жидкостей (ВТЖ), в свою очередь, подразделяющихся на смазочно-охлаждающие жидкости (СОЖ) и оборотные воды.

СОЖ являются неотъемлемым элементом технологических процессов современных металлообрабатывающих производств [192]. Мировой объем потребления СОЖ до последнего времени составлял 2,5 млн. т. концентрата в год. Выпускаемые в промышленном масштабе водные СОЖ подразделяются на эмульсионные, синтетические и полусинтетические жидкости [175].

В процессе функционирования металлообрабатывающего оборудования СОЖ неизбежно загрязняется механическими примесями. Например, шлифовальный шлам в СОЖ состоит из 80...98% частиц металлической стружки и 2...20% абразивных частиц [11, 12, 24, 175, 192]. При этом средняя массовая концентрация $C_{\text{и}}$ ферромагнитной фракции в исходной ВТЖ не превышает 1 ... 2 г/л,



Рисунок 1.1 – Классификация загрязненных феррошламом ВТЖ:

η – динамическая вязкость, Па·с; C_{ϕ} – средняя массовая концентрация ферромагнитной фракции в ВТЖ, г/л; $C_{н}$ – средняя массовая концентрация немагнитной фракции в ВТЖ, г/л; $C_{и}$ – средняя массовая концентрация ферромагнитной фракции в исходной ВТЖ, г/л; $\bar{d}_{и}$ – средний размер феррочастиц в ВТЖ, мкм

а диапазон варьирования среднего размера \bar{d}_n измельченных частиц составляет 1 ... 1000 мкм. Средняя массовая концентрация твердых примесей в загрязненных окалиной оборотных водах металлургических производств составляет от 0.1 до 10 г/л. При этом доля ферромагнитной фракции лежит в пределах от 40 до 98%, а средний размер измельченных частиц варьируется в пределах от 0.3 до 10 мкм.

Важной характеристикой загрязнений ВТЖ является гранулометрический состав ферромагнитных частиц – относительное содержание в дисперсной системе частиц различных размеров. Гранулометрический состав определяется экспериментальным методом [12]. Исследования, проведенные в [11, 13], позволили установить, что гранулометрический состав шлифовального шлама достаточно близко описывается нормально логарифмическим распределением [12, 27].

Магнитные свойства ферромагнитных материалов определяются способностью их к намагничиванию и количественно характеризуются безразмерными величинами: магнитной восприимчивостью χ_ϕ и относительной магнитной проницаемостью $\mu = 1 + \chi_\phi$ [70, 73]. Для ферромагнитных материалов $\mu \gg 1$, что объясняется коллективным явлением – доменной структурой материала. При уменьшении размеров частиц магнитная восприимчивость уменьшается, а коэрцитивная сила растет [77, 179].

Полидоменное состояние наблюдается у частиц размером более 1 мкм.

Когда весь объем частицы занимает один домен, то возникает монодоменное состояние (для $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ при размере 0,17 мкм, для Fe при размере 0,03 мкм), у которого по сравнению с полидоменным состоянием более широкая петля гистерезиса. Переход из полидоменного в монодоменное состояние происходит через ряд промежуточных состояний 0,05...0.3 мкм [10, 77, 158, 204].

При размерах частиц (1–10) нм в ансамбле таких монодоменных ферромагнитных частиц проявляется явление суперпарамагнетизма – насыщение кривой намагничивания в относительно небольших магнитных полях и в результате система ведет себя подобно парамагнетику (теряет ферромагнитные свойства по мере перехода в суперпарамагнитное состояние; петля гистерезиса вырождается в кривую намагниченности).

В соответствии с рисунком 1.1 минимальный размер феррочастиц, входя-

щих в загрязненные ВТЖ, не менее 0.3 мкм. Поэтому все частицы загрязненных ВТЖ будут находиться в полидоменном состоянии.

Экспериментально [55] и теоретически [77] установлено, что в многодоменном состоянии коэрцитивная сила возрастает, а магнитная восприимчивость снижается с уменьшением размера феррочастиц. Поэтому магнитная восприимчивость полидоменных феррочастиц зависит от размера частиц d_{ϕ} и от напряженности магнитного поля: $\chi_{\phi}(d_{\phi}, H)$. Причем существует верхняя граница крупности $d_{\phi_{гр}}$, до которой наблюдается эта зависимость. Для железного и магнетитового порошка такая зависимость наблюдается до значения крупности $d_{\phi_{гр}} = 50 - 60$ мкм [179].

Согласно классификации (рисунок 1.1) загрязненные ВТЖ представляют собой слабо концентрированную водную суспензию (с массовой концентрацией 0.01 – 0.1%) из ферромагнитных (железных-Fe или окалины- Fe_3O_4) полидисперсных частиц с преимущественным размером от (0.5 – 10) мкм (в хвостах распределения полидисперсных систем в некоторых случаях размеры феррочастиц могут опускаться до значений 0.1-- 0,4 мкм). В таблице 1.1 сравниваются среднестатистические расстояния между частицами с их средними размерами \bar{R}_{ϕ} при разных рабочих массовых концентрациях C феррочастиц в водной суспензии, кг/м³).

Таблица 1.1

Сопоставление среднестатистических расстояний между частицами ВТЖ с их размерами при разных массовых концентрациях феррочастиц

$C, \text{ кг/м}^3$	0.1	1	10
$C, \%$	0.01	0.1	1
\bar{R}_{ϕ}/\bar{d}	0.015	0.031	0.067

Вывод. В слабоконцентрированных водных суспензиях расстояния между частицами намного больше их крупности, поэтому согласно [29], влияние магнитных сил взаимодействия частиц на вязкость среды мало, а также, согласно [61], гидродинамическое взаимодействие относительно мало и не зависит от концентрации феррочастиц, т.е. правомерны приближения среды к слабым растворам.

1.2. Классификация и основные характеристики оборудования для разделения суспензий в магнитном поле

Магнитное разделение компонентов суспензий производится в магнитных сепараторах. Характерной особенностью таких сепараторов является наличие в их рабочей зоне магнитного поля. При движении твердой фазы через рабочую зону сепаратора под воздействием магнитной силы притяжения f_m компоненты с различными магнитными свойствами перемещаются по различным траекториям, что позволяет ферромагнитную компоненту выделить в отдельный – магнитный продукт, а немагнитные – в немагнитный.

На частицы твердой фазы, перемещаемые через рабочую зону сепаратора, кроме магнитной силы действует целый ряд механических сил $f_{мех}$ – силы тяжести и сопротивления среды, сила молекулярного сцепления, центробежная сила.

Подчеркнем, что существует два основных направления применения магнитных сепараторов при разделении водных суспензий: для обогащения руд [9, 40, 43, 46, 54, 59, 132, 144, 177, 208, 227, 229, 237, 238] и для очистки жидких ВТЖ от ферромагнитных примесей [116, 130, 131, 133-135, 137-141, 263]. Для обеспечения разделения и немагнитных фракций магнитные сепараторы встраивают в многоступенчатую систему очистки [21], в которой в качестве ступеней очистки используют отстойники для первичной очистки, флотаторы и гравитационные сепараторы [24, 123, 192, 236, 239, 262, 266].

Магнитные сепараторы отличаются устройством магнитной системы; рабочей зоны, в которой действует магнитное поле; конструкцией ванны для приема продуктов разделения и конструкцией рабочего органа, перемещающего магнитную фракцию через рабочую зону.

По напряженности и интенсивности магнитного поля сепараторы делятся на две группы: сепараторы со слабым магнитным полем, напряженностью 80 – 120 кА/м; сепараторы с сильным магнитным полем, напряженностью 800 – 1600 кА/м.

По конструкции устройств для сбора и удаления магнитного продукта различают барабанные, валковые, роликовые, дисковые и стержневые сепараторы

[24, 40, 131, 132, 175, 191]. В сравнении с другими методами себестоимость магнитной сепарации для кусковых сильномагнитных материалов самая низкая, для мелкодисперсных – вторая после самого дешёвого метода винтовой сепарации. Производительность сепараторов для кусковых руд достигает 500 т/час, для тонкоизмельчённых сильномагнитных – 200 т/час, слабомагнитных – 40 т/час.

Тонкую очистку могут обеспечить центрифуги, гидроциклоны, флотаторы и магнитные сепараторы. Центрифуги обеспечивают высокую тонкую очистку, но имеют относительно небольшую производительность очистки (до 150 м³/ч) при высокой энергоёмкости. Существенный недостаток гидроциклонов, их повышенный абразивный износ, нагрев жидкости, забивание крупными примесями. Флотаторы просты, однако процесс флотации неустойчивый (сильно зависит от физических свойств ВТЖ), приводит к расслаиванию сложных жидкостей, выводит полезные компоненты, изменяет состав ВТЖ из-за окисления воздухом. Необходим сжатый воздух (до 10 % от расхода жидкости), а для устойчивости процесса флотации необходимы специальные флотореагенты.

Магнитные сепараторы свободны от отмеченных недостатков. Анализ научно-технической информации показал, что большинство современных магнитных сепараторов выполняются на постоянных магнитах (ПМ). Использование современных постоянных магнитов оправдано созданием высоко градиентных полей, отсутствием энергозатрат и долговечностью, а сепараторы на ПМ характеризуются простотой конструкции и надёжностью. На рисунке 1.2 представлены технико-экономические преимущества магнитных сепараторов на ПМ по сравнению с другими принципами сепарации [116, 123].

Рассмотрим основные типы магнитных сепараторов. Наиболее распространены барабанные магнитные сепараторы [40, 192]. Они просты в эксплуатации, имеют низкую энергозатратность и сравнительно невысокую стоимость. Их использование не приводит к истощению СОЖ и повышению её температуры [24].

Сепараторы отделяют ферромагнитные частицы (в смеси с немагнитными частицами при соотношении масс 15:1). Степень очистки при исходной загрязнённости эмульсии до 1 г/дм³ составляет 80...85 %.

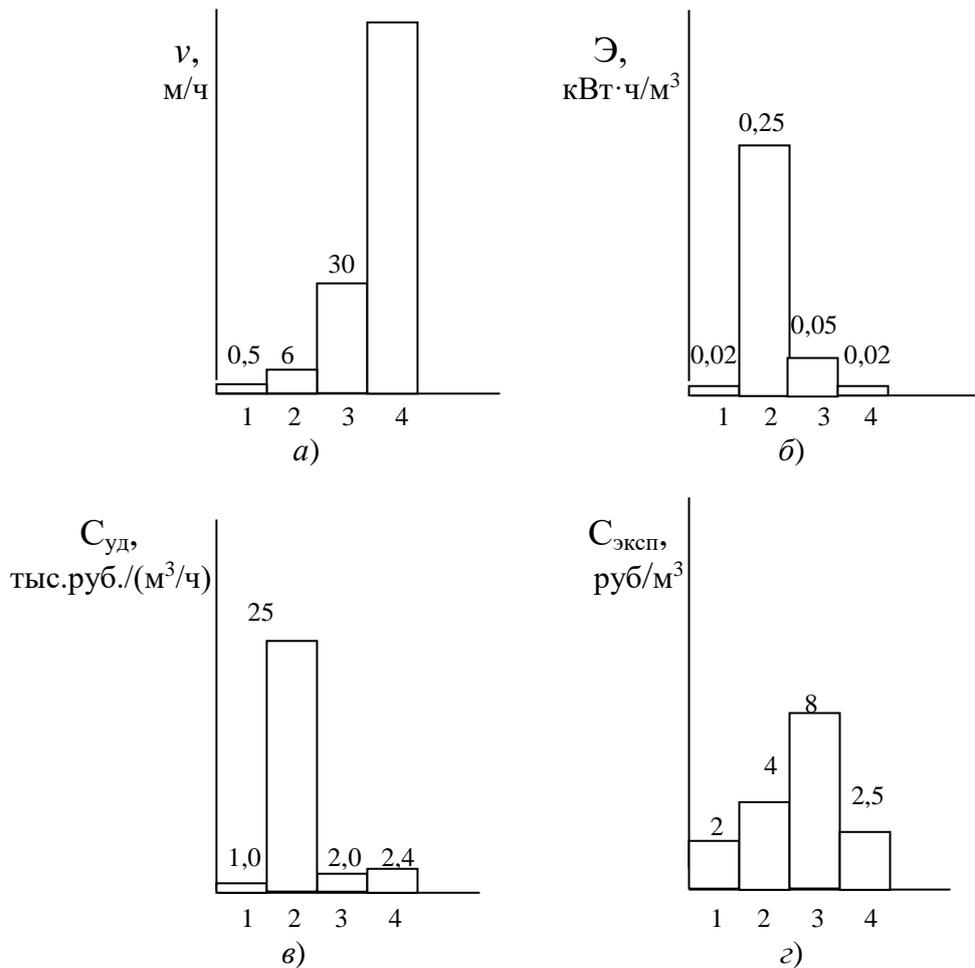


Рисунок 1.2 – Сравнение технико-экономических характеристик разных типов сепарации:
 а) v – скорость потока ВТЖ; б) \mathcal{E} – энергоёмкость; в) $C_{уд}$ – удельная себестоимость на единицу производительности; г) $C_{эсп}$ – удельная себестоимость эксплуатации на единицу объема потока ВТЖ;
 1 – осаждение без реагентов; 2 – фильтрование; 3 – осаждение с использованием реагентов; 4 – магнитный патронный сепаратор;

Активная часть сепаратора состоит из вращающегося барабана (рисунок 1.3), выполненного из набора ферритобариевых магнитов. Недостатком очистителя является невысокий уровень степени очистки.

Стержневые магнитные сепараторы [24, 131, 132] предназначены для улавливания ферромагнитных частиц из рабочей жидкости в гидравлических, смазочных системах и системах оборота смазочно-охлаждающих жидкостей станков. Очистка сепараторов производится по мере накопления на их поверхности ферромагнитных загрязнений. На рисунке 1.4 показан стержневой сепаратор типа Г42 [175].

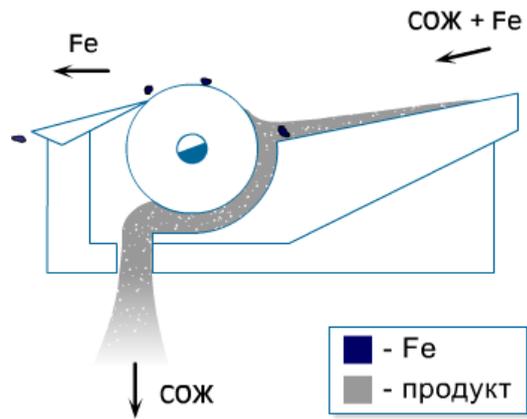


Рисунок 1.3 – Барабанный магнитный сепаратор типа Х43-4

Недостатками таких сепараторов являются низкая производительность, наличие дополнительных операций по очистке патронов, относительно невысокие степень и тонкость очистки.



Рисунок 1.4 – Сепаратор с магнитными патронами типа Г42 [175]

Цепные патронные магнитные сепараторы (ЦМС) (рисунок 1.5).

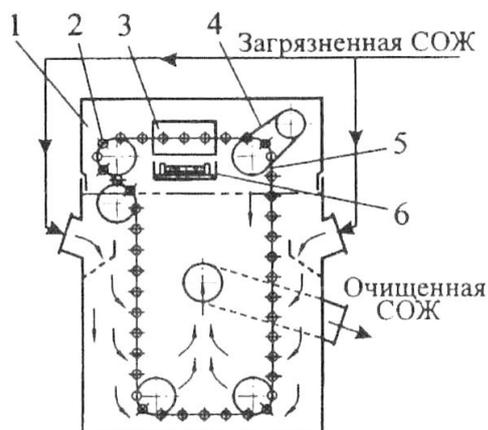


Рисунок 1.5 – Схема патронного цепного магнитного сепаратора:
 1 – бак-корпус, 2 – магнитный патрон, 3 – разъемные гребенки с манжетами,
 4 – привод, 5 – цепь, 6 – скребковый конвейер

Обеспечивают высокую степень очистки СОЖ благодаря малой скорости потока жидкости в магнитной системе сепаратора, имеют малую энергоемкость и сравнительно невысокую стоимость, не требуют расходных материалов, просты в обслуживании, компактны. Значительная площадь поверхность патронов (равная n -кратному числу патронов), число рабочих зазоров обеспечивают возможность очистки относительно больших объемов СОЖ (до 60 и более м³/час).

Однако цепные сепараторы не рекомендуется использовать для очистки СОЖ на операциях абразивной обработки, так как они имеют большое число подвижных соединений, подвержены быстрому износу при попадании в них абразивных частиц.

Патронные магнитные сепараторы (ПМС) и кассетные патронные магнитные сепараторы (КПМС) лишены недостатков (рисунок 1.6) [24, 116, 133-135, 138-141, 257], присущих ЦМС и барабанным магнитным сепараторам.

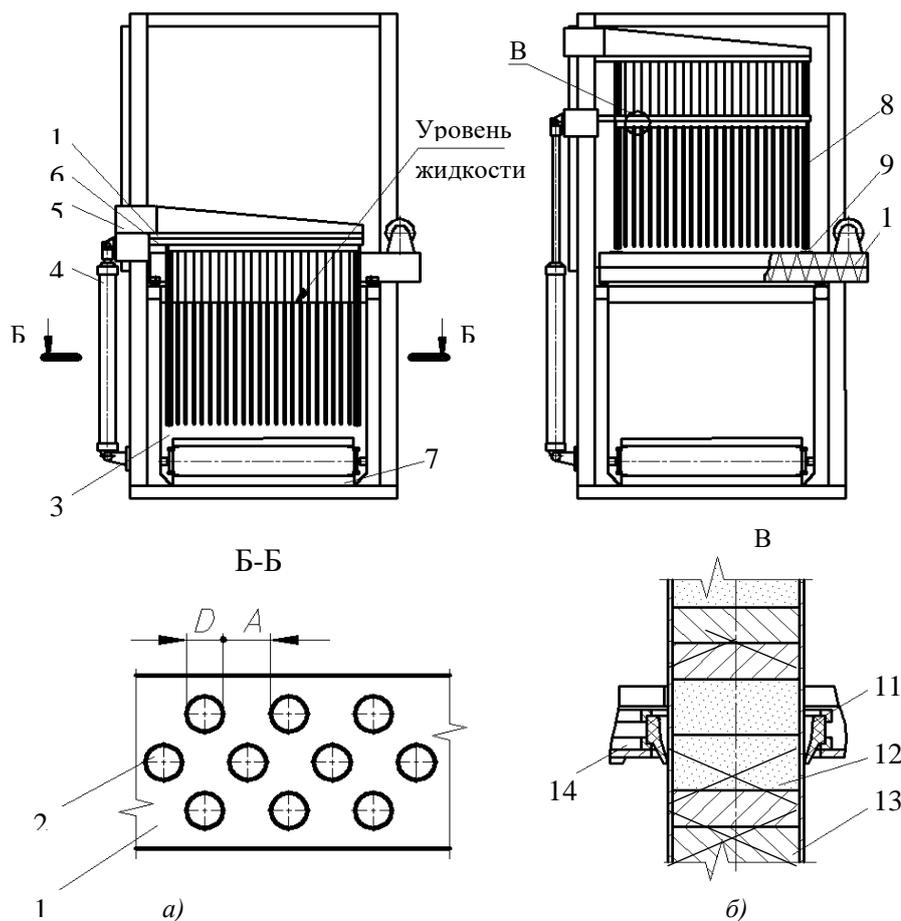


Рисунок 1.6 – Схема кассетного патронного магнитного сепаратора: а, б – положение кассеты соответственно рабочее и перед очисткой патронов от примесей;

- 1 – кассета; 2 – магнитный патрон; 3 – емкость; 4 – гидроцилиндр; 5 – траверса;
 б – шламосьемник; 7 – конвейер донный; 8 – штанга; 9 – площадка опорная;
 10 – конвейер приема шлама; 11 – манжета; 12 – магнит; 13 – вставка ферромагнитная;

Конструктивной разновидностью патронных магнитных сепараторов являются платформенные магнитные сепараторы (ПФМС) [19, 22, 132, 134, 135, 138-140], которые применяются в централизованных системах очистки СОЖ. Такие сепараторы высокопроизводительны и могут встраиваться в существующие емкости централизованных систем оборота СОЖ [135]. По принципу функционирования они аналогичны КПМС.

Однако стержневым и патронным магнитным сепараторам присущ следующий недостаток. В шламах в структуре агрегатов заземляется (связывается) СОЖ, что приводит к излишним её потерям.

Для магнитных сепараторов используют современные постоянные магниты (рисунок 1.7 – таблица 1.2) [57-58, 66, 69, 76, 148, 261]. В качестве материала оболочки магнитного патрона в основном применяются латунь или пластмасса. На оболочку наносят покрытие: гальваническое хромирование, плазменное или фторопластовое.

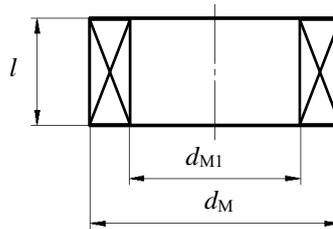


Рисунок 1.7 – Конструкция постоянного магнита

Таблица 1.2

Параметры используемых магнитных элементов

№	Тип магнита	Остаточная магнитная индукция B_r , Тл	Размеры магнита, мм			Масса, г
			d_M	d_{M1}	l	
1	Неодим-боровые	1	10	6	10	3,5
2		1	10	–	10	5,75
3		1,27	29	20	14	37
4	феррито-бариевые	0,35	29	–	14	42

Использование неодим-боровых магнитных элементов, создающих более вы-

сокие значения градиентов напряженности поля, позволяет экономичнее расходовать магнитные материалы на создание магнитных элементов и повысить эффективность очистки жидкостей. Однако недостатком их использования является увеличение процентного отношения жидкости, связанной в осадке, что приводит к увеличению потерь СОЖ при отделении осадка от магнитной системы сепаратора.

Вывод 1. Загрязненные ВТЖ, применяемые в машиностроительных и металлургических производствах, представляют собой *слабо концентрированную водную суспензию (с массовой концентрацией 0.01 – 0.1%)* из ферромагнитных (железных-Fe или окалины-Fe₃O₄) полидисперсных частиц крупностью от 0.3 мкм до 100-150 мкм. В таких суспензиях гидродинамическими взаимодействиями ферро-частиц и влиянием магнитных сил взаимодействия частиц на вязкость среды пренебрегаются.

Вывод 2. Наиболее перспективными для целей магнитного разделения водных суспензий являются магнитные сепараторы на современных постоянных магнитах, которые характеризуются высокой производительностью, надежностью, удобством эксплуатации и экономически доступны.

Вывод 3. Патронным магнитным сепараторам, как и стержневым магнитным сепараторам присущ общий недостаток повышенного расхода СОЖ, обусловленного заземлением СОЖ намагниченным ферромагнитным шламом на поверхности патронов.

1.3. Математическое моделирование взаимодействия частиц ферромагнитных суспензий между собой и их структурирование во внешних магнитных полях

Процесс магнитной сепарации тонкоизмельченных ферромагнитных руд и частиц сопровождается процессами коагуляции и флокуляции материала.

Флокуляция это процесс агрегирования тонкоизмельченного магнитного материала с образованием в магнитном поле сепаратора флокул, представляющие собой прядеобразные образования, ориентированные вдоль магнитных линий. Явлением флокуляции сопровождается при обогащении железосодержащих руд и оса-

ждении ферропримесей на полюса магнитной системы. В эти флоккулы механически вовлекаются немагнитные частицы. Для уменьшения загрязнения магнитного продукта немагнитными частицами, например, в технологиях обогащения применяются магнитные системы с полюсами, чередующиеся по ходу движения материала полярностью (полиградиентные магнитные системы). При такой конструкции магнитной системы флоккулы проходят мимо полюсов разноименной полярности, меняют свою ориентацию и частично разрушаются, а заземленные немагнитные компоненты выпадают из флоккул [55, 56]. В работах Кармазина и Плаксина [54] большое внимание уделяется созданию полиградиентных магнитных систем электромагнитных сепараторов, поскольку их совершенствование позволяет повысить селективную извлекаемость (усилить обогащение) магнитной руды.

Под коагуляцией понимается процесс сближения и слипания частиц дисперсной фазы в дисперсной системе под влиянием внешних или внутренних сил. Магнитная коагуляция – это процесс агрегирования тонкоизмельченного магнитного материала в дисперсионной среде с образованием в магнитном поле сепаратора нитеобразных или цепочечных агрегатов, ориентированных вдоль магнитных линий [12, 16, 54, 55, 68, 74, 117, 118, 151, 152, 155, 225, 229, 241, 243, 247, 264].

В задачах обогащения руд и диагностики дефектов в стальных изделиях важны силы разрушения флоккул и удержания цепочечных агрегатов. Для совершенствования технологии мокрого обогащения руд в работах [4, 129, 173, 183, 244, 265] проведены обширные исследования по изучению структуры флоккул, определены условия их образования, удержания и распада.

В работах [32, 68, 117, 118, 147] рассмотрены вопросы коагуляции ферромагнитных частиц суспензии с целью усовершенствования магнитопорошковой диагностики дефектов ферромагнитных изделий. В этих работах внимание сосредоточено на определении результирующих магнитных сил притяжения и удерживания в цепочках агрегатов, закрепленных в области дефекта диагностируемого твердого тела. При моделировании магнитных сил взаимодействия цепочечных агрегатов использована их замена аксиально-ориентированными цилиндрами и кулоновская модель взаимодействия фиктивных магнитных зарядов. Однако кулонов-

ская модель силы правомерна только на расстояниях значительно превышающих размеры магнитных диполей [184]. Подчеркнем, что использование упрощенной (кулоновской) модели взаимодействия недостаточно для обоснования существования нитеобразных агрегатов и их устойчивости. Поэтому для задач магнитной коагуляции необходимы более строгие математические модели сил взаимодействия намагниченных феррочастиц (агрегатов).

В однородном внешнем магнитном поле феррочастицы намагничиваются, образуя магнитные диполи [184, 243, 248], которые взаимодействуют между собой (диполь-дипольное взаимодействие). Вопросу намагничивания феррочастиц и их свойствам посвящено много научных исследований [2, 4, 66, 119, 146, 207, 209, 223, 228, 229, 235, 246, 257, 259, 261, 264, 265].

В суспензиях с наночастицами (магнитные жидкости) намагниченные частицы объединяются тоже в цепочечные агрегаты. В работах [49, 52, 53, 128, 155, 210, 222, 229, 239, 244] представлены экспериментальные и теоретические исследования степени упорядоченности магнитных жидкостей и строятся математические модели агрегатов. При этом учитывается то, что результирующая вероятность парного объединения во внешнем поле сопровождается *разориентацией магнитных диполей тепловыми флуктуациями*. При этом отсутствует научное понимание устойчивости упорядоченных агрегатов.

В суспензиях с микрочастицами, представляющими интерес для процессов сепарации, вследствие повышенных интенсивностей магнитных сил наблюдается устойчивое выстраивание цепочечных агрегатов вдоль магнитных линий внешнего поля [52, 53, 117, 147, 229]. В работе [117] показаны фотографии агрегатов, структура которых имеет нитевидную форму. Это свойство является характерной особенностью процесса наведенной магнитной коагуляции.

Устойчивое выстраивание цепочечных агрегатов вдоль магнитных линий при магнитной коагуляции вошло в её определение в нормативные документы магнитно-порошковой диагностики: «*Магнитная коагуляция магнитного порошка (Magnetic furring of magnetic particles)* – процесс соединения намагниченных частиц магнитного порошка в суспензии, как магнитных диполей, в цепочки под действием внешнего

магнитного поля и ориентации цепочек вдоль магнитных силовых линий» [147].

Явление магнитной коагуляции служит перспективным направлением реализации тонкой очистки ВТЖ (от феррочастиц размером менее 5-10 мкм), так как объединение микрочастиц в более крупные агрегаты под действием внешнего магнитного поля усиливает эффект разделения суспензии. Магнитная коагуляция использовалась и в качестве мощного средства интенсификации гравитационной очистки на основе операции предварительного омагничивания СОЖ [123].

В работах [14, 32, 116, 120, 123, 128, 229, 243, 246, 247, 248] высказываются научные предположения о положительной роли магнитной коагуляции при очистке ВТЖ от ферромагнитных примесей. Однако теория применения магнитной коагуляции отсутствует как для технологии омагничивания СОЖ, так и для и технологии магнитной сепарации смазочно-охлаждающей жидкости.

Для реализации технологии разделения суспензии *важны характеристики распределения дисперсного состава феррочастиц до коагуляции и при магнитной коагуляции*. В системы очистки поступают водные суспензии с полидисперсным распределением феррочастиц. В практике разделения суспензии распределение твердых частиц по классам крупности характеризуется гранулометрическим составом. Исследования в [11, 13] установили, что гранулометрический состав шлифовального шлама близок к нормально логарифмическому распределению [12, 27]. В теории разделения суспензии гранулометрический состав дисперсных систем описывается вероятностными функциями распределения (нормальным или нормально-логарифмическим законами распределения плотности вероятностей).

Анализ научно-технической информации показал, что *задача математического моделирования дисперсного состава при магнитной коагуляции не решена*. Имеются отдельные попытки прогнозирования распределения дисперсного состава феррочастиц при магнитной коагуляции по математическому моделированию взаимодействия двух частиц [151, 152, 243, 247].

Коагуляция является одним из основных процессов, характеризующих эволюцию дисперсионных систем. Изучение и определение стохастических характеристик распределения полидисперсного состава твердой фазы суспензии *является*

фундаментальной задачей коагуляции. Такая задача исследуется на основе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений М. Смолуховского:

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j,j} c_{i-j} c_j - c_i \sum_{j=1}^{\infty} K_{i,j} c_j; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial f(t, m)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^m K(m', m - m') f(m') f(m - m') dm' - f(m) \int_0^{\infty} K(m, m') f(m') dm',$$

ставит целью определение эволюции во времени функции распределения частиц взвеси по их массам или размерам [29, 30, 41, 42, 145, 155, 254], где i, j – меры агрегатов; c_i, c_j – массовые концентрации дисперсной фазы; $f(t, m)$ – плотность вероятности распределения дисперсной фазы по массе. В основе механизма элементарного процесса коагуляции лежит соединение двух сталкивающихся частиц с массами m_i и m_j (m и m').

Для монодисперсной твердой фазы этот механизм коагуляции порождает спектр частиц твердой фазы, представляющий собой набор последовательного ряда 1, 2, 3, ... и k -мерных частиц.

Важным фактором в процессе коагуляции являются физические механизмы сближения и слипания частиц, которые подразделяются на внутренние и внешние. Эти механизмы определяют вид симметричной функции $K(m_i, m_j)$ в интегро-дифференциальных уравнениях Смолуховского, которую называют ядром коагуляции. Ядро характеризует вероятность (частоту) столкновения частиц с массами m_i и m_j , обратно пропорциональную времени их жизни.

К внутренним механизмам сближения относятся свободно-молекулярное (броуновское) движение, диффузия, гравитационное падение. При внутренних механизмах слипания действуют межмолекулярные и гидродинамические силы, которые проявляются при сближении частиц.

К внешним механизмам, например, относится внешнее магнитное поле, однако, в открытой научной литературе отсутствуют какие-либо решения уравнений (1.1) с магнитным полем.

Подчеркнем, что по уравнениям (1.1) в явной форме определены функции распределения агрегатов, характеризующие коагуляцию немагнитных частиц,

только для некоторых частных (простых) исходных распределений дисперсной фазы по массам. При этом в каждом частном случае требуется проводить специальные математические исследования области существования решения и создавать индивидуальные алгоритмы интегрирования.

Выводы

1. Из-за нелинейности интегрально-дифференциальных уравнений М. Смолуховского определение функции распределения дисперсного состава агрегатов в *общем случае невозможно* (для каждого частного случая распределения исходных частиц требуются специальные математические исследования, индивидуальные алгоритмы и *предельные машинные ресурсы*). Причем, по уравнениям М. Смолуховского решены некоторые задачи коагуляции только для немагнитных частиц. Для намагниченных частиц задача расчета распределения дисперсного состава ферромагнитных частиц при магнитной коагуляции в принципе не решена.

2. Магнитная коагуляция находит широкое проявление в различных технологических процессах, например, в металлургии, в системах неразрушающего контроля. В технологии тонкой очистки водных технологических жидкостей от твердых и ферромагнитных примесей коагуляция является неотъемлемым процессом. Также магнитная коагуляция присутствует и в системах очистки ВТЖ, основанной на принципе гравитационного осаждения ферромагнитных примесей, в которых магнитное поле применяется в качестве предварительной обработки суспензии однородным магнитным полем, которая приводит к увеличению крупности твердой фазы. Поэтому учет процессов коагуляции необходим при проектировании и оптимизации очистителей ВТЖ от ферромагнитных и твердых примесей. В противном случае расчетные характеристики эффективности очистки становятся ничтожно малыми и не соответствуют фактическим.

3. Создание эффективных и экономически доступных систем очистки, а также аналогичных систем, работающих на принципах разделения компонентов в магнитном поле, сдерживается сложностью математического аппарата нелинейных уравнений Смолуховского. Поэтому актуальны новые подходы и методы математического моделирования процесса магнитной коагуляции в водных суспен-

зиях, приводящие к универсальным и экономичным алгоритмам реализации математической модели магнитной коагуляции на основе ЭВМ.

1.4. Математическое моделирование процесса магнитной сепарации как одного из основных вариантов разделения ферромагнитных суспензий

Техника магнитной очистки водных технологических жидкостей от ферромагнитных частиц характеризуется конструктивной сложностью – высокой размерностью и неоднородностью (объемная решетка состоит из неоднородных элементов с постоянными магнитами (ПМ) и может содержать несколько тысяч дискретных ПМ) [24, 123, 138, 140]. Во время технологического процесса сепарации водной суспензии на поверхности магнитной системы происходит накопление ферромагнитного осадка, приводящее к ослаблению интенсивности магнитного поля в рабочей области сепаратора.

Процесс магнитного разделения компонентов отличается сложностью происходящих при этом явлений, так как в нем участвует большая масса частиц разделяемого материала различной крупности и с различными физическими свойствами. Эти частицы при своем движении в сепараторе, взаимодействуя друг с другом, настолько усложняют явление, что оно становится трудно поддающимся расчету.

Анализ научно-технической информации показал, что математическое моделирование процесса разделения в приложении к созданию и оптимизации технических систем магнитной сепарации решается в рамках макроподхода¹. В рамках такого подхода математическое моделирование магнитного разделения состоит из следующих основных задач:

– численного моделирования распределения характеристик магнитного поля и сил, создаваемых решеткой магнитов в рабочей области магнитного сепаратора, воздействие которых приводит в движение разделяющиеся компоненты [24, 43, 46, 54, 59, 243, 248, 259];

¹ Макроподход – система рассматривается в целом, в приближении осреднения индивидуальных микросвязей.

– численного моделирования траектории феррочастиц, формирующихся в ламинарном потоке водной суспензии под действием сил магнитного поля [44, 46, 71, 191, 211, 214, 242, 248, 259];

– моделирования макрохарактеристик разделения ферромагнитной суспензии [11, 16, 21, 24, 123, 246, 259].

В проблемно-ориентированных программах проектирования и особенно для оптимизации технических средств разделения суспензии необходимо одновременно сочетать большое количество математических моделей сложных процессов, в том числе, математическую модель магнитной коагуляции, которая, как уже подчеркивалось, в общем виде не поддается расчету. Такие условия накладывают требование на создание экономичных алгоритмов численного моделирования распределения магнитного поля, траекторий феррочастиц в водном потоке и семейств эксплуатационных характеристик очистителей (полноценная оптимизация перспективна только по семействам характеристик).

Основным *критерием процесса сепарации* является характеристика степени разделения дисперсной фазы и дисперсионной среды, которая называется средней степенью очистки:

$$\bar{\varepsilon} = (C_{\text{вх}} - C_{\text{вых}}) / C_{\text{вх}}, \quad (1.2)$$

где $C_{\text{вх}}$, $C_{\text{вых}}$ – средние массовые концентрации полидисперсных частиц примеси в СОЖ (ВТЖ) соответственно на входе и выходе сепаратора, г/л. В технологии машиностроения используются другие обозначения $C_{\text{вх}} = C_{\text{и}}$, $C_{\text{вых}} = C_{\text{о}}$.

Среднее значение степени очистки (1.2) определяется выражением (1.3), которое учитывает стохастический характер распределения феррочастиц, поступающих в очиститель:

$$\bar{\varepsilon}(\bar{d}_{\text{и}}) = \int_0^{\infty} \varepsilon(d_{\text{ф}}) f_{\text{и}}(d_{\text{ф}}, \bar{d}_{\text{и}}) d(d_{\text{ф}}). \quad (1.3)$$

В (1.3) $f_{\text{и}}(d_{\text{ф}}, \bar{d}_{\text{и}})$ плотность вероятностей распределения по размерам $d_{\text{ф}}$ исходных ферромагнитных частиц; $\bar{d}_{\text{и}}$ – средний размер исходных феррочастиц; $\varepsilon(d_{\text{ф}})$ – зависимость степени очистки от размеров монодисперсных частиц, которая характеризует относительный уровень задерживаемых сепаратором частиц *при монодисперсном* их распределении [11, 12, 123, 158].

Анализ научно-технической информации показал, что в практике проектирования и оптимизации магнитных сепараторов для очистки СОЖ (ВТЖ) большой удельный вес занимают эмпирические и эвристические методы [11, 16, 21, 24, 123, 246, 259]. Это связано с несовершенством существующей теории и используемых математических моделей процесса магнитной сепарации, которые строились на существенно идеализированных представлениях и на феноменологических принципах.

Для определения количественной характеристики разделения компонент дисперсной системы в работах [44, 46, 71, 177, 191, 211, 215, 246, 248, 259], посвященных магнитным сепараторам, определяется траектория частиц на основе решения нелинейного динамического уравнения Ньютона, как правило, численным методом. При этом ферромагнитные частицы рассматриваются как материальные точки, так как их размеры значительно меньше размеров магнитной системы сепаратора. Исходя из специфики задачи, нелинейность уравнения может обуславливаться: нелинейной зависимостью магнитных сил; нелинейной зависимостью силы сопротивления среды, а также метрической нелинейностью при представлении динамического уравнения в координатной форме.

В частности, для патронных магнитных сепараторов результаты численного моделирования траекторий феррочастиц в водной среде проведены в [215].

Моделирование проводилось при условиях ламинарного потока водной суспензии и в приближении потенциальной теории течения идеальной несжимаемой жидкости, а поверхность постоянных магнитов принималась магнитно-эквипотенциальной. Распределения плоских гидродинамических и магнитостатических полей определялись методом конформного отображения.

Данная численная модель позволяет визуально отобразить семейство траекторий феррочастиц и полезна с позиции оценки некоторых характеристик степени очистки. Существенным недостатком математической модели, представленной в [215], и большинства рассмотренных работ по магнитным сепараторам состоит в том, что в них не учитывается влияние накапливаемого на поверхности магнитной системы слоя осажденных феррочастиц. В силу высокой относительной магнитной проницаемости осажденного слоя феррошлама этот технологический фактор приводит к экранированию рабочей области сепаратора от источника магнитного поля, что приводит к

ухудшению характеристик очистки.

В задачах оптимизации конструкции сепараторов и режимов их эксплуатации без учета этого явления математические модели процесса сепарации технологических жидкостей становятся неадекватными.

В сепараторах обогащения руд рабочими поверхностями используемых ПМ являются непосредственно поверхности полюсов, поэтому там успешно применяются аналитические методы расчета распределения статических полей магнитных модулей на основе двумерных функций комплексного переменного (метод Коши-Римана, метод комплексного магнитного потенциала и конформного отображения) [37, 43, 178, 181, 182]. Аналогичный метод использован в работе [215].

Однако такие аналитические методы даже в несложных задачах приводят к оценкам по сложным зависимостям, а для неоднородных магнитных систем, какими являются магнитные сепараторы жидких сред, аналитические методы невозможны.

Распределение полей технических систем сложной конфигурации определяется численными расчетами [38, 43, 59, 61, 160, 247, 248].

К настоящему времени создан целый ряд численно-аналитических и численных методов анализа ЭМП: методы интегральных уравнений (МИУ), конечных разностей (МКР), конечных элементов (МКЭ) и граничных элементов (МГЭ); методы сведения полевых задач к цепным; методы физического моделирования ЭМП с использованием специально построенных численно-аналоговых комплексов. Разработка различных расчетных методов обусловлена большим разнообразием практических задач. В [59] подчеркивается, что применение для расчета ЭМП какого-то единого численного метода либо малоэффективно, либо просто невозможно, поэтому методы численного расчета ЭМП являются направленными: *каждый из них ориентирован для решения задач определенного типа*. Поэтому остается актуальной в теоретической электротехнике проблема разработки новых и усовершенствование известных алгоритмов расчета ЭМП.

Известны универсальные программные комплексы для расчета распределения ЭМП, например, Comsol, Ansys и другие. В системе Ansys используются современные конечно-элементные технологии для выполнения электромагнитных расчетов. Его

модуль Maxwell позволяет рассчитывать магнитоэстатические линейные и нелинейные трехмерные поля, вызванные как распределением плотности постоянного тока, так и постоянными магнитами или внешними магнитными полями.

Однако, для применения конечно-элементных технологий моделирования распределения поля в магнитных сепараторах, содержащих несколько тысяч ПМ и предназначенных для тонкой очистки потоков жидкостей от ферромагнитных частиц, требуются значительные затраты времени и ресурсов [247, 248].

Высокую эффективность моделирования и научную обоснованность распределения магнитного поля в шкивных магнитных сепараторах с электромагнитными источниками показал цепной метод [46].

Цепные (схемные) методы имеют ряд преимуществ, суть расчета сводится к дискретным резистивным схемам и к математическим моделям источников. При этом дискретные резистивные схемы являются уже моделью численного алгоритма решения дифференциальных уравнений, описывающих поле. Все элементы связаны между собой балансными уравнениями по законам Кирхгофа, которые играют роль граничных условий. Погрешности расчетов систем алгебраических уравнений контролируются просто по невязкам балансов уравнений Кирхгофа. В теории цепей разработан набор эффективных методов как для формирования полной системы уравнений магнитного состояния цепи, так и для преобразования исходной цепи или её фрагментов к эквивалентным цепям, которые повышают эффективность цепных методов расчета сложных схем.

Несмотря на достоинства цепные методы расчета магнитных систем с *постоянными магнитами* не получили широкого распространения, потому что существующие схемы замещения ПМ состояли из идеализированных элементов – эквивалентной магнитодвижущей силы (МДС) F и внутреннего магнитного сопротивления R_M , которые определялись по статическим характеристикам размагничивания магнитных материалов ПМ [174]. Такие схемы не учитывали неоднородность распределения магнитного потенциала по поверхности постоянных магнитов и *поля рассеяния* через боковые поверхности ПМ, что приводит к различию магнитных характеристик образцов ПМ от характеристик их материалов. Поэтому

существующие схемы ПМ завышают магнитный поток до двух раз.

Схемные методы применялись только до середины 70-х годов 20 века [174]. Они уступали по точности расчетов численным методам, базирующимся на учете распределенных эквивалентных магнитных объемных и поверхностных зарядов и на методах вторичных источников (метод Тозони). С широким внедрением вычислительной техники численные методы стали доминирующими.

В статье [47] предложена идея учета неоднородностей магнитного потенциала и магнитного потока представлением ПМ пассивной распределенной короткозамкнутой магнитной цепью, что повышает адекватность моделирования магнитного поля постоянного магнита.

Существенные недостатки методики работы [47] заключаются в том, что она не позволяет представить ПМ в виде *активной* распределенной магнитной цепью, полученная схема не учитывает состояние внешней среды, а формулы связи параметров магнита с параметрами его материала получаются в форме нестрогих допущений и итерационных приближений.

Поскольку боковые поверхности постоянных магнитов являются рабочими поверхностями в патронных магнитных сепараторах жидких сред, то актуальна задача синтеза корректной магнитной схемы замещения ПМ. Однако задачи синтеза схем замещения постоянных магнитов не решены, поэтому возникает задача разработки метода синтеза распределенной схемы замещения постоянного магнита.

Для подтверждения адекватности моделирования поля схемными методами необходимо иметь альтернативную математическую модель одиночного постоянного магнита, полученную на основе физического подхода.

Физические модели правомерны только в однородной магнитной среде. В литературе имеются отдельные физические модели, которые позволяют описывать поле в явной форме, например, на оси цилиндрического магнита [148].

На основе закона Био-Савара в [160] проведен расчет напряженности поля соленоида (его аксиальной H_z и радиальной H_r составляющих) в произвольной точке внешнего пространства. Однако, в приведенной методике содержится дефект, суть которого состоит в том, что напряженность поля как для одиночного контура,

определенная в [7,121] через векторный потенциал, так и для однослойной обмотки, определенная в [160], выражается через эллиптические интегралы первого и третьего рода. По этой причине указанная методика приводит к сингулярности – значения поля в некоторых особенных точках, лежащих на поверхности соленоида, расходятся. В [170] показано, что особенные точки появляются как следствие принятых математических допущений о бесконечно малой толщине токового слоя.

В [154] представлена строгая и компактная модель поля ПМ, но которая не свободна от математической неопределенности на поверхности ПМ.

В [170] приводится, строгий расчет напряженности поля постоянного магнита в произвольной точке (как внутри магнита, так и вне его тела). При этом постоянный магнит цилиндрической или кольцевой формы моделируется разноименными фиктивными магнитными зарядами, сосредоточенными на его противоположных торцевых поверхностях. Поверхностная плотность заряда равна $\sigma_m = \pm M_r$. Полученные математические выражения поля свободны от дефектов сингулярности, но сложны для практического использования, так как представляют собой двойные интегралы.

В [24, 215] однородное приближение использовалось для оценки режимов работы магнитных сепараторов на основе представления решения уравнения Пуассона для скалярного магнитного потенциала в виде конечных рядов. Так как потенциал является своего рода первообразной функцией для напряженности поля, то сингулярности исключаются при решении задачи относительно магнитного скалярного потенциала. Однако, это решение получено в эквипотенциальном приближении магнитного потенциала поверхности постоянного магнита и только для идеальной рабочей точки характеристики размагничивания (когда напряженность размагничивающего поля в магните равна нулю). Поэтому постоянные интегрирования предлагаемого решения не имеют явной связи с параметрами магнита, и такого рода модель не подходит для корректной оценки численного моделирования поля.

Вывод 1. Анализ показал, что существующие аналитические модели, основанные на физических принципах математического моделирования ПМ, правомерны в однородной магнитной среде. Они или сложны, или содержат неопределенность (математическую сингулярность) на поверхности постоянного магнита.

Для устранения математической неопределенности целесообразно моделировать поле ПМ через скалярный магнитный потенциал.

Вывод 2. Для моделирования поля в неоднородной магнитной среде приемлемы численные методы математического моделирования. Для реализации экономичного алгоритма моделирования силового поля решетки ПМ, окруженных непрерывной магнитнеоднородной средой, *актуален* схемный метод расчета. Традиционные схемы замещения ПМ обуславливают повышенные погрешности расчета поля (завышают магнитный поток до двух раз), поэтому схемный метод не нашел применения для систем с постоянными магнитами. Для реализации схемного метода *актуальна задача* синтеза строгих схем замещений ПМ.

Для применения эффективных методов исследования (оптимизации и синтеза оптимального управления) необходимо иметь полное аналитическое описание исследуемой модели. В [233] такая задача решается переходом к быстро вычисляемым математическим моделям, являющимися суррогатными математическими моделями, которые создаются методами многомерной аппроксимации. Задача многомерной аппроксимации заключается в восстановлении некоторой неизвестной зависимости по исходной выборке – заданному набору пар точек – значение функции в каждой точке. Такие модели позволяют определять градиентные характеристики, и востребованы в задачах оптимизации.

В [233] отмечается, что проблемы создания суррогатных математических моделей кроются в деталях. К деталям относятся структура исходных данных, методы и алгоритмы аппроксимации и пути использования таких моделей с учетом специфических условий применения. В настоящее время разработано большое количество подходов и широкий спектр вычислительных алгоритмов, каждый из которых предназначен для конкретных условий применения, достоинства и недостатки которых рассмотрены в [6].

В основе всех существующих методов многомерной аппроксимации лежит принцип, раскрытый в фундаментальной теореме А. Н. Колмогорова [60], по которой возможно приближать функцию многих переменных с помощью композиций функций одной переменной. При решении этого вопроса свобода в выборе набора

аппроксимирующих функций одного переменного очень велика, можно использовать одну и практически любую нелинейную функцию в качестве базисной функции. Именно разнообразие базисных функций и операций направлены для приспособления решения той или иной конкретной задачи [8, 10].

Все существующие методы приводят к фиксированным суррогатным математическим моделям и с пониженными универсальными свойствами. В существующих методах аппроксимации жестко задана структура аппроксимационного выражения в виде базисных функций (полиномы, сплайны, линейные и нелинейные регрессии [1,150, 169, 196, 198]), которые обладают низкой адаптивностью при переходе к новым режимам работы моделируемой технической системы, что сужает область применения таких аппроксимаций.

Для расширения области применения аппроксимационных выражений Ю. А. Савиновский, используя известное теоретическое положение, что решениями обыкновенных дифференциальных уравнений являются семейства интегральных кривых, предложил идею моделировать семейство магнитных кривых и гистерезисных петель ферромагнетиков решением *однородного* обыкновенного линейного дифференциального уравнения (ОЛДУ) [3]. Такие уравнения были им названы «порождающими дифференциальными уравнениями (ПДУ)».

Такой подход позволил представить ветви гистерезисных петель в форме конечной суммы экспоненциальных функций с *нерегламентированными полюсами*, которые повышают адекватность модели, и снижает её размерность. Поэтому *структура и параметры дифференциального оператора* определялись *непосредственно из условий решаемой задачи*. Для идентификации каждой интегральной кривой ПДУ при описании гистерезисных петель создавалась математическая модель вычисления постоянных интегрирования на основе специфических граничных условий, определяемых по экспериментальным характеристикам намагничивания.

Преимущество этого подхода в том, что в классе экспоненциальных многочленов позволяет достигать результата корректности и достоверности: 1) меньшим количеством аппроксимирующих слагаемых; 2) отсутствием жесткой регламентации к структуре суммы этих функций; 3) возможностью включения в модель через начальные или

граничные условия дополнительной информации системного характера об объекте (например, для семейства магнитных характеристик «правила Маделунга» [124]).

Изложенный метод имеет серьезные недостатки: использовались умозрительные подходы, догадки; отсутствовала общая методика определения постоянных интегрирования; возникало противоречие между степенями свободы модели и моделируемым семейством характеристик.

Вывод 3. Отображение семейства аperiodических характеристик совокупностью интегральных кривых ЛДУ на основе нового подхода – на основе *неоднородных* ЛДУ – является одной из задач исследований данной работы.

1.5. Цель и задачи исследования. Структура математической модели системы магнитной очистки ВТЖ. Критерии достижения цели

Решение научно-практической проблемы создания эффективных и экономически доступных технических средств тонкой очистки ВТЖ от ферропримесей требует решения *актуальной научной задачи* – создания научных основ применения магнитной коагуляции на основе разработки математических моделей процессов магнитной коагуляции и магнитной сепарации.

Объект исследования – технология и техника процессов очистки водных жидкостей от твердых примесей.

Предмет исследования – моделирование разделения ферромагнитных суспензий в магнитном поле с помощью высокопроизводительных магнитных сепараторов.

Целью работы является разработка научных основ и аппарата математического моделирования, новых математических моделей и комплекса программ, необходимых для создания эффективной техники тонкого разделения ферромагнитных суспензий в магнитных полях, в том числе при магнитной сепарации водных технологических жидкостей.

Поставленная цель требует решения следующих задач.

1. Разработка двух методов моделирования магнитного поля постоянного магнита (ПМ), учитывающих неэквипотенциальность его поверхности, на основе

электрофизического и схемного подходов.

2. Разработка схемного метода численного моделирования силового поля, создаваемого решеткой постоянных магнитов в неоднородной магнитной среде.

3. Разработка научных основ магнитной сепарации водных сред с помощью поиска приближенного решения нелинейного уравнения траекторий ферромагнитных частиц в ламинарном потоке.

4. Разработка численно-аналитического метода моделирования семейств характеристик эффективности разделения ферромагнитных суспензий в магнитных сепараторах.

5. Разработка научных основ и метода математического моделирования магнитной коагуляции феррочастиц, направленной на решение задач магнитной сепарации водных технологических жидкостей от феррочастиц.

6. Разработка метода аппроксимации семейств аperiodических характеристик интегральными кривыми в классе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

7. Разработка метода параметрической оптимизации конструктивных параметров и научно обоснованной методики расчета эффективных патронных магнитных сепараторов для тонкой очистки ВТЖ от феррочастиц.

8. Разработка метода конструкторско-технологического аспектов процесса и техники выделения связанной СОЖ из отделяемых шламов.

Система магнитного разделения водной суспензии относится к сложным системам, поскольку её нельзя корректно описать по следующим причинам:

– конструктивной сложности, так как объемная решетка ПМ может содержать несколько тысяч дискретных элементов из ПМ и полюсных наконечников, окруженных трехслойной средой с различными магнитными свойствами $\mu_1, \mu_{ш}, \mu_2$;

– феррочастицы описываются стохастическими законами распределения по размерам, от которых зависят как магнитные $\chi_{\phi}(d_{\phi})$, так и динамические свойства v_{ϕ} , что требует совмещения детерминированных и стохастических методов описания;

– перемещение феррочастиц описывается системой нелинейных ДУ;

– недостаточной информацией и неопределенностью связей в механизме сто-

хастического процесса магнитной коагуляции.

Обобщенная абстрактная математическая модель магнитной очистки ВТЖ показана на рисунке 1.8.

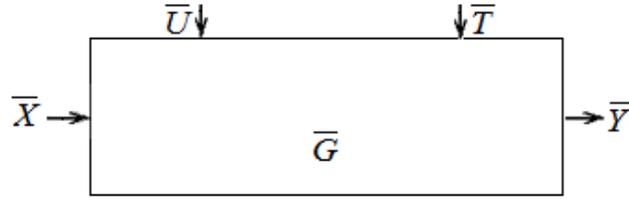


Рисунок 1.8 – Обобщенная абстрактная математическая модель магнитного разделения суспензии

На рисунке 1.8 соответственно \vec{X} – вектор входных стохастических и физических параметров феррочастиц в водной суспензии, поступающей на разделение; \vec{Y} – вектор выходных параметров феррочастиц в очищенной ВТЖ; \vec{G} – вектор внутренних параметров системы очистки ВТЖ; \vec{U} – условия сепарации; \vec{T} – требования, определяющие качество и эффективность очистки ВТЖ:

$$\vec{X} = (C_{\text{вх}}, f_{\text{вх}}(d_{\phi}), \bar{d}_{\text{вх}}, \sigma_{\text{вх}}, m_{\phi}, \rho_{\phi}, \chi_{\phi}(d_{\phi}), \mu_2); \quad (1.4)$$

$$\vec{Y} = (C_{\text{вых}}, f_{\text{вых}}(d_{\phi}), \bar{d}_{\text{вых}}, \sigma_{\text{вых}}, m_{\phi}); \quad (1.5)$$

$$\vec{G} = (\mu_1, \nu_{\phi}, d_{\text{ш}}, C_{\text{ш}}, \mu_{\text{ш}}, \gamma_{\text{к}}, \varepsilon(d_{\phi}), \bar{\varepsilon}); \quad (1.6)$$

$$\vec{U} = (H(X_{\text{к}} + x, Y_{\text{к}} + y, Z_{\text{к}} + z), \eta, \nu_{\text{жн}}, \mu_2, T^{\circ}\text{C}); \quad (1.7)$$

$$\vec{T} = (Q, C_{\text{д}}, \bar{d}_{0.5}, C_{\text{QM}}, q_{\text{M}}). \quad (1.8)$$

В выражениях (1.4) – (1.8) имеют место следующие параметры:

$C_{\text{вх}}, C_{\text{вых}}$ – средние массовые концентрации частиц примеси в ВТЖ соответственно на входе и выходе сепаратора, кг/м³;

$f_{\text{вх}}(d_{\phi}), f_{\text{вых}}(d_{\phi})$ – плотность вероятностей распределения по размерам d_{ϕ} ферромагнитных частиц в ВТЖ соответственно на входе и на выходе системы очистки, 1/м;

d_{ϕ} – размер феррочастицы, м;

$\bar{d}_{\text{вх}}, \bar{d}_{\text{вых}}$ – средний размер полидисперсных феррочастиц в ВТЖ соответственно на входе и выходе системы очистки, м;

$\sigma_{\text{вх}}, \sigma_{\text{вых}}$ – дисперсия распределения феррочастиц соответственно на входе и на выходе системы очистки ВТЖ, м;

ρ_{ϕ} – плотность феррочастицы, кг/м³;

m_{ϕ} – текущая масса феррочастицы, кг;

\mathbf{v}_{ϕ} – вектор скорости феррочастицы, м/с;

$\chi_{\phi}(d_{\phi})$ магнитная восприимчивость феррочастицы размером d_{ϕ} ;

$\mu_1, \mu_2, \mu_{ш}$ относительные магнитные проницаемости патронов, ВТЖ и феррошлама соответственно;

$d_{ш}$ – толщина слоя феррошлама, м;

$C_{ш}$ – массовая концентрация исходных феррочастиц, ушедших в феррошлам, кг/м³;

$\varepsilon(d_{\phi}), \bar{\varepsilon}$ – степень очистки соответственно монодисперсных феррочастиц и средняя степень очистки полидисперсных феррочастиц;

γ_k – коэффициент глубины магнитной коагуляции;

$H(X_k + x, Y_k + y, Z_k + z)$ – напряженность магнитного поля в окрестности k -го ПМ с координатами (X_k, Y_k, Z_k) и в точке M с относительными координатами (x, y, z) , А/м;

η – динамическая вязкость ВТЖ, кг·с⁻¹·м⁻¹;

$v_{жн}$ – входная скорость потока ВТЖ, м/с;

Q – производительность очистителя, м³/с;

C_d – допустимая массовая концентрация феррочастиц в ВТЖ, кг/м³;

$\bar{d}_{0.5}$ – тонкость очистки, м.

Ввиду чрезвычайной сложности системы магнитного разделения суспензии задачу её математического моделирования будем выполнять на принципах декомпозиции, разбивая обобщенную модель на следующую совокупность функционально агрегированных физических моделей (рисунок 1.9):

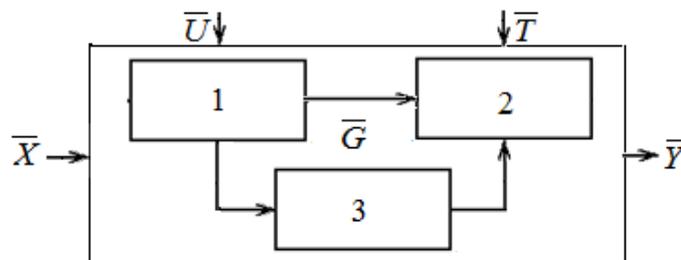


Рисунок 1.9 – Функционально агрегированная математическая модель магнитного разделения ВТЖ: 1 - математическая модель распределения магнитного поля; 2 - математическая модель траекторий феррочастиц и характеристик качества сепарации ВТЖ; 3 - математическая модель стохастических характеристик магнитной коагуляции

- математическую модель распределения силового поля;
- математическую модель траекторий феррочастиц и на этой основе математическую модель характеристик качества разделения суспензии;
- математическую модель стохастических характеристик магнитной коагуляции.

Система магнитного разделения ВТЖ, изменяющая дисперсный состав ферромагнитных примесей за счет физических процессов коагуляции и осаждения, является *преобразователем* функций распределения частиц по размерам $f_{\text{вх}}(d_{\phi})$, поступающих на вход сепаратора. Структурная схема тракта функционального преобразования дисперсного состава ферромагнитных примесей представлена на рисунке 1.10, на котором $f_{\text{к}}(d_{\phi})$, $f_{\text{вых}}(d_{\phi})$ – функции распределения частиц при коагуляции и на выходе сепаратора соответственно; A_1 , A_2 , A – операторы следующих преобразований

$$f_{\text{к}}(d_{\phi}) = A_1[f_{\text{вх}}(d_{\phi})]; \quad f_{\text{к}}(d_{\phi}) = A_2[f_{\text{к}}(d_{\phi})]; \quad f_{\text{вых}}(d_{\phi}) = A[f_{\text{к}}(d_{\phi})],$$

которые необходимо определить.

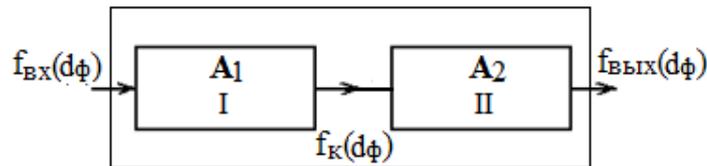


Рисунок 1.10 – Структурная схема тракта функционального преобразования дисперсного состава феррочастиц системы магнитного разделения ВТЖ: I- звено, ответственное за магнитную коагуляцию; II- звено, ответственное за магнитное осаждение

Поэтому *характеристики качества магнитного разделения суспензий* базируются на преобразованиях дисперсного состава феропримесей, поступающих в сепаратор.

Физические процессы на множестве физических и стохастических величин, как правило, описываются системами ДУ (обыкновенными или в частных производных), выражающими законы природы. Такие модели являются *первичными*, решения которых связаны со значительными трудностями, отмеченными в пунктах 1.2.1-1.2.3, преодоление которых требует значительных временных и ресурсных затрат, а задача математического моделирования магнитной коагуляции не решена.

Для задач оптимизации эффективных средств тонкой магнитной очистки

ВТЖ от феррочастиц и задач управления технологией очистки актуально снижение временных и ресурсных затрат. Это возможно на путях перехода к *альтернативным* математическим моделям, или на основе преобразования первичных математических моделей и их носителей в альтернативные математические модели. Переход или преобразование к альтернативным моделям требует разработки новых подходов и методов математического моделирования.

В частности, первичными математическими моделями являются: для поля магнитных сил – фундаментальные уравнения магнитного поля; для траекторий феррочастиц – система из нелинейных кинематических ДУ переноса ламинарным потоком ВТЖ и второго закона Ньютона; для стохастических характеристик коагуляции – нелинейные ИДУ Смолуховского.

При реализации обобщенной математической модели на рисунках 1.8-1.9 будем разрабатывать следующие альтернативные математические модели: для поля магнитных сил – преобразование к схемам замещения и далее схемный метод моделирования этих сил на множестве величин теории магнитных цепей; для траекторий феррочастиц – приближенное преобразование исходной системы нелинейных ДУ к неоднородному ЛДУ на множестве физических и обобщенных величин; для магнитной коагуляции – обоснование альтернативного подхода и разработка метода математического моделирования на множестве стохастических величин.

Структурная схема алгоритма реализации задач представлена на рисунке 1.11.

Для количественной оценки эффективности средств очистки используют удельную себестоимость сепаратора $C_{уд}$, приходящуюся на единицу производительности (рисунок 1.2, в), тыс. руб./($m^3/ч$) при $C_0 < C_d$, где C_d – допустимое значение средней массовой концентрации феррочастиц в ВТЖ, $кг/м^3$ [24].

В современных высокопроизводительных магнитных сепараторах себестоимость постоянных магнитов составляет (60 – 65) % от общей себестоимости машины. Поэтому в качестве критерия достижения цели положим удельную себестоимость постоянных магнитов C_{QM} , приходящуюся на единицу производительности сепаратора, тыс. руб./($m^3/ч$). Если постоянные магниты одного типоразмера, то в каче-

стве критерия достижения цели положим количество постоянных магнитов q_{QM} , приходящихся на единицу производительности, $1/(m^3/ч)$.



Рисунок 1.11 – Структурная схема алгоритма реализации задач исследований

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕМЕЙСТВ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЫКНОВЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

2.1. Сущность метода моделирования. Использование метода интерполяции кривых экспоненциальными выражениями

В главе 1 показано, что семейство гистерезисных петель ферромагнетиков можно моделировать интегральными кривыми некоторого *однородного* обыкновенного линейного дифференциального уравнения (ОЛДУ), названного ПДУ [3]. В этой главе разрабатывается новый метод, основанный на *неоднородных* ОЛДУ, который исключит недостатки метода, изложенного в [3]. Новый метод предназначен для моделирования семейства аperiodических характеристик технических объектов произвольной природы. Для строгого обоснования метода моделирования семейства характеристик на основе ОЛДУ обратимся к теории ЛДУ.

Дифференциальные уравнения служат для формализации законов природы и задач техники в форме строгих математических моделей. При этом обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) изображают на плоскости x, y семейство кривых $y = f(x, C_1, \dots, C_n)$. В работе М. Х. Ибрагимова [48] приведен классический строгий вывод ОДУ n -го порядка непосредственно из записанного выражения семейства кривых. Изложим здесь этот вывод. Для этого задают семейство кривых в неявной форме $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ и проводят последовательно n раз дифференцирование, в результате получается $n - 1$ уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} y'' = 0;$$

$$\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x} y^{(n)} = 0.$$

Исключение параметров C_k из n уравнений приводит к ОДУ следующего вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Это выражение включает как однородные, так и неоднородные ОДУ.

Для формализации процесса построения математических моделей типа ПДУ предлагается использовать методику интерполяции характеристик суммой экспоненциальных функций [81, 98, 99, 103, 105, 112] по методу Н. С. Кочанова [65], ибо такие математические формы являются частным решением однородных ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Утверждение 2.1. Для построения однородного ПДУ с постоянными коэффициентами достаточно характеристику аппроксимировать суммой экспоненциальных функций.

Доказательство. Пусть для $\forall t \in [0, t_m]$ определено экспоненциальное выражение

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t},$$

в котором числа C_k и p_k известны.

В силу теоремы однозначности и единственности решения данному выражению $S(t)$ соответствует определенное однородное ОЛДУ с постоянными коэффициентами

$$L_n y(t) = 0$$

и конкретная числовая совокупность начальных условий $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ для задачи Коши. Поскольку параметры дифференциального оператора

$$L_n = \left(\frac{d}{dt} - p_1 \right) \left(\frac{d}{dt} - p_2 \right) \dots \left(\frac{d}{dt} - p_n \right)$$

искомого ОЛДУ выражаются через известные показатели степени экспонент, поэтому утверждение доказано.

Из утверждения 2.1 вытекают два важных следствия.

Следствие 2.1.1. Дифференциальный оператор L_n является дифференциальной моделью исходного экспоненциального выражения $y(t)$.

Следствие 2.1.2. Для моделирования непрерывного семейства характеристик необходимо определить математические модели, моделирующие вариацию определенной совокупности начальных условий $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, подстановка которых в экспоненциальное выражение $y(t)$, дает зависимости, совпадающие с каждой характеристикой моделируемого семейства.

Экспоненциальные выражения широко используются для построения математических моделей природных, технических и социальных процессов. Однако при высоких степенях многочленов могут появляться осциллирующие составляющие (эффект Рунге [5]). В наших работах [99, 112] раскрыты причины появления осциллирующих выбросов и предложена методика их устранения.

2.2. Метод устранения паразитных колебаний при интерполяции кривых экспоненциальными выражениями

В задачах моделирования физических объектов на первое место ставится цель расшифровки и воспроизведения присущих им скрытых свойств. В этом случае характер расположения полюсов (на комплексной плоскости) экспоненциальных выражений диктуется внутренними свойствами исследуемого процесса. Для этих целей приемлем метод интерполяции суммой экспоненциальных функций (2.1) с неэквидистантными полюсами, разработанный Н. С. Кочановым [65]

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t} . \quad (2.1)$$

Сущность метода Кочанова. Пусть непрерывная временная функция $f(t)$, заданная на отрезке $[0, T]$, характеризуется последовательностью значений $f(v\tau)$, равноотстоящих друг от друга по оси времени на величину интервала τ , совокупность которых есть выборка, состоящая из $2n$ дискретов ($v = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$).

Определить $\forall t \in [0, T]$ выражение (2.1) при условии совпадения исходной функции $f(t)$ с функцией $y(t)$ в узлах интерполяции $t_v = v\tau$:

$$y(v\tau) = f(v\tau), \quad (v = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1).$$

Далее вводится обозначение

$$m_k = e^{p_k \tau} \quad (2.2)$$

и записывается система из n степенных уравнений:

$$f(v\tau) = \sum_{k=1}^n C_k m_k^v, \quad (v = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1). \quad (2.3)$$

Систему уравнений (2.3) в монографии [65] рассматривают как $2n$ начальных значений вспомогательной функции $Y(x)$

$$Y(x) = \sum_{k=1}^n C_k e^{m_k x} \quad (2.4)$$

и её производных до $2n - 1$ порядка включительно. При этом функция (2.4) представляется общим решением следующего вспомогательного ЛДУ:

$$Y^{(n)} + A_1 Y^{(n-1)} + A_2 Y^{(n-2)} + \dots + A_n Y = 0. \quad (2.5)$$

Дифференцируя $2n - 1$ раз ЛДУ (2.5) и подставляя $2n$ начальных условий $f(v\tau)$ ($v = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$), составляют систему n алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) с n неизвестными, являющимися коэффициентами A_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Решение СЛАУ позволяет определить значения постоянных коэффициентов A_i ЛДУ (2.5), а из характеристического уравнения ЛДУ (2.5) определяются значения показателей степени m_k (корни характеристического уравнения) выражения (2.3); затем по формулам (2.2) и (2.1) определяются соответственно значения p_k и C_k .

Оптимальный порядок n_0 суммы экспоненциальных функций (2.1) предлагается в [65] находить из условия достижения нулевого значения определителя из следующего ряда определителей СЛАУ:

$$|\mathbf{A}|_{2n-1} \neq 0; |\mathbf{A}|_{2n0} \neq 0; |\mathbf{A}|_{2n+1} = 0; |\mathbf{A}|_{2n+2} = 0. \quad (2.6)$$

В противном случае, при $n > n_0$ матрица расчета параметров интерполяции становится плохо обусловленной.

В практике интерполяции апериодических характеристик технических объектов задаются импульсные зависимость следующего вида:

$$f(t)[1(t) - 1(t - T)], \quad (2.7)$$

где $1(t)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда [28]; $T = \tau(2n - 1)$ – длительность интервала, на котором интерполируется функция $f(t)$. При этом адекватность интерполяции заданной кривой на участках, лежащих за пределами интервала интерполяции ($t > T$), гарантируется отрицательными корнями характеристического уравнения (обуславливающими устойчивость интерполяционных выражений).

К недостаткам метода Н. С. Кочанова, во-первых, относится возможное генерирование неустойчивых полиномов из-за влияния погрешностей задания зна-

чений дискретных отсчетов – условие (2.6) сдвигает в большую сторону $n > n_0$; во-вторых, при $n < n_0$ возможны генерации затухающих гармоник с частотами колебаний, кратными $(1/2\tau)$.

Затухающая гармоника описывается известным математическим выражением $y_{\Pi}(t) = A_m e^{-\alpha t} \sin(t/2k\tau)$, а модуль её спектральной плотности имеет вид:

$$F(\omega) = \frac{\omega_H \cdot A_m}{\sqrt{(\omega_H^2 + \alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}, \quad (2.8)$$

где $\omega_H = \pi/k\tau$ [45, 172].

При этом точка ω_0 расположения максимального значения спектра удовлетворяет следующему условию $\omega_0 = \sqrt{\omega_H^2 - \alpha^2} \leq \omega_m$ (ω_m – граничная частота спектра $f(t)$), из которого следует, что весь спектр таких колебаний лежит в полосе частот функции $f(t)$. Поэтому паразитные гармоники нельзя отфильтровать.

Отмеченные недостатки заметно проявляют себя в задачах, требующих больших размеров выборок $2n$. Как правило, к ним относятся зависимости (2.7), со значительными временными задержками t_3 (рисунок 2.1), общая математическая модель и соответственно её спектральная плотность имеют следующий вид:

$$f(t) = f_0(t - t_3)[1(t - t_3) - 1(t - T)]; \quad F(j\omega) = e^{-j\omega t_3} \int_0^{t_H} f_0(\varepsilon) e^{-j\omega \varepsilon} d\varepsilon. \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что с возрастанием t_3 длительность импульса $t_H = (T - t_3)$ уменьшается, что требует уменьшения τ и увеличения порядка полинома $n = 0.5(1 + T/\tau)$. Это приводит к нарушению условия оптимальности $n > n_0$, соответствующего критерию (2.6), порождающее влияние на результаты интерполяции погрешностей задания исходных данных. Это приводит к генерации неустойчивых (с положительными корнями $p_k > 0$) экспоненциальных выражений (2.1), которые нарушают адекватность искомой математической модели.

Рассмотренные противоречия метода интерполяции Н. С. Кочанова можно устранить методом совмещения двух приемов – использованием разных шагов интерполяции τ и компенсацией паразитных гармоник. Это уменьшит размер n выборки интерполяции, а возникшие паразитные гармоники (рисунок 2.1) устраним

новой процедурой интерполяции с меньшим шагом τ_d и с размером выборки n_d .

Таким образом, вторичное экспоненциальное выражение используем для компенсации паразитных гармоник. При этом порядок результирующего интерполяционного выражения будет увеличен до $n + n_d$.

Рассмотрим пример. Первичное аппроксимационное выражение $y(t)$ определим по заданным точкам интерполяции на рисунке 2.1 при помощи разработанной нами программы [81, 102]. На этом рисунке временной интервал интерполяции ($T = 450$ мкс) разбивался на $2n = 30$ дискрет с шагом $\tau = 15$ мкс. При этом порядок $y(t)$ составил $n = 15$; остальные его параметры представлены в таблицах 2.1 и 2.2.

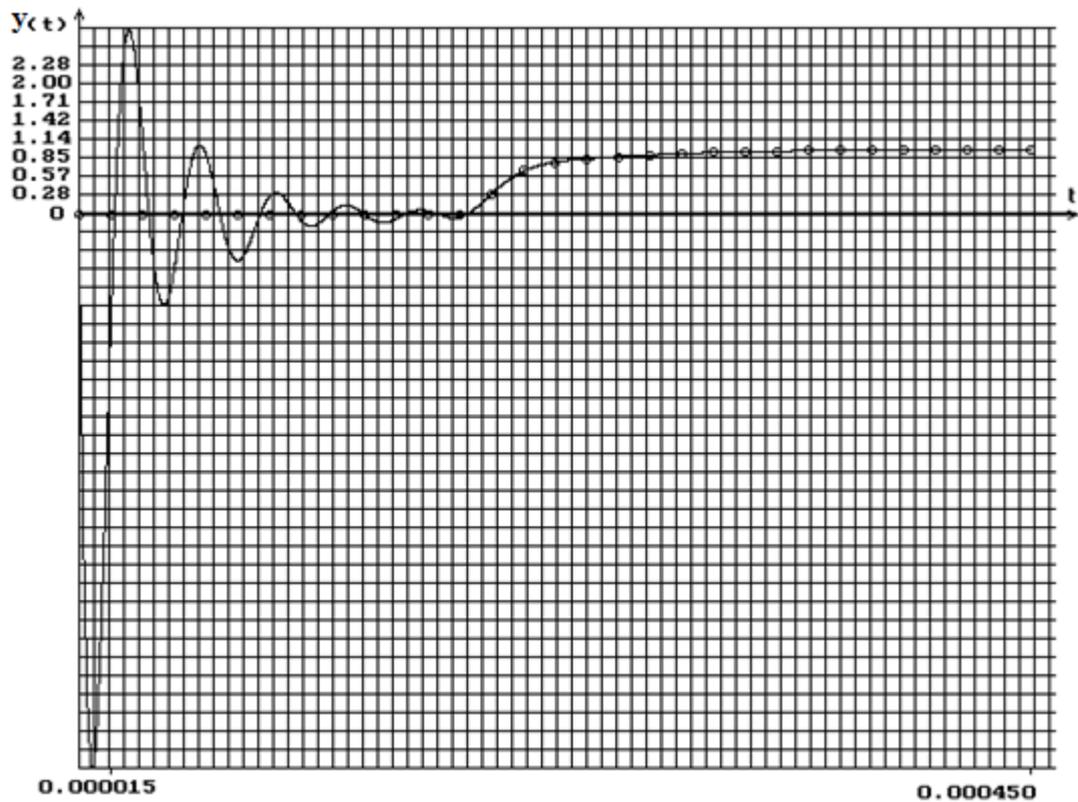


Рисунок 2.1 – График зависимости $y(t)$ первичного интерполяционного выражения. Точки характеризуют исходную выборку с параметрами $T = 450$ мкс; $2n = 30$; $\tau = 15$ мкс

На рисунке 2.1 непрерывной кривой изображена первичная теоретическая зависимость $y(t)$, которая содержит на начальном участке паразитный выброс. Это колебание хорошо аппроксимируется программой при задании нового интервала интерполяции $\tau_d < \tau$, (рисунок. 2.2). Вторичная зависимость обозначена $y_{II}(t)$ с выбранными параметрами интерполяции: $n_d = 4$, $\tau = 6$ мкс, $T = 48$ мкс.

В таблицах 2.1 и 2.2 параметры результирующего интерполяционного вы-

ражения $y_0(t)$ представлены в комплексной форме. При этом результирующее выражение $y_0(t) = y(t) - y_{\text{п}}(t)$ не содержит паразитных колебаний и характеризуется порядком $(n + n_{\text{д}}) = 19$. Его график, рассчитанный в системе Matcad (по оси абсцисс время задается в секундах), представлен на рисунке 2.3.

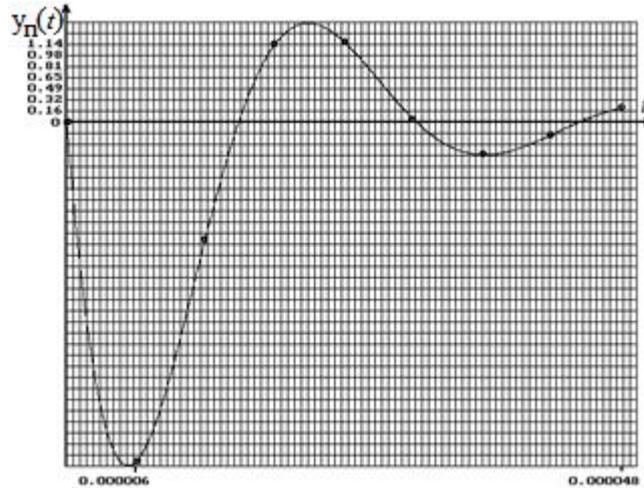


Рисунок 2.2 – График аппроксимации паразитного выброса (вторичного выражения $y_{\text{п}}(t)$). Точки характеризуют исходную выборку с параметрами $T = 48$ мкс; $2n_{\text{д}} = 8$; $\tau = 6$ мкс

Таблица 2.1

Показатели степени интерполяционного выражения $y(t)$

$p_1 := -19.94546$	
$p_2 := -3.62 \cdot 10^4 + 1.69i \cdot 10^5$	$p_3 := -3.62 \cdot 10^4 - 1.69i \cdot 10^5$
$p_7 := -2.7249 \cdot 10^4 + 4.2708i \cdot 10^4$	$p_5 := -2.7249 \cdot 10^4 - 4.2708i \cdot 10^4$
$p_4 := -2.40875 \cdot 10^4 + 1.36186i \cdot 10^5$	$p_{13} := -2.40875 \cdot 10^4 - 1.36186i \cdot 10^5$
$p_6 := -2.5775 \cdot 10^4 + 1.00017i \cdot 10^5$	$p_{11} := -2.5775 \cdot 10^4 - 1.00017i \cdot 10^5$
$p_8 := -2.4992 \cdot 10^4 + 1.84806i \cdot 10^5$	$p_{15} := -2.4992 \cdot 10^4 - 1.84806i \cdot 10^5$
$p_9 := -2.65754 \cdot 10^4 + 5.41482i \cdot 10^3$	$p_{10} := -2.65754 \cdot 10^4 - 5.41482i \cdot 10^3$
$p_{12} := -2.8923 \cdot 10^4 + 7.0674i \cdot 10^4$	$p_{14} := -2.8923 \cdot 10^4 - 7.0674i \cdot 10^4$
$p_{16} := -1.5462 \cdot 10^5 + 2.0463i \cdot 10^5$	$p_{17} := -1.5462 \cdot 10^5 - 2.0463i \cdot 10^5$
$p_{18} := -5.6224 \cdot 10^4 + 2.0767i \cdot 10^5$	$p_{19} := -5.6224 \cdot 10^4 - 2.0767i \cdot 10^5$

Отметим, что для сглаживания влияния погрешностей в нашей программе [81, 103] использовано решение СЛАУ методом наименьших квадратов, поэтому реализованная зависимость освобождена от жесткого условия прохождения через

узлы интерполяции.

Таблица 2.2

Коэффициенты интерполяционного выражения $y(t)$

$C_1 := 1.00984$	$C_2 := -4.3215 + .23594i$	$C_3 := -4.3215 - .23594i$
$C_4 := -1.4826 + .61403i$	$C_5 := -2.3994 - 13.6167i$	$C_6 := -3.50552 - .24774i$
$C_7 := -2.3994 + 13.6167i$	$C_8 := .26085 - .9721i$	$C_9 := 18.7502 + 59.69815i$
$C_{10} := 18.7502 - 59.69815i$	$C_{11} := -3.50552 + .24774i$	$C_{12} := -7.807 + 4.9293i$
$C_{13} := -1.4826 - .61403i$	$C_{14} := -7.807 - 4.9293i$	$C_{15} := .26085 + .9721i$
$C_{16} := -.13769 - 3.0900i$	$C_{17} := -.13769 + 3.0900i$	$C_{18} := .13769 - 2.0243i$
$C_{19} := .13769 + 2.0243i$		

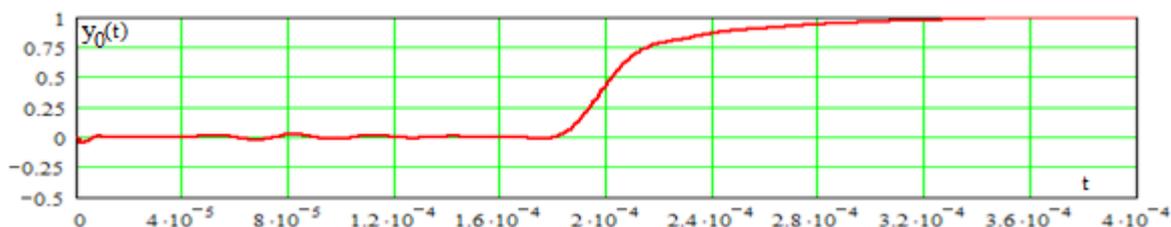


Рисунок 2.3 – График результирующего экспоненциального полинома

Таким образом, в пункте 2.2 усовершенствован метод интерполяции Н. С. Кочанова (обоснован прием, устраняющий паразитные колебания, присущие традиционной методике), который обеспечивает высокую точность воспроизведения отдельных характеристик. Однако повышение точности аппроксимации характеристик технических процессов увеличивает число экспоненциальных функций и соответственно порядок дифференциальной модели (ПДУ), создающих избыточную размерность математической модели.

В современной теории динамических систем состояние математической модели физико-технической системы или процесса описывается определенным набором независимых переменных, которых называют «переменные состояния» [114]. При этом для линейных систем математические модели в пространстве состояний представляют собой нормальную систему ЛДУ первого порядка, количество которых равно числу переменных состояния (например, числу n). Каждая фазовая траектория такой математической модели задается n начальными значения-

ми переменных состояния. Это число n определяет размерность математической модели физико-технической системы или процесса.

Понятие размерности тесно связано с понятием степени свободы. Под обобщенным числом степеней свободы понимается минимальное количество независимых переменных (обобщенных координат), необходимых для полного описания движения системы. Из этого определения следует, что число степеней свободы математической модели физико-технической системы (объекта или процесса), записанной (ого) в форме ОЛДУ, равно порядку ОЛДУ n . Таким образом, *число степеней свободы дифференциальной математической модели* будет определяться *порядком ПДУ*.

При поиске дифференциальной математической модели (ОЛДУ) некоторого семейства характеристик объекта или процесса возникает вопрос о задании порядка этой модели, который соответствует числу постоянных интегрирования её общего решения. Однозначно постоянные интегрирования можно определить из дополнительных условий, которые выражают наиболее существенными свойствами функционирования моделируемого объекта или процесса. Такие условия можно оформлять в виде принципов, свойств, правил (например, правила Маделунга для ферромагнетиков [124]).

Определение 2.1. Принципиальное число обобщенных свойств, правил или принципов, выражающих наиболее существенные свойства функционирования моделируемого объекта, характеризует обобщенную *степень свободы семейства характеристик* моделируемого объекта (процесса).

Очевидно, что одним из условий адекватности *дифференциальной модели* и семейства характеристик *моделируемого объекта (процесса)* является равенство их чисел степеней свободы.

Утверждение 2.2. Для обеспечения адекватности дифференциальной математической модели с семейством характеристик моделируемого объекта (процесса) необходимо приводить порядок дифференциальной модели (число степеней свободы модели) к числу обобщенной степени свободы моделируемого объекта (процесса).

Первичные математические модели процессов сложных технических систем, как

правило, описываются системами нелинейных обыкновенных ДУ или ДУ в частных производных. При построении альтернативной модели для обеспечения точности отображения моделируемого процесса в классе элементарных функций (в частности, экспоненциальных) приходится увеличивать число членов таких функций, а значит и порядок дифференциальной модели – ПДУ, что может приводить к избытку порядка ПДУ относительно номинальной степени свободы моделируемого процесса. Поэтому возникает потребность в понижении порядка ПДУ.

При понижении порядка дифференциальных моделей должны соблюдаться требования сохранения класса дифференциального оператора (ОЛДУ с ПК) и вида зависимой переменной $y(t)$. Этим требованиям отвечает метод прямого интегрирования неполного ОЛДУ следующего типа $y^{(n)} = x(t)$. Однако в общем случае методы понижения порядка ОЛДУ, изложенные в работах [48, 79, 80, 180, 189], не удовлетворяют поставленным требованиям. Такие преобразования, построенные на *замене зависимой переменной*, приводят к изменению класса ДУ, вида функции и последовательности вычисления постоянных интегрирования в промежуточных интегралах.

Воспользуемся иной методикой понижения порядка ОЛДУ с ПК [161], которая свободна от отмеченных недостатков.

2.3. Понижение порядка линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть некоторое семейство характеристик описывается ОЛДУ n -го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1,n}y^{(n-1)} + \dots + a_{0,n}y = x(t) \quad (2.10)$$

с совокупностью начальных условий

$$y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0), \quad (2.11)$$

где $a_{n-1,n}, a_{n-2,n}, \dots, a_{0,n}$ – постоянные коэффициенты.

Предположим, что специфика моделируемого семейства характеристик отображается k степенями свободы, где $k < n$. Поэтому необходимо понизить порядок уравнения (2.10) до k -ого значения.

$$a_{0,n-1} = a_{0,n}/(a_{n-1,n} - a_{n-2,n-1});$$

$$f'(t) + (a_{n-1,n} - a_{n-2,n-1})f(t) = x(t). \quad (2.16)$$

Если $a_{0,n} \neq 0$, то систему алгебраических уравнений (2.15) преобразуем к виду

$$a_{k,n-1} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} a_{i,n} \left(\frac{a_{0,n-1}}{a_{0,n}} \right)^{k-i+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2). \quad (2.17)$$

Подставив (2.17) в последнее уравнение системы (2.15), получим алгебраическое уравнение n -ой степени относительно неизвестной величины $(a_{0,n}/a_{0,n-1})$:

$$\left(\frac{a_{0,n}}{a_{0,n-1}} \right)^n - \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j-2} a_{j-1,n} \left(\frac{a_{0,n}}{a_{0,n-1}} \right)^{j-1} = 0,$$

которое представим в следующей форме:

$$\left(\frac{a_{0,n}}{a_{0,n-1}} \right)^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_{n-i,n} \left(\frac{a_{0,n}}{a_{0,n-1}} \right)^{n-i} = 0. \quad (2.18)$$

Характеристическое уравнение ОЛДУ (2.10) имеет следующий вид

$$p^n + \sum_{i=1}^n a_{n-i,n} p^{n-i} = 0,$$

корни которого p_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$), тогда корни степенного уравнения (2.18) отличаются только знаком:

$$a_{n-1,n} - a_{n-2,n-1} = \left(\frac{a_{0,n}}{a_{0,n-1}} \right) = -p_\nu. \quad (2.19)$$

На основе выражения (2.19) и рекуррентных уравнений (2.15) можно определить все коэффициенты $a_{k,n-1}$ эквивалентного ДУ (2.12). При этом соотношение (2.19) показывает, что в качестве значения $a_{0,n}/a_{0,n-1}$ можно выбрать любой из ненулевых корней $-p_\nu$ уравнения (2.18).

В результате проведенного преобразования ОЛДУ (2.10) разлагается в систему ДУ (2.15) и (2.16), которая при $p_\nu = p_1$ примет следующий вид:

$$y^{(n-1)} + a_{n-2,n-1} y^{(n-2)} + \dots + a_{0,n-1} y = f_1(t); \quad (2.20)$$

$$f_1'(t) - p_1 f_1(t) = x(t); \quad (2.21)$$

$$y(0), y'(0), \dots, y^{(n-2)}(0), f_1(0),$$

$$f_1(0) = y^{(n-1)}(0) + a_{n-2,n-1} y^{(n-2)}(0) + \dots + a_{0,n-1} y(0). \quad (2.22)$$

При этом система ДУ (2.20), (2.21) сворачивается в следующее ОЛДУ

$$y^{(n)} + (a_{n-2,n-1} - p_1) y^{(n-1)} + \dots - p_1 a_{0,n-1} y = x(t),$$

которое в соответствии с (2.15) совпадает с исходным ОЛДУ (2.10). Поэтому общее решение системы (2.20) – (2.22) совпадает с общим решением (2.10).

Таким образом, утверждение 2.3 доказано.

После интегрирования ОЛДУ (2.21) и подстановки в (2.20) получим эквивалентное неоднородное ОЛДУ $n - 1$ порядка

$$y^{(n-1)} + a_{n-2,n-1}y^{(n-2)} + \dots + a_{0,n-1}y = e^{p_1 t} \left[f_1(0) + \int_0^t x(t)e^{-p_1 t} dt \right], \quad (2.23)$$

которому соответствует $n - 1$ начальных условий $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-2)}(0)$, а n -ое начальное условие исходного ОЛДУ входит в неоднородную часть полученного уравнения. В сущности, неоднородное ОЛДУ (2.23) представляет собой первый промежуточный интеграл исходного ОЛДУ (2.10).

Понизив порядок ОЛДУ (2.23) на единицу, обозначив $p_v = p_2$, приводим систему (2.20), (2.21) к следующей эквивалентной системе трех ОЛДУ

$$y^{(n-2)} + a_{n-3,n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_{0,n-2}y = f_2(t), \quad (2.24)$$

$$f_2'(t) - p_2 f_2(t) = f_1(t), \quad (2.25)$$

$$f_1'(t) - p_1 f_1(t) = x(t).$$

Интегрируя последовательно ОЛДУ (2.21) и (2.25) и подставляя их в (2.24), получим эквивалентное неоднородное ОЛДУ $n - 2$ порядка

$$y^{(n-2)} + a_{n-3,n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_{0,n-2}y = e^{p_2 t} \left[f_2(0) + \int_0^t f_1(t)e^{-p_2 t} dt \right], \quad (2.26)$$

которое является вторым промежуточным интегралом исходного ОЛДУ, где

$$f_1(t) = e^{p_1 t} \left[f_1(0) + \int_0^t x(t)e^{-p_1 t} dt \right],$$

$$f_2(0) = y^{(n-2)}(0) + a_{n-3,n-2}y^{(n-2)}(0) + \dots + a_{0,n-2}y(0). \quad (2.27)$$

Применив последовательно изложенную методику к каждому новому неоднородному ОЛДУ, можно получить желаемое ОЛДУ пониженного k -го порядка.

Следствие 2.3.1. Изложенный путь понижения порядка ОЛДУ с постоянными коэффициентами позволяет определить все его промежуточные интегралы.

Следствие 2.3.2. Исходное ОЛДУ n -го порядка раскладывается в эквивалентную ему нормальную систему ОЛДУ первого порядка следующего вида:

$$y' - p_n y = f_{n-1};$$

$$\begin{aligned}
 f'_{n-1}(t) - p_{n-1} f_{n-1}(t) &= f_{n-2}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 f'_{k-1}(t) - p_{k-1} f_{k-1}(t) &= f_{k-2}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 f'_1(t) - p_1 f_1(t) &= x(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Системе (2.28) соответствует n начальных условий $y(0), f_{n-1}(0), \dots, f_1(0)$, аналогичных (2.22) и (2.27).

Следствие 2.3.3. Система уравнений (2.28) разложения ОЛДУ n -го порядка обладает матрицей канонической формы

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_1 \end{pmatrix}
 \tag{2.29}$$

и односвязным направленным графом последовательной структуры (рисунок 2.4, а), который выражает последовательную причинно следственную связь между переменными состояния системы разложения ОЛДУ. Именно такая система может сворачиваться в промежуточные интегралы методом прямого интегрирования каждого её уравнения.

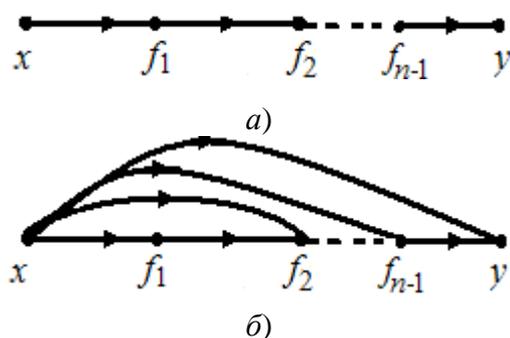


Рисунок 2.4 – Направленные графы систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, в которые соответственно разлагаются по методу понижения порядка: а) ОЛДУ n -го порядка типа $L_n y(t) = x(t)$; б) ОЛДУ n -го порядка типа $L_n y(t) = M_n x(t)$

Система (2.28) с матрицей (2.29) позволяет расширить методический аппарат построения математических моделей типа «Вход-Выход», которые являются предметом исследований в задачах «Синтеза электрических цепей» [97, 105, 162-163] и «Теории автоматического управления» [187]. В этих научных дисципли-

нах, как правило, правая часть уравнения (2.10) является дифференциальным оператором порядка $m \leq n$. Для случая $m = n$ ОЛДУ имеет вид:

$$y^{(n)} + a_{n-1,n}y^{(n-1)} + \dots + a_{0,n}y = b_{n,n}x^{(n)} + b_{n-1,n}x^{(n-1)} + \dots + b_{0,n}x. \quad (2.30)$$

Приведя (2.30) к характерному виду, задав воздействие $x(t)$ в форме нормированной обобщенной функции $x(t) = 1(t)$, где $1(t)$ – единичная ступенчатая функция [28]. После подстановки $1(t)$ в (2.30), система (2.28) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} y'_1 - p_n y_1 &= f_{n-1,1} + y_1(0)\delta(t); \\ f'_{n-1,1} - p_{n-1} f_{n-1,1} &= f_{n-2,1} + f_{n-1,1}(0)\delta(t); \\ &\dots\dots\dots \\ f'_{k-1,1} - p_{k-1} f_{k-1,1} &= f_{k-2,1} + f_{k-1,1}(0)\delta(t); \\ &\dots\dots\dots \\ f'_{1,1} - p_1 f_{1,1} &= b_{0,n}1(t) + f_{1,1}(0)\delta(t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь: $y_1(0), f_{n-1,1}(0), \dots, f_{1,1}(0)$ совокупность зависимых начальных условий, которые связаны с коэффициентами уравнения (2.30) $a_{n-1,n}, \dots, a_{0,n}, b_{n,n}, b_{n-1,n}, \dots, b_{0,n}$ по известным выражениям [187]; $\delta(t)$ – дельта функция Дирака.

При произвольном воздействии $x(t)$ система (2.31) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} y' - p_n y &= f_{n-1} + y_1(0)x'; \\ f'_{n-1} - p_{n-1} f_{n-1} &= f_{n-2} + f_{n-1,1}(0)x'; \\ &\dots\dots\dots \\ f'_{k-1} - p_{k-1} f_{k-1} &= f_{k-2} + f_{k-1,1}(0)x'; \\ &\dots\dots\dots \\ f'_1 - p_1 f_1 &= b_{0,n}x(t) + f_{1,1}(0)x'. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Системе (2.32) характерна каноническая структура причинно-следственной связи между переменными, которая изображается направленным графом (рисунок 2.4, б).

На основе преобразования Лапласа для системы ОЛДУ (2.32) в [105, 162-163] предложен оригинальный метод синтеза электрических цепей по передаточной функции «Вход-Выход». При этом метод синтеза непосредственно приводит к каноническим структурам электрических цепей с минимальным числом элемен-

тов [97, 105] и хорошо подходит к задачам построения электрических моделей (схем замещений) электротехнических объектов [162-163], принципы которого будут использованы в главе 3.

Таким образом, рассмотренное понижение порядка обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами приводит к его разложению в систему ОЛДУ первых порядков (см. следствия 2.3.1-2.3.3). Такая методика важна для задач моделирования.

Избыточность степеней свободы предварительной модели, обусловленной повышенным порядком аппроксимационного многочлена, может быть снижена до необходимого уровня за счет преобразования однородного ОЛДУ в неоднородное ОЛДУ пониженного порядка. Поэтому дифференциальная модель объекта будет описываться неоднородным ОЛДУ.

2.4. Принципы моделирования семейств характеристик неоднородными обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

2.4.1. Структура исходных данных

Пусть $f(\mathbf{x})$ метрика показателя качества – непрерывная многомерная функция, определяемая $m+1$ -мерным вектором проектных переменных $\mathbf{x} \in D \subset R^{m+1}$, где D область пространства проектирования. Классическая постановка задачи:

- задана дискретная выборка для $f: \{\mathbf{x}^{(\gamma)} \rightarrow f(\mathbf{x}^{(\gamma)}) | \gamma = 1, \dots, G\}$;
- построить суррогатную математическую модель $y(\mathbf{x})$ для прогнозирования $f(\mathbf{x})$ в любых точках $\mathbf{x} \in D$.

Широкий класс инженерных задач посвящен изучению и оценке функционирования реальных технических объектов по семействам одномерных гладких непрерывных зависимостей (характеристик $f(x, \mathbf{H})$), в которых в качестве аргумента выступает важная независимая переменная, например $x \in X \subset R$, а остальные независимые переменные принимаются за параметры, где m -мерный вектор параметров

$$\mathbf{H} = \{(h^{(1)}, \dots, h^{(m)}) | h^{(j)} \in H_j; j = 1, \dots, m\}.$$

Задавая дискретный ряд значений вектора

$$\mathbf{H}_i = \{(h_{i_1}^{(1)}, \dots, h_{i_m}^{(m)}) | i_1 = 1, \dots, n_1; \dots; i_m = 1, \dots, n_m\},$$

совокупное семейство характеристик представим в виде функциональной многомерной матрицы:

$$f(x, \mathbf{H}_i) = \|f_{i_1 \dots i_m}(x)\|. \quad (2.33)$$

Например, для $m = 3$ такая матрица и её элементы примут следующий вид:

$$\|f_{i_1 i_2 i_3}(x)\| = \left(\begin{array}{c} f(x, h_1^{(1)}, h_1^{(2)}, h_1^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_1^{(2)}, h_1^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_1^{(2)}, h_1^{(3)}) \\ f(x, h_1^{(1)}, h_2^{(2)}, h_1^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_2^{(2)}, h_1^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_2^{(2)}, h_1^{(3)}) \\ \dots \\ f(x, h_1^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_1^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_1^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_1^{(3)}) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} f(x, h_1^{(1)}, h_1^{(2)}, h_2^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_1^{(2)}, h_2^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_1^{(2)}, h_2^{(3)}) \\ f(x, h_1^{(1)}, h_2^{(2)}, h_2^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_2^{(2)}, h_2^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_2^{(2)}, h_2^{(3)}) \\ \dots \\ f(x, h_1^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_2^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_2^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_2^{(3)}) \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{c} f(x, h_1^{(1)}, h_1^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_1^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_1^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}) \\ f(x, h_1^{(1)}, h_2^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_2^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_2^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}) \\ \dots \\ f(x, h_1^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}), f(x, h_2^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}), \dots, f(x, h_{n_1}^{(1)}, h_{n_2}^{(2)}, h_{n_3}^{(3)}) \end{array} \right). \quad (2.34)$$

Пространственная модель этой матрицы состоит из иерархической системы её плоских сечений (рисунок 2.5).

При задании каждой функции $f_{i_1 \dots i_m}(x)$ в виде дискретных выборок $f_{i_1 \dots i_m}^{(v)} = \{f_{i_1 \dots i_m}(v\tau_{ij}) | v = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1; j = 1, \dots, m\}$ в точках $x_{v i_j}$ с шагом τ_{ij} функциональная матрица становится блочной многомерной числовой матрицей. Общее количество блоков матрицы равно $N = \prod_{i=1}^m n_i$, количество элементов в исходной дискретной выборке $G = 2nN$.

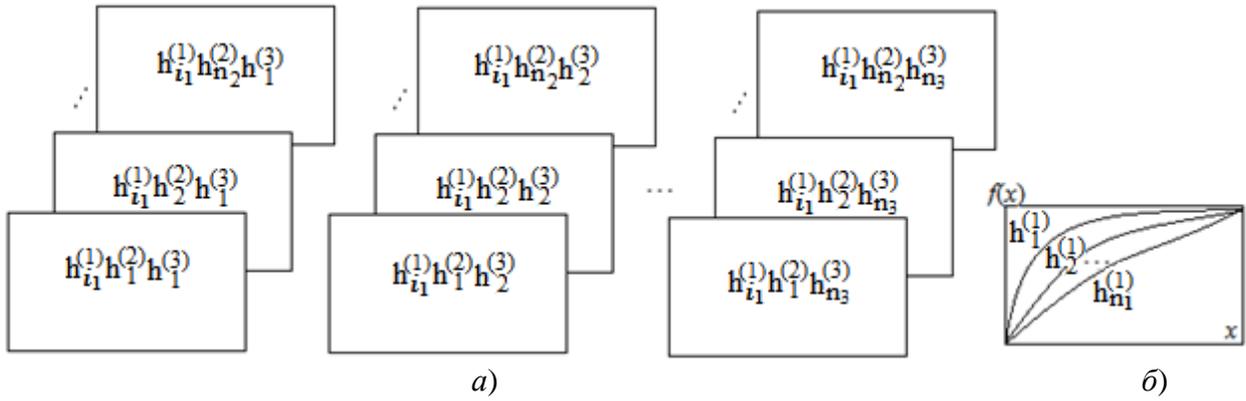


Рисунок 2.5 – Иерархическая структура функциональной трехмерной матрицы, состоящей из совокупности сечений второго уровня ($h_{i_2}^{(2)}$ и $h_{i_3}^{(3)} const$) – (а) и схематичное изображение каждого сечения, являющимся одномерным семейством характеристик – (б)

Далее переходим к задаче определения суррогатной математической модели $y(x, \mathbf{H})$ приближающей к функции $f(x, \mathbf{H})$ – показателя качества проектируемого объекта.

2.4.1. Формулирование подхода к решению задачи

Условие надежного функционирования технического объекта определяет рабочую область D семейства его характеристик, которая объединяет изоморфные характеристики (рисунок 2.5, б).

Выделим инвариантную составляющую исходного семейства характеристик (2.34). Для этого выберем базисную зависимость $f_0(x)$, например, $f_0(x) = f(x, h_1^{(1)}, \dots, h_1^{(m)})$, а остальные зависимости последовательно пронумеруем – $f_\eta(x) = f(x, \mathbf{H}_\eta)$, где $\eta = (1, 2, \dots, N-1)$ текущий номер зависимостей, соответствующих порядку следования элементов в матрице (2.33) при обходе элементов последовательно по строкам.

Применим к каждой кривой $f_\eta(x)$ аффинное преобразование, переводящее каждую зависимость в окрестность базисной зависимости $f_0(x)$. В результате все преобразованные кривые будут отличаться от базисной кривой на некоторое отклонение $\Delta \tilde{f}_\eta(\tilde{x})$. Такую операцию представим следующим выражением:

$$\tilde{f}_\eta(\tilde{x}) = T_\eta^x T_\eta^y f_\eta(x) = f_0(x) + \Delta \tilde{f}_\eta(\tilde{x}), \quad (2.35)$$

где T_η^x и T_η^y – операторы аффинного преобразования, приводящие к изменению масштабов соответственно по переменным x и f . Здесь уравнения преобразования переменных:

$$\tilde{x} = \lambda_\eta x; \quad \tilde{f} = \mu_\eta f, \quad (2.36)$$

где λ_η и μ_η – коэффициенты сжатия (растяжения).

Опишем семейство зависимостей (2.34) интегральными кривыми некоторого неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (ОЛДУ) [161]:

$$\tilde{L}_n \tilde{y}_\eta(\tilde{x}) = F(\tilde{x}); \quad (2.37)$$

$$\tilde{L}_n = \frac{d^{(n)}}{d\tilde{x}^n} + a_{n-1,n} \frac{d^{(n-1)}}{d\tilde{x}^{n-1}} + a_{n-2,n} \frac{d^{(n-1)}}{d\tilde{x}^{n-1}} + \dots + a_{1,n} \frac{d}{d\tilde{x}} + a_{0,n}, \quad (2.38)$$

где $a_{n-1,n}, a_{n-2,n}, \dots, a_{1,n}, a_{0,n}$ – постоянные коэффициенты. Его общее решение

$$\tilde{y}_\eta(\tilde{x}) = y_0(x) + \Delta \tilde{y}_\eta(\tilde{x})$$

будет приближением к зависимостям (2.35). Здесь $y_0(x)$ – частное решение неоднородного ОЛДУ (2.37) будет приближением к базисной кривой $f_0(x)$, а $\Delta \tilde{y}_\eta(\tilde{x})$ – общее решение однородной части ОЛДУ (2.37) будет приближением к функциям отклонений $\Delta \tilde{f}_\eta(\tilde{x})$.

Общим решением однородного ОЛДУ с постоянными коэффициентами является экспоненциальный многочлен n -го порядка

$$\Delta \tilde{y}_\eta(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n C_{k\eta} e^{-p_k \tilde{x}}, \quad (2.39)$$

где p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) являются корнями характеристического уравнения

$$\tilde{H}_n(p) = (p + p_n)(p + p_{n-1}) \dots (p + p_1). \quad (2.40)$$

Каждая интегральная кривая неоднородного ОЛДУ варьируется выбором соответствующего набора начальных условий (значений функции и $n - 1$ -ых производных при начальном значении аргумента), формирующих постоянные интегрирования $C_{k\eta}$ в (2.39).

Чтобы общее решение единого неоднородного ОЛДУ (2.37) являлось приближением выражения (2.35), необходимо, чтобы дифференциальный оператор

(2.38) был бы единым, а постоянные интегрирования $C_{k\eta}$, ответственные за варьирование интегральных кривых, задавались набором значений вектора параметров \mathbf{H} . В этом случае общее решение ОЛДУ следующего вида

$$\tilde{y}_\eta(\tilde{x}) = y_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k(\mathbf{H}) e^{-p_k \tilde{x}} \quad (2.41)$$

становится суррогатной математической моделью семейства многомерных характеристик, а ОЛДУ (2.37) их суррогатной дифференциальной математической моделью.

Модель (9) удовлетворяет принципу разделения переменных [60], в качестве опорных функций используются экспоненциальные многочлены с нерегулярными отрицательными (могут быть комплексными) показателями степени. Такие функции обладают хорошими асимптотическими свойствами. Область определения модели: $0 \leq \tilde{x} \leq \infty$, $\mathbf{H} \in V \subset R^m$.

Дополнительным достоинством моделей в форме (2.35), основанных на использовании принципа инвариантности исходного семейства характеристик, является существенное снижение влияния погрешности варьируемой части $C_k(\mathbf{H})$, которая реализуется на основе числового массива с пониженным порядком малости.

Условия формализации алгоритма идентификации модели (2.41) и её применения требует, чтобы зависимость $y_0(x)$ описывалась экспоненциальным многочленом такого же класса, как и решение однородного ОЛДУ.

2.4.2. Методика идентификации математической модели

Исходные данные: дискретная выборка для $f: \{\mathbf{x}^{(\gamma)} \rightarrow f(\mathbf{x}^{(\gamma)}) | \gamma = 1, \dots, G\}$, определяемая $m+1$ -мерным вектором $\mathbf{x} \in D \subset R^{m+1}$, структурированная дискретным рядом значений вектора $\mathbf{H}_i = \left\{ \left(h_{i_1}^{(1)}, \dots, h_{i_m}^{(m)} \right) | i_j = 1, \dots, n_j; j = 1, \dots, m \right\}$ и заданная блочной многомерной числовой матрицей:

$f(\mathbf{x}^{(\gamma)}, \mathbf{H}_i) = \left\| f_{i_1 \dots i_m}^{(\nu)} \right\| : \left\{ f_{i_1 \dots i_m}^{(\nu)} = \left(f_{i_1 \dots i_m}(\nu \tau_{i_j}) \mid \nu = 0, 1, \dots, 2n - 1; j = 1, \dots, m \right) \right\}$, члены которой нормируются на основе второго выражения (2.36): $f_\eta(x_{\nu i_j}) \rightarrow \tilde{f}_\eta(x_{\nu i_j}) | 0 \leq \tilde{f}_\eta(x_{\nu i_j}) \leq 1; \eta = (1, 2, \dots, N-1); i_j = 1, \dots, n_j; j = 1, \dots, m$.

Определить: порядок ОЛДУ, все коэффициенты ОЛДУ и неоднородную функцию, а также все неизвестные параметры и зависимости выражения (2.41).

Сначала определим (экстраполируем) многомерную точку $\mathbf{x}_{0.5} = (x_{0.5}^{(1)}, \dots, x_{0.5}^{(\eta)}, \dots, x_{0.5}^{(N-1)})$, в которой $\tilde{f}(\mathbf{x}_{0.5}, \mathbf{H}_i) = 0.5$. Назовем её точкой совпадения нормированного массива исходных данных. Далее определим коэффициенты оператора T_η^x аффинного преобразования (сжатия - растяжения), используя первую формулу (2.36):

$$\lambda_\eta = x_{0.5}^{(\eta)} / x_{0.5}^{(0)}, \quad (2.42)$$

где $x_{0.5}^{(0)}$ – точка базисной кривой семейства, удовлетворяющая условию $\tilde{f}_0(x_{0.5}^{(0)}) = 0.5$. Таким образом, исходный массив будет преобразован к следующему виду $\tilde{f}_\eta(\tilde{x}_v) = T_\eta^x T_\eta^y f_\eta(x_v)$. При этом все преобразованные кривые совпадают друг с другом в точке $x_{0.5}^{(0)}$.

Формируем массив отклонений кривых $\tilde{f}_\eta(\tilde{x}_v)$ от базисной кривой $\tilde{f}_0(x_v)$:

$$\Delta\tilde{f}_\eta(\tilde{x}_v) = \tilde{f}_\eta(\tilde{x}_v) - \tilde{f}_0(x_v), \quad (2.43)$$

Для получения экспоненциальных многочленов с нерегламентированными показателями степени (на комплексной плоскости с неэквидистантными полюсами) используем метод интерполяции, изложенный в работе [65].

Для семейства (2.43) задаем область интерполяции $0 \leq \tilde{x}_v \leq \tilde{x}_m$, которая разбивается на $2n$ – точек интерполяции $\tilde{x}_v = v\tau$ с одинаковым шагом τ , в которых значения $\Delta\tilde{f}_\eta(\tilde{x}_v)$ обозначим следующей последовательностью функций:

$$\Delta f_\eta(0), \Delta f_\eta(\tau), \Delta f_\eta(2\tau), \dots, \Delta f_\eta((2n-1)\tau); \quad (\eta = 1, 2, \dots, (N-1)). \quad (2.44)$$

Дифференциальная модель семейства характеристик требует единого оператора (2.38) в ОЛДУ (2.37), поэтому приводим систему последовательностей (2.43) – (2.44) к одной последовательности $\Delta\bar{f}(v\tau)$ путем их усреднения, например, следующим образом:

$$\Delta\bar{f}(v\tau) = \frac{\sum_{\eta=1}^{N-1} \Delta f_\eta(v\tau)}{N-1}, \quad v = 0, 1, 2, \dots, 2n-1. \quad (2.45)$$

По выборке из $2n$ дискретных значений (2.45) определим сначала диффе-

ренциальный оператор (2.38), реализующий опорный экспоненциальный многочлен, аналогичный (2.39). Для этого потребуем совпадения его в узлах интерполяции $\tilde{x}_v = v\tau$ со значениями (2.45):

$$\overline{\Delta f}(v\tau) = \sum_{k=1}^n \bar{C}_k m_k^v, \quad (v = 0, 1, \dots, 2n - 1). \quad (2.46)$$

Систему уравнений (2.46) в разделе 2.2 рассматриваем как $2n$ начальных значений вспомогательной функции (2.4) и её производных до $2n - 1$ порядка включительно при $z = 0$. При этом функция (2.4) представляется общим решением вспомогательного ОЛДУ (2.5), коэффициенты $A_{i,n}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными, составленной на основе ОЛДУ (2.5), [65]. Из его характеристического уравнения (аналогичного (2.40)) определим значения m_k , потом по формуле (2.2) определим значения p_k и на основе (2.40) коэффициенты дифференциального оператора (2.38).

Подставив в левую часть (2.46) $2n$ дискретных значений (2.44), то для каждой зависимости составим следующую СЛАУ с избыточным числом уравнений

$$\Delta f_\eta(v\tau) = \sum_{k=1}^n C_{k\eta} m_k^v + \varepsilon_{\eta v}, \quad (v = 0, 1, \dots, 2n - 1), \quad (2.47)$$

которая решается методом наименьших квадратов относительно коэффициентов $C_{k\eta}$; $\varepsilon_{\eta v}$ – абсолютная погрешность для v -го уравнения СЛАУ и η -ой зависимости. Метод наименьших квадратов является одним из способов, чтобы минимизировать отклонения.

Средняя абсолютная погрешность приближения $\Delta \tilde{y}_\eta(\tilde{x})$ к каждой исходной η -ой зависимости семейства $\Delta f_\eta(v\tau)$, согласно (2.47), примет следующий вид [5]:

$$\bar{\varepsilon}_\eta = \frac{1}{2n} \sum_{v=0}^{2n-1} \left(|\varepsilon_{\eta v}| + \sum_{k=1}^n |\Delta C_{k\eta}| m_k^v \right), \quad (\eta = (1, 2, \dots, N - 1)). \quad (2.48)$$

В (2.48) погрешностями определения значений m_k пренебрегли.

Полученный из (2.47) числовой массив коэффициентов $C_{k\eta}$ для каждого фиксированного индекса k представим в форме многомерной матрицы (2.33):

$$C_k(\mathbf{H}_i) = \|C_{ki_1 \dots i_m}\|, \quad (k = 1, \dots, n).$$

Во многих технических приложениях область определения вектора параметров $\mathbf{H}_i \in V \subset R^m$ ограничена, что снижает требования к асимптотическим свойствам многочленов при аппроксимации $C_k(\mathbf{H}_i)$, поэтому можно использовать готовые алгоритмы на основе многомерных степенных полиномов [6, 8, 10, 235], которые позволяют определять аппроксимационные выражения $C_{k\eta}$ с допустимыми абсолютными погрешностями $|\Delta C_{k\eta}|$.

Для всего семейства зависимостей (из $N-1$ кривых) средняя абсолютная погрешность приближения суррогатной математической модели (2.41) к (2.35) на основе (2.47) с учетом (2.48) примет следующий вид:

$$|\varepsilon| = |\varepsilon_{y_0}| + \sum_{\eta=1}^{N-1} \frac{\bar{\varepsilon}_\eta}{(N-1)},$$

где $|\varepsilon_{y_0}|$ – абсолютная погрешность инвариантной составляющей суррогатной математической модели.

Правую часть дифференциальной математической модели (2.37) определим методом понижения порядка ОЛДУ, разработанным в разделе 2.3. Изложим его в форме, удобной для использования в задачах математического моделирования семейства характеристик, поменяв обозначения соответствующих функций.

Эквивалентность общих решений исходного $L_n z(t) = v(t)$ и пониженного на единицу $L_{n-1} z(t) = F_1(t)$ ОЛДУ, где L_n, L_{n-1} линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами соответственно n и $n-1$ порядков, обосновывается утверждением 2.3. Учтем, что хорошие асимптотические свойства при моделировании экспоненциальными многочленами можно получить при корнях характеристического уравнения (2.40) с отрицательной вещественной частью. Поэтому система уравнений (2.20) – (2.22), описывающая один акт понижения порядка по корню p_n , запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} L_{n-1} z(t) = F_1(t); & (2.49) \\ \left(\frac{d}{dt} + p_n\right) F_1(t) = v(t); & z(0), z'(0), \dots, z^{(n-2)}(0), F_1(0). \end{cases} \quad (2.50)$$

При $v(t) = 0$ общее решение (2.50) примет вид: $F_1(t) = C_{10} e^{-p_n t}$. Подставив

его в (2.49), получим эквивалентное ОЛДУ с пониженным на единицу порядком.

Второй акт понижения порядка приводит к следующей системе ОЛДУ:

$$\begin{cases} L_{n-2}z(t) = F_2(t); & (2.51) \\ \left(\frac{d}{dt} + p_{n-1}\right)F_2(t) = F_1(t); & (2.52) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + p_n\right)F_1(t) = 0; \quad z(0), z'(0), \dots, z^{(n-3)}(0), F_1(0), F_2(0), \end{cases}$$

где из (2.51) следует $F_2(0) = z^{(n-2)}(0) + a_{n-3, n-2}z^{(n-3)}(0) + \dots + a_{0, n-2}z(0)$, p_{n-1} – корень характеристического уравнения исходного ОЛДУ. Интегрируя (2.52) для задачи Коши, получим:

$$F_2(t) = e^{-p_{n-1}t} \left[C_{20} + \int e^{p_{n-1}t} F_1(t) dt \right]. \quad (2.53)$$

Подставив (2.53) в (2.51), получим эквивалентное ОЛДУ с пониженным на два порядка, которое является вторым интегралом исходного ОЛДУ.

Для случая отрицательных корней характеристического уравнения исходного ОЛДУ $L_n z(t) = 0$ его начальные условия $z(0), z'(0), \dots, z^{(n-2)}(0), z^{(n-1)}(0)$ выразим через параметры общего решения

$$z(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{-p_k t}.$$

$$z(0) = \sum_{k=1}^n C_k, \quad z'(0) = -\sum_{k=1}^n p_k C_k, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = \sum_{k=1}^n (-p_k)^{n-1} C_k. \quad (2.54)$$

Подставив в $F_1(0)$ выражения (2.54), получим:

$$\begin{aligned} F_1(0) &= \sum_{k=1}^n C_k [(-p_k)^{n-1} + a_{n-2, n-1}(-p_k)^{n-2} + \dots + a_{0, n-1}] = \\ &= C_n H_{n-1}(p = -p_n), \end{aligned}$$

где $H_{n-1}(p)$ характеристическое уравнение ОЛДУ (2.49), которое связано с характеристическим уравнением исходного ОЛДУ следующим образом:

$$H_n(p) = (p + p_n)H_{n-1}(p) = (p + p_n)(p + p_{n-1})H_{n-2}(p). \quad (2.55)$$

Постоянная интегрирования C_{10} примет следующий вид:

$$C_{10} = F_1(0) = C_n H_{n-1}(p = -p_n). \quad (2.56)$$

Аналогично для $F_2(0)$ получим:

$$\begin{aligned}
F_2(0) &= \sum_{k=1}^n C_k [(-p_k)^{n-2} + a_{n-3,n-2}(-p_k)^{n-3} + \dots + a_{0,n-2}] = \\
&= C_{n-1}H_{n-2}(p = -p_{n-1}) + C_n H_{n-2}(p = -p_n), \tag{2.57}
\end{aligned}$$

где $H_{n-2}(p)$ характеристическое уравнение ОЛДУ (2.53), которое связано с характеристическим уравнением ОЛДУ (20): $H_{n-1}(p) = (p + p_{n-1})H_{n-2}(p)$.

Постоянную интегрирования C_{20} в (2.53) определим на основе (2.55) – (2.57):

$$C_{20} = F_2(0) - \frac{C_{10}}{(p_{n-1} - p_n)} = C_{n-1}H_{n-2}(p = -p_{n-1}).$$

Поэтому выражение (2.53) примет вид

$$\begin{aligned}
F_2(t) &= e^{-p_{n-1}t} \left[C_{n-1}H_{n-2}(p = -p_{n-1}) + \int e^{p_{n-1}t} F_1(t) dt \right] = \\
&= C_{n-1}H_{n-2}(p = -p_{n-1})e^{-p_{n-1}t} + C_n H_{n-2}(p = -p_n)e^{-p_n t}.
\end{aligned}$$

Процедуру понижения порядка можно применять k -ое число раз ($k \leq n$):

$$L_{n-k}y(t) = F_k(t);$$

$$F_k(t) = \sum_{j=1}^k C_{n+1-j} H_{n-k}(p = -p_{n+1-j}) e^{-p_{n+1-j}t}.$$

Изложенная методика предназначена для преобразования аппроксимационного выражения (2.41) в суррогатную дифференциальную математическую модель.

К дифференциальной модели (ПДУ) для описания семейства характеристик на основе задачи Коши необходимо добавить математическую модель, которая описывает вариацию определенной совокупности начальных значений характеристик и их производных до $k - 1$ порядка включительно (математической модели вариации начальных условий для ПДУ).

2.4.4. Пример реализации статической суррогатной математической модели

Суррогатную математическую модель, которая не требует изменений при переходе к новым детерминированным режимам функционирования объекта, назовем статической. (Общепринятые понятия – статические и динамические ха-

рактеристики – связаны с категориями функционирования объекта, процесса).

Принцип построения модели продемонстрируем на примере однопараметрического семейства характеристик. Для наглядности массив исходных данных *представлен* графически на рисунке 2.6 дискретными значениями, изображенными различными символами, соответствующими различным значениям параметра $h_{i_1}^{(1)}, (i_1 = 1, \dots, 4)$.

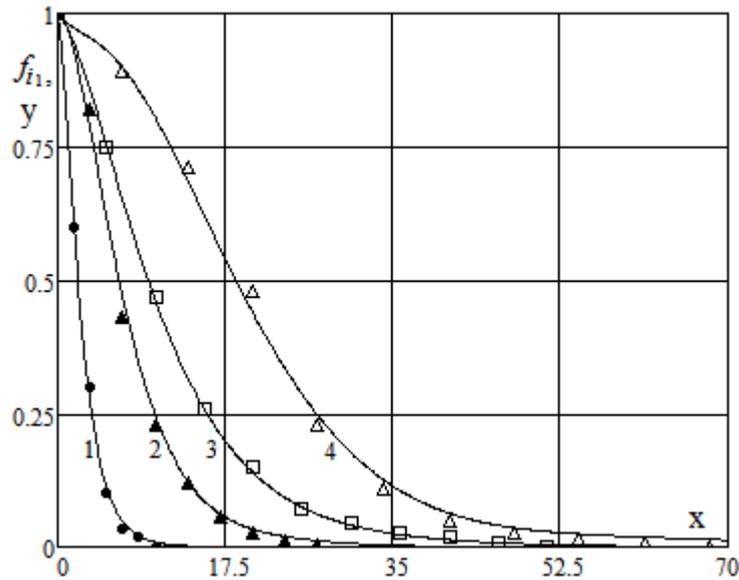


Рисунок 2.6 – Семейство характеристик (дискретные точки – исходные данные; непрерывные зависимости – рассчитанные характеристики по математической модели) при следующих значениях безразмерного параметра $h_{i_1}^{(1)}$: 1. – $h_1^{(1)} = 0$; 2. – $h_2^{(1)} = 1$; 3. – $h_3^{(1)} = 2$; 4. – $h_4^{(1)} = 3.3$

Определить суррогатную математическую модель данного семейства в области изменения независимых переменных: $0 \leq x < \infty$; $0 \leq h^{(1)} \leq 3.3$.

Зададим базисную характеристику $f_0(x)$ со значением параметра $h_1^{(1)} = 0$. Преобразуя независимую переменную x при помощи масштабных коэффициентов (10) и обозначив их λ_η^{-1} ($\eta = i_1$), проводим сжатие исходных характеристик: №№ 2, 3, 4 на рисунке 2.6.

Преобразованные зависимости представлены на рисунке 2.7.

Заданное семейство характеристик описывается следующим экспоненциальным многочленом, полученным по методике раздела 4:

$$y(x) = \Delta y_\eta(x) + y_0(x) = \sum_{k=1}^4 C_k(h^{(1)})e^{-\tilde{p}_k \lambda_\eta^{-1} x} + \sum_{k=5}^7 C_k e^{-p_k x}, \quad (2.58)$$

значения коэффициентов C_k , \tilde{p}_k которого представлены в таблице 2.3.

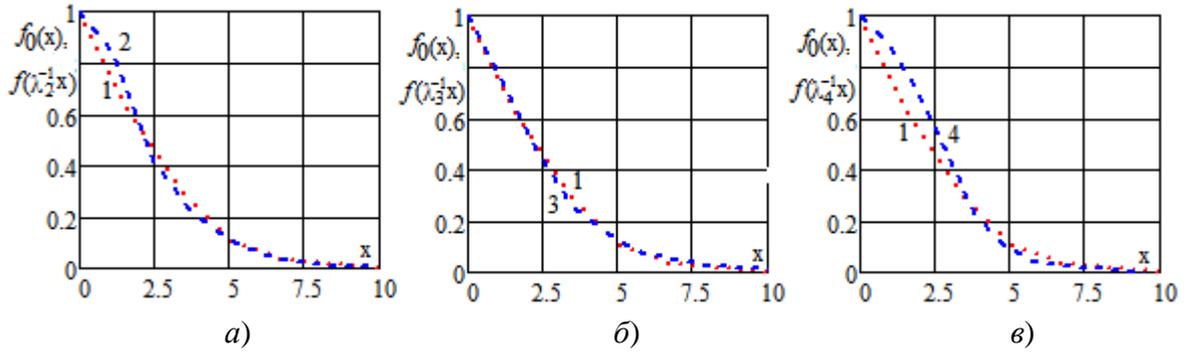


Рисунок 2.7 – Зависимости $\tilde{f}(x) = f(\lambda_\eta^{-1}x)$ – преобразованные характеристики семейства (а - $\eta = 2$; б - $\eta = 3$; в - $\eta = 4$); зависимость $f_0(x)$ – базисная характеристика ($\eta = 1$)

Таблица 2.3

Рассчитанные коэффициенты экспоненциального многочлена

$h_{i_1}^{(1)}$	λ_η	k	1	2	3	4	5	6	7
0	1	p_k	0	0	0	0	0.95	0.82	0.47
		C_k	0	0	0	0	-2.9	2.9	1
1	0.36	\tilde{p}_k	$0.5 - j0.71$	$0.5 + j0.71$	1.6	2	0.95	0.82	0.47
		C_k	$0.072 - j0.072$	$0.072 + j0.072$	0.05	0.05	-2.9	2.9	1
2	0.23	\tilde{p}_k	$0.5 - j0.71$	$0.5 + j0.71$	1.6	2	0.95	0.82	0.47
		C_k	$0.025 - j0.025$	$0.025 + j0.025$	-0.1	0.1	-2.9	2.9	1
3.3	0.14	\tilde{p}_k	$0.5 - j0.71$	$0.5 + j0.71$	1.6	2	0.95	0.82	0.47
		C_k	$0.225 - j0.225$	$0.225 + j0.225$	-0.99	0.99	-2.9	2.9	1

По данным таблицы 2.3 проведена аппроксимация степенными полиномами изменяющихся коэффициентов C_k и масштабного коэффициента λ_η выражения (2.58) как функции от параметра $h^{(1)}$:

$$2C_1(h^{(1)}) = B(h^{(1)}) = 0.444h^{(1)} - 0.061h^{(1)2} + 0.0066h^{(1)3}; \quad (2.59)$$

$$C_3(h^{(1)}) = 0.13h^{(1)} - 0.093h^{(1)2} + 0.013h^{(1)4}; \quad (2.60)$$

$$\lambda(h^{(1)}) = 1 - 1.01h^{(1)0.5} + 0.424h^{(1)} - 0.061h^{(1)2} + 0.0066h^{(1)3}. \quad (2.61)$$

Результаты соответствия аппроксимационных зависимостей (2.59) – (2.61) с данными в таблице 2.3 представлены на рисунке 2.8. Результаты расчета по полученной суррогатной математической модели изображены на рисунке 2.6 непрерывными кривыми.

Построение дифференциальной модели. Все характеристики, описываемые

экспоненциальным многочленом (2.58), можно представить, как решения однородного ОЛДУ с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$L_7 y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$H_7(p) = (p^2 + \lambda_\eta p + 0.75\lambda_\eta^2)(p + 1.6\lambda_\eta)(p + 2\lambda_\eta)(p + 0.95\lambda_\eta)(p + 0.82\lambda_\eta) \times \\ \times (p + 0.47\lambda_\eta).$$

Так как масштабные коэффициенты λ_η различные при разных значениях $h^{(1)}$, то коэффициенты ОЛДУ будут зависеть от параметра.

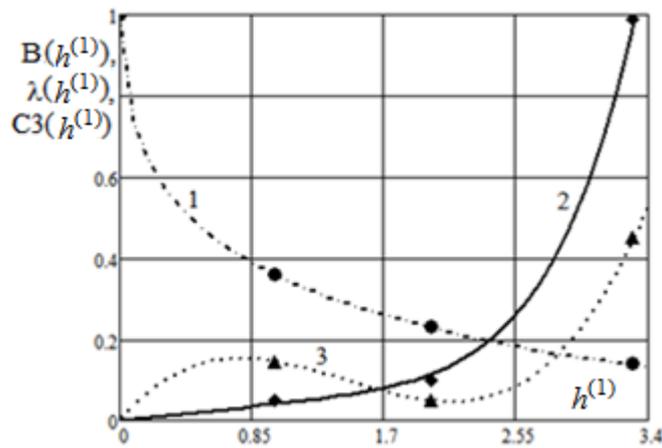


Рисунок 2.8 – Аппроксимационные зависимости: 1- $B(h^{(1)})$; 2- $\lambda(h^{(1)})$; 3- $C_3(h^{(1)})$

Многочлен (2.58) содержит для всех характеристик три одинаковых слагаемых (при $k = 5, 6$ и 7 в таблице 2.3), поэтому эти слагаемые методом понижения порядка ОЛДУ переведем в правую часть дифференциального уравнения.

ОЛДУ пониженного порядка примет следующий вид:

$$y^{(4)} + a_{34}y''' + a_{24}y'' + a_{14}y' + a_{04}y = F(x); \\ F(x) = H_4(-0.47\lambda_\eta)e^{-0.47\lambda_\eta x} + 2.9H_4(-0.82\lambda_\eta)e^{-0.82\lambda_\eta x} - \\ - 2.9H_4(-0.95\lambda_\eta)e^{-0.95\lambda_\eta x},$$

где степенной полином

$$H_4(p) = p^4 + 4.6\lambda_\eta p^3 + 7.55\lambda_\eta^2 p^2 + 5.9\lambda_\eta^3 p + 2.4\lambda_\eta^4$$

является характеристическим уравнением ОЛДУ четвертого порядка.

Для каждой зависимости (2.58) значение $y(0) = 1$, а начальные условия $y'(0, h^{(1)}); y''(0, h^{(1)}); y'''(0, h^{(1)})$ непрерывно зависят от параметра $h^{(1)}$.

Для полноты полученной дифференциальной математической модели определим математическую модель вариации начальными условиями:

$$\begin{cases} y(0) = 1; y'(0, \eta) = \lambda(\eta)[-0.078 + 0.262\eta - 0.006\eta^2 + 0.0047\eta^3 - 0.0052\eta^4]; \\ y''(0, \eta) = [\lambda(\eta)]^2[-0.47 - 0.127\eta - 0.019\eta^2 - 0.0066\eta^3 + 0.0187\eta^4]; \\ y'''(0, \eta) = [\lambda(\eta)]^3[0.819 - 0.428\eta + 0.352\eta^2 + 0.0017\eta^3 - 0.0508\eta^4]. \end{cases}$$

2.4.6. Пример решения класса задач с изменяющимися исходными данными

Пусть исходные данные зависят от текущего состояния системы. К таким относится полная совокупность гистерезисных характеристик (гистерезис – это свойство отставания реакции системы на определённое воздействие и зависит от текущего состояния системы, а последнее, в свою очередь, определяется предысторией системы).

Требуется определить суррогатную математическую модель процесса движения рабочей точки по гистерезисным ветвям непрерывного семейства характеристик при произвольном алгоритме её движения.

Рассмотрим принцип решения этого класса задач на примере квазистатических гистерезисных магнитных характеристик ферритов.

Множество магнитных состояний ферритов во внешнем магнитном поле характеризуется величинами b и h и описывается зависимостью $b(h)$, где b – магнитная индукция, Тл, h – напряженность магнитного поля, А/м.

Статические магнитные характеристики подразделяются на начальную кривую намагничивания (НКН) и на бесконечное число кривых перемангничивания и гистерезисных петель. При этом принято статическое магнитное состояние ферромагнитных элементов описывать прописными буквами, соответственно B и H .

Так как ДУ описывают динамику процесса, то множество магнитных состояний в ПДУ будем обозначать строчными буквами. Такое представление соответствует логике получения экспериментальных статических характеристик при помощи характериографов, в которых изменение магнитного состояния ферромагнитного элемента протекает с относительно малыми скоростями, поэтому вихре-

вые токи и инерционные процессы практически не оказывают влияние на результаты исследования и медленная динамика приводит к квазистатическим характеристикам. При этом непрерывное изменение b и h представляется как движение рабочей точки по статической характеристике.

Любое значение магнитной индукции b на гистерезисной ветви можно представить в виде суммы двух слагаемых: $b(h) = b_{\text{и}}(h) + b_{\text{г}}(h)$. Здесь $b_{\text{и}}(h)$ – идеальная характеристика, обусловленная консервативными процессами (которая инвариантна); $b_{\text{г}}(h) = b(h) - b_{\text{и}}(h)$ гистерезисная составляющая, обуславливающая отклонение от идеальной составляющей (рисунок 2.9). Граничные условия: $h = 0, b_{\text{и}}(0) = b_{\text{г}}(0) = 0; h = \infty, b_{\text{и}}(\infty) = b_{\text{с}}, b_{\text{г}}(\infty) = 0$.

По экспериментальным ветвям предельного симметричного цикла (рисунок 2.9) предопределены в обобщенном виде выражения составляющих ветвей намагничивания:

$$b_{\text{и}}(h) = C_{3\text{и}} + C_1 e^{-\beta h}; \quad b_{\text{г}}(h) = C_{3\text{г}} + C_2 e^{-\sigma \beta_{\text{г}} h}; \quad \sigma = \text{sign}(dh), \quad (2.62)$$

которым соответствует следующее результирующее выражение магнитной индукции:

$$b(h) = C_1 e^{-\beta_1 h} + C_2 e^{-\beta_2 h} + C_3 \quad (2.63)$$

В (2.63) произвели замену обозначений $\beta_1 = \beta, \beta_2 = \sigma \beta_{\text{г}}$, где сигнатурой учли знаки: $\sigma = -1$ для нисходящей ветви ($dh < 0$) и $\sigma = 1$ для восходящей ветви ($dh > 0$) гистерезисных характеристик. Подставив граничные условия, зависимость $b_{\text{и}}(h)$ примет следующий вид:

$$b_{\text{и}}(h) = b_{\text{с}}(1 - e^{-\beta h}), \quad \text{где } C_1 = -b_{\text{с}} \quad (2.64)$$

В выражении (2.62) постоянные коэффициенты $C_2, C_{3\text{г}}$ будут зависеть от текущего положения рабочей точки, которое, в свою очередь, определяется предысторией намагничивания (траекторией перемещения рабочей точки намагничивания), которую в общем случае нельзя предсказать.

В общем случае постоянные интегрирования будем определять из задачи Коши. Экспоненциальному многочлену (2.63) соответствует однородное ОЛДУ:

$$\frac{d^3 b}{dh^3} + (\sigma \beta_{\text{г}} + \beta) \frac{d^2 b}{dh^2} + \sigma \beta_{\text{г}} \beta \frac{db}{dh} = 0. \quad (2.65)$$

Однако при решении ОЛДУ (2.65) требуется избыточное количество «начальных условий», потому что порядок этого ОЛДУ увеличен за счет учета

инвариантной составляющей $b_{\text{и}}(h)$.

Понизим порядок ОЛДУ (2.65). Ему соответствует следующее характеристическое уравнение

$$H_3(p) = p^3 + (\beta_1 + \beta_2)p^2 + \beta_1\beta_2p.$$

При переносе фундаментального решения $e^{-\beta_1 h}$ в правую часть ОЛДУ, в левой части остается дифференциальный оператор с характеристическим уравнением пониженного порядка

$$H_2(p) = p^2 + \beta_2p.$$

В результате уравнение (2.65) преобразуется к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 b}{dh^2} + \sigma\beta_r \frac{db}{dh} = f_1(x); \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dh} + \beta\right) f_1(x) = 0; \quad b_0(h_0), b'_0(h_0), f_1(h_0) = b''_0(h_0) + \sigma\beta b'_0(h_0). \end{cases} \quad (2.67)$$

Интегрируя уравнение (2.67) и подставляя в (2.66), получим неоднородное ОЛДУ пониженного порядка, эквивалентное однородному ОЛДУ (2.65):

$$\frac{d^2 b}{dh^2} + \sigma\beta_r \frac{db}{dh} = f_1(h_0)e^{-\beta h}; \quad (2.68)$$

Определяя по общему решению (2.63) значения $b''_0(h_0)$, $b'_0(h_0)$ и подставляя в (2.68), с учетом (2.64) получим:

$$f_1(h_0) = C_1 H_2(p = -\beta) = -(\beta^2 - \sigma\beta_r\beta)b_S.$$

Отметим, что в точках поворота кривой намагничивания значение первой производной изменяется скачком, которую обозначим так b'_{0+} . Точкой поворота может быть произвольной точкой, лежащей в поле предельного симметричного цикла (СПЦ), когда в этой точке меняется направление изменения независимой переменной от $dh < 0$ к $dh > 0$, или наоборот. При этом траектория намагничивания переходит с одной ветви гистерезисного цикла на другую. На рисунке 2.9 точками поворота являются: точка М – верхняя точка СПЦ №1; точки А21 и А22 для частного цикла №2; точки А31 и А32 для частного цикла №3.

Первый интеграл ОЛДУ (2.68) с начальными условиями h_0, b_0, b'_{0+} примет вид:

$$b' + \sigma\beta_r b = b'_{0+} + \sigma\beta_r b_0 + b_S(\beta - \sigma\beta_r)(e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0}). \quad (2.69)$$

Интегрируя (2.69) с начальным условием $b_0(h_0)$, приходим к выражению интегральных кривых ОЛДУ (2.68):

$$b = b_0 + \mu_H \beta^{-1}(e^{-\beta h_0} - e^{-\beta h}) + \sigma \beta_T^{-1}(b'_{0+} - b_S \beta e^{-\beta h_0})[1 - e^{-\sigma \beta_T(h-h_0)}]. \quad (2.70)$$

При $h_0 = 0$, $b_0 = 0$, $b'_{0+} = \mu_H$ (2.70) получим идеальную характеристику намагничивания.

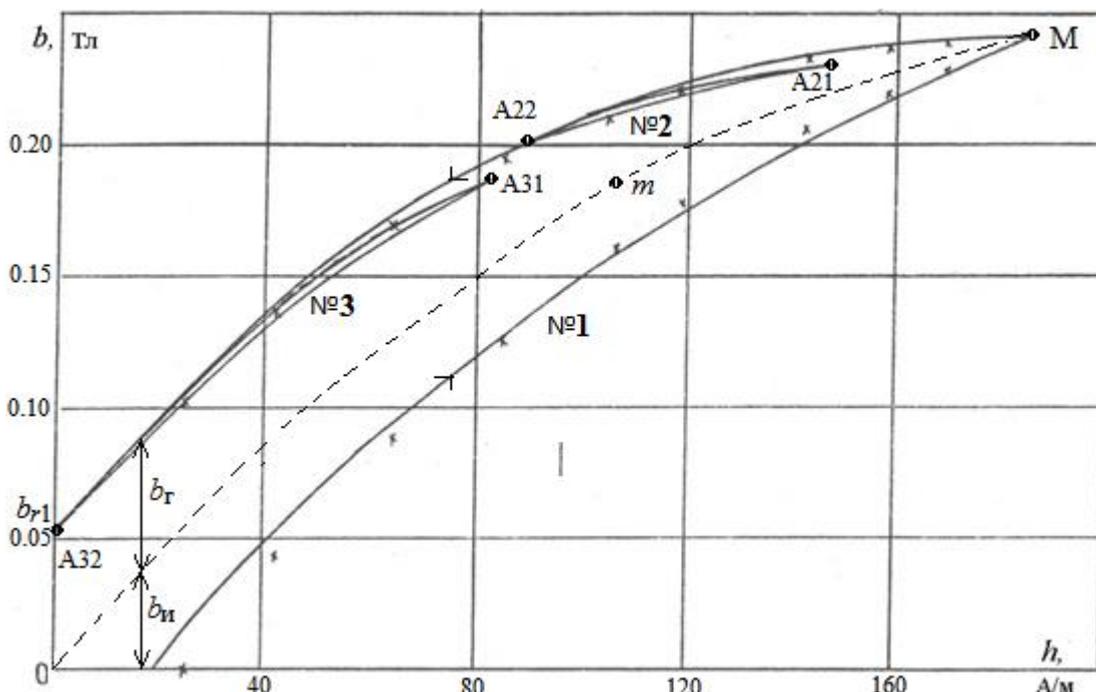


Рисунок 2.9 – Характеристики намагничивания феррита 1500NM-3: №1- часть СПЦ (***) – экспериментальные; — расчетные; - - - идеальная кривая намагничивания); №2 и №3 расчетные частные циклы

Для поиска значения производной b'_{0+} в произвольной начальной точке h_0 , b_0 (начальные условия для ДУ (2.68)) воспользуемся правилами Маделунга [124], которые выражают наиболее общие и существенные феноменологические закономерности для различных ферромагнитных материалов.

Правило 1. Любая кривая, расположенная внутри петли гистерезиса, однозначно определяется точкой поворота, из которой она исходит.

Именно это правило требует задания исходной точки (h_0, b_0) .

Правило 2. Если на этой же кривой какую-либо точку сделать новой точкой поворота, то кривая, определяемая этой точкой поворота, снова возвращается к начальной точке на исходной кривой.

Правило 3. Если кривая намагничивания завершает текущий гистерезисный цикл в точке начала этого цикла, то дальше она продолжается по той кривой, из кото-

рой она вошла в текущий завершённый цикл, так, как будто цикла вообще не было.

Однако эти правила следует применять с определенными ограничениями. Так первое правило правомерно без дополнений, если точки лежат на предельной петле гистерезиса (ППГ). А для произвольной точки оно правомерно, когда однозначно задана предыстория намагничивания, т.е. траектория, по которой был осуществлен переход в заданную точку поворота. Границы применимости второго и третьего правила связаны с условием того, чтобы не прерывался режим намагничивания, в противном случае ферромагнетик утрачивает связь с предысторией.

Для описания частного гистерезисного цикла учтем условие замкнутости ветвей гистерезисного цикла (второе правило Маделунга). Например, возьмем петлю гистерезиса №2 на рисунке 2.9 и, подставив в (2.70) начальные условия, соответствующих точкам поворота петли ($A21 - h_{01}, b_{01}, b'_{01+}$; $A22 - h_{02}, b_{02}, b'_{02+}$), получим систему из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} b_{02} &= b_{01} + b_S^1(e^{-\beta h_{01}} - e^{-\beta h_{02}}) + \beta_r^{-1}(b'_{01+} - b_S\beta e^{-\beta h_{01}})[1 - e^{-\beta_r(h_{02} - h_{01})}]; \\ b_{01} &= b_{02} + b_S(e^{-\beta h_{02}} - e^{-\beta h_{01}}) - \beta_r^{-1}(b'_{02+} - b_S\beta e^{-\beta h_{02}})[1 - e^{\beta_r(h_{01} - h_{02})}]. \end{aligned}$$

Эта система приводит к условию соответствия первой производной в точках поворота каждого частного гистерезисного цикла:

$$b'_{01+} - b_S\beta e^{-\beta h_{01}} = b'_{02+} - b_S\beta e^{-\beta h_{02}}. \quad (2.71)$$

Совместное решение уравнений (2.71) с ДУ (2.69) приводит к математической модели вариации первой производной в произвольной точке (h, b) поворота кривой намагничивания:

$$b'_{+} = b'_{-} + \sigma\beta_r [(b - b_0) + \mu_H\beta^{-1}(e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0})], \quad (2.72)$$

где b'_{-} — первая производная предыдущей ветви перемангничивания в точке перехода на новую ветвь перемангничивания феррита, Гн/м. Она вычисляется по ДУ (2.69).

Для ветви, начинающейся в точке М (при начальных условиях (h_M, b_M, b'_{M+})), согласно математической модели (2.70) в точке А32 ($h = 0, \sigma = -1$), магнитная индукция примет значение:

$$b_{r1} = -\beta_r^{-1}(b'_{M+} - b_S\beta e^{-\beta h_M})[1 - e^{-\beta_r h_M}]. \quad (2.73)$$

Вследствие симметрии петли гистерезиса относительно начала координат

будем иметь, что ветвь, начинающаяся в точке, симметричной точке А32 (при начальных условиях $h_0 = 0$, $b_0 = -b_{r1}$ и b'_{1+}), приходит в точку М (b_m, h_m). Подставив эти значения в (2.70) с учетом $\sigma = 1$, получим:

$$b_{r1} = \beta_T^{-1} (b'_{1+} - b_S \beta) [1 - e^{-\beta_T h_m}]. \quad (2.74)$$

Сопоставляя (2.73) и (2.74), получим следующее равенство:

$$(b'_{m+} - b_S \beta e^{-\beta h_m}) = -(b'_{r1+} - b_S \beta). \quad (2.75)$$

Для ветви, начинающейся в произвольной точке m , принадлежащей идеальной характеристике $b_{и}(h)$ (рисунок 2.9), при начальных условиях (h_m, b_m, b'_{m+}) выражение (2.75) примет вид

$$(b'_{m+} - b_S \beta e^{-\beta h_m}) = -(b'_{x+} - b_S \beta). \quad (2.76)$$

Двухуровневая математическая модель (2.70), (2.71), (2.72), (2.75) характеризуется тремя параметрами: β , β_T , b'_{m+} . Для определения параметров математической модели разработана «Программа идентификации математической модели ферромагнетика» [83]. Идентификация модели проводится по экспериментальным данным, принадлежащим статическому симметричному предельному циклу (СПЦ) ферромагнетика. На рисунках 2.9 и 2.10 крестиками изображены экспериментальные данные (СПЦ) соответственно для двух магнитных материалов – феррита 1500НМ-3 и Мо-пермаллоя МП-140.

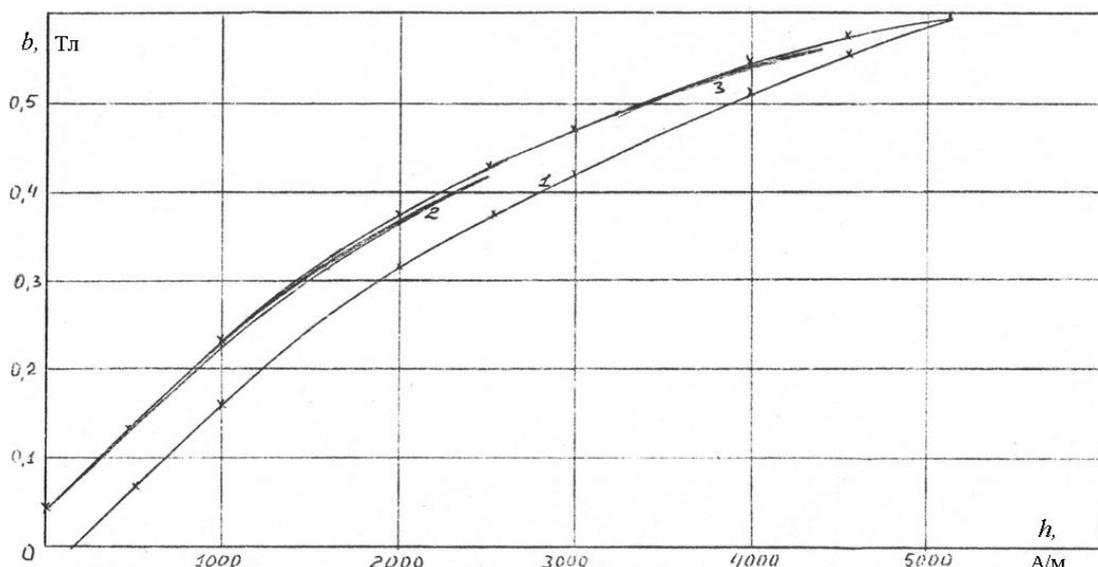


Рисунок 2.10 – Характеристики намагничивания Мо-пермаллоя МП-140: 1- участок СПЦ (***) – экспериментальный; — расчетный); 2 и 3 расчетные частные циклы

Симметричный предельный цикл снимается по стандартной методике с ис-

пользованием RC -интегратора [84, 85].

Результаты идентификации математической модели для нескольких типов ферромагнетиков представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

Параметры дифференциальной математической модели
для различных типов ферромагнетиков

Тип	b_m , Тл	h_m , А/м	β , м/А	β_r , м/А	μ_n , Гн/м	b'_{m+} , Гн/м
Феррит 1500- НМ3	0.243	187	$9.56 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-5}$
Мо-пермал. МП-140	0.59	5175	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$
Феррит 2000- НМ1	0.21	126	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$2.92 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-4}$
Феррит 1000- НМ	0.25	82.5	$1.46 \cdot 10^{-2}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$

Расчеты, проведенные по разработанной математической модели с параметрами из таблицы 2.4, иллюстрируются сплошными линиями на рисунках 2.9 и 2.10. Экспериментальные и теоретические данные сравнивали для феррита 1500-НМ3 в двадцати точках, для Мо-пермаллоя МП-140 – в шестнадцати точках.

Расчетные зависимости адекватны экспериментальным по критерию Фишера при уровне значимости 2.5% [61]: для феррита 1500-НМ3 этот критерий составил $F = 37$; для Мо-пермаллоя МП-140 этот критерий составил $F = 41$. Эти значения больше табличных значений $F_T = 2.5$ и $F_T = 2.86$.

Математическая модель (2.70), (2.71), (2.72), (2.75) позволяет отобразить любую ветвь статических магнитных характеристик в полуплоскости $h \geq 0$. Применяв программные методы продолжения функции на область $h < 0$, получим возможность описывать любое семейство статических гистерезисных характеристик феррита. Полученные модели позволяют проводить вычислительные эксперименты всей совокупности кривых намагничивания (идеальную кривую намагничивания, любой симметричный гистерезисный цикл и любой частный цикл) в произвольной разрешенной области изменения магнитного состояния ферромагнетика по разработанной программе «Статические и динамические гисте-

резисные циклы ферритов и магнитодиэлектриков» [111], рисунки 2.11 и 2.12.

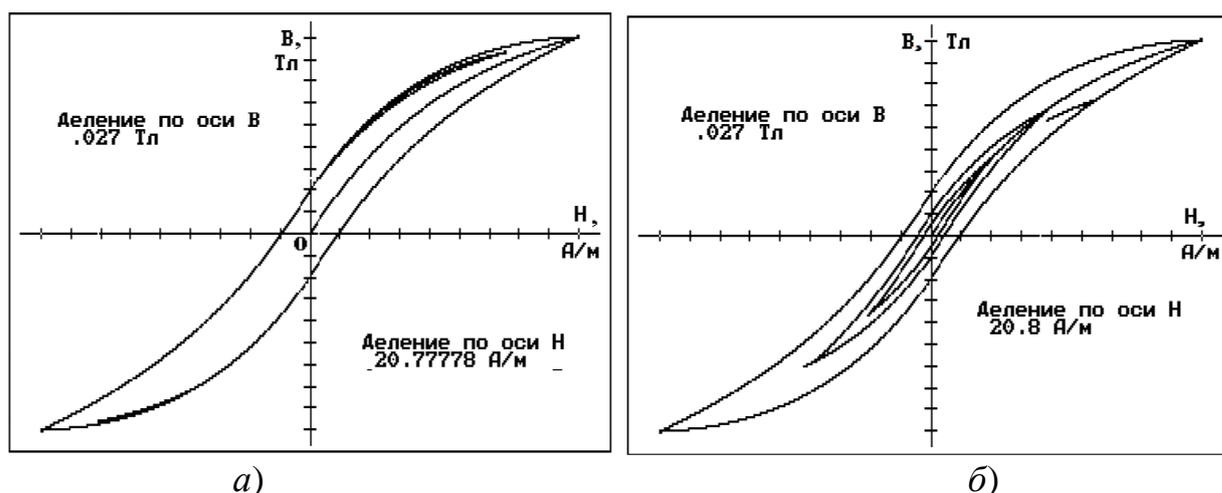


Рисунок 2.11 – Непрерывные траектории перемещения рабочей точки намагничивания $b(h)$, рассчитанные по разработанной математической модели для феррита (объекта с гистерезисными характеристиками): *a* – идеальная кривая, частный гистерезисный цикл и СПГ; *б* – идеальная кривая, семейство симметричных гистерезисных циклов, частный гистерезисный цикл и СПГ

Точность модели и её функциональные возможности можно увеличить при помощи увеличения порядка аппроксимирующих многочленов – и для идеальной кривой намагничивания, и для гистерезисной составляющей, приводящей к необходимости использовать большего количества начальных условий. Это требует включения в модель через начальные условия дополнительной информации системного характера о специфике объекта (например, третьего правила Маделунга и т.п.). Но такая задача для специального рассмотрения.

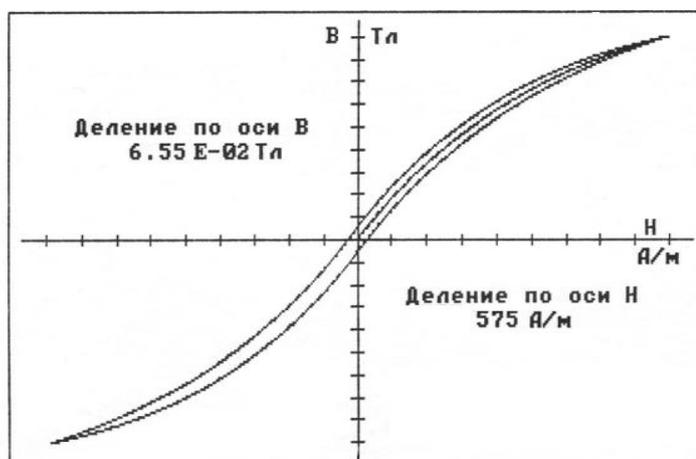


Рисунок 2.12 – Семейство характеристик намагничивания Мо-пермаллоя МП-140, рассчитанное по полученной математической модели: идеальная кривая намагничивания и симметричный предельный гистерезисный цикл

2.5. Восстановление характеристик нелинейных физических процессов

Физические методы анализа из-за сильных нелинейностей процессов в магнитных средах не позволяют определять ход зависимостей в широкой области изменения интенсивности магнитного поля. Однако из физического подхода удастся смоделировать закономерности развития процесса или в области слабых полей, или в области больших полей при магнитном насыщении ферромагнитной среды.

Для большинства ферромагнетиков в области слабых полей характерна зависимость

$$b = \mu_n h + \alpha h^2, \quad 0 \leq h \leq H_0, \quad (2.77)$$

которая названа законом Релея. Этот закон получен аналитически из рассмотрения вероятностного физического процесса намагничивания при сравнительно слабых полях [146]. Зависимость Релея характеризует начальный участок характеристики намагничивания, которую назовем «хвостовой частью», а участок вхождения в насыщение – «головной частью».

Ставится задача – по отдельным фрагментам, полученным физическим методом, восстановить полную характеристику. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2.4. Если для апериодического процесса известно аналитическое выражение характеристики на начальном участке, а также значения этой характеристики на конечном участке, то эту характеристику можно аппроксимировать методом построения дифференциальной модели на основе ОЛДУ.

Доказательство. Для ферромагнетика начальный участок описывается выражением (2.77). Ему соответствует следующее порождающее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3 b}{dh^3} = 0. \quad (2.78)$$

Его частное решение на начальном интервале $0 \leq h \leq h_z$ характеристики имеет следующий вид:

$$b = \alpha h^2 + \beta h. \quad (2.79)$$

Общее решение (2.78) на конечном интервале $h_z \leq h \leq h_m$ характеристики:

$$b = C_1 h^2 + C_2 h + C_3, \quad (2.80)$$

где h_z – условная точка стыковки ветвей (2.79) и (2.80) моделируемой характеристики, b_m – максимальное значение переменной b .

Наложим на ветви (2.79) и (2.80) граничные условия – условия стыковки двух ветвей, которые выражаются равенством соответствующих функций и их производных в точке h_z :

$$\alpha(h_z)^2 + \beta h_z = C_1(h_z)^2 + C_2(h_z) + C_3, \quad (2.81)$$

$$2\alpha h_z + \beta = 2C_1 h_z + C_2. \quad (2.82)$$

При этом в точке стыковки h_z значения $b(h_z)$ и $b'(h_z)$ являются начальными условиями для общего решения (2.80).

После наложения краевого условия максимального значения функции $b(h_m) = b_m$, модель (2.80) примет следующий вид:

$$b = b_m + C_1(h^2 - h_m^2) + C_2(h - h_m), \quad h_z \leq h \leq h_m. \quad (2.83)$$

Из системы алгебраических уравнений (2.81), (2.82) и (2.79), (2.83) следуют выражения для коэффициентов C_1 и C_2 :

$$C_2 = \frac{(b_m - \beta h_m) + \alpha h_z (h_z - 2h_m)}{(h_m - h_z)(h_m - 3h_z)}; \quad C_2 = \frac{\beta(h_m^2 + h_z^2) + 2h_z(\alpha h_m^2 - b_m^2)}{(h_m - h_z)(h_m - 3h_z)}. \quad (2.84)$$

Кривые, представленные в виде алгебраических выражений (2.79), (2.83), (2.84), будут характеризоваться тремя параметрами модели (α , β , h_z), которые определяются методом наименьших квадратов по разработанной нами программе, в которую вводятся значения начального и конечного участков характеристики.

На рисунке 2.13 представлен пример восстановления полной кривой намагничивания. В качестве исходной информации задана головная часть характеристики. Для реализации модели выбирали пять значений (жирные точки на рисунке 2.13), включая b_m , h_m .

Отметим, что дифференциальную модель (2.78) в задаче аппроксимации характеристики двумя интервальными участками нельзя представлять в форме эквивалентного ЛДУ пониженного порядка, например, в виде следующего неоднородного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 b}{dh^2} = \gamma, \quad (2.85)$$

где γ – постоянная величина – параметр модели.

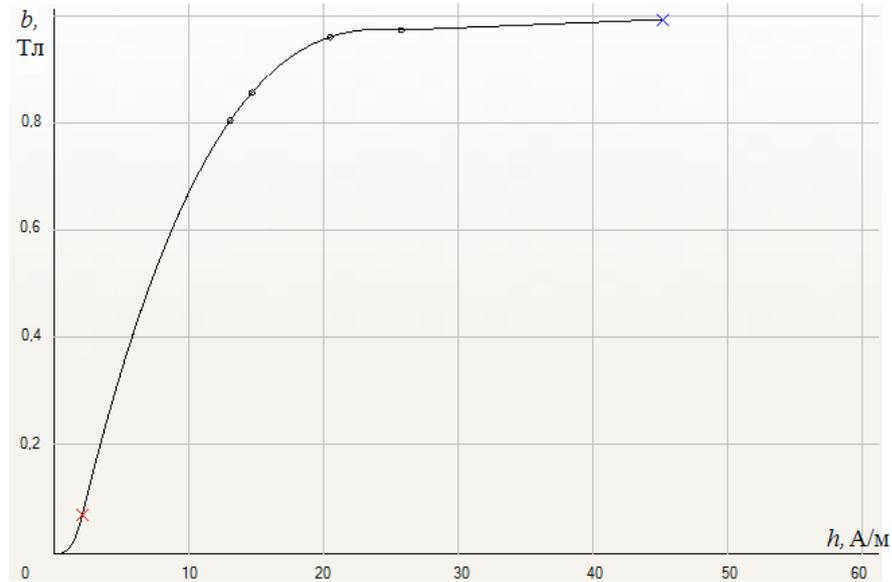


Рисунок 2.13 – Восстановленная характеристика намагничивания по фрагментам, полученным физическим методом на начальном участке и в области насыщения: точки – исходные данные; × – расчетная точка стыковки фрагментов

Чтобы описывать этой моделью обе ветви зависимости $b(h)$ (зависимости (2.79) и (2.80)) коэффициент γ должен быть переменным, а это противоречит требованию к дифференциальной модели (ПДУ).

Таким образом, для восстановления характеристик нелинейных магнитных процессов предложено использовать закономерность, которая следует из физического подхода в области малых значений напряженности поля – закономерность Релея. Разработанный метод моделирования кривых на основе ОЛДУ позволяет восстановить полную характеристику процесса намагничивания магнетика. В нашей работе [18] аналогичный метод использован для аппроксимации характеристик степени очистки магнитных сепараторов.

Заметим, что предложенный метод отличается от известного метода интерполяции характеристик сплайнами [1, 150, 169, 196, 198] в силу разной постановки задачи. В классических сплайнах, задается сетка узлов интерполяции и структура сопровождающего их ОЛДУ, заранее присваивается, тогда, как в защищаемом здесь методе ОЛДУ определяется на основе физических принципов или исходных выражений, а узлы стыковки определяются как параметры модели из условия стыковки ветвей.

2.6. Выводы

1. Предлагается новый класс суррогатных математических моделей в виде неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (ОЛДУ) и их решений. Такие модели позволяют интегральными кривыми описывать многопараметрические семейства характеристик, как с фиксированными, так и с изменяющимися исходными характеристиками моделируемой системы, в частности, описывать полную совокупность гистерезисных характеристик при произвольной форме воздействия, приводящего к сканированию определенной совокупности гистерезисных ветвей. В последних случаях параметры модели универсальны, а для управления изменением исходных данных строится модель вариации начальными условиями.

2. Разработанный класс моделей соответствует принципу разделения многомерных переменных. В качестве опорных функций выступают экспоненциальные многочлены с нерегламентированными показателями степени, которые обладают повышенными асимптотическими свойствами. Они позволяют достигать адекватности при отсутствии жесткой регламентации к структуре этих многочленов меньшим количеством аппроксимирующих слагаемых и дают возможность включать в модель через начальные или граничные условия дополнительной информации системного характера об исследуемом техническом объекте (технологическом процессе), а также существенно расширить область пространства проектирования суррогатной математической модели (по независимой переменной до бесконечности).

3. Разработан метод математического моделирования семейств апериодических характеристик неоднородными обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (неоднородные ОЛДУ с ПК). Результирующая математическая модель двухуровневая. Состоит из неоднородного ОЛДУ с ПК (дифференциальной модели) и математической модели вариации начальными условиями. Структура и параметры дифференциального оператора определяются непосредственно из условий решаемой задачи, что существенно расширяет область применения новой аппроксимации в отличие от существующих на основе жестко заданных структур аппроксимационных выражений (полиномы,

сплайны, линейные и нелинейные регрессии).

Этот метод позволяет гарантировать адекватность модели не только в точках аппроксимации семейства, но и во всех точках, расположенных в пространстве существования семейства (согласно теоремам о непрерывности по параметрам и начальным условиям дифференциальных уравнений).

4. Метод моделирования включает три этапа: 1) определение предварительной дифференциальной модели в форме *однородного* ОЛДУ с ПК на основе аппроксимации исходных кривых экспоненциальным многочленом; 2) процедуры понижения порядка предварительной дифференциальной модели; 3) построение математической модели вариации начальными условиями.

5. Разработаны следующие теоретические положения:

- для построения дифференциальной модели на основе однородного ОЛДУ с ПК достаточно характеристику аппроксимировать суммой экспоненциальных функций (утв. 2.1);

- точность интерполяции кривых методом Н. С. Кочанова (суммой экспоненциальных функций) можно повысить выбором переменного интервала интерполяции и компенсацией «паразитных» затухающих гармоник;

- представлена методика понижения порядка ОЛДУ с ПК, которая переводит исходное ОЛДУ в эквивалентное ему по общему решению неоднородное ОЛДУ пониженного порядка (утв. 2.3);

- при построении дифференциальной модели обосновано выполнение необходимого условия адекватности, требующего согласования числа степени свободы модели с числом существенных закономерностей, которым подчиняется моделируемый объект (семейство характеристик) (опр. 2.1 и утв.2.2).

- для дифференциальной модели, построенной на основе задачи Коши, обоснованы принципы моделирования математической модели вариации начальными условиями.

6. Использование разработанных теоретических положений для реализации прикладных методов моделирования:

- разработан метод восстановления аperiодических характеристик нели-

нейных процессов по отдельным фрагментам, полученным физическим методом (утв. 2.4). Новый метод отличается от метода интерполяции сплайнами различной постановкой задачи;

- разработаны принципы математического моделирования множества статических гистерезисных циклов ферритов и магнитодиэлектриков;

- разработанный метод математического моделирования семейства кривых на основе *неоднородных* ОЛДУ с ПК аналитически обобщает численно-графические семейства апериодических характеристик технических процессов любой физической природы;

- разработанный метод необходим для аппроксимации результатов численного моделирования распределения магнитных сил в магнитном сепараторе и его характеристик очистки ВТЖ от ферромагнитных частиц, предназначенных для задачи оптимизации магнитных сепараторов.

7. Разработана дифференциальная математическая модель статических характеристик ферритов и магнитодиэлектриков для расчета магнитных систем, которые внедрены в производство (акты об использовании и внедрения прилагаются в приложении 7). Данная модель характеризуется тремя параметрами, которые определяются по экспериментальным данным для каждого типа ферромагнитного элемента при помощи разработанной программы идентификации. Полученная модель адекватна экспериментальным зависимостям по критерию Фишера со степенью риска не более 2.5.

Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ ПРИ МАГНИТНОЙ КОАГУЛЯЦИИ И СЕПАРАЦИИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ

3.1. Предварительные замечания

Постоянные магниты выступают в качестве источников магнитных сил в магнитных сепараторах. Распределение магнитных сил определяется распределением магнитного поля и его градиента. Анализ научно-технической информации показал, что существующие методики расчета и проектирования магнитных сепараторов базируются на идеализированных и упрощенных математических моделях источников магнитных сил и в приближении однородности магнитной среды

Существенным недостатком известных идеализаций является игнорирование влияния технологического фактора на эффективность сепарации ферромагнитных примесей, связанного с накоплением слоя феррочастиц на поверхности магнитной системы, что существенно снижает эффективность сепарации из-за магнитного шунтирования рабочего пространства очистителя, а также приводит к изменению магнитного состояния самих источников поля в сепараторах.

Этот фактор добавляет к сложной магнитной системе, состоящей из совокупности большого количества дискретных пассивных и активных магнитных элементов, непрерывную и изменяющуюся во времени неоднородную магнитную среду. Поэтому при реализации алгоритма и программы расчета поля, ориентированных на включение в систему проектирования магнитных сепараторов, в главе 1 обоснован метод, в котором развит эффективный аппарат изучения и анализа сложных систем – метод магнитных цепей. В магнитных цепях постоянные магниты представляются в виде магнитных схем замещений, которые, как отмечалось, идеализированы.

В настоящей главе решаются три задачи диссертационной работы. Первая задача связана с совершенствованием математических моделей источников поля (постоянных магнитов) на основе фундаментальных законов природы (ЭМП поля):

– проводится теоретический анализ и на основе физического понятия магнитного потенциала разрабатывается математическая модель распределения магнитного потенциала и напряженности поля в произвольной точке окружающего пространства для случая *однородной среды* [15, 127];

– на основе фундаментальных уравнений магнитного поля разрабатывается метод синтеза магнитной схемы замещения постоянных магнитов [20, 25], которая востребована для определения распределения характеристик поля в случае *неоднородной среды*.

Затем, на основе усовершенствованных моделей постоянных магнитов методом магнитных цепей разрабатывается численная математическая модель силового поля в рабочей области магнитного сепаратора. Потом оцифрованная модель силового поля аппроксимируется семейством интегральных кривых ОЛДУ методом, разработанным в главе 2.

Для решения задачи математического моделирования магнитной коагуляции также проводится математическое моделирование диполь-дипольного взаимодействия намагниченных во внешнем поле ферромагнитных частиц.

И последнее, проводится концептуальное обоснование повышения эффективности обезвоживания осадка на поверхности патронов.

3.2. Математическое моделирование магнитного поля постоянных магнитов

3.2.1. Магнитные характеристики закритических ферромагнитных материалов

Рассмотрим типовые характеристики, определяющие состояние магнита. В высокопроизводительных сепараторах используют магниты, изготовленные из редкоземельных магнитотвердых материалов, которые относятся к группе закритических материалов, например, сплав неодима с железом и бором (Nd-Fe-B) [24, 69, 73, 76, 148]. Такие материалы, изделия из которых, будучи намагниченными

вместе с арматурой (полюсными наконечниками, ярмом и другими деталями), полностью восстанавливают свой поток после временного отделения от арматуры или после воздействия стороннего размагничивающего поля с напряженностью поля, соизмеримой даже с коэрцитивной силой H_{CB} , А/м. Характеристика размагничивания $B(H)$ этих веществ практически прямолинейна (рисунок 3.1, линия 1), где B – магнитная индукция в Тл; H – напряженность поля в А/м. Поэтому эта характеристика хорошо аппроксимируется зависимостью

$$B = B_r + HB_r / H_{CB}, \quad (3.1)$$

где B_r – остаточная индукция в Тл. Если же магнит из этого материала снова соединить с арматурой (т.е. замкнуть магнитную цепь), то магнитный поток будет восстанавливаться в нем соответственно этой характеристике, так как у магнитов из закритических материалов прямая магнитного возврата совпадает с характеристикой размагничивания.

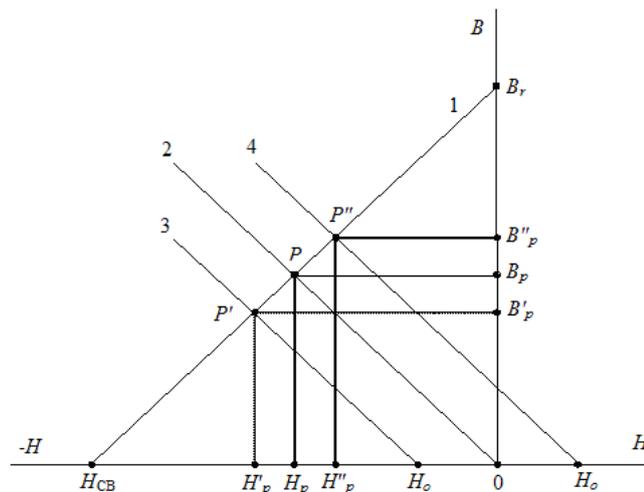


Рисунок 3.1 – Типовые характеристики, определяющие магнитное состояние постоянных магнитов из магнитотвердых закритических материалов: 1 – характеристика размагничивания материала; 2 – характеристика формы тела магнита при нулевом внешнем поле; 3 – тоже при размагничивающем внешнем поле; 4 – тоже при намагничивающем внешнем поле

Магнитные свойства постоянных магнитов отличаются от магнитных свойств материалов, из которых они изготовлены. Причиной этого является размагничивающее действие магнитных полюсов, под которыми понимают участки поверхности магнита, на которых нормальная составляющая намагниченности M отлична от нуля, и возникает на границах раздела двух магнитных сред. Полюса

создают внутри тела размагничивающее поле, напряженность H_p которого пропорциональна намагниченности: $H_p = NM$, где N – безразмерный коэффициент размагничивания, зависящий от формы тела [5, 148, 184]. Подставив значение напряженности размагничивающего поля $H = -H_p$ в классическое соотношение

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}), \quad (3.2)$$

получают известное выражение, называемое характеристикой формы:

$$B = H_p \mu_0 (1 - N) / N = -\mu_0 (m - 1) H,$$

где $(m - 1) = (N^{-1} - 1)$ – называется проницаемостью формы.

Характеристика формы представляет собой прямую линию, проведенную из начала координат (см. рисунок 3.1, линия 2), наклон которой определяется значением проницаемости формы. Точка пересечения характеристики размагничивания с характеристикой формы определяет интенсивность магнитной индукции B_p магнита (его рабочую точку), Тл.

При воздействии внешнего поля с напряженностью H_0 магнитная характеристика размагничивания материала в соответствии с [174] имеет следующий вид:

$$B = B_r + (H \pm H_0)B_r / H_{CB}, \quad (3.3)$$

где знак « $-$ » перед H_0 характеризует размагничивающее поле (рисунок 3.1, линия 3), а знак « $+$ » характеризует намагничивающее поле (рисунок 3.1, линия 4), А/м.

Характеристика формы является справочным параметром постоянных магнитов и, которая правомерна только для случая, когда магнит помещается в однородную немагнитную среду, примером которой является воздух.

Если, магнит поместить в неоднородную магнитную среду, наклон «характеристики формы» будет изменяться. Поэтому в соответствии с рисунком 3.1 точка её пересечения (рабочая точка) с характеристикой размагничивания материала будет изменяться.

Таким образом, при построении математических моделей постоянных магнитов только характеристика (3.3) размагничивания материала постоянного магнита является фундаментальной.

3.2.2. Компьютерно-аналитическое моделирование поля постоянного магнита в немагнитной среде

В высокопроизводительных магнитных сепараторах применяют магниты цилиндрической или кольцевой формы. Для моделирования применим классический метод эквивалентного соленоида [7], имеющего бесконечно тонкую цилиндрическую обмотку, по которой протекает намагничивающий ток силой i . Линейную плотность поверхностного тока, приходящуюся на единицу длины соленоида, выбирают равной величине намагниченности магнита [148]:

$$\frac{iW}{l} = M, \quad (3.4)$$

где W – число витков в обмотке соленоида; l – длина соленоида, равная длине магнита, м.

В общем случае намагниченность M материала магнетика сильно зависит от напряженности поля размагничивания H_p . Однако для магнитных закритических материалов, используя зависимость $M(H)$ (3.2) – (3.3), получим зависимость

$$M(H) = \frac{B_r}{\mu_0 H_{cb}} (H_{cb} + H) - H, \quad (3.5)$$

описывающую слабую связь M от H . В частности, для Nd-Fe-B – материала при изменении H от $H = 0$ ($M(0) = M_r$) до $H = -H_{cb}$ относительное различие $M(H)$ невелико

$$\frac{M(H_{cb})}{M_r} = \frac{\mu_0 H_{cb}}{B_r} < 1.5,$$

и соответствует реальным характеристикам [148].

По этой причине значение остаточной намагниченности близко к M_r и определяется пересечением характеристики размагничивания материала с характеристикой формы, и практически не зависит от формы материала. Однако, тело магнита произвольной формы, за исключением сфероидальной, намагничивается неравномерно [121]. Но, в силу слабой зависимости M от поля размагничивания ($H = -H_p$), для магнитов из закритических материалов этой неоднородностью можно пренебречь, и для расчетов использовать приближенное значение $M \approx M_r$, А/м.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Пусть постоянный магнит цилиндрической формы, имеющий длину l и диаметр $2a_0$, расположен в однородной немагнитной среде. Для $\forall H \in [-H_{CB}, 0]$ (H_{CB} – коэрцитивная сила материала магнита) в приближении равномерного распределения остаточной намагниченности M_r в магните распределение магнитного потенциала $\varphi_M(z, r)$ вне тела магнита выражается через определенные интегралы (3.19) и (3.20), зависящие от параметров: от радиальной – r и аксиальной – z координат.

Доказательство. Воспользуемся классическим решением [121, 184] для скалярного магнитного потенциала φ_M , создаваемого одиночным контуром с током i , в котором φ_M выражается через телесный угол Ω (sr – стерадиан), под которым виден этот контур:

$$\varphi_M = \frac{i}{4\pi} \Omega + C, \quad (3.6)$$

где C – постоянная величина, так как потенциал определен с точностью до постоянной величины.

Представив магнит в виде эквивалентного соленоида, предварительно разбив его на элементарные контуры и выделив некоторый элементарный контур с элементарным током, получим

$$di = \frac{iW}{l} dz' = M_r dz'. \quad (3.7)$$

Запишем на основе (3.6) формулу потенциала элементарного контура:

$$d\varphi_M = \frac{1}{4\pi} M_r dz' \Omega. \quad (3.8)$$

Сначала определим телесный угол, под которым виден элементарный контур из точки P , совмещенной с началом координат (рисунок 3.2, *a*), предварительно разбив его на элементарные телесные углы $d\Omega$, под которыми видны элементы площади dS_K контура. В полярной системе координат

$$dS_K = r' d\psi dr'. \quad (3.9)$$

Каждый элементарный телесный угол определяется формулой [176]

$$d\Omega = \frac{dS_{\text{сф}}}{R^2}, \quad (3.10)$$

где $dS_{\text{сф}}$ – площадь элемента сферы радиуса R , м^2 . Из рисунка 3.2, б следует, что

$$dS_{\text{сф}} = dS_{\text{К}} \cos\theta; \quad R = (z'^2 + r'^2)^{1/2}; \quad \cos\theta = z'/R. \quad (3.11)$$

Подставив (3.11) в (3.10) и далее в (3.9), получим

$$d\Omega = \frac{z' r' dr' d\psi \tilde{N}}{(z'^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.12)$$

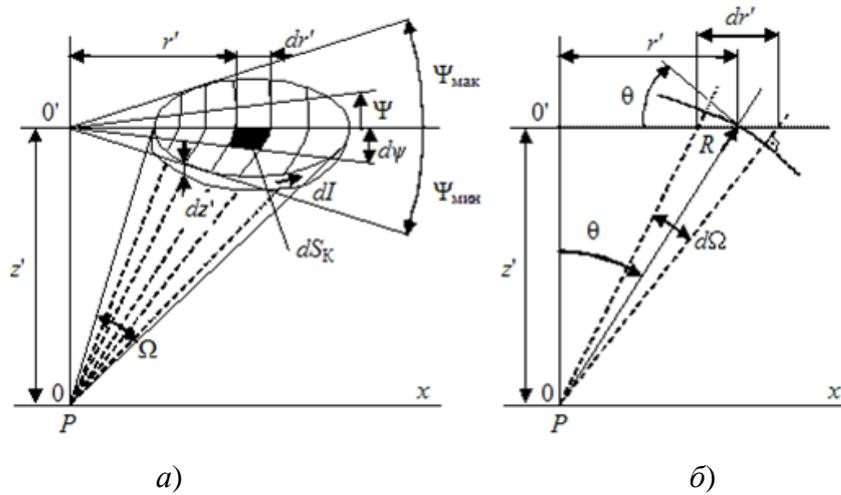


Рисунок 3.2 – К расчету телесного угла: а – под которым виден контур с элементом тока dI ; б – под которым виден элемент площади $dS_{\text{К}}$ контура

Полный телесный угол выражается двукратным интегралом

$$\Omega = \iint_{S_{\text{К}}} \frac{z' r' dr' d\psi}{(z'^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.13)$$

Вычисление интеграла (3.13) проведем по методике [176]. На рисунке 3.3 представлены границы областей интегрирования телесного угла для двух случаев: когда проекция $0'$ начала координат 0 на плоскость контура лежит или вне контура ($r \geq a_0$), или внутри контура ($r \leq a_0$).

Когда $r \geq a_0$ (рисунок 3.3, а),

$$\Omega = z' \int_{\Psi_{\text{мин}}}^{\Psi_{\text{мак}}} d\psi \int_{r_{\text{H}}}^{r_{\text{В}}} \frac{r' dr'}{(z'^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = z' \int_0^{\Psi_{\text{мак}}} \left[\frac{1}{\sqrt{z'^2 + r_{\text{H}}^2}} - \frac{1}{\sqrt{z'^2 + r_{\text{В}}^2}} \right] d\psi. \quad (3.14)$$

Когда $r \leq a_0$ (рисунок 3.3, б),

$$\Omega = z' \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{r_B} \frac{r' dr'}{(z'^2 + r'^2)^{1.5}} = 2\pi - 2z' \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{z'^2 + r_B'^2}} \right) \quad (3.15)$$

В (3.14), (3.15) $r_H = r_H(\Psi)$ и $r_B = r_B(\Psi)$ – радиус-векторы точек входа внутрь контура и выхода из контура луча $\psi = \text{const}$. Эти радиус-векторы определяются из уравнения окружности в полярных координатах

$$r'^2 - 2r r' \cos\Psi + r^2 - a_0^2 = 0,$$

из которого следует:

$$r_B = r \cos\Psi + (a_0^2 - r^2 \sin^2\Psi)^{1/2}, \quad r_H = r \cos\Psi - (a_0^2 - r^2 \sin^2\Psi)^{1/2}; \quad (3.16)$$

$$\sin\Psi_{\text{макс}} = a_0/r. \quad (3.17)$$

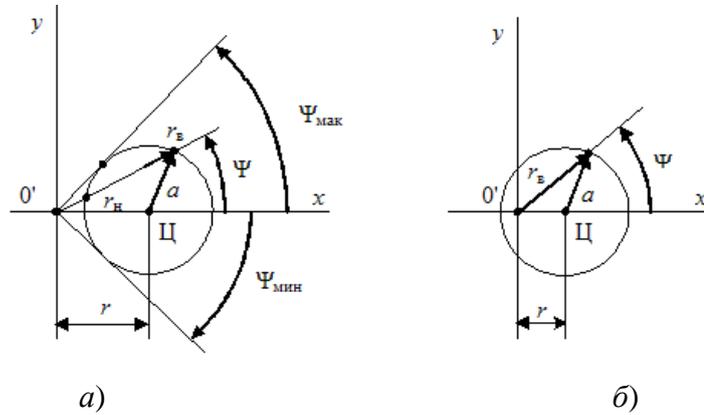


Рисунок 3.3 – К расчету границ областей интегрирования телесного угла:
 а – для случая, когда проекция O' точки наблюдения P на плоскость контура лежит вне контура; б – для случая, когда проекция O' точки наблюдения P на плоскость контура лежит внутри контура

Магнитный потенциал эквивалентного соленоида длиной l в точке P с координатами z и $r=0$ (рисунок 3.4) складывается из потенциалов (3.8) элементарных контуров:

$$\Phi_M = \int_{z_1}^{l+z_1} d\Phi_M + C = \frac{M_r}{4\pi} \int_{z_1}^{l+z_1} \Omega(z' - z) dz' + C. \quad (3.18)$$

Когда $r \geq a_0$, подставив (3.14) в (3.18) и поменяв местами порядок интегрирования, получим

$$\Phi_M = \frac{M_r}{4\pi} \int_0^{\Psi_{\text{макс}}} d\Psi \int_{z_1}^{l+z_1} \left[\frac{z' - z}{\sqrt{z'^2 + r_H^2}} - \frac{z' - z}{\sqrt{z'^2 + r_B^2}} \right] dz' + C =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M_r}{4\pi} \int_0^{\Psi_{\max}} \left[\sqrt{(l+z_1-z)^2 + r_{\text{H}}^2} - \sqrt{(l+z_1-z)^2 + r_{\text{B}}^2} + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(z_1-z)^2 + r_{\text{B}}^2} - \sqrt{(z_1-z)^2 + r_{\text{H}}^2} \right] d\Psi + C. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Здесь z_1 – координата нижней торцевой поверхности магнита, C – постоянная величина.

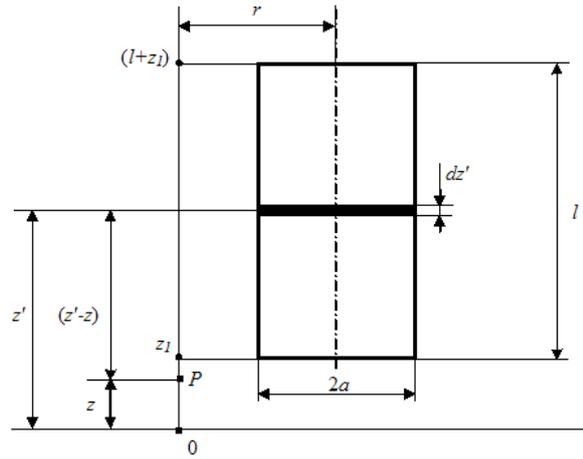


Рисунок 3.4 – К расчету скалярного магнитного потенциала эквивалентного соленоида в точке P

Когда $r \leq a_0$, подставляя (3.15) в (3.18) и поменяв местами порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
\Phi_M &= \frac{M_r l}{2} - \frac{M_r}{2\pi} \int_0^{\pi} d\Psi \int_{z_1}^{l+z_1} \left[\frac{z'-z}{\sqrt{z'^2 + r_{\text{B}}^2}} \right] dz' + C = \\
&= \frac{M_r l}{2} - \frac{M_r}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\sqrt{(l+z_1-z)^2 + r_{\text{B}}^2} - \sqrt{(z_1-z)^2 + r_{\text{B}}^2} \right] d\Psi + C. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Составляющие напряженности магнитного поля определяются из (3.18)-(3.19) следующим образом:

$$H_z = - \frac{\partial \Phi_M(r, z)}{\partial z}; \quad H_r = - \frac{\partial \Phi_M(r, z)}{\partial r}. \quad (3.21)$$

Осевую напряженность магнитного поля соленоида находим на основе выражения (3.21):

$$H_z = - \frac{\partial \Phi_M(r=0)}{\partial z} = - \frac{M_r}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{l+z_1-z}{\sqrt{(l+z_1-z)^2 + r_{\text{B}}^2}} - \frac{z_1-z}{\sqrt{(z_1-z)^2 + r_{\text{B}}^2}} \right] d\Psi =$$

$$= -\frac{M_r}{2} \left[\frac{l + z_1 - z}{\sqrt{(l + z_1 - z)^2 + a_0^2}} - \frac{z_1 - z}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + a_0^2}} \right]. \quad (3.22)$$

Поместив начало координат в середину соленоида ($z_1 = -l/2$) и подставив (3.4) в (3.22), приходим к классической формуле напряженности осевого магнитного поля [7, 148] катушки:

$$|H_z| = \frac{iW}{2l} \left[\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{(\frac{l}{2} - z)^2 + a_0^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{(\frac{l}{2} + z)^2 + a_0^2}} \right].$$

Таким образом, согласование полученных выражений (3.19) – (3.21), в основу которых заложен традиционный метод эквивалентного соленоида, с частной классической моделью поля соленоида свидетельствует о правомерности использованных методологических подходов и математических преобразований.

Семейство зависимостей для соленоида, характеризующее распределение магнитного потенциала в аксиальном направлении по выражениям (3.19) – (3.20) на разных расстояниях r_k от оси симметрии вычисляем по следующему алгоритму:

1. Задание исходных данных.
2. Расчет интегралов (3.19) – (3.20) методом Симпсона.
3. Построение семейства зависимостей $\varphi_M(z, r_k)$, где $k = 1, 2, \dots, n_1$; n_1 – число фиксированных значений координат r .
4. Построение семейства зависимостей $\varphi_M(z_k, r)$, где $k = 1, 2, \dots, n_2$; n_2 – число фиксированных значений координат z .
5. Расчет компонент напряженности магнитного поля по зависимостям (3.21), (3.19) - (3.20).
6. Сглаживание потенциала в окрестностях особенных точек ($r = a_0$) и определение допустимой радиальной координаты $r_{мин} > a_0$.
7. Построение семейства зависимостей $H_z(z, r_k)$, где $k = 1, 2, \dots, n_1$, n_1 – число фиксированных значений координат $r \geq r_{мин}$.
8. Построение семейства зависимостей $H_r(z_k, r)$, где $k = 1, 2, \dots, n_2$, n_2 – число фиксированных значений координат z , при $r \geq r_{мин}$.

Для соленоида с геометрическими размерами $a_0 = l = 10$ м результаты моделирования скалярного магнитного потенциала представлено на рисунке 3.5 при постоянной $C = 0$.

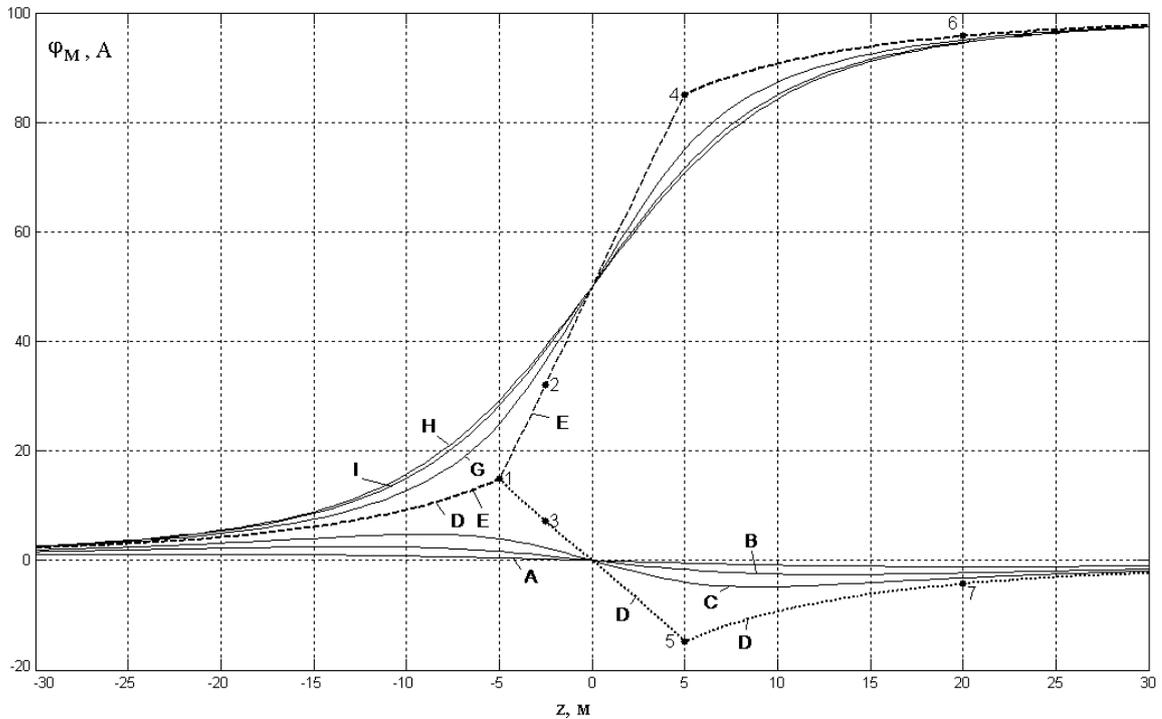


Рисунок 3.5 – Семейство зависимостей распределения скалярного магнитного потенциала эквивалентного соленоида цилиндрической формы ($a_0 = l = 10$ м) при: $A - r = 3a_0$; $B - r = 2a_0$; $C - r = 3a_0/2$; $D - r = a_{0+}$; $E - r = a_{0-}$; $G - r = 2a_0/3$; $I - r = a_0/3$; $H) r = 0$

На графике пунктирные линии соответствуют двум распределениям магнитного потенциала на поверхности соленоида ($r = a_0$). В частности, зависимости 124 соответствует пути интегрирования, примыкающему к поверхности внутри соленоида; зависимости 135 – примыкающему к поверхности вне соленоида. Различие этих двух зависимостей обусловлено тем, что путь интегрирования 124 пересекает контур с током величиной $M_r(z+l/2)$, что приводит к отличию потенциалов в каждой текущей точке на величину частичной МДС $F(z) = M_r(z+l/2)$. За пределами обмотки (в точках $z \geq 10$) рассматриваемые зависимости описываются соответствующими участками 46 и 57, потенциалы, в каждой точке которых отстоят друг от друга на одинаковую величину, равную полной МДС соленоида $F = M_r l$. Важно отметить, что существует равнопотенциальная плоскость, проходящая через срединное сечение магнита, на которой вне тела магнита значения магнитно-

го потенциала нулевое. Такой характер распределения магнитного потенциала будем принимать во внимание при разработке магнитной схемы замещения постоянного магнита.

Расчет скалярного магнитного потенциала кольцевого магнита можно провести также по выражениям (3.19), (3.20). Только в этом случае следует использовать принцип наложения для определения результирующего поля двух эквивалентных соленоидов с равными, но с противоположно направленными токами [148].

Таким образом, получена математическая модель скалярного магнитного потенциала цилиндрического магнита, состоящая из выражений (3.19) – (3.20), описывающих распределение потенциала в произвольной точке внешней области магнита. При этом расчет в общем случае сводится к задаче интегрирования по одной переменной и не представляет серьезных трудностей.

Модель (3.19), (3.20) содержит в явной форме параметры постоянного магнита, что удобно для анализа поля и может быть положена в основу анализа внешнего поля магнитов в однородной среде.

3.2.3. Математическое моделирование поля постоянного магнита в произвольной магнитной среде

Изменение магнитного состояния магнита при изменении магнитных характеристик среды можно описать магнитной цепью, в которой магнит представляется эквивалентной активной магнитной схемой (так называемый «эквивалентный магнитный генератор» с МДС $F_{mэ}$, А; а также внутренним магнитным сопротивлением $R_{mэ}$, Гн⁻¹), а среда замещается последовательно соединенным результирующим магнитным сопротивлением R , Гн⁻¹. Если среду представить в виде распределенной пассивной магнитной цепи (объемной сетки магнитных сопротивлений элементарных объемов), тогда такая модель полезна для определения характеристик распределения поля в *неоднородной магнитной среде*.

Традиционно параметры магнитной схемы замещения постоянных магнитов определяли по характеристикам размагничивания их материалов (см. рисунок 3.1)

[148]. Такая процедура рассматривалась как грубое приближение, так как не учитывался магнитный поток рассеивания через боковую поверхность магнитов.

Для решения проблемы учета потока рассеяния, приводящего к неоднородному распределению поля в теле магнита, ниже представлен метод моделирования магнита *распределенной активной* магнитной цепью. Этот метод принципиально отличается от представленного в статье [47] метода, основанного на *распределенной пассивной* магнитной цепи.

В основе нового метода моделирования магнита положим прием, использованный в пункте 3.2.2 при полевом подходе, представление магнита эквивалентным соленоидом.

Дано: соответственно уравнения непрерывности магнитного потока и полного тока по замкнутому пути, охватывающему обмотку однослойного соленоида:

$$\oint_{S_0} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0; \quad \int_{L_2} H_2 dl + \int_{L_1} H_{1c} dl = \int_0^l M dz, \quad (3.23)$$

где S_0 – замкнутая поверхность, m^2 ; L_1 – участок пути интегрирования, расположенного внутри соленоида, L_2 – участок пути интегрирования, расположенного вне соленоида. В левой части (3.23): H_2 – напряженность магнитного поля соленоида (или магнита) вне соленоида (или вне магнита), А/м; $H_{1c} = B_l/\mu_0$ – напряженность поля внутри соленоида, А/м; H_1 – напряженность поля внутри магнита, А/м; B_l – индукция внутри соленоида или магнита, Тл. В правой части (3.23): l – длина ПМ, м; M – намагниченность, являющаяся функцией напряженности поля в магните, А/м.

Утверждение 3.2. Пусть постоянный магнит цилиндрической формы имеет длину l и диаметр $2a_0$. Для $\forall H \in [-H_{CB}, 0]$ (H_{CB} – коэрцитивная сила материала магнита) в приближении равномерного распределения остаточной намагниченности M_r в магните распределение магнитного потока в теле магнита и падения магнитных напряжений на поверхности магнита выражаются системой двух дифференциальных уравнений первого порядка (3.29) и (3.34) с постоянными коэффициентами, зависящими от параметров материала магнита и внешней среды.

Направим систему координат $0-z$ вдоль оси симметрии соленоида, начало

которой поместим в его нейтральном сечении. При переходе к величинам, характеризующим магнитное состояние магнитной цепи, усредним внутреннее поле соленоида в каждом нормальном сечении z :

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{S} \int B_1(r, z) dS; \quad \bar{M} = \frac{1}{S} \int M(r, z) dS, \quad (3.24)$$

где S – площадь поперечного сечения соленоида (магнита), m^2 , r – радиальная координата, м.

Аксиальный магнитный поток в сечении z определяется равенством $\Phi(z) = \bar{B}_1 S$ и описывается уравнением непрерывности

$$\Phi(z) = \Phi(0) - \Phi_S(z),$$

где $\Phi(0)$ – магнитный поток в нейтральном сечении соленоида, Вб; $\Phi_S(z)$ – поток рассеяния через часть боковой поверхности соленоида, расположенной между нейтральным сечением и сечением в точке z на рисунке 3.6, Вб.

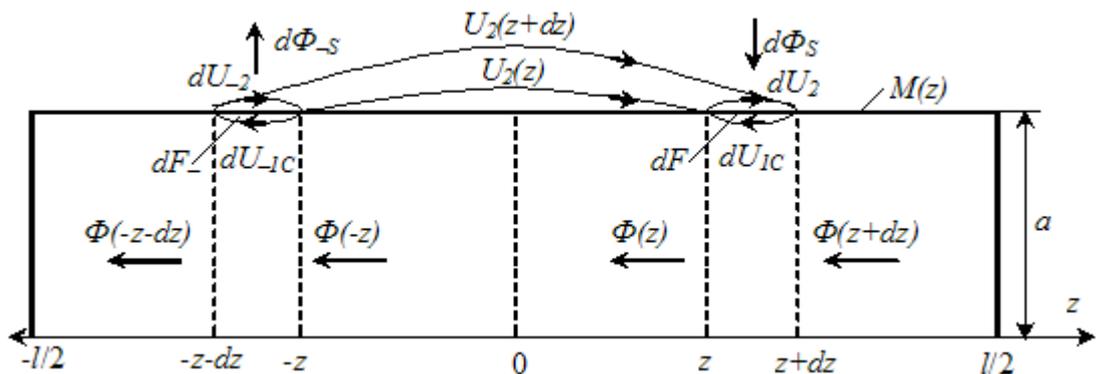


Рисунок 3.6 – Структура распределения магнитных напряжений по поверхностям обмоток элементарных соленоидов и между ними

Для перехода к распределенной магнитной цепи выберем два зеркально расположенных элементарных соленоида длиной dz , отстоящих на одинаковое расстояние z от начала координат в обе стороны (рисунок 3.6). Составим уравнения полных токов для каждого элементарного соленоида по таким замкнутым путям, охватывающим элементарные обмотки, которые прилегают к бесконечно тонким поверхностям этих обмоток:

$$dU_{-2} + dU_{-1c} = dF_{-}; \quad dU_2 + dU_{1c} = dF, \quad (3.25)$$

где dU_{-2} , dU_2 – падения магнитных напряжений по путям, прилегающим к наружной поверхности обмотки соленоида, соответственно для левого и правого

элементов, А; dU_{-IC} , dU_{IC} – падения магнитных напряжений по путям, прилегающим к внутренней поверхности обмотки соленоида, соответственно для левого и правого элементов, А; dF_{-} , dF – МДС элементарных соленоидов, А.

Учитывая симметрию расположения элементарных соленоидов, полагаем правомерность следующих равенств:

$$dU_{-IC} = dU_{IC} = \frac{\bar{B}_1 dz}{\mu_0} = r_0 dz \Phi(z); \quad dF_{-} = dF = \bar{M} dz, \quad (3.26)$$

где $r_0 = l/\mu_0 S$ – распределенное (приходящееся на единицу длины) магнитное сопротивление внутреннего пространства соленоида, $(\text{Гн}\cdot\text{м})^{-1}$.

Добавим для каждого элементарного соленоида уравнения непрерывности магнитных потоков, направления которых соответствуют рисунку 3.6:

$$\Phi(-z-dz) = \Phi(-z) - d\Phi_S(-z); \quad \Phi(z+dz) = \Phi(z) - d\Phi_S(z), \quad (3.27)$$

где $d\Phi_S(z)$ – приращение потока рассеяния через боковую поверхность элементарного соленоида, Вб.

При этом между каждыми двумя зеркально расположенными элементарными участками поверхности соленоида существует баланс между приращениями потоков рассеяния. В силу симметрии магнита выходящий с левой стороны элементарный поток $d\Phi_S(z)$ равен входящему с правой стороны элементарному потоку $d\Phi_S(-z)$ (см. рисунок 3.6). Этот элементарный поток рассеяния выразим по закону Ома:

$$d\Phi_S(z) = d\Phi_S(-z) = dG_S U_2(z), \quad (3.28)$$

где $dG_S = g_S dz$ и g_S – соответственно элементарная магнитная проводимость и распределенная магнитная проводимость пространства, Гн и Гн/м, по которому замыкается магнитный поток $d\Phi_S(z)$, Вб; $U_2(z) = 2\varphi_2(z)$ – разность магнитных потенциалов между двумя зеркально расположенными элементарными участками внешней поверхности соленоида, где $\varphi_2(z)$ – магнитный потенциал на внешней поверхности соленоида (магнита) на расстоянии z от нейтрального сечения, в котором $\varphi_2(z=0) = 0$, А.

Подставив в (3.27) выражение (3.28) и учтя следующие выражения для дифференциалов магнитного потока:

$$\Phi(-z-dz) - \Phi(-z) \cong \frac{d\Phi}{dz} dz; \quad \Phi(z+dz) - \Phi(z) \cong \frac{d\Phi}{dz} dz,$$

получим первое уравнение для описания распределенной магнитной цепи эквивалентного соленоида

$$\frac{d\Phi}{dz} = -g_s U_2. \quad (3.29)$$

В соответствии с рисунком 3.6 разность магнитных напряжений между точками $-z - dz$ и $z + dz$ и соответственно между точками $-z$ и z описывается равенством:

$$U_2(z+dz) - U_2(z) = dU_{-2} + dU_2. \quad (3.30)$$

Выразив приращения магнитных напряжений следующим образом $[U_2(z+dz) - U_2(z)] \cong \frac{dU_2}{dz} dz$, приведем (3.30) к виду

$$\frac{dU_2}{dz} dz = dU_{-2} + dU_2. \quad (3.31)$$

Подставив dU_{-2} и dU_2 из (3.25) в (3.31), с учетом (3.26), получим второе уравнение для описания активной распределенной магнитной цепи эквивалентного соленоида:

$$\frac{dU_2}{dz} = 2\bar{M} - 2r_0\Phi. \quad (3.32)$$

Значение M на каждом элементарном участке магнита является функцией от напряженности магнитного поля H в теле магнита. Выразим эту зависимость через магнитную индукцию B . Для этого приведем характеристику размагничивания материала (3.1) к виду $H = (\frac{B}{B_r} - 1)H_{cB}$ и подставим её в (3.2). В результате получим

$$M(B) = \frac{B}{\mu_0} - \frac{BH_{cB}}{B_r} + H_{cB}. \quad (3.33)$$

После подстановки (3.33) в (3.32), с учётом первого уравнения (3.26), получим линейное уравнение для описания активной распределенной магнитной цепи эквивалентного соленоида:

$$\frac{dU_2}{dz} = 2(H_{cB} - r_M\Phi), \quad (3.34)$$

где $r_M = H_{cB}/B_r S$, – распределенное магнитное сопротивление постоянного магнита, $(\text{Гн}\cdot\text{м})^{-1}$.

Система уравнений (3.29) и (3.34) устанавливает связь между величинами, характеризующими магнитное состояние магнита: между падением магнитного напряжения на внешней поверхности соленоида $U_2(z)$, совпадающего с падением напряжения на поверхности магнита, и магнитным потоком $\Phi(z)$. При этом данной системе уравнений и схеме распределения напряжений по рисунку 3.6 соответствует магнитная схема замещения элементарного звена (рисунок 3.7, а) короткозамкнутой распределенной магнитной цепи (рисунок 3.7, б). Магнитное состояние на выходе распределенной линии ($z = l/2$) соответствует магнитному состоянию на полюсах магнита, поэтому к выходным зажимам цепи присоединено неотъемлемое магнитное сопротивление внешней среды R , через которое замыкается магнитный поток постоянного магнита.

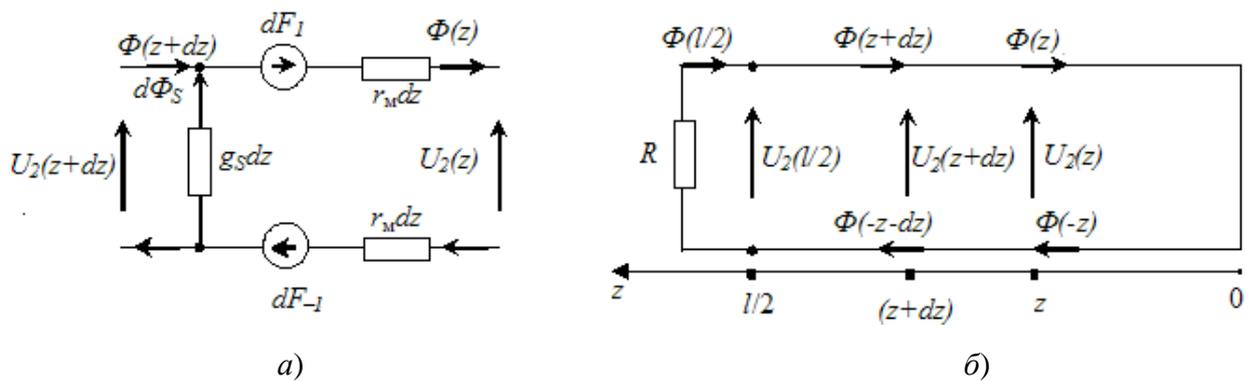


Рисунок 3.7– Распределенные активные магнитные схемы замещения: а – элементарного звена магнита, где $dF_1 = dF_{-1} = H_{св} dz$; б – магнита в целом в виде короткозамкнутой длинной линии

В статье [47], исходя из условия линейности магнитного потенциала на поверхности магнита, определена математическая модель распределенной магнитной проводимости по воздуху g_l , которую мы обозначим g_{s0} , Гн·м. Эта проводимость не зависит от магнитного режима и однородна. В сепараторах каждый магнит окружен сложной средой в виде «слоеного пирога» с различными магнитными проницаемостями, поэтому используем следующую математическую модель распределенной магнитной проводимости:

$$g_s = g_{s0} \mu_{\text{эф}}, \quad (3.35)$$

где $\mu_{\text{эф}}$ – эффективная относительная магнитная проницаемость внешней многослойной среды.

Таким образом, система линейных уравнений (3.29) и (3.34) с постоянными коэффициентами приводится к одному неоднородному обыкновенному уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \gamma^2\Phi = -2g_s H_{cb}, \quad (3.36)$$

где $\gamma = \sqrt{2r_M g_s}$ – коэффициент передачи, m^{-1} .

Используем граничные условия при $z = 0$: $U_2(0) = 0$, $\Phi(z=0) = \Phi(0)$. Тогда решения (3.36) и (3.29) в точке $z = l/2$ (на выходе распределенной магнитной цепи) примут соответственно следующий вид:

$$\Phi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{H_{cb}}{r_M} + \left[\Phi(0) - \frac{H_{cb}}{r_M} \right] ch \frac{\gamma l}{2}, \quad (3.37)$$

$$U_2\left(\frac{l}{2}\right) = \sqrt{\frac{2r_M}{g_s}} \left[\Phi(0) - \frac{H_{cb}}{r_M} \right] sh \frac{\gamma l}{2}. \quad (3.38)$$

Зависимости (3.37), (3.38) выражают магнитное состояние постоянного магнита цилиндрической формы между его полюсами с учетом потока рассеяния через боковую поверхность магнита. При изменении магнитного потока в нейтральном сечении $\Phi(0)$, система уравнений (3.37), (3.38) будет описывать вебер-амперную характеристику магнита. Так как внешняя среда моделируется магнитным сопротивлением R , через которое проходит магнитный поток (3.37) вследствие приложения напряжения (3.38) (рисунок 3.7, б), то по уравнению

$$\sqrt{\frac{2r_M}{g_s}} \left[\Phi_p(0) - \frac{H_{cb}}{r_M} \right] sh \frac{\gamma l}{2} = R \left\{ \frac{H_{cb}}{r_M} + \left[\Phi_p(0) - \frac{H_{cb}}{r_M} \right] ch \frac{\gamma l}{2} \right\},$$

выражающему закон Ома, можно вычислить рабочий магнитный поток $\Phi_p(0)$ в нейтральном сечении магнита.

Применив к линейной распределенной цепи метод эквивалентного генератора (ЭГ) [151], получим двухэлементную схему замещения магнита (рисунок 3.8) с параметрами: $F_{mэ}$ – МДС генератора, А; $R_{mэ}$ – внутреннее магнитное сопротивление, $Gн^{-1}$.

Параметры ЭГ определим традиционным способом – вычислением на выходных зажимах распределенной цепи напряжения холостого хода $U_{2X}\left(\frac{l}{2}\right)$ и магнитного потока короткого замыкания $\Phi_K\left(\frac{l}{2}\right)$. Из (3.37) следует, что режим холо-

стого хода возникает при выполнении условия $\Phi_X(0) = H_{cB}(1 - (ch \frac{\gamma l}{2})^{-1}) / r_M$, которое, после подстановки в (3.39), дает

$$U_{2X}(\frac{l}{2}) = -\frac{2H_{cB}}{\gamma} th \frac{\gamma l}{2}. \quad (3.39)$$

Знак « \leftarrow » указывает на то, что верхний вывод распределенной схемы на рисунке 3.7, б соответствует южному магнитному полюсу.

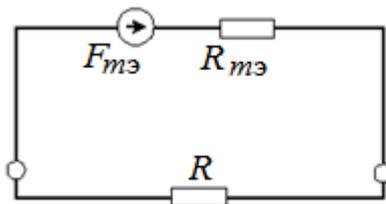


Рисунок 3.8 – Магнитная схема замещения постоянного магнита

Величина МДС определяется выражением

$$F_{mэ} = \frac{2H_{cB}}{\gamma} th \frac{\gamma l}{2}. \quad (3.40)$$

Из (3.38) следует, что режим короткого замыкания возникает при выполнении условия $\Phi_K(0) - H_{cB} / r_M = 0$, которое после подставки в (3.37) дает $\Phi_K(\frac{l}{2}) = H_{cB} / r_M$. Внутреннее магнитное сопротивление генератора

$$R_{mэ} = \frac{U_{2X}(\frac{l}{2})}{\Phi_K(\frac{l}{2})} = \frac{2r_M}{\gamma} th \frac{\gamma l}{2}. \quad (3.41)$$

При отсутствии потока рассеяния через боковую поверхность следует положить $g_S = 0$, тогда (3.40) и (3.41) приводят к традиционным идеализированным выражениям $F_{mэ} = F = H_{cB}l$ и $R_{mэ} = R_m = r_M l$ параметров схемы замещения магнита. В этом случае внешняя вебер-амперная характеристика идеализированного постоянного магнита будет соответствовать характеристике размагничивания ферромагнитного материала (3.1).

Следствие 3.2.1. Постоянный магнит цилиндрической формы, находящийся в произвольной среде, характеризуется одномерной распределенной активной магнитной схемой замещения (короткозамкнутой на одном конце длинной линии-

ей, рисунок 3.7).

Следствие 3.2.2. Постоянный магнит цилиндрической формы, находящийся в произвольной среде, характеризуется магнитной схемой замещения с сосредоточенными параметрами традиционной структуры, но с новыми математическими моделями (3.40), (3.41) параметров схемы (рисунок 3.8).

Если магнит находится в равномерном внешнем магнитном поле с напряженностью H_0 , то из уравнения размагничивания материала (3.5) следует зависимость

$$M(B) = \frac{B}{\mu_0} - \frac{BH_{св}}{B_r} + (H_{св} \pm H_0). \quad (3.42)$$

Сопоставляя (3.42) с (3.33) приходим к выводу, что в зависимостях (3.34), (3.36), (3.40) следует заменить $H_{св}$ на $(H_{св} \pm H_0)$; тогда

$$F_{\pm} = \frac{2(H_{св} \pm H_0)}{\gamma} th \frac{\gamma l}{2}, \quad (3.43)$$

где знак « \pm », если H_0 размагничивающее поле, знак «+», если H_0 намагничивающее поле, А.

В зависимости (3.40), (3.41) входят справочные параметры материалов и постоянных магнитов.

Схема замещения постоянного магнита (рисунок 3.7) обеспечивает возможность составить магнитную цепь системы постоянных магнитов, входящих в сепаратор. Анализ магнитной цепи системы постоянных магнитов возможно проводить только численным методом.

По схеме, показанной на рисунке 3.8, сопротивление внешней среды R можно определить по закону Ома для участка магнитной цепи: $R = \bar{U}_{мс} / \bar{\Phi}_{гр}$, Гн⁻¹. Здесь: $\bar{U}_{мс}$ – усредненное по поперечному сечению полюса магнита падение магнитного напряжения, А; $\bar{\Phi}_{гр}$ – усредненное значение магнитного потока, выходящего из полюса магнита, Вб:

$$\bar{U}_{мс} = \frac{2}{S} \int_S (\varphi_{MN}) ds; \quad \bar{\Phi}_{гр} = \int_S \mu_0 H_{гр} ds.$$

В соответствии с рисунком 3.5 $\bar{U}_{мс}$ определяется следующим образом:

$$\bar{U}_{мс} = 2 \langle \varphi_{MN} - \varphi_M(-\infty) \rangle = 2 \bar{\varphi}_{MN},$$

где Φ_{MN} – магнитный потенциал в произвольной точке поверхности северного полюса магнита, $\Phi_M(-\infty)$ – магнитный потенциал на бесконечности.

Для цилиндрических магнитов магнитное сопротивление немагнитной среды можно определить по выражениям (3.20), (3.22). В частности, если использовать приближение равномерного распределения поля по поперечному сечению, то его характеристики можно оценить по осевым значениям:

$$\Phi_{гр} = \frac{\mu_0 M_r l S}{2 \sqrt{l^2 + a_0^2}}; \quad \Phi_{MN} = 0.5 M_r \left[l - \left(\sqrt{l^2 + a_0^2} - a_0 \right) \right].$$

При этом приближенная формула магнитного сопротивления внешней немагнитной среды относительно полюсов магнита принимает вид

$$R \cong \frac{2 \sqrt{l^2 + a_0^2} \left(l + a_0 - \sqrt{l^2 + a_0^2} \right)}{\mu_0 l S}.$$

При синтезе эквивалентной магнитной схемы замещения кольцевого постоянного магнита добавляется пространство рассеяния магнитного потока через внутреннюю полость магнита (рисунок 3.9).

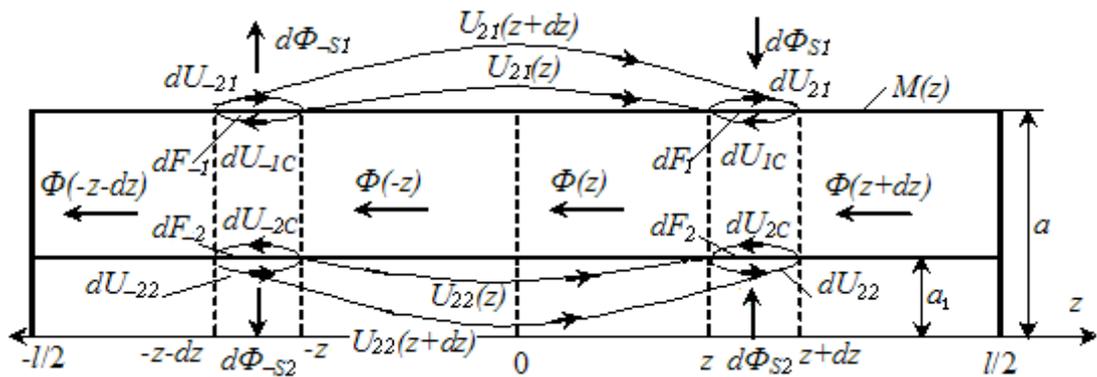


Рисунок 3.9 – Структура распределения магнитных напряжений по поверхностям обмоток элементарных соленоидов и между элементарными соленоидами

Аксиальный магнитный поток в сечении z определяется формулой $\Phi(z) = \bar{B}_1 S$ и соответствует уравнению непрерывности

$$\Phi(z) = \Phi(0) - \Phi_{S1}(z) - \Phi_{S2}(z),$$

где $\Phi(0) = -$ магнитный поток в нейтральном сечении соленоида, Вб; $\Phi_{S1}(z)$, $\Phi_{S2}(z)$ – потоки рассеяния соответственно через наружную и внутреннюю боковые поверхности магнита, расположенные между нейтральным сечением (сечением ну-

левого потенциала) и сечением в точке с координатой z ; S – площадь поперечного сечения магнита, м^2 .

Для перехода к распределенной магнитной цепи выбираем по паре зеркально расположенных элементарных соленоидов длиной dz , т.е. отстоящих на одинаковом расстоянии z от начала координат в обе стороны координатной оси (см. рисунок 3.9). Составим уравнения полных токов для каждого элементарного соленоида по таким замкнутым путям, охватывающим элементарные обмотки, которые прилегают к бесконечно тонким соответствующим поверхностям этих обмоток:

– на наружной поверхности

$$dU_{-21} + dU_{-1C} = dF_{-1}; \quad dU_{21} + dU_{1C} = dF_1, \quad (3.44)$$

– на внутренней поверхности

$$dU_{-22} + dU_{-2C} = dF_{-2}; \quad dU_{22} + dU_{2C} = dF_2, \quad (3.45)$$

где dU_{-21} , dU_{21} – падения магнитных напряжений по путям, прилегающим к наружной поверхности обмотки большего соленоида, соответственно для левого и правого элементов, А; dU_{-1C} , dU_{1C} – падения магнитных напряжений по путям, прилегающим к внутренней поверхности обмотки большего соленоида, соответственно для левого и правого элементов, А; dF_{-1} , dF_1 – МДС элементарных соленоидов составляющих большой соленоид, А. Далее: dU_{-22} , dU_{22} – падения магнитных напряжений по путям, прилегающим к внутренней поверхности обмотки меньшего соленоида, соответственно для левого и правого элементов, А; dU_{-2C} , dU_{2C} – падения магнитных напряжений по путям, прилегающим к наружной поверхности обмотки меньшего соленоида, соответственно для левого и правого элементов, А; dF_{-2} , dF_2 – МДС элементарных соленоидов составляющих меньший соленоид, А.

Учитывая симметрию расположения элементарных соленоидов, полагаем правомерность следующих равенств:

$$dU_{-1C} = dU_{1C} = \frac{\bar{B}_1 dz}{\mu_0} = r_0 dz \Phi(z); \quad dF_{-1} = dF_1 = \bar{M} dz, \quad (3.46)$$

$$dU_{-2C} = dU_{2C} = \frac{\bar{B}_1 dz}{\mu_0} = r_0 dz \Phi(z); \quad dF_{-2} = dF_2 = \bar{M} dz, \quad (3.47)$$

где $r_0 = l/\mu_0 S$ – распределенное магнитное сопротивление внутреннего пространства магнита, $(\text{Гн} \cdot \text{м})^{-1}$.

Добавим для каждого элементарного соленоида уравнения непрерывности магнитных потоков, направления которых соответствуют рисунку 3.9:

$$\Phi(-z-dz) = \Phi(-z) - d\Phi_{S1}(-z) - d\Phi_{S2}(-z), \quad \Phi(z+dz) = \Phi(z) - d\Phi_{S1}(z) - d\Phi_{S2}(z), \quad (3.48)$$

где $d\Phi_{S1}(z)$, $d\Phi_{S2}(z)$ – приращения потоков рассеяния соответственно через наружную и внутреннюю боковые поверхности элементарных магнитов, Вб.

При этом между каждыми двумя зеркально расположенными элементарными участками поверхности магнита существует равенство приращений потоков рассеяния, заключающееся в том, что в силу симметрии магнита выходящий с левой стороны элементарный поток $d\Phi_S(z)$ равен входящему с правой стороны элементарному потоку $d\Phi_S(-z)$. Поэтому каждый элементарный поток рассеяния можно выразить по закону Ома:

$$d\Phi_{S1}(z) = d\Phi_{S1}(-z) = dG_{S1}U_{21}(z); \quad d\Phi_{S2}(z) = d\Phi_{S2}(-z) = dG_{S2}U_{22}(z), \quad (3.49)$$

где $dG_{S1} = g_{S1}dz$ и g_{S1} – соответственно магнитная проводимость и распределенная магнитная проводимость наружного пространства, Гн и Гн/м, по которому замыкается магнитный поток $d\Phi_{S1}(z)$, Вб; $dG_{S2} = g_{S2}dz$ и g_{S2} – соответственно магнитная проводимость и распределенная магнитная проводимость внутренней полости магнита, Гн и Гн/м, по которому замыкается магнитный поток $d\Phi_{S2}(z)$, Вб.

Подставив в (3.48) выражения (3.49) и учитывая следующие выражения для дифференциалов магнитного потока

$$\Phi(-z-dz) - \Phi(-z) \cong \frac{d\Phi}{dz} dz, \quad \Phi(z+dz) - \Phi(z) \cong \frac{d\Phi}{dz} dz,$$

получим первое уравнение для описания распределенной магнитной цепи эквивалентного соленоида

$$\frac{d\Phi}{dz} = -g_{S1}U_{21} - g_{S2}U_{22}. \quad (3.50)$$

В соответствии с рисунком 3.9 разности магнитных напряжений между точ-

ками $-z-dz$ и $z+dz$ и соответственно между точками $-z$ и z равны

$$U_{21}(z+dz) - U_{21}(z) = dU_{-21} + dU_{21}; \quad U_{22}(z+dz) - U_{22}(z) = dU_{-22} + dU_{22}. \quad (3.51)$$

Выразив приращения магнитных напряжений следующим образом:

$[U_2(z+dz) - U_2(z)] \cong \frac{dU_2}{dz} dz$, приведем (3.51) к виду

$$\frac{dU_{21}}{dz} dz = dU_{-21} + dU_{21}; \quad \frac{dU_{22}}{dz} dz = dU_{-22} + dU_{22}. \quad (3.52)$$

Подставив в (3.52) dU_{-2} и dU_2 из (3.44) и (3.45), с учетом (3.46), (3.47), получим второе уравнение для описания активной распределенной магнитной цепи эквивалентного соленоида:

$$\frac{dU_{21}}{dz} = \frac{dU_{22}}{dz} = 2\langle M \rangle - 2r_0\Phi. \quad (3.53)$$

Заметим, что, в силу усреднения поля по каждому сечению по формулам (3.24), следует полагать, что и потенциалы во всех точках в пределах каждого сечения усредняются. Поэтому правомерно равенство $U_{21}(z) = U_{22}(z) = U_2(z)$. Тогда (3.50) и (3.53) принимают следующий вид:

$$\frac{d\Phi}{dz} = -(g_{S1} + g_{S2})U_2; \quad (3.54)$$

$$\frac{dU_2}{dz} = 2(H_{CB} - r_M\Phi). \quad (3.55)$$

Исходя из подобия выражений (3.54), (3.55) выражения (3.29) и (3.34), приходим к магнитной схеме замещения, показанной на рисунке 3.8, параметры которой определяются по зависимостям (3.40), (3.41). При этом следует иметь в виду, что результирующая проводимость через боковые поверхности примет вид

$$g_S = g_{S1} + g_{S2}, \quad (3.56)$$

где g_{S1} – распределенная магнитная проводимость через наружную поверхность магнита, g_{S2} – через внутреннюю поверхность магнита, Гн/м.

Синтезированная схема замещения будет использована нами в задаче математического моделирования распределения магнитного поля и магнитных сил, создаваемых магнитной системой в рабочей области сепаратора.

3.3. Математическое моделирование распределения магнитных сил в магнитном сепараторе

3.3.1. Цепная модель распределения поля в магнитных сепараторах

Сущность метода математического моделирования на основе теории цепей подразумевает эквивалентную замену физического пространства сепаратора совокупностью магнитных источников и магнитных проводимостей. Каждый магнитный источник выражается эквивалентной магнитной схемой замещения. Пассивную неоднородную среду сепаратора будем замещать совокупностью магнитных проводимостей (или сопротивлений) по методу сеток [38], для чего все рабочее пространство сепаратора разбивается на такие элементарные объемы, в пределах которых магнитный поток можно считать квазиоднородным.

В магнитных сепараторах используют в качестве источников поля сборки, состоящие из большого количества цилиндрических магнитов, расположенных в аксиальном направлении (рисунок 3.10).

На основе, разработанной в параграфе 3.2, математической модели (3.22) распределения магнитного поля в однородной среде оценим взаимное влияние звеньев на результирующее магнитное поле.

Так как при моделировании магниты замещали эквивалентным соленоидом, а тело магнита немагнитной средой, то условие однородности среды для сборки эквивалентных соленоидов не нарушится. Следовательно, для расчета можно использовать метод наложения полей.

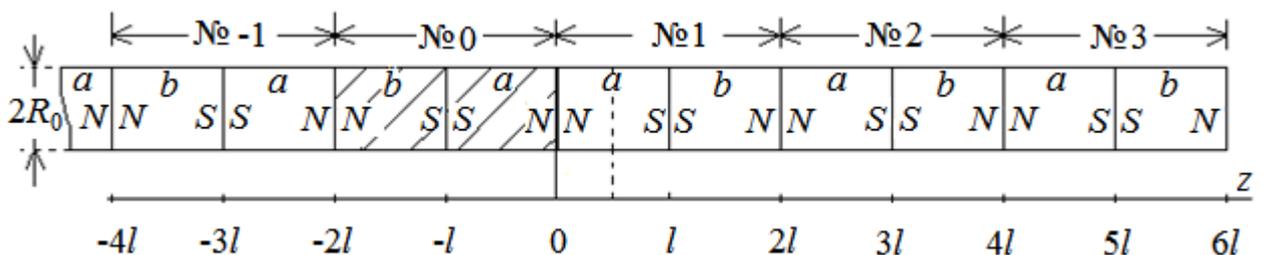


Рисунок 3.10 – Порядок размещения магнитов в продольной сборке магнитов (в патроне)

Для усиления градиента распределения поля в сепараторах, как правило,

магниты (обозначены a и b) в сборках располагают встречно относительно их полюсов. Напряженность магнитного поля H_z в точке $z = 0$, создаваемая каждым дискретным магнитом, в соответствии с порядком их расположения по рисунку 3.10 выражается следующим образом:

$$\frac{H_{ak}(0)}{H_m} = \left[\frac{(2k-1)l}{\sqrt{(2k-1)^2 l^2 + R_0^2}} - \frac{2(k-1)l}{\sqrt{4(k-1)^2 l^2 + R_0^2}} \right];$$

$$\frac{H_{bk}(0)}{H_m} = \left[\frac{2kl}{\sqrt{(2k)^2 l^2 + R_0^2}} - \frac{(2k-1)l}{\sqrt{(2k-1)^2 l^2 + R_0^2}} \right],$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ номер сдвоенного магнита; l – длина, м; R_0 – радиус магнита, м.

Результирующая напряженность, создаваемая магнитами типов a и b , определяется выражением

$$\frac{H_k(0)}{H_m} = \frac{H_{ak}(0) + H_{bk}(0)}{H_m} = \left[\frac{2kl}{\sqrt{(2k)^2 l^2 + R_0^2}} - \frac{2(k-1)l}{\sqrt{4(k-1)^2 l^2 + R_0^2}} \right].$$

Для $l = R_0$ влияние каждой пары магнитов №1 – 4 представлено в таблице 3.1.

Анализ влияний каждого звена на интенсивность поля показал, что только соседние звенья оказывают существенное влияние на данное звено (например, в точке $z = 0$ с правой стороны звенья № 1 и № 2). Суммарное влияние более удаленных звеньев не превышает 3% относительно влияния соседних звеньев. Поэтому для практических расчетов достаточно учесть только по два соседних звена с каждой стороны.

Таблица 3.1

Вклад звеньев из сдвоенных магнитов в создание магнитного поля

Номер звена: k	1	2	3	4
$H_k(0)/H_m$	0,894	0,076	0,016	0,006
$H_k(0)/H_1(0), \%$	100	8,5	1,8	0,7

Аналогичным образом, по выражению (3.22) определяем распределение поля вблизи границы сборки постоянных магнитов (таблица 3.2).

Таблица 3.2

Влияние краевого эффекта сборки постоянных магнитов

Номер магнита от границы сборки ν	1	2	3	4
$H_{\Sigma}(\nu)/H_{уст}$	0,5	1,2	1.015	1

Из таблицы 3.2 следует, что уже на третьем магните практически заканчивается действие краевого эффекта. Так как число магнитов в продольной сборке n_1 намного больше единицы, то для практических расчетов распределения поля в сепараторах можно не учитывать краевые эффекты.

Выделим в рабочем пространстве магнитного сепаратора минимальный функциональный объем, который представляет собой ячейку сепарации ВТЖ. Эта ячейка включает в себя звено источника поля – один или сдвоенный магнит, полюсные наконечники, участок немагнитной втулки (патрона) с образовавшимся на её поверхности слоем ферромагнитного шлама и окружающую среду с потоком ВТЖ.

При проектировании программы расчета предусматривается ввод трех эквивалентных схем источников (рисунок 3.11).

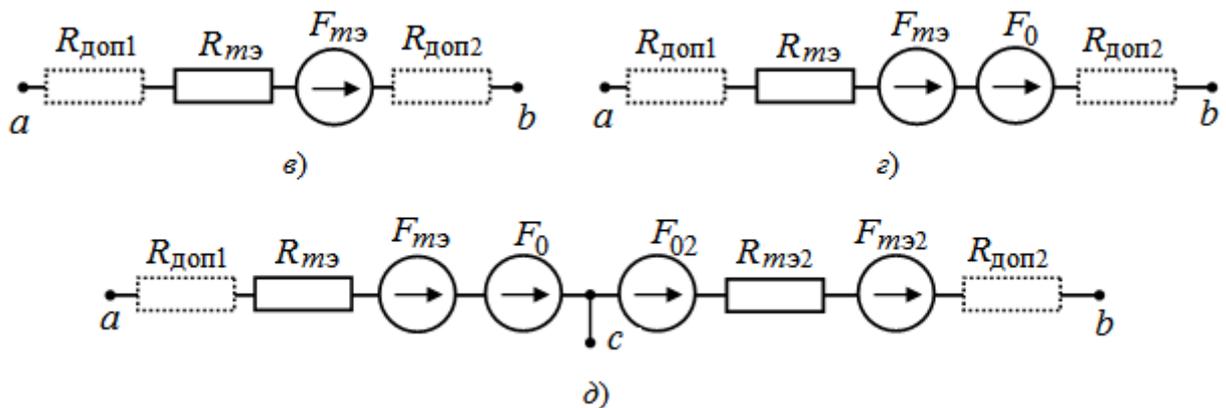


Рисунок 3.11 – Магнитные схемы замещения постоянных магнитов: *а* – одиночного магнита; *б* – одиночного магнита во внешнем поле; *в* – составной источник из двух магнитов

Каждая схема, согласно рисунку 3.8 и формул (3.40) и (3.41), представляет собой последовательное соединение магнитодвижущей силы (МДС) $F_{мэ}$ и внутреннего сопротивления $R_{мэ}$: *а* – двухполюсная схема без дополнительной МДС F_0 ; *б* – двухполюсная схема с дополнительной МДС F_0 ; *в* – трехполюсная схема,

моделирующая составной магнит. В этих моделях сопротивления $R_{\text{доп}}$ соответствуют наличию ($R_{\text{доп}} = 0$) или отсутствию ($R_{\text{доп}} \neq 0$) полюсных наконечников. Стрелки направлений МДС во всех схемах на рисунке 3.11 соответствуют условно положительным направлениям, принятым в программе. МДС с противоположными направлениями задают со знаком «-».

Поскольку поле цилиндрических постоянных магнитов обладает цилиндрической симметрией, то можно разбить физический объем ячейки сепарации на совокупность элементарных объемов цилиндрической формы (рисунок 3.12). При этом: $r_0 = R_0$ – наружный радиус магнита; r_1 – наружный радиус втулки магнита; r_2 – наружный радиус осадка шлама, налипшего на магниты; r_n – граничный радиус объема. В аксиальном направлении ячейки можно выделить семь характерных областей, которые различаются функциональными и магнитными свойствами: $l_1 = l_7$ – соответствует толщине перегородок между секциями магнитного сепаратора; $l_2 = l_6$ – соответствует высоте полюсных наконечников магнитов; l_3, l_4, l_5 – три слоя, на которые разделена аксиальная длина источника, где l_4 – слой стыковки магнитных полей составного магнита (рисунок 3.11, д). Для повышения точности расчетов предусмотрено в аксиальном направлении дополнительное разделение каждого характерного участка на кратные числа 2, 3, ..., 7 соответственно. При этом суммарное число слоев может составлять $\xi = 13, 19, 25, 31, 37$ и 43.

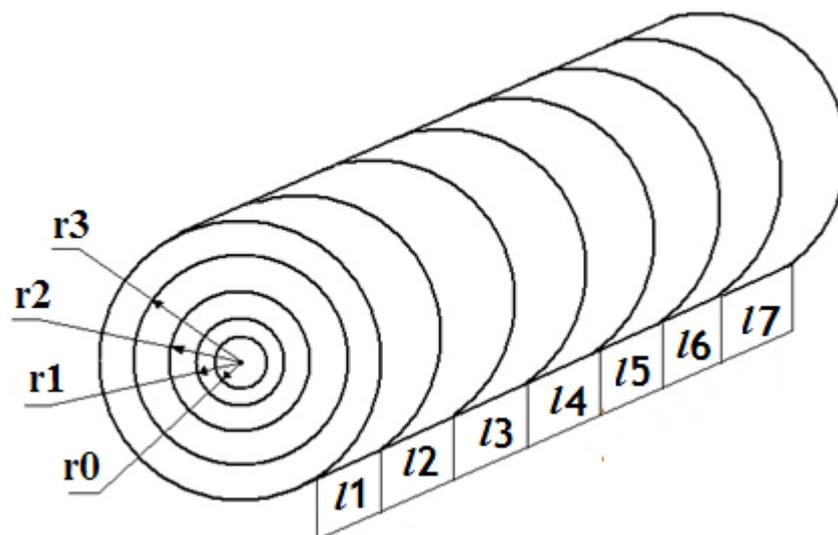


Рисунок 3.12 – Структура разбиения физического объема ячейки на элементарные объемы

Магнитные характеристики материала непрерывных слоев характеризуются

относительными магнитными проницаемостями: μ_1 – перегородки; μ_2 – втулка патрона, в которую помещается магнит; μ_3 – слой ферромагнитного шлама; μ_4 – область намагниченной суспензии.

При таком разделении физического пространства ячейки сепарации её магнитная схема замещения упрощается до плоской структуры. На рисунке 3.13 представлена схема для минимального числа разделения физического пространства фрагмента сепарации (в радиальном направлении $n = 6$; в аксиальном – $\xi = 7$ слоев).

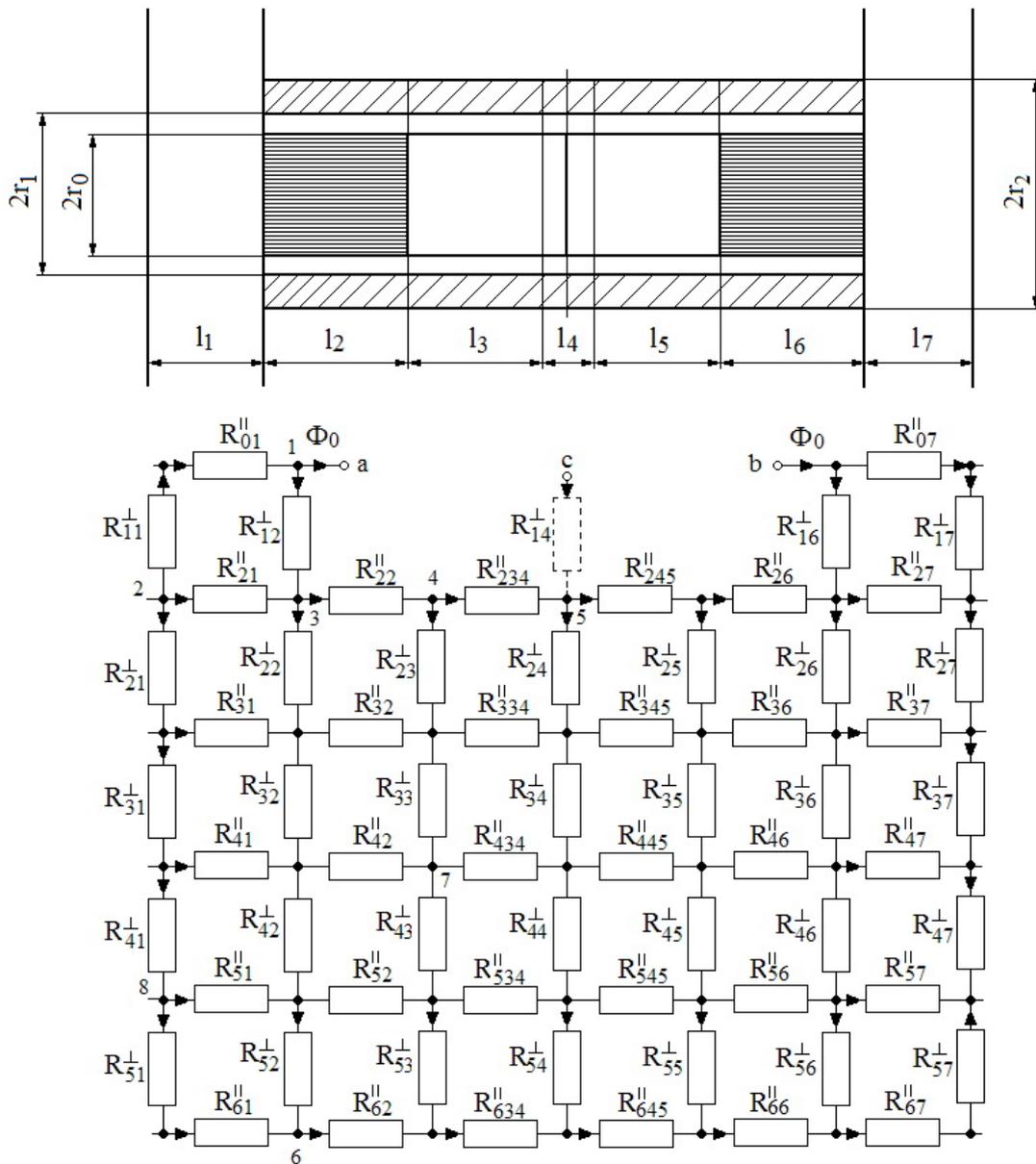


Рисунок 3.13 – Схема замещения фрагмента магнитного сепаратора с параметрами сетки: $n = 6$; $\xi = 7$; стрелки задают условно-положительные направления магнитных потоков

Магнитные сопротивления элементарных объемов цилиндрической формы рассчитывают в продольном $R_{k\eta}^{\parallel}$ и в поперечном $R_{k\eta}^{\perp}$ направлениях по следующим формулам:

$$R_{k\eta}^{\parallel} = \frac{l_{\eta}}{\pi^2 \mu_0 \mu_j (r_k^2 - r_{k-1}^2)}; \quad R_{k\eta}^{\perp} = \frac{\ln\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)}{2\pi \mu_0 \mu_j l_{\eta}}, \quad (3.57)$$

где $\mu_0 \mu_j$ – абсолютная магнитная проницаемость j слоя моделируемой области, Гн/м; r_k – радиус k слоя радиального разделения моделируемой области, м; l_{η} – длина отрезка η слоя продольного разделения моделируемой области, м.

На схеме (рисунок 3.13) сопротивления с тремя индексами $R_{k\eta\chi}^{\parallel}$ учитывают особенности выделения и расчета магнитного режима в слое l_4 стыковки магнитных полей составного магнита.

3.3.2. Алгоритм расчета магнитного режима сепаратора

Алгоритм разработанной нами программы представлен в приложении 1. Для расчета распределения магнитного поля формируется магнитная схема фрагмента сепаратора, состоящего из пяти одинаковых схем элементарных ячеек (рисунок 3.13).

По результирующей схеме фрагмента сепаратора программа нумерует узлы схемы $q_{k\eta}$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $\eta = 1, 2, \dots, \xi$) и на этой основе формирует массив ветвей и матрицу их соединений $a_{j\nu}$ ($j = 1, 2, \dots, q_{n\xi}$; $\nu = 1, 2, \dots, p$).

Затем программа вычисляет и заполняет матрицу магнитных сопротивлений схемы из продольных $R_{k\eta}^{\parallel}$ и поперечных $R_{k\eta}^{\perp}$ сопротивлений соответственно. Потом формирует массив независимых контуров на основе топологии расположения узлов $c_{s\nu}$.

Программа проводит формирование $(q_{n\xi} - 1)$ уравнений по первому закону Кирхгофа

$$\sum_{\nu=1}^{l_{\lambda}} a_{j\nu} \Phi_{\nu} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q_{n\xi}),$$

где $q_{n\xi}$ – общее число узлов магнитной цепи фрагмента сепарации; l_{λ} – число ветвей схемы, подходящих к λ – узлу; Φ_{ν} – магнитный поток в ν -ой ветви. Потом

она составляет соответствующее число уравнений по второму закону Кирхгофа

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_{\varepsilon}} c_{s\nu} R_{\nu} \Phi_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\beta_{\varepsilon}} c_{s\nu} F_{\nu},$$

где $s = n\xi$ – число независимых контуров; α_{ε} – число магнитных сопротивлений R_{ν} , входящих в ε – контур; Φ_{ν} – магнитный поток через R_{ν} магнитное сопротивление; β_{ε} – число МДС F_{ν} в ε – контуре.

Таким образом, программа формирует полную систему алгебраических уравнений на основе законов Кирхгофа и проводит численное решение этой системы методом вращающегося вектора [33].

В результате решения системы уравнений определяются магнитные потоки во всех ветвях цепи фрагмента сепаратора: $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{\rho}$, где ρ – число ветвей цепи. Магнитные напряжения на элементарных участках цепи определяются по закону Ома:

$$U_{k\eta}^{\parallel} = R_{k\eta}^{\parallel} \Phi_{k\nu} = R_{k\eta}^{\parallel} \Phi_{k\eta}^{\parallel}; \quad U_{k\eta}^{\perp} = R_{k\eta}^{\perp} \Phi_{\nu\eta} = R_{k\eta}^{\perp} \Phi_{k\eta}^{\perp},$$

где ν – обобщенное обозначение продольных и поперечных ветвей.

Значения аксиальной составляющей с индексом z (или $-||$), радиальной составляющей с индексом r (или $-\perp$) и полной напряженности магнитного поля соответственно определяются по следующим формулам:

$$H_{zk\eta} = H_{k\eta}^{\parallel} = \frac{|U_{k\eta}^{\parallel}|}{l_{\eta}}; \quad H_{rk\eta} = H_{k\eta}^{\perp} = \frac{|U_{k\eta}^{\perp}|}{r_k - r_{k-1}}; \quad H_{k\eta} = \sqrt{(H_{k\eta}^{\parallel})^2 + (H_{k\eta}^{\perp})^2}.$$

Составляющая градиента в радиальном направлении квадрата полной напряженности поля, рассчитывается следующим образом

$$\text{grad}_r H_{k\eta}^2 = \frac{\partial H_{k\eta}^2}{\partial r} = \frac{(H_{k\eta}^{\parallel})^2 + (H_{k\eta}^{\perp})^2 - (H_{k-1\eta}^{\parallel})^2 - (H_{k-1\eta}^{\perp})^2}{r_k - r_{k-1}}.$$

Программа предусматривает ввод нескольких типов источников поля и различных слоев пассивной среды. После расчета она выводит на печать входные параметры и массивы расчетных данных (магнитных сопротивлений, магнитных потоков, напряженностей и градиентов поля) только для центральной ячейки рассчитываемого фрагмента сепаратора и строит графики следующих зависимостей:

$$H_{k\eta}^{\parallel}(r_k); \quad H_{k\eta}^{\perp}(r_k); \quad H_{k\eta}(r_k); \quad \text{grad}_r H_{k\eta}^2(r_k).$$

На рисунках П.4.1 и 3.14 представлены рассчитанные по программе графические зависимости распределений $H(r)$ и $\text{grad}H^2$ соответственно.

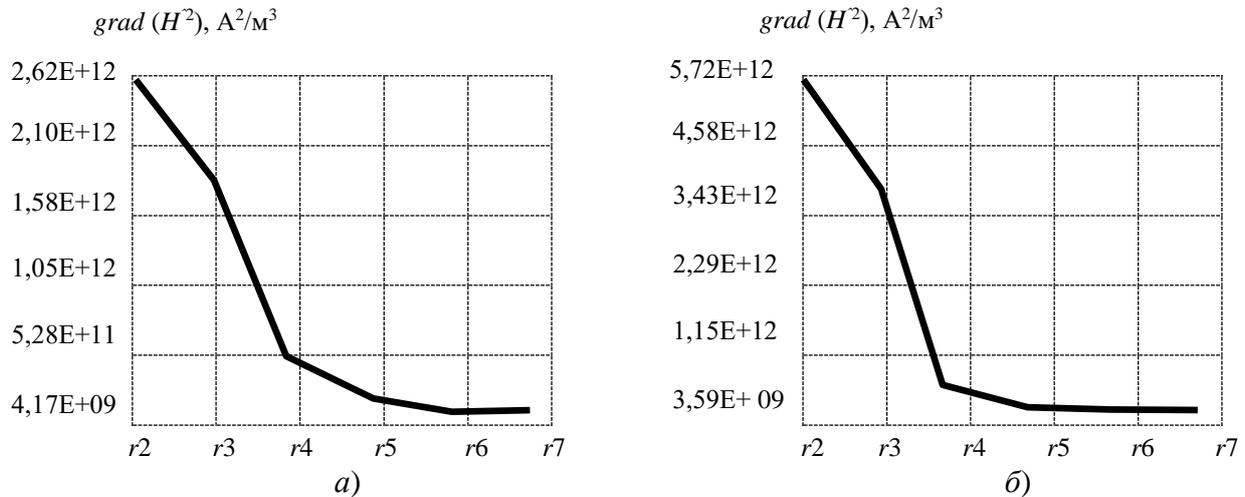


Рисунок 3.14 – Графики зависимостей $\text{grad}(H^2)$ от r в ячейке сепаратора для числа слоев в продольном направлении $k = 13$, расчет в сечениях: а – 11; б – 16, где: $r_2 = 1,80E-02$ м; $r_3 = 2,00E-02$ м; $r_4 = 2,20E-02$ м; $r_5 = 2,40E-02$ м; $r_6 = 2,60E-02$ м; $r_7 = 2,80E-02$ м

Достоверность и оценка погрешности результатов расчета определяются по законам Кирхгофа. В приложении 2 приведены данные тестового примера расчета (рисунок 3.13) с простейшим источником поля (рисунок 3.11, в) и результаты проверки достоверности расчета магнитного режима магнитной цепи.

Результаты проверки подтвердили, что балансы магнитных потоков в узлах схемы соблюдаются с высокой степенью точности, также балансы магнитных напряжений в различных контурах схемы удовлетворяются с высокой степенью точности. Поскольку фундаментальные уравнения Кирхгофа выполняются с высокой точностью, поэтому программа правильно и достаточно точно рассчитывает магнитную схему замещения фрагмента магнитного сепаратора.

Результаты проверки подтвердили, что балансы магнитных потоков в узлах схемы соблюдаются с высокой степенью точности, также балансы магнитных напряжений в различных контурах схемы удовлетворяются с высокой степенью точности. Поскольку фундаментальные уравнения Кирхгофа выполняются с высокой точностью, поэтому программа правильно и достаточно точно рассчитывает магнитную схему замещения фрагмента магнитного сепаратора.

В магнитных сепараторах продольные сборки магнитов (патронов) кон-

структивно располагают в одной плоскости, образуя кассету (рисунок 3.15).

Взаимное влияние друг на друга магнитных полей продольными сборками оценим по результатам вычислительного эксперимента, представленного на рисунке П.4.1. Из графиков распределения $H(r)$ следует, что хвостовую часть этих распределений (рабочий участок в окрестности $r \sim a/2$) можно аппроксимировать экспоненциальной зависимостью $H(r) \cong H_m e^{-k_H r}$, где k_H – некоторая постоянная распределения, m^{-1} ; H_m – напряженность магнитного поля на поверхности патрона, А/м. Результирующую напряженность поля, создаваемую всеми продольными сборками в рабочей зоне патрона сепаратора ($R \leq r \leq a/2$), определим методом наложения:

$$H_{\Sigma}(r) = \sum_{v=0}^{n_2-1} H_m e^{-k_H(r+av)}.$$

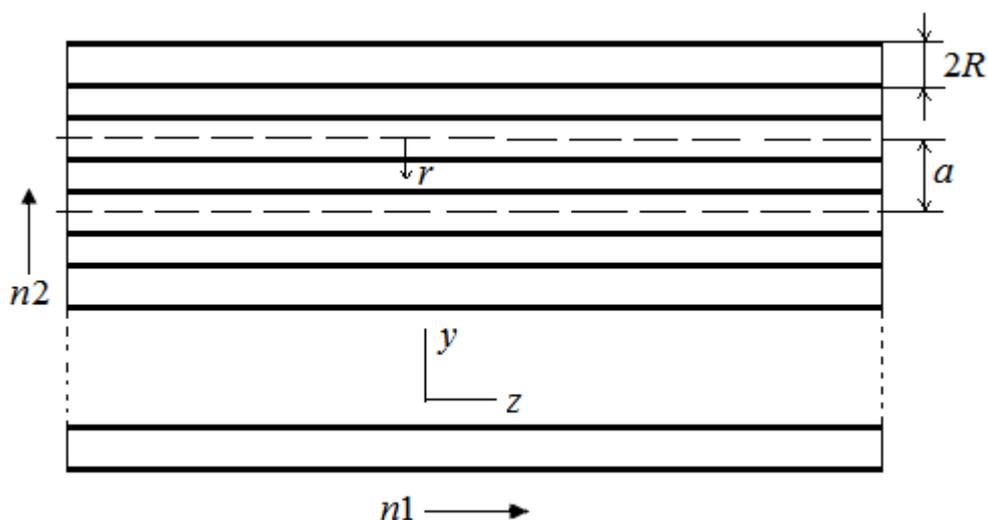


Рисунок 3.15 – Схема расположения продольныхборок постоянных магнитов в магнитных сепараторах: n_1 – число магнитов в сборке (в патроне); n_2 – число продольныхборок в кассете

Представив записанное выражение в виде суммы геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-k_H a}$, получим

$$H_{\Sigma}(r) = H(r) \frac{1 - e^{-k_H a n_2}}{1 - e^{-k_H a}}.$$

Из графиков распределения $H(r)$, показанных на рисунках 3.14 и П.4.1 (приложение 4), следует, что $H(r = a/2) \ll H_m$, поэтому $e^{-k_H a} \ll 1$ и $H_{\Sigma}(r) \approx H(r)$.

Таким образом, влияние полей соседних линейныхборок (патронов) постоянных магнитов практически отсутствует. Напряженность поля в области, прилегающей к каждому патрону ($R \leq r \leq a/2$), задается только магнитами собственного патрона.

На графиках (рисунок 3.14) представлены распределения $\text{grad}H^2$ для одной продольной сборки магнитов. Представляет интерес поведение результирующего значения $\text{grad}_r H_\Sigma^2$ между двумя соседними продольными сборками в окрестности середины рабочей зоны ($r \sim a/2$). При этом $H_\Sigma(r) = H_1(r) \pm H_2(r)$, где $H_1(r) = H(r) = H_m e^{-k_H r}$, $H_2(r) = H(a - r)$, $\text{grad}_r H_1 = -k_H H(r)$, $\text{grad}_r H_2 = k_H H(a - r)$. Знак «+» – при согласном направлении расположении полюсов магнитов в обеих сборках, знак «-» – при их встречном расположении.

Зададим малую вариацию δr радиальной переменной r в окрестности середины рабочей зоны сепарации зависимостью $r = 0.5a - \delta r$, тогда получим:

$$H_\Sigma(r) = H(0.5a)(e^{k_H \delta r} \pm e^{-k_H \delta r}); \quad \text{grad}_r H_\Sigma = -k_H H(0.5a)(e^{k_H \delta r} \mp e^{-k_H \delta r}).$$

При этом

$$\text{grad}_r H_\Sigma^2 = 2H_\Sigma(r) \text{grad}_r H_\Sigma = -2k_H H^2(0.5a)(e^{2k_H \delta r} - e^{-2k_H \delta r}), \quad (3.58)$$

из чего следуют три важных свойства:

1) нулевое значение $\text{grad}_r H_\Sigma^2$ на средней линии между соседними патронами: $\text{grad}_r H_\Sigma^2 = 0$ для $r = a/2$ ($\delta r = 0$);

2) значение $\text{grad}_r H_\Sigma^2$ (3.58), а значит и магнитная сила [184], *не зависят от направления расположения полюсов магнитов* в соседних сборках (патронах);

3) представив $e^{\pm 2k_H \delta r} \cong 1 \pm 2k_H \delta r$, получаем линейную зависимость $\text{grad}_r H_\Sigma^2$, а значит и для магнитной силы в окрестности средней линии рабочей зоны

$$\text{grad}_r H_\Sigma^2 \cong -8k_H^2 H^2 \delta r = -8k_H^2 H^2 (0.5a - r). \quad (3.59)$$

Подводя итог, подчеркнем, что предложен способ расчета поля сепаратора на основе теории магнитных цепей и реализация такого способа расчета по разработанной программе. Исследования подтвердили адекватность предложенного метода моделирования магнитного поля.

В прикладном плане разработанная программа позволяет рассчитывать магнитный режим сепаратора, градиент квадрата напряженности магнитного поля. Программа впервые позволяет проследить зависимости деформации магнитного поля и его градиента от толщины осажденного слоя ферромагнитных частиц на поверхности магнитной системы сепаратора. На этой основе будут реализованы

математические модели характеристик сепараторов.

На основе разработанных математических моделей распределения магнитного поля (компьютерно-аналитической модели ПМ и схемной модели численного моделирования поля) сопоставили результаты расчета с экспериментальными исследованиями для цилиндрического неодим борového постоянного магнита.

Экспериментальные исследования проводились на цилиндрическом образце ПМ диаметром 10 мм и длиной 20 мм, который устанавливался в штатив, позволяющий двух координатное перемещение. Измерения характеристик магнитного поля проводились методом датчика Холла, который предварительно калибровался в магнитном поле длинного соленоида (приложение П.3.1).

Результаты компьютерно-аналитического моделирования распределения напряженности магнитного поля ПМ представлено в приложении П.3.2, а численного моделирования поля по разработанной программе представлено в приложении П.3.3.

Теоретические и экспериментальные зависимости представлены на рисунке 3.16. Здесь $H_{rp}(r)$ – напряженность радиальной составляющей поля на боковой поверхности около полюса ПМ, А/м; $H_{z0,5l}(r)$ – напряженность аксиальной составляющей поля посередине боковой поверхности ПМ, А/м; $H_z(z)$ – напряженность осевой составляющей поля на оси ПМ, А/м.

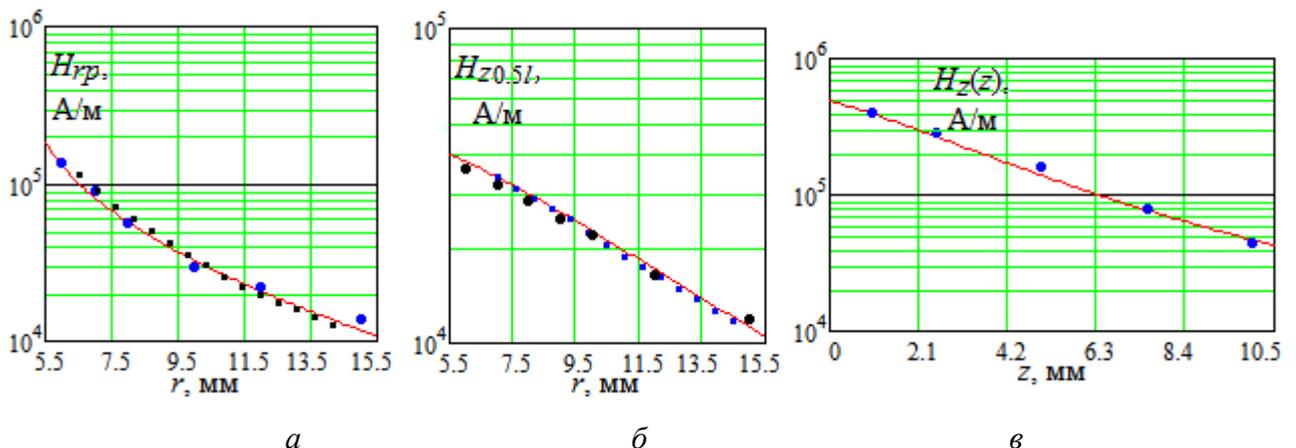


Рисунок 3.16 – Сопоставление расчетных зависимостей с экспериментальными данными: *а* – радиальная составляющая у полюса ПМ; *б* – аксиальная составляющая по середине ПМ; *в* – осевая составляющая напряженности поля ПМ: ••• – экспериментальные; ■■■ – по схемной модели; — — по компьютерно-аналитической модели

Адекватность математических моделей оценивалась в приложении П.3.3. Получено, что по критерию Фишера с уровнем риска не более 1% разработанные

математические модели распределения поля постоянного магнита адекватны.

3.3.3. Математическая модель магнитных сил

Магнитная восприимчивость феррочастиц существенно влияют на магнитную силу притяжения феррочастиц в активной рабочей зоне сепаратора. Экспериментально и теоретически установлено [2, 12, 77, 179], что в многодоменном состоянии коэрцитивная сила возрастает, а магнитная восприимчивости χ_ϕ уменьшается с уменьшением размера d феррочастиц. Например, для железного и магнетитового порошка такая зависимость наблюдается до значения размера феррочастиц $d_{\text{фгр}} = 50 - 60$ мкм [179].

В [24] использовались следующие математические модели зависимости магнитной восприимчивости от размера d и напряженности H магнитного поля:

$$\chi_\phi(d) = \begin{cases} \chi_{m0}(d/d_{0s}) & \text{при } 0 \leq d \leq d_{0s}; \\ \chi_{m0} & \text{при } d > d_{0s}; \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\chi_\phi(H) = \begin{cases} \chi_{m0}(H/H_{0s}) & \text{при } 0 \leq H \leq H_{0s}; \\ 0 & \text{при } H \geq H_{0s}, \end{cases} \quad (3.61)$$

где χ_{m0} – максимальное значение магнитной восприимчивости материала ферромагнетика.

Объединив зависимости (3.60) и (3.61), получили

$$\chi_\phi(d, H) = \kappa_\chi H; \quad (3.62)$$

$$\kappa_\chi = \begin{cases} \chi_{m0}(d/d_{0s}H_{0s}) & \text{при } 0 \leq d \leq d_{0s} \text{ и } 0 \leq H \leq H_{0s}; \\ \chi_{m0}/H_{0s} & \text{при } d > d_{0s} \text{ и } 0 \leq H \leq H_{0s}; \\ 0 & \text{при } H \geq H_{0s}, \end{cases} \quad (3.63)$$

где d – размер ферромагнитной частицы, м; H – напряженность внешнего магнитного поля, А/м; κ_χ – коэффициент пропорциональности в (3.62), м/А; d_{0s} и H_{0s} – параметры аппроксимации (граничные значения соответствующих независимых переменных в кусочно-линейной зависимости (3.63)).

Магнитные свойства ВТЖ характеризуются магнитной восприимчивостью χ_B . Экспериментальная зависимость χ_B от концентрации ферромагнитных частиц в

среде с диамагнитными свойствами аппроксимируется выражением [2, 55]

$$\chi_{\text{ВТЖ}} = 0,96\chi_0(C_{\text{ф}} / (C_{\text{ф}} + C_{\text{н}}))^{1,5}, \quad (3.64)$$

где χ_0 – магнитная восприимчивость материала ферромагнитных примесей; $C_{\text{ф}}$ – концентрация ферромагнитных примесей, г/л; $C_{\text{н}}$ – концентрация немагнитной фракции взвеси, г/л.

Как правило, высокопроизводительные сепараторы используют для очистки слабозагрязненных ВТЖ (СОЖ) с концентрацией ферромагнитных примесей $C_{\text{ф}} = (2 \dots 0,01)$ г/л. Например, когда относительная магнитная проницаемость ферромагнитного материала $\mu = \chi_0 + 1$ равна 58, ВТЖ имеет следующие расчетные параметры по (3.64):

- 1) при $C_{\text{ф}} = 1$ г/л $\mu_{\text{в}} \approx 1$; при $C_{\text{ф}} = 0,01$ г/л $\mu_{\text{в}} = 1$;
- 2) при $C_{\text{н}} = 0$ $\mu_{\text{ш}} = 56$ – относительная магнитная проницаемость ферромагнитного шлама, осажденного на магниты.

Для расчета магнитного поля необходимо определить параметры магнитного источника, моделируемого схемой замещения с учетом магнитного потока рассеяния, которые вычисляются по зависимостям (3.40), (3.41): внутреннее сопротивление $R_{mэ} = 2r_M \gamma^{-1} \text{th}(0,5\gamma l)$; основная МДС $F_{mэ} = 2H_{\text{св}} \gamma^{-1} \text{th}(0,5\gamma l)$; дополнительная МДС $F_0 = 2H_0 \gamma^{-1} \text{th}(0,5\gamma l)$. Для расчета дополнительной МДС F_0 , необходимо знать напряженность стороннего поля H_0 , создаваемого магнитами, находящимися в линейной сборке. В разработанной нами программе предусмотрен тестовый режим, реализующий схему, показанную на рисунке 3.17. В этом режиме вычисляется магнитный поток Φ_{02} , проходящий через область моделируемого магнита (для которого принимается $F_{mэ} = 0$). По результатам тестового вычислительного эксперимента определяется значение напряженности стороннего магнитного поля $H_0 = U_{M0}/l_M$, где $U_{M0} = \Phi_{02} R_{mэ}$.

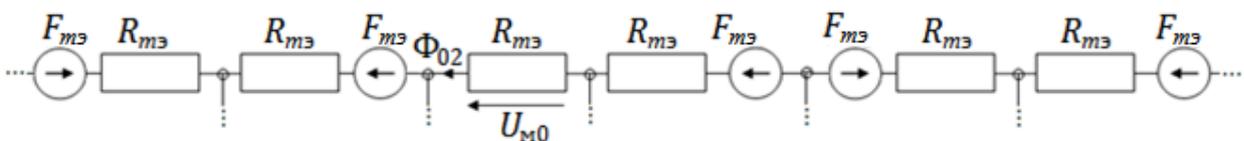


Рисунок 3.17 – Тестовая магнитная схема источников поля, расположенных в линейной сборке магнитов

Рассмотрим конкретный пример, соответствующий реально работающему магнитному патронному сепаратору. В качестве постоянного магнита в нем использован кольцевой формы постоянный магнит со следующими размерами:

- наружный диаметр $2r_0 = 29 \cdot 10^{-3}$ м;
- диаметр воздушной полости $2r_{00} = 20 \cdot 10^{-3}$ м;
- длина $l_M = 14 \cdot 10^{-3}$ м.

Магнитные параметры материала магнита: $H_{CB} = 9 \cdot 10^5$ А/м; $B_r = 1,27$ Тл.

Параметры схемы замещения постоянного магнита в соответствии с пунктом 3.2.3: удельное магнитное сопротивление $r_M = H_{CB} [B_r \pi (R_0^2 - R_{00}^2)]^{-1} = 2,1 \cdot 10^9 (\text{Гн} \cdot \text{м})^{-1}$; коэффициент передачи $\gamma = \sqrt{2r_M g_S}$, где проводимость рассеяния $g_S = g_{SH} + g_{SVH}$. Для кольцевого магнита с внутренним диаметром $2r_{00}$ и при выполнении условия $lR_0^{-1} < 1$ зависимости для расчета проводимости через наружную и внутреннюю боковые поверхности имеют следующий вид:

$$g_{SH} = \pi^2 \mu_0 2r_0 l^{-1}; \quad g_{SVH} = 2\pi \mu_0 r_{00}^2 l^{-2} \quad [47, \text{с.59}]. \quad \text{При этом: } g_S = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ Гн/м};$$

$$\gamma = 3,6 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1}; \quad R_{mэ} = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Гн}^{-1}; \quad F_{mэ} = 4,94 \cdot 10^3 \text{ А}.$$

Для схемы источника магнитного поля по рисунку 3.11, в рассчитаны $\Phi_{02} = 3,6 \cdot 10^{-5}$ Вб; $U_{M0} = \Phi_{02} R_{mэ} = 4,1 \cdot 10^2$ А, по которым определяли значения стороннего поля: $H_0 = U_{M0}/l_M \approx 3 \cdot 10^2$ А/м; $F_0 = -1,7 \cdot 10^2$ А.

Указанные параметры использовались для вычислительного эксперимента. Исходные данные для расчета:

1. Источник трех полюсный (рисунок 3.11, в) с параметрами: МДС – $F_{mэ} = 4,94 \cdot 10^3$ А; $F_0 = 1,7 \cdot 10^2$ А; $F_{mэ2} = -4,94 \cdot 10^3$ А; $F_{02} = -1,7 \cdot 10^2$ А, внутреннее сопротивление магнитов: $R_m = R_{m2} = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Гн}^{-1}$; $R_{дор1} = R_{дор2} = 0$.

2. В аксиальном направлении каждую ячейку сепарации разбивалась на девять участков ($l_3 - l_{11}$ на рисунке 3.18). В частности, магнитные наконечники – по два участка длиной $5 \cdot 10^{-3}$ м на каждой стороне; два встречно установленных магнита – соответственно на пять участков длиной $5,6 \cdot 10^{-3}$ м. При этом участки, соответствующие полюсным наконечникам, обозначили l_3, l_4, l_{10}, l_{11} ; участки, соответствующие магнитам, обозначили l_5, l_6, l_7, l_8, l_9 . Участки, соответствующие секционным перегородкам, обозначили l_1, l_2, l_{12}, l_{13} и разделили на равные части дли-

ной $2,5 \cdot 10^{-3}$ м. Сечение, которое разделяет патрон на две равные части, обозначили l_{cp} . Это сечение проходит посередине седьмого участка. Половину, которая находится с левой стороны, обозначили $l_{7,1}$, а с правой стороны – $l_{7,2}$.

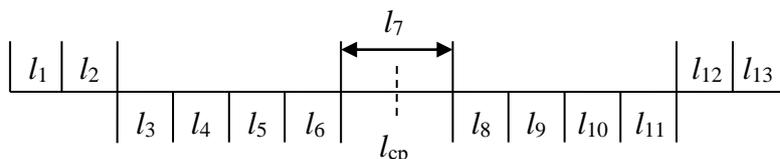


Рисунок 3.18 – Схема деления ячейки сепарации в продольном направлении

3. В радиальном направлении область ячейки разделили на одиннадцать частей: $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{11}$. При этом $r_1 = R_0, r_2 = r_1 + d_{ш}, r_3 = r_2 + d_{ш}, \dots, r_k = r_{k-1} + d_{ш}$, где R_0 – радиус внешней поверхности патрона, а r_2 с увеличением $d_{ш}$ будет возрастать.

$$3. \quad \mu_1 = 1; \mu_2 = 1; \mu_3 = \mu_{ш} = 56; \mu_4 = \mu_B = 1.$$

В приложении 4 представлены результаты расчета распределения напряженности поля в магнитном сепараторе для разных значений толщин $d_{ш}$ и в разных сечениях рабочей зоны ячейки сепарации (согласно рисунка 3.18). Установлено, что радиальное распределение $H(r)$ сильно деформируется с изменением $d_{ш}$; при этом деформируется и распределение $\text{grad}_r H(r)$. Здесь под $H(r)$ понимается результирующая напряженность поля

$$H(r, z) = \sqrt{H_r^2(r, z) + H_z^2(r, z)}.$$

Рисунок 3.19 иллюстрирует сплошными линиями в полулогарифмическом масштабе распределения усредненных по длине ячейки сепарации графиков зависимости $\bar{H}(r)$ при разных $d_{шк}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$). Все графики представляют собой прямые линии с приблизительно одинаковым наклоном.

Точки на рисунке 3.19 изображают экспериментальные данные, которые определяли измерителем магнитной индукции РШ1-10 по стандартной методике [35].

Адекватность совпадений расчетных и экспериментальных зависимостей оценивалась по критерию Фишера [61], который, на основе экспериментальных и теоретических значений напряженности поля линейной сборки неодим-боровых постоянных магнитов по таблице 3.3, составил $F = 48$, что больше табличного $F_T = 5.05$ (при уровне значимости 5%). Поэтому расчетные зависимости совпа-

дают с экспериментальными зависимостями по статистическому критерию Фишера с 5-ным % уровнем риска.

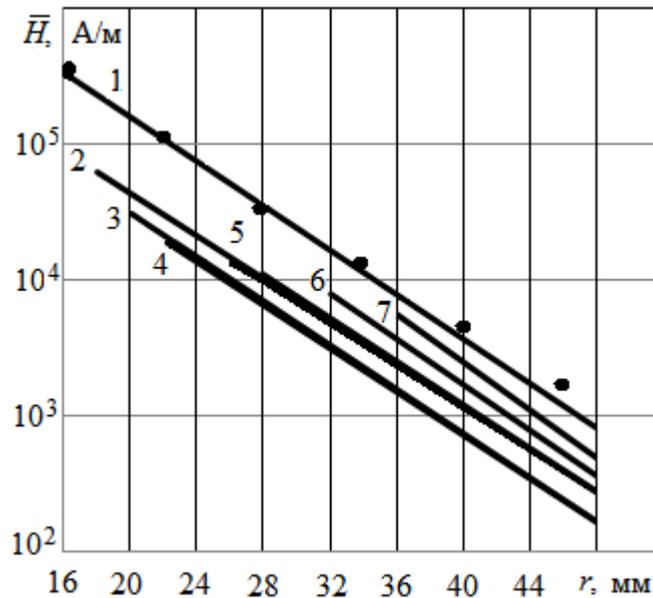


Рисунок 3.19 – Усредненное по длине ячейки сепарации рассчитанное семейство зависимостей распределения напряженности поля в рабочей зоне сепаратора от толщины d_{III} осадка ферромагнитных частиц на поверхности магнита: 1 - $d_{III} = 0$; 2 - $d_{III} = 2$ мм; 3 - $d_{III} = 4$ мм; 4 - $d_{III} = 8$ мм; 5 - $d_{III} = 12$ мм; 6 - $d_{III} = 16$ мм; 7 - $d_{III} = 20$ мм.

Таблица 3.3.

Экспериментальные и расчетные значения напряженности поля линейной сборки постоянных магнитов (патрона)

r , мм	16	22	28	34	40	46
$\bar{H}_{\text{экс}}$, А/м	$2.3 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^5$	$3.1 \cdot 10^4$	$1.3 \cdot 10^4$	$4.4 \cdot 10^4$	$1.7 \cdot 10^3$
$\bar{H}_{\text{рас}}$, А/м	$2.0 \cdot 10^5$	$1.0 \cdot 10^5$	$3.4 \cdot 10^4$	$1.2 \cdot 10^4$	$3.5 \cdot 10^3$	$1.2 \cdot 10^3$

Для аналитического обобщения численно графического семейства характеристик распределения напряженности магнитного поля применим изложенную в главе 2 методику моделирования семейства характеристик. Поскольку наклоны логарифмических зависимостей $\lg \bar{H}(r)$ на рисунке 3.19 одинаковые, а взаимное расположение таких линий однозначно определяются их максимальными значениями \bar{H}_m , то семейство характеристик на рисунке 3.19 моделируется однородным ОЛДУ первого порядка

$$\frac{d\bar{H}_r}{dr} + (\alpha_1 \ln 10) \bar{H} = 0,$$

решение которого с граничным условием $\bar{H}(r_2) = \bar{H}_m(d_{\text{ш}})$ принимает вид:

$$\bar{H}(r, d_{\text{ш}}) = \bar{H}_m(d_{\text{ш}}) 10^{-\alpha_1 \cdot (r-r_2)}. \quad (3.65)$$

На рисунке 3.20 построена в полулогарифмическом масштабе зависимость \bar{H}_m/\bar{H}_{m0} от $d_{\text{ш}}$, представляющая собой кривую линию, где $\bar{H}_{m0} = \bar{H}_m(d_{\text{ш}} = 0)$.

Зависимость \bar{H}_m/\bar{H}_{m0} от $d_{\text{ш}}$ представим в виде суммы двух простых зависимостей по рисунку 3.20: $\eta_1(d_{\text{ш}}) = q_2 d_{\text{ш}} + q_1$ и $\Delta\eta(d_{\text{ш}}) = \lg(\bar{H}_m/\bar{H}_{m0}) - \eta_1(d_{\text{ш}})$.

Вторую зависимость аппроксимируем экспоненциальной функцией

$$\Delta\eta(d_{\text{ш}}) = q_3 \cdot e^{-q_4 \cdot d_{\text{ш}}}.$$

Тогда

$$\lg(\bar{H}_m/\bar{H}_{m0}) = q_2 \cdot d_{\text{ш}} + q_1 + q_3 \cdot e^{-q_4 \cdot d_{\text{ш}}}, \quad (3.66)$$

В выражении (3.66) $d_{\text{ш}}$ в метрах, \bar{H}_m в А/м. Для рассмотренного примера, значения коэффициентов аппроксимации соответственно равны:

$$q_1 = -1,16; q_2 = -41,7; q_3 = 1,16; q_4 = 500.$$

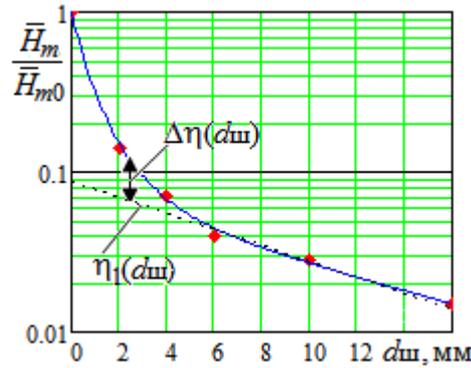


Рисунок 3.20 – Аппроксимационная зависимость максимального значения напряженности поля $\langle H_m \rangle$ от толщины слоя феррочастиц $d_{\text{ш}}$ на магните: $\eta_1(d_{\text{ш}})$ и $\Delta\eta(d_{\text{ш}})$ – составляющие исходной зависимости; $\diamond \diamond$ – исходные значения

Таким образом, семейство характеристик $\bar{H}(r)$ на рисунке 3.19 аппроксимируется прямыми линиями следующим образом:

$$\lg \bar{H}(r) = \alpha_1 r + \beta_1;$$

$$\alpha_1 = (R_k - r_2)^{-1} \lg[\bar{H}_m/H(R_k)]; \quad \beta_1 = \lg \bar{H}_m - \alpha_1 r_2, \quad (3.67)$$

где R_k – некоторое фиксированное значение радиуса, выбираемое для целей идентификации коэффициентов α_1 , м^{-1} и β_1 ;

$$r_2 = r_1 + d_{\text{ш}}, \quad (3.68)$$

где r_1 – радиус патрона, м. Для примера, представленного семейством характеристик $\bar{H}(r)$ на рисунке 3.19, значение коэффициента (3.67) равно $\alpha_1 = 81 \text{ м}^{-1}$;

На основе (3.65), получим:

$$\text{grad}_r \bar{H} = -\alpha_1 \ln 10 \cdot \bar{H}(r, d_{\text{ш}}). \quad (3.69)$$

Градиентная сила, действующая на магнитный диполь с момент \mathbf{M} , помещенный во внешнее поле \mathbf{H} , определена И. Е. Таммом в форме $\mathbf{f}_m = (\mathbf{M}\nabla) \cdot \mu_0 \mathbf{H}$ [184]. Для феррочастицы с наведенным магнитным моментом $\mathbf{M} = \chi_\phi V_\phi \mathbf{H}$, действующая на феррочастицу пондеромоторная сила, примет следующий вид [24]:

$$\mathbf{f}_m = 0.5 \mu_0 V_\phi \chi_\phi \nabla(H^2), \quad (3.70)$$

где V_ϕ – объем феррочастицы, м^3 , χ_ϕ – магнитная восприимчивость феррочастицы.

Зависимость (3.70) в приложении к сферическому телу правомерна при соблюдении условия $\frac{\partial H(0)}{\partial r} \gg d_\phi \frac{\partial^2 H(0)}{\partial r^2}$, где d_ϕ размер феррочастицы, м^3 .

Направление магнитной силы \mathbf{f}_m определяется направлением $\text{grad } \mathbf{H} = \frac{dH}{dr} \mathbf{e}_r + \frac{dH}{dz} \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_z – единичные направляющие векторы (орты). Радиальная составляющая $\text{grad}_r \bar{H} = \frac{d\bar{H}}{dr}$ непосредственно определяет попадание феррочастицы на магнит сепаратора, тогда как аксиальная составляющая только смещает ее вдоль оси магнита. Поэтому радиальная составляющая $\text{grad}_r \bar{H}$ является определяющей и по величине превосходит аксиальную составляющую $\text{grad}_z \bar{H}$. Поэтому нас будет интересовать в (3.70) только радиальная составляющая силы

$$\mathbf{f}_{mr} = \mu_0 \chi_\phi V_\phi H \frac{d\bar{H}}{dr} \mathbf{e}_r. \quad (3.71)$$

Подставив в зависимость (3.71) выражения (3.65) и (3.62), получим зависимость распределения интенсивности радиальной составляющей магнитной силы:

$$f_{mr} = \ln 10 \alpha_1 \mu_0 \kappa_\chi V_\phi (\bar{H}_m(d_{\text{ш}}))^3 10^{-3\alpha_1(r-r_2)} = f_m 10^{-3\alpha_1(r-r_2)}. \quad (3.72)$$

Применим кусочно-линейную аппроксимацию для выражения (3.72), ограничившись двумя отрезками в соответствии с выводами по пункту 3.3.2. На отрезке аппроксимации

$$r_2 \leq r \leq r_{\text{Гр1}} \quad (3.73)$$

линеаризованное уравнение примет следующий вид:

$$f_{mr} \approx \ln 10 \alpha_1 \mu_0 \kappa_\chi V_\phi (\bar{H}_m(d_{\text{ш}}))^3 [1 - \alpha'_0(r - r_2)] = f_m [1 - \alpha'_0(r - r_2)], \quad (3.74)$$

где $r_{гр1}$ – определим из условия совпадения f_m при $r = r_{гр1}$ по зависимостям (3.72) и (3.74):

$$1 - \alpha'_0 \cdot r_{гр1} = 10^{-3\alpha_1 \cdot (r_{гр1} - r_2)}. \quad (3.75)$$

Коэффициент α'_0 определяется из аппроксимации показательной функции линейным отрезком. На рисунке 3.21 представлено нелинейное распределение нормированной силы f_m/f_m и две линейные аппроксимации этой функции с разными α'_0 . Для первой линейной зависимости максимальная относительная погрешность $(f_{mI} - f_m)/f_m \approx 0,2$, для второй линейной зависимости – $(f_{mII} - f_m)/f_m \approx 0,25$. Для обеспечения большей точности на хвосте исходной зависимости выбираем вторую линейную аппроксимацию, которой соответствует соотношение

$$f_m(r_{гр1})/f_m = 0,061 \quad \text{при} \quad r_2 - r_{гр1} = (\ln 0,061)/3\alpha_1. \quad (3.76)$$

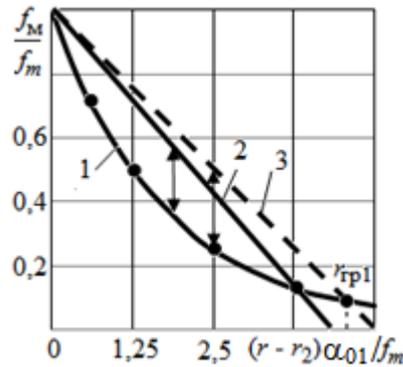


Рисунок 3.21 – К выбору скорости изменения магнитной силы f_m (1) в рамках линейных аппроксимаций этой силы: f_{mI} (2) и f_{mII} (3)

Тогда из (3.72), (3.75) и (3.76) следует

$$\alpha'_0 = \frac{1 - 10^{-3\alpha_1 \cdot (r_{гр1} - r_2)}}{(r_{гр1} - r_2)}. \quad (3.77)$$

Подставив (3.76) и (3.77) в (3.74) и учитывая (3.75), получим линеаризованную математическую модель магнитной силы, действующей на феррочастицу на отрезке $r_2 \leq r \leq r_{гр1}$:

$$f_{m1} = -[f_1 - \alpha_{01}r]; \quad (3.78)$$

$$\alpha_{01} = \alpha_1 \ln 10 \mu_0 \kappa_\chi V_\phi (\bar{H}_m(d_{ш}))^3 \alpha'_0; \quad (3.79)$$

$$f_1 = \alpha_1 \ln 10 \mu_0 \kappa_\chi V_\phi (\bar{H}_m(d_{ш}))^3 (1 + \alpha'_0 r_2) = \alpha_{01} \left[r_2 + \frac{1}{\alpha'_0} \right]. \quad (3.80)$$

В соответствии с (3.58) в области между соседними патронами, на средней линии ($r = 0,5a$) $\text{grad}_r H = 0$ и магнитная сила равна нулю. А согласно (3.59), в

окрестности средней линии магнитная сила *изменяется по линейному закону* в каждую сторону от этой линии. Тогда второй участок аппроксимации силы располагается в следующем диапазоне изменения радиальной координаты:

$$r_{гр1} \leq r \leq 0.5a. \quad (3.81)$$

При этом интенсивность магнитной силы будет изменяться от 0 до $f_{гр1}$, где $f_{гр1}$ равна

$$f_M(r_{гр1}) = f_{гр1} = 0,061\alpha_1 \ln 10 \mu_0 \kappa_\chi V_\Phi (\bar{H}_m(d_{ш}))^3. \quad (3.82)$$

Уравнение магнитной силы на втором отрезке аппроксимации:

$$f_{M2} = -[f_2 - \alpha_{02}r], \quad \alpha_{02} = \frac{f_{гр1}}{0.5a - r_{гр}}, \quad f_2 = \frac{0.5af_{гр1}}{0.5a - f_{гр1}} = \frac{a\alpha_{02}}{2}. \quad (3.83)$$

Полученные зависимости будут положены в основу моделирования характеристик магнитного сепаратора, которые правомерны в окрестности каждой продольной сборки постоянных магнитов (патронов) – в области $r_2 \leq r \leq 0.5a$ (см. главу 4).

3.4. Математическая модель магнитных сил диполь-дипольного взаимодействия

Из анализа небогатой научно-технической информации по проблеме магнитной коагуляции следует, что намагниченные частицы объединяются в цепочечные агрегаты, которые во внешнем поле ориентируются вдоль магнитных линий [55, 68, 116 –119]. При этом для решения определенных специфических задач, как, например, в системах неразрушающего контроля дефектов применяются полуэмпирические математические модели сил диполь-дипольного взаимодействия [68, 118], которые удовлетворительно обслуживают практику моделирования магнитной коагуляции в жидких суспензиях с высокой концентрацией примесей.

Поскольку в задачах магнитной сепарации мы имеем дело с низкими концентрациями ферромагнитных примесей в ВТЖ (0,1 ... 2 г/л), среднестатистические расстояния между частицами относительно большие, поэтому магнитная коагуляция может проходить в конкуренции с другими механизмами. Для построения математической модели магнитной коагуляции при сепарации СОЖ (ВТЖ) необходимы более строгие математические модели магнитных сил диполь-дипольного взаимодействия.

Примем традиционное допущение, что исходные ферромагнитные частицы в суспензии имеют сферическую форму. В работе [67] приводятся выражения результирующего поля $\mathbf{H}_1(r, \theta)$ для сферического тела, полученные на основе строгого решения уравнений Максвелла, которую используем в настоящей работе.

Дано – точная модель дифрагированного магнитостатического поля для ферромагнитного сферического тела:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_и, \quad (3.84)$$

$$\mathbf{H}_и = H_0 \left(\frac{\mu_\phi - \mu_{ср}}{\mu_\phi + 2\mu_{ср}} \right) [\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta] \frac{R_\phi^3}{r^3}, \quad (3.85)$$

$$\mathbf{H}_0 = H_0 [\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta] = H_0 \mathbf{k}, \quad (3.86)$$

где \mathbf{H}_0 – вектор напряженности внешнего магнитного поля, А/м; \mathbf{H}_1 – вектор напряженности результирующего поля вне тела, А/м; μ_ϕ – относительная магнитная проницаемость материала шара; $\mu_{ср}$ – относительная магнитная проницаемость среды, в которую погружено сферическое тело; единичные направляющие вектора $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ – для сферической и \mathbf{k} – для декартовой систем координат соответственно (рисунок 3.22; R_ϕ – радиус сферической феррочастицы, м; $R_\phi \leq r$ – расстояние до центра феррочастицы, м.

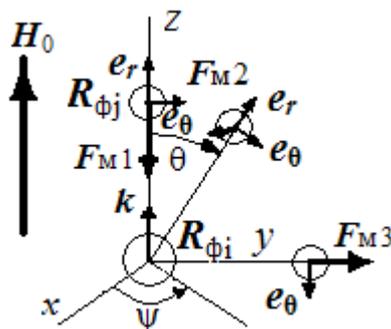


Рисунок 3.22 – Магнитные силы взаимодействия между двумя феррочастицами:

$$\mathbf{F}_{M1} \text{ при } \theta = 0; \mathbf{F}_{M2} \text{ при } \theta = 40^\circ; \mathbf{F}_{M3} \text{ при } \theta = 90^\circ$$

Определить и исследовать математическую модель градиентной силы \mathbf{F}_{mji} , приложенной к j -частице со стороны дифрагированного поля i -частицы.

Зависимости (3.84) – (3.86) правомерны для одиночной частицы. В случае многих частиц, взвешенных в суспензии, на каждую частицу будет действовать внешнее дифрагированное магнитное поле \mathbf{H}_1 . При этом для каждой частицы суспензия исполняет роль внешней среды. Выше было показано, что относитель-

ная магнитная проницаемость в ВТЖ близка к единице ($\mu_{cp} \cong 1$).

Принимая во внимание вышесказанное, пондеромоторную силу (3.70), приложенную к j -частице и обусловленную дифрагированным полем \mathbf{H}_1 i -частицы (в соответствии с зависимостями (3.84) – (3.86)) и в однородном внешнем поле \mathbf{H}_0 в сферической системе координат ($\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$), согласно рисунку 3.22, можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{F}_{mji} = \frac{1}{2} \mu_0 V_{\phi j} \chi_{\phi j} \nabla (\mathbf{H}_{1i} \mathbf{H}_{1i}) = -3 \mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left\{ \mathbf{e}_r \left[\left(3 + 4 \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) (\cos \theta)^2 + \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} (\sin \theta)^2 - 1 \right] + \mathbf{e}_\theta \left(1 + 0.5 \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) \sin 2\theta \right\}, \quad (3.87)$$

где $\chi_{\varepsilon i} = \chi_{\phi i} / (\chi_{\phi i} + 3)$; χ_ϕ – магнитная восприимчивость феррочастиц примеси, которая является функцией от их размеров и напряженности внешнего поля H_0 и аппроксимируется зависимостями (3.62), (3.63).

При $\theta = 0$, $\mathbf{e}_r = \mathbf{k}$; зависимость для расчета силы \mathbf{F}_{mji} :

$$\mathbf{F}_{mji} = -6 \mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left(1 + 2 \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) \mathbf{k}, \quad (3.88)$$

Поскольку \mathbf{F}_{mji} направлена к i -ой частице, то сила \mathbf{F}_{mji} притягивает j -ю частицу к i -ой частице (см. рисунок 3.22).

При $\theta = 90^\circ$ и $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta = 90^\circ)$ уравнение (3.87) принимает следующий вид:

$$\mathbf{F}_{mji} = 3 \mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left(1 - \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) \mathbf{e}_r; \quad (3.89)$$

при $R_{\phi i}^3 / r^3 < 1$ сила \mathbf{F}_{mji} направлена в противоположную сторону от i -ой частицы, а значит, эта сила отталкивает j -ю частицу от i -ой частицы (см. рисунок 3.22).

При $\theta = 45^\circ$ и при $R_{\phi i}^3 / r^3 < 1$ сила \mathbf{F}_{mji} направлена под углом 118° к линии, проходящей через центры 0 и 0' взаимодействующих частиц (см. рисунок 3.22) – частицы расходятся:

$$\mathbf{F}_{mji} = -3 \mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} * \left\{ 0.5 \mathbf{e}_r \left(1 + 5 \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) + \mathbf{e}_\theta \left(1 + 0.5 \chi_{\varepsilon i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) \right\}.$$

Следовательно, при расположении феррочастиц в поперечном направлении к магнитным линиям они будут взаимно отталкиваться; взаимно притягиваться будут такие частицы, которые располагаются вдоль магнитных линий внешнего однородного поля \mathbf{H}_0 .

Оценим отношение $H_{и}/H_0$ на минимальном расстоянии $r_{\text{мин}} \geq R_{\phi i} + R_{\phi j}$ относительно центра i -ой частицы (источника вторичного поля) до центра смежной j -ой частицы с радиусами $R_{\phi i}$, $R_{\phi j}$ соответственно:

$$\frac{H_{и}(r_{\text{мин}})}{H_0} < \frac{2\chi_{\phi i}}{(\chi_{\phi i}+3)} \frac{R_{\phi i}^3}{(R_{\phi i}+R_{\phi j})^3} < 1.$$

Из приведенного неравенства следует вывод, что даже на минимальном расстоянии между частицами в теле каждой частицы преобладает внешнее поле H_0 над индуцированным полем $H_{и}$. В используемых суспензиях ВТЖ среднестатистическое расстояние между частицами $l_0 \gg r_{\text{мин}}$, поэтому неравенства $R_{\phi i}^3 r^{-3} \ll 1$ и $H_{и}(r)H_0^{-1} \ll 1$ будут выполняться практически на всех участках сближения двух частиц. Поэтому намагниченность диполей определяется только интенсивностью внешнего поля H_0 .

Сила (3.88), обуславливающая магнитную коагуляцию двух частиц, для $R_{\phi i}^3/r^3 \ll 1$ примет вид:

$$\mathbf{F}_{mji} = -\frac{c_{ji}}{r^4}, \quad (3.90)$$

где $c_{ji} = 6\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} R_{\phi i}^3 = 8\pi\mu_0 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} H_0^2 R_{\phi j}^3 R_{\phi i}^3$.

В теории поля результирующую силу взаимодействия двух агрегатов находят по методу наложения: эта сила равна сумме сил взаимодействия каждой частицы одного агрегата с каждой частицей другого агрегата. В случае одинаковых агрегатов, составленных из n одинаковых мономеров и соединенных в цепочки, результирующая сила \mathbf{F}_{mji} (3.90) умножается на n^2 .

3.5. Обоснование возможности обезвоживания

структурированных осадков на поверхности магнитных элементов

В магнитных сепараторах каждая продольная сборка магнитов (рисунок 3.10) находится в патроне из немагнитного материала. Для достижения наибольших градиентов магнитных полей вдоль патронов магнитные полюсаборок постоянных магнитов располагаются в противофазах. Поэтому, перемещаясь вдоль

патрона, будет иметь место чередование направлений магнитных линий.

Осадок ферромагнитного шлама осаждается на поверхность патронов. При формировании осадка на поверхности магнитов происходит защемление жидкости СОЖ нитеобразными агрегатами (флокулами). Во время удаления осадка с поверхности магнитов при перемещении шлакоосъемного манжета происходит переориентация магнитных флокул, раскрытие стыков между флокулами, разрыв и образование новых флокул и истечение в связи с этим жидкости из шлама. Такое явление подтверждается на фотографиях осадка шлама на поверхности патронов в различных фазах нахождения шлакоосъемного манжета (рисунок 3.23).



Рис. 3.23. Форма и структура осадка при его удалении на поверхности патронов магнитной системы

Хорошо видно, что при переориентации магнитных флокул (агрегатов – нитей) на поверхности патронов при смещении шламов вдоль магнитной системы наблюдается раскрытие стыков между флокулами, разрыв и образование новых флокул и истечение в связи с этим жидкости из шлама.

Традиционно шлакоосъемный манжет перемещают с постоянной скоростью. Для ослабления защемления и повышения эффективности истечения жидкости из агрегатов осадка шлама необходима организация прерывисто-шагового движения

шлама относительно магнитной системы патрона, обеспечивающая сочетания скорости съема феррошлама с необходимой длительностью времени истечения жидкости из раскрытых стыков между флокулами осадка шлама.

Оптимальные параметры – скорость движения шламосьемных манжет и длительность паузы в точках с максимальными градиентами напряженности магнитного поля определим экспериментально. На рисунке 3.24 приведены экспериментальные зависимости коэффициента суточной потери СОЖ от скорости движения манжет и длительности паузы в точках максимума градиента напряженности. Эмпирически выявлено – оптимальная скорость движения 1,0 м/мин и длительность паузы 0,4-0,6 мин. При этом коэффициент суточной потери СОЖ не превышает 1% от объема СОЖ в оборотной системе.

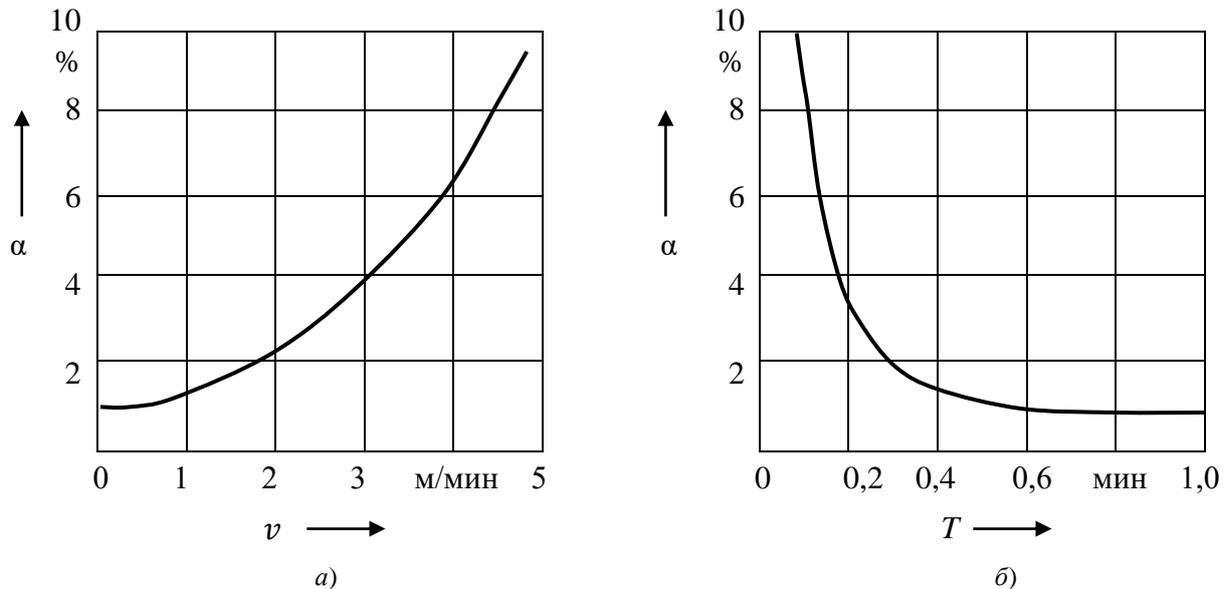


Рисунок 3.24 – Зависимости коэффициента потери СОЖ от скорости движения манжет v (а) и длительности паузы в точках максимального градиента напряженности поля (б):
 $d_{\text{пр}} = 30$ мм; $B_{\text{мс}} = 0,032$ м; $L_{\text{п}} = 1,0$ м; $\delta = 0,003$ м; неодим-боровые магнитные элементы;
 3-% водная эмульсия на основе СОЖ – "ЭКОРОСС"

3.6. Выводы

На основе физического подхода и теории магнитных цепей разработаны новые методы математического моделирования постоянных магнитов и решетчатых систем из постоянных магнитов.

1. Разработан оригинальный метод синтеза эквивалентных магнитных схем

замещения постоянного магнита, в котором фундаментальные уравнения электромагнитного поля использовали в качестве исходных данных. Процедура синтеза включает переход от фундаментальных трехмерных уравнений поля к системе одномерных уравнений активной распределенной магнитной цепи, которая в дальнейшем сворачивается в цепь с сосредоточенными параметрами. В результате синтезированы два типа новых схем замещения постоянного магнита (с распределенными и с сосредоточенными параметрами), учитывающих поток рассеяния через боковую поверхность магнита и впервые установлена строгая связь между справочными параметрами постоянных магнитов с магнитными характеристиками их ферромагнитных материалов. Синтезированные схемы предназначены для численно-аналитических методов моделирования распределения поля в системах с постоянными магнитами (утв. 3.2).

2. Разработана компьютерно-аналитическая модель распределения магнитного поля круглого постоянного магнит в немагнитной среде на основе *потенциального подхода* интегрирования полевой задачи (утв. 3.1). Модель предназначена для проектирования магнитных систем и выбора типа магнита сепаратора.

3. Новые, более совершенные модели постоянных магнитов обеспечили возможность использования *схемного численно-аналитического метода* – эффективного методам анализа и изучения сложных и неоднородных магнитных систем с постоянными магнитами.

4. Разработана схемная численно-аналитическая модель двумерного распределения магнитных сил в рабочем пространстве сепаратора, которая впервые моделирует влияние осаждаемого на поверхности магнитной системы слоя феррочастиц. Исследованы и аппроксимированы результаты численного моделирования распределения этих сил в магнитном сепараторе.

5. Адекватность численно-аналитических моделей распределения магнитного поля, создаваемого магнитной системой сепаратора, доказана экспериментальными исследованиями.

6. Построенная на основе ОЛДУ математическая модель распределения магнитного поля, создаваемого магнитной системой сепаратора, выявила экспо-

ненциальный закон радиального распределения напряженности магнитного поля в сепараторе для любой толщины феррошлама на поверхности магнитов. Экспоненциальное распределение поля со шламом совпало с традиционным законом распределения поля, создаваемого незагрязненными магнитными полюсами.

7. Разработанная программа обеспечивает расчет на ЭВМ магнитного режима сепаратора и распределения поля градиентных сил в магнитных сепараторах. На этой основе в четвертой, пятой и шестой главах будут реализованы математические модели основных характеристик сепараторов.

8. При помощи разработанной математической модели сил взаимодействия намагниченных феррочастиц во внешнем поле выявлена существенная анизотропия взаимодействия магнитных диполей во внешнем магнитном поле: при расположении феррочастиц вдоль *магнитных линий* действуют силы притяжения, при расположении феррочастиц в *поперечном направлении* относительно магнитных линий на них действуют силы отталкивания. Наличие двух сил раскрывает физическую причину механизма выстраивания феррочастиц во внешнем магнитном поле в устойчивые нитевидные образования. Это новое научное положение будет использовано в пятой главе при моделировании магнитной коагуляции

9. При помощи анализа феномена переструктурирования осадка шлама на поверхности магнитного патрона при движении относительно магнитной системы последнего сформировано представление о разработке необходимых конструктивно-технологических мер усиления обезвоживания шламов, касающихся траектории, скорости и шагового характера перемещения шламов на поверхности патронов.

Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗДЕЛЕНИЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЙ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

4.1. Методология математического моделирования характеристик разделения ферромагнитных суспензий в магнитных полях

В третьей главе разработаны математические модели магнитных сил, в виде зависимостей от крупности частиц, от параметров магнитной системы и технологического фактора, заключающегося в накоплении на поверхностях магнитов слоя осадка ферромагнитных частиц. Под действием магнитных сил ферромагнитные частицы, содержащиеся в ВТЖ, задерживаются магнитными сепараторами.

Качество работы сепараторов оценивается основной его характеристикой $\bar{\varepsilon}$, называемой средней степенью очистки, которая количественно выражает относительную массу задерживаемых частиц (1.1) и выступает в качестве критерия качества очистки жидкости сепаратором. Другие важные эксплуатационные характеристики (производительность, время цикла сепарации, и другие) непосредственно выражаются через эту характеристику (см. главу 6).

Характеристика (1.1) является интегральной характеристикой, так как средние концентрации C_n , C_0 зависят от плотностей вероятности распределения крупности частиц (1.2).

При монодисперсном распределении частиц средняя степень очистки (1.1) становится степенью очистки ε , зависящей от размера индивидуальной частицы и обозначается $\varepsilon(d)$, где d размер частицы, мкм. Эта характеристика зависит от многих факторов $\varepsilon(d, v_{жн}, a, R, d_{ш})$: входной скорости ВТЖ $v_{жн}$, м/с; характерных размеров магнитной системы a , м и постоянного магнита R , м; толщины слоя осадка феррошлам $d_{ш}$, мм, налипшего на магнитный элемент.

Общая задача математического моделирования характеристик магнитной сепарации разбивается на три последовательных этапа (рисунок 4.1), которые будут реализованы в данной главе.

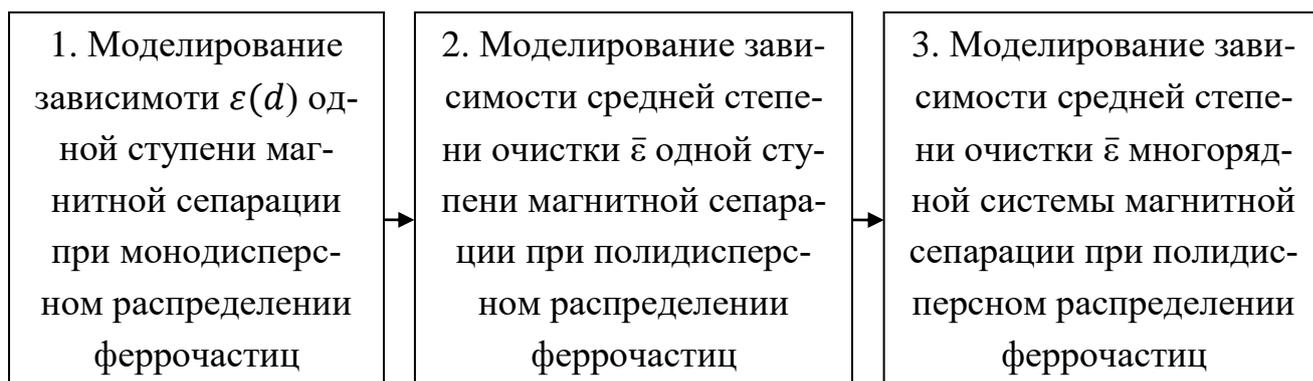


Рисунок 4.1 – Этапы решения задачи математического моделирования основной характеристики магнитного сепаратора (d – размер ферромагнитной частицы)

Особое место в этой главе занимают вопросы, связанные с методологией математического моделирования семейств характеристик степени очистки $\varepsilon(d, v_{\text{жн}}, a, R, d_{\text{ш}})$, которые базируются на необходимости моделирования траекторий ферромагнитных частиц в потоке ВТЖ под действием магнитных сил. ВТЖ представляют собой *слабо концентрированную водную суспензию (с массовой концентрацией 0.01 – 0.1%)* из ферромагнитных полидисперсных частиц (рис.1.7). При этом для выявления чистого эффекта процесса магнитного осаждения примем допущение, что эффекты коагуляции отсутствуют. Такое допущение, как будет вскрыто в 5 главе, правомерно при относительно малых исходных концентрациях ферромагнитных примесей в ВТЖ. Поэтому для построения научных основ магнитного осаждения и моделирования характеристик магнитных сепараторов достаточно определить траекторию движения одиночной частицы.

В рамках приближения разбавленных растворов пренебрегаются межчастичные взаимодействия (стерические, магнитодипольные и гидродинамические) [60]. Так как магнитные силы на порядок больше гравитационных сил, поэтому седиментацией под действием силы тяжести пренебрегаем.

В данной главе решаются две задачи диссертационной работы;

- разработка научных основ магнитной сепарации жидких водных технологических жидкостей на основе поиска приближенного аналитического решения нелинейного уравнения динамики ферромагнитных частиц в ламинарном потоке ВТЖ;
- разработка численно-аналитического метода моделирования семейств характеристик степени очистки магнитных сепараторов и реализация его алгорит-

мом и программой.

4.2. Математическое моделирование процесса обтекания водным потоком решетки магнитных стержней-патронов

4.2.1. Численное моделирование линий растекания водного потока

В магнитных сепараторах длина патронов намного превышает их диаметр, поэтому ограничимся исследованием плоской картины растекания потока ВТЖ при помощи программного пакета компании Mentor Graphics – FloEFD. Программный пакет FloEFD предназначен для решения задач гидродинамики и сопряженного теплообмена. Этот пакет методом конечных элементов проводит численное интегрирование уравнений Навье-Стокса (в формулировке уравнений сохранения массы и импульса для потока жидкости). Эти уравнения дополняются уравнением состояния и эмпирическими зависимостями плотности, вязкости и теплопроводности жидкости от температуры. Пакет FloEFD использует k -ю модель турбулентности, сформулированную в виде уравнений переноса кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации турбулентной энергии.

На рисунке 4.2. представлена расчетная схема, состоящая из трех ступеней сепарации. Принималось следующее допущение: расчетная область сверху и снизу ограничена абсолютно гладкими поверхностями, исключаяющими пограничный слой. Расчетная область разбивалась прямоугольной сеткой конечных элементов (их число 400 тыс.).

Граничные условия задачи соответствуют свободному изливу жидкости (воды) через сетку круглых профилей без теплообмена; на входе задавались два значения скорости жидкости ($v_1 = 0.003$ м/с, $v_2 = 0.03$ м/с), на выходе – атмосферное давление; скорость жидкости на поверхности цилиндра считалась равной нулю (модель адиабатической стенки с прилипанием). Шероховатость поверхности цилиндра задавалась нулевой.

Результаты расчета представлены на рисунке 4, а-г.

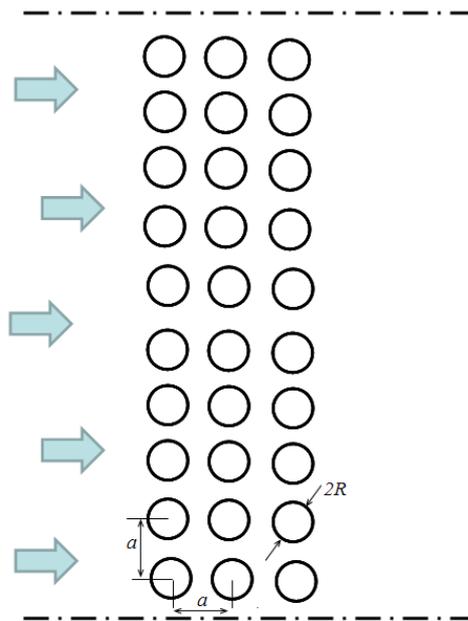


Рисунок 4.2 – Расчетная схема обтекания магнитных патронов потоком ВТЖ для пакета FloEFD

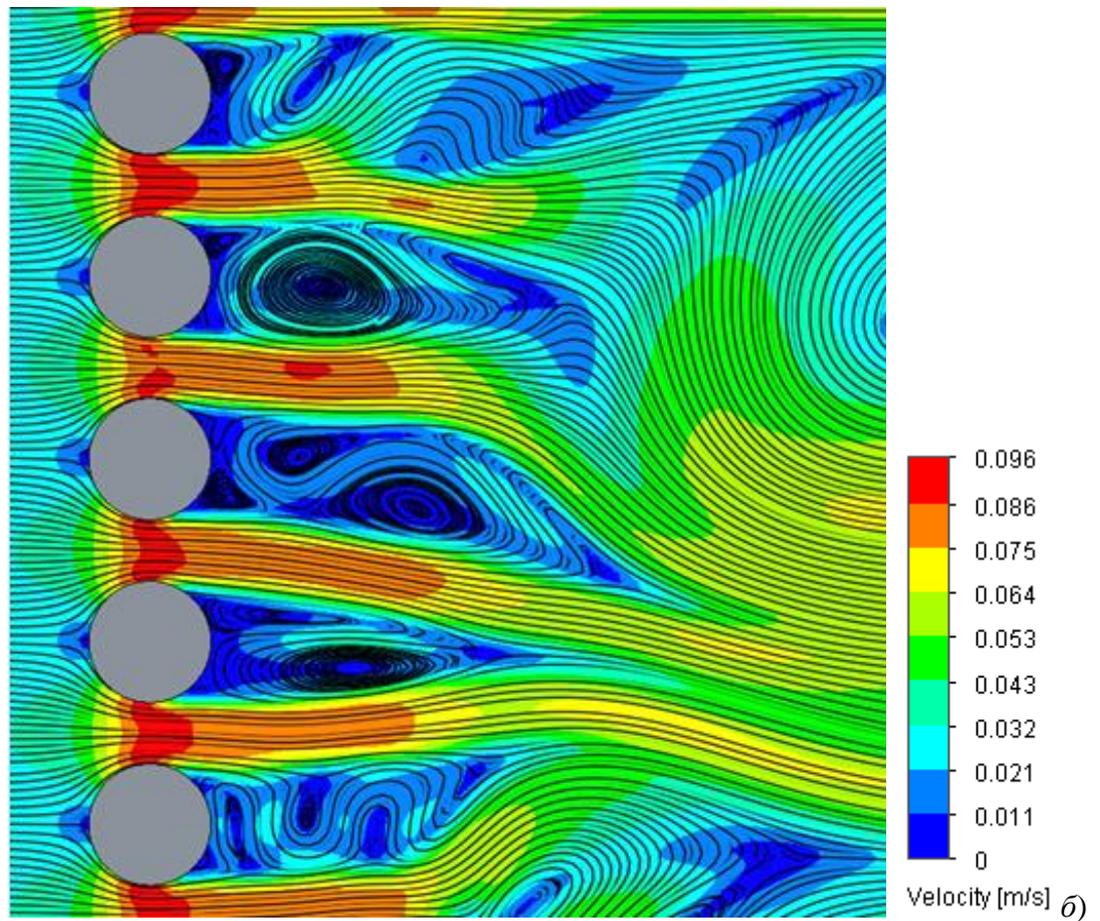
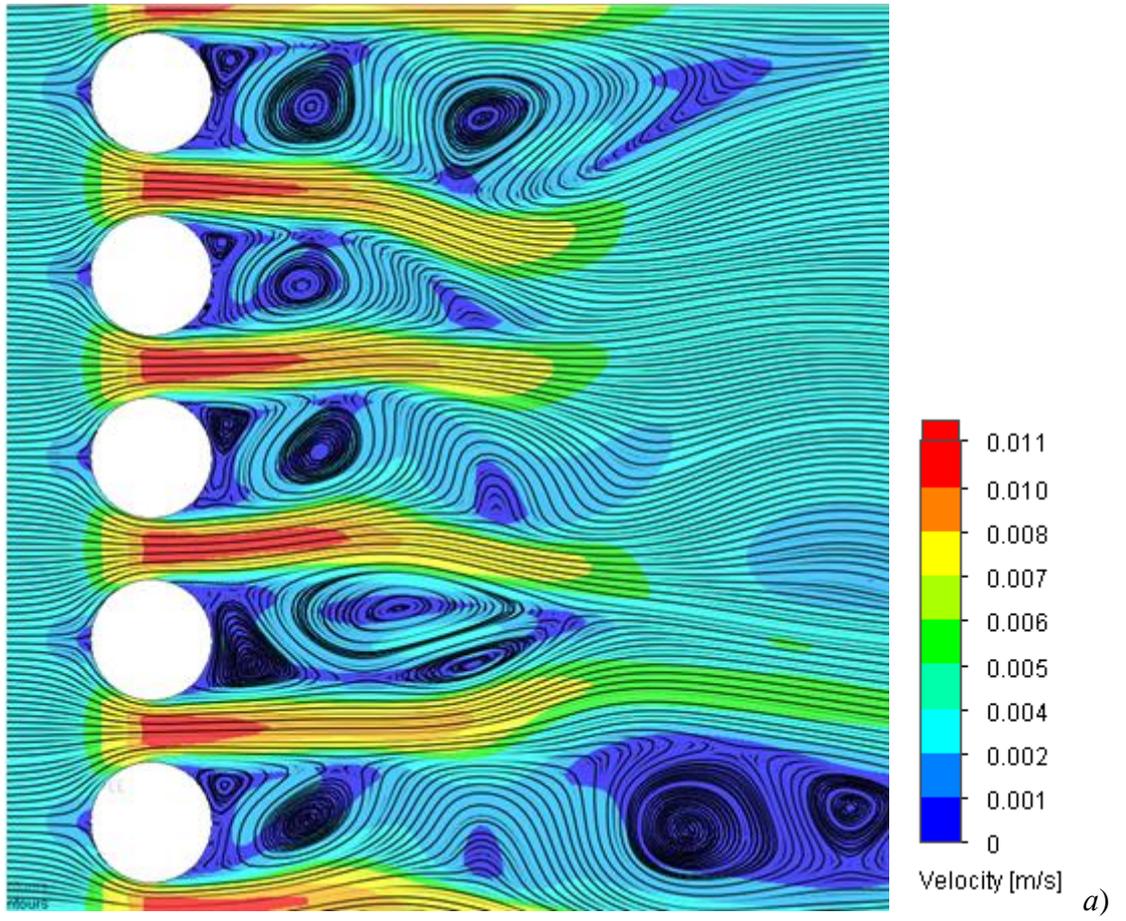
Расчеты показали, что картина линий тока первой ступени сепарации отличается от картины линий тока последующих ступеней. На входе первой ступени (слева) поток жидкости обтекает цилиндрические профили. Далее поток с поперечным сечением, равным зазору между цилиндрическими профилями, поступает прямолинейной струёй на вторую и третью ступени сепарации. Справа за каждым цилиндрическим профилем происходит, отрыв пограничного слоя и образование вихрей. В этой области поток практически не перемещается.

В итоге, при моделировании траекторий ферромагнитных частиц в ВТЖ для первой ступени сепарации будем учитывать процесс обтекания потоками жидкостей профилей цилиндрических магнитов; для последующих ступеней ограничимся приближениями только поступательных прямолинейных потоков. На участках, где отсутствуют вихри линий тока, применим при моделировании приближение безвихревого поля скоростей жидкой среды ($rot \mathbf{v}_ж = 0$), что равносильно условию потенциальности поля скоростей

$$\mathbf{v}_ж = \text{grad } u, \quad (4.1)$$

где u – потенциал скоростей потока.

На этих участках будем применять потенциальную теорию движения жидкости.



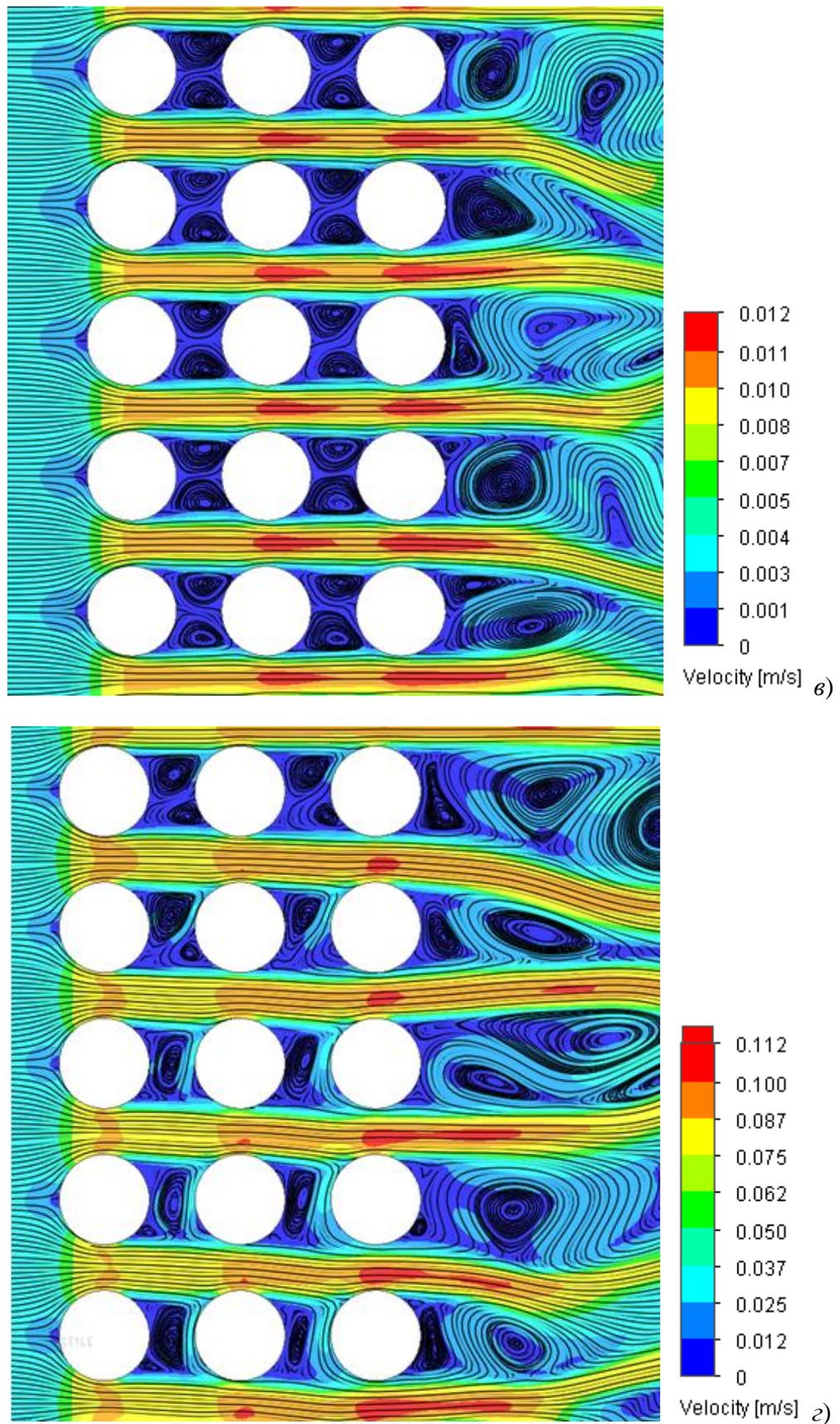


Рисунок 4.3 – Распределение скоростей и линии тока жидкости ($a = 48$ мм, $R = 16$ мм):
 $a, б$ – для одной ступени сепарации; $в, г$ – для трех ступеней сепарации;
 скорость на входе $v_1 = 0.003$ м/с для ($a, в$); скорость на входе $v_2 = 0.03$ м/с для ($б, г$)

4.2.2. Аналитическое моделирование распределения скоростей водного потока для первой ступени магнитной сепарации

Для моделирования потоков ВТЖ через сетку цилиндрических профилей воспользуемся квазиизоморфностью левых частей картин линий тока вязкой жидкости на сетке цилиндров в окрестности цилиндрического профиля (рисунок 4.4, а) и линий тока идеальной жидкости в окрестности одиночного цилиндра (рисунок 4.4, б).

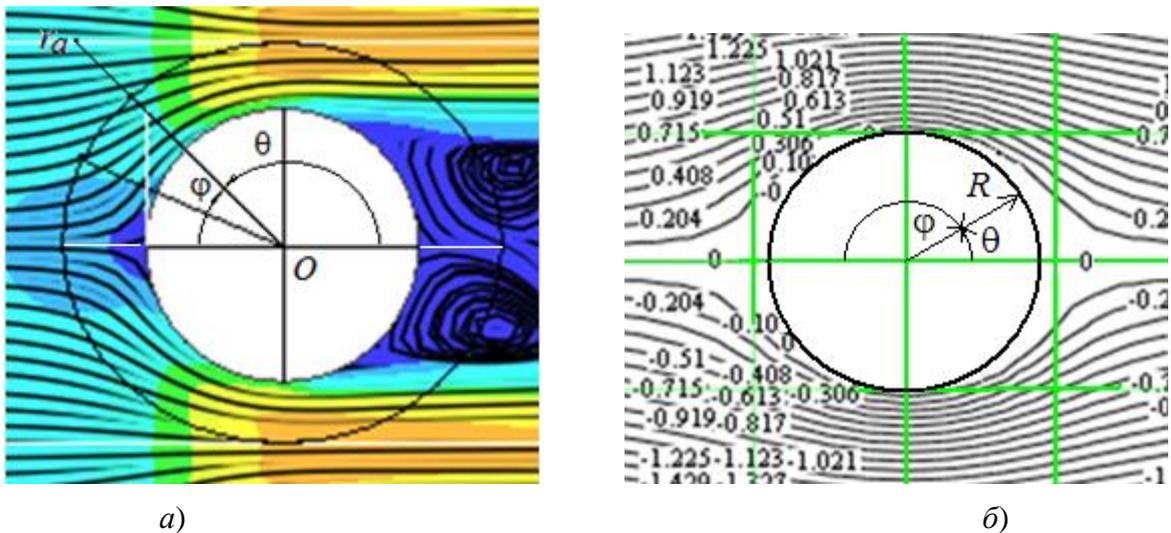


Рисунок 4.4 – Линии тока при $v = 0.003$ м/с

а– для вязкой жидкости на сетке цилиндров в окрестности цилиндрического профиля; б – для идеальной жидкости на одиночном цилиндре

За основу примем математическую модель обтекания одиночного цилиндра идеальной жидкостью [26], полученную на основе потенциальной теории. В этой модели составляющие скорости потока в полярной системе координат описываются следующими зависимостями:

$$v_{jr0} = -v_{жн} \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right); \quad (4.2)$$

$$v_{j\theta0} = v_{жн} \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right), \quad (4.3)$$

где $v_{жн}$ – скорость потока на гипотетической бесконечности.

Применим процедуру корректировки линий тока ВТЖ к (4.2), (4.3):

$$v_{jr} = -v_{жн} k_1 \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \quad (4.4)$$

$$v_{ж\theta} = v_{жн} k_2 \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right). \quad (4.5)$$

Угловая координата θ в (4.4), (4.5) по рисунку 4.4, b отсчитывается против часовой стрелки (против потока). Переходя к новой угловой координате $\varphi = \pi - \theta$, радиальная составляющая скорости (4.4) примет вид

$$v_{жr} = v_{жн} k_1 \cos \varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Навяжем уравнениям (4.4), (4.5) свойства потока, проходящего через решетку цилиндрических профилей (расположенных друг от друга на расстоянии a). Коэффициент k_2 определим из условия непрерывности потока. Для этого рассчитаем поток через наклонную плоскую поверхность шириной l , которая проходит через радиальную ось полярной системы координат и ограничена снизу и сверху соответствующими точками $r = R$ и $r = r_a$ (рисунок 4.4, a):

$$Q_r(\varphi) = \int_{S_r} v_{ж\varphi} dS = v_{жн} k_2 l \sin \varphi \int_R^{r_a} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) dr = v_{жн} k_2 l \sin \varphi \left(r_a - \frac{R^2}{r_a}\right). \quad (4.6)$$

В (4.6) точка r_a лежит на пересечении радиальной оси и серединной линии, делящей расстояние a между двумя противоположными цилиндрическими профилями на две равные части (рисунок 4.4, a). Накладывая условие непрерывности потока $Q_r(\varphi) = Q_\infty \equiv av_{жн} l/2$ и учитывая $r_a = a/2 \sin \varphi$, из (4.6) получим k_2 :

$$k_2 = \left[1 - \left(\frac{2R}{a}\right)^2 (\sin \varphi)^2\right]^{-1}. \quad (4.7)$$

Коэффициент k_1 в (4.4) определим из условия потенциальности скорости потока в левой части первой ступени цилиндрических профилей (рисунок 4.3). Интегрируя тангенциальную составляющую скорости (4.5), выраженную через потенциал $v_{ж\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ в полярной системе координат, получим потенциал скорости

$$u = v_{жн} r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \int \frac{\sin \theta d\theta}{\left[1 - \left(\frac{2R}{a}\right)^2 k^2 (\sin \theta)^2\right]} = -\frac{v_{жн}}{k\sqrt{1-k^2}} r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \arctg\left(\frac{k \cos \theta}{\sqrt{1-k^2}}\right), \quad (4.8)$$

где $k = 2R/a$.

Дифференцируя потенциал (4.8) по координате r , получим радиальную составляющую скорости $v_{жr} = \frac{\partial u}{\partial r}$, сопоставляя которую с (4.4) при учете замены переменной $\theta = \pi - \varphi$, раскроем содержание коэффициента k_1 :

$$k_1 = -\frac{1}{k\sqrt{1-k^2}\cos\theta} \operatorname{arctg}\left(\frac{k\cos\theta}{\sqrt{1-k^2}}\right) = -\frac{1}{k\sqrt{1-k^2}\cos\varphi} \operatorname{arctg}\left(\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2}}\right). \quad (4.9)$$

Таким образом, получена математическая модель составляющих скорости потока для описания процесса обтекания магнитов с левой стороны первой ступени сетки цилиндров. В системе координат (r, φ) по рисункам 4.4–4.5 выражения (4.4), (4.5) с учетом (4.7) и (4.9) примут следующий вид:

$$v_{jr} = -\frac{v_{жн}}{k\sqrt{1-k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2}}\right) \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \quad (4.10)$$

$$v_{j\varphi} = -v_{j\theta} = v_{жн} [1 - k^2(\sin\varphi)^2]^{-1} \sin\varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right). \quad (4.11)$$

В дальнейшем тангенциальную составляющую скорости $v_{j\varphi}$ обозначим $v_{ж\tau} = v_{j\varphi}$.

Выражения (4.10), (4.11) используем для расчета характеристик процесса сепарации.

4.3. Постановка задачи математического моделирования характеристик разделения монодисперсных суспензий в магнитных полях

В третьей главе установлено, что магнитная сила резко уменьшается по показательному закону (3.72) при удалении от поверхности. В частности, для типичного примера на рисунке 3.19 наблюдается уменьшение магнитной силы на целый порядок уже на расстоянии 4...5 мм от поверхности патронов. Это расстояние меньше половины значения $a - 2R$, равного расстоянию между поверхностями противоположно расположенных магнитов. При этом в главе 3 установлено, что геометрическому месту точек, лежащему на срединной линии между магнитами (рисунок 4.5, *a*), соответствует нулевая магнитная сила $f_{m2}(r = a/2) = 0$.

В соответствии с отмеченными аргументами введем в ячейке сепарации два полуцилиндрических магнитоактивных элемента (рисунок 4.5, *a*), на границах которых магнитные силы принимаются равными нулю. Вследствие симметрии распределения полей и линий тока в магнитоактивных элементах (рисунки 4.3 и 4.4) ограничимся рассмотрением процессов сепарации только в одном магнитоактив-

ном элементе рабочей области сепаратора (рисунок 4.5, б).

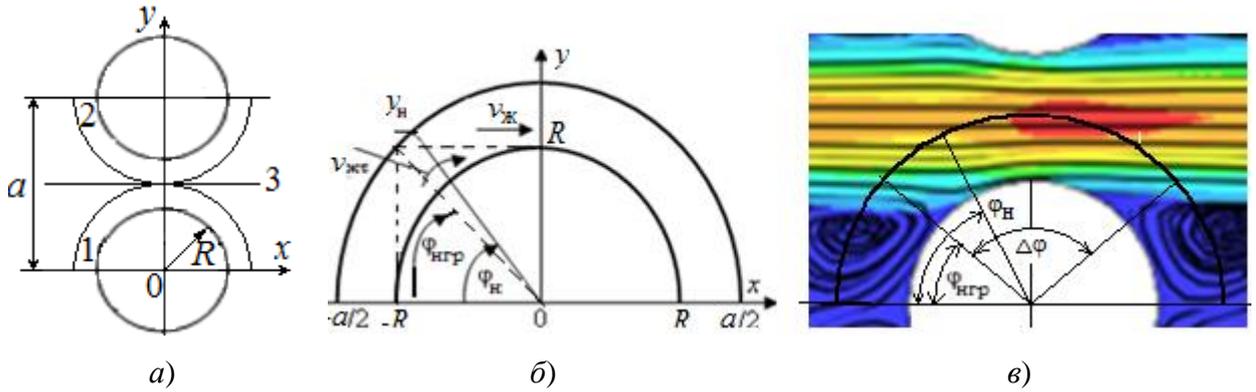


Рисунок 4.5 – Магнитоактивные рабочие области:

a – для ячейки сепарации, где 1 и 2 – магнитоактивные элементы; 3 – линия нулевого радиального градиента магнитного поля; *б* – для элемента первой ступени сепарации; *в* – для элемента последующих ступеней сепарации

Таким образом, очищаемая жидкость проходит элемент сепарации слева направо с некоторой скоростью $v_{ж}$. Попадая в поле притяжения постоянного магнита, частица может прилипнуть к нему.

В работе [24] показано, что степень очистки жидкости в магнитных сепараторах выражается формулой $\varepsilon(d) = \frac{2y_n(d)}{a}$. В соответствии с рисунком 4.5, б для первой ступени сепарации правомерна следующая формула характеристики степени очистки:

$$\varepsilon_1(d) = \sin \varphi_n(d) = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_n(d)}, \quad (4.12)$$

где $y_n(d) = y_n$ и $\varphi_n(d) = \varphi_n$ – критические значения ординаты и угла вхождения в элемент сепаратора феррочастицы определенного размера (диаметра), при котором частица находится на границе двух состояний – попадания или непопадания на магнит.

Для второй, третьей и последующих ступеней сепарации практически весь поток сосредоточен в прямоугольной поступательной струе высотой $a - 2R$ и шириной l (рисунок 4.5, в), в которой осредненную по высоте скорость обозначим $\bar{v}_{жс}$. Здесь степень очистки будет выражаться следующей зависимостью:

$$\varepsilon_2(d) = \frac{2(y_n(d) - R)}{a - 2R} = \left[\frac{\sin \varphi_n(d) - k}{1 - k} \right], \quad (4.13)$$

где $k = 2R/a$ (следует иметь в виду, что $\sin \varphi_{нгр} = k$, $\varphi_{нгр} \leq \varphi_n(d)$).

В первой главе отмечено, что характеристики магнитных сепараторов строятся на основе характеристик состояния движения ферромагнитных частиц на их траекториях. Также подчеркнуто, что важно получить аналитическую модель траектории феррочастицы, которая позволит изучить наиболее характерные состояния движения феррочастиц в магнитном сепараторе, причем не только для оценки возможности их осаждения, но и для оценки магнитной коагуляции.

Поскольку поток жидкости неоднороден, то аналитическое решение можно получить методом разбиения магнитоактивного элемента сепарации на две удобные для анализа области, исходя из характера течения ламинарного потока: на область преимущественно поступательного перемещения потока и область преимущественно вращательного перемещения потока, омывающего цилиндрическую поверхность магнита. Область поступательного перемещения потока присутствует для всех секций сепарации и ограничена следующими условиями: $-R \leq x \leq R$, $R \leq y \leq a/2$; $\varphi_{\text{нгр}} \leq \varphi \leq \pi - \varphi_{\text{нгр}}$; $R \leq r \leq a/2$. Область вращательного перемещения потока присутствует только для первой секции сепарации и ограничена следующими условиями:

$$-R \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq R; 0 \leq \varphi \leq \pi/2; R \leq r \leq a/2.$$

4.4. Математическое моделирование траектории движения частицы на поступательном участке потока водной технологической жидкости

4.4.1. Исходная система уравнений

Перемещение ферромагнитной частицы, вошедшей в активную область элемента сепаратора с начальной угловой координатой $\varphi_{\text{нгр}} \leq \varphi_n \leq 90^\circ$, определяется двумя движениями: относительным движением в радиальном направлении Δr_m (под действием распределенных магнитных сил [159]) и переносным движением, приводящим к смещению $\Delta r_{\text{ж}}$ в направлении потока ВТЖ. Результирующая скорость (относительно неподвижных магнитов) и расстояние частицы до оси симметрии в полярной системе координат определяются соответственно выражениями

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M + \mathbf{v}_J, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(0) + \Delta \mathbf{r}_M + \Delta \mathbf{r}_J, \quad (4.15)$$

где (4.15) является интегралом (4.14); \mathbf{v}_M – вектор скорости, обусловленный магнитной силой, м/с; \mathbf{v}_J – вектор скорости потока ВТЖ, м/с; $\mathbf{r}(0)$ – начальный радиус-вектор положения феррочастицы, м.

Относительная составляющая перемещения $\Delta \mathbf{r}_M$ не зависит от направления радиус-вектора \mathbf{r} частицы и определяется только его значением. Здесь отсутствуют центробежные силы, поэтому динамическое уравнение магнитного движения скалярное:

$$m \frac{dv_M}{dt} = f_M(r) + f_T, \quad (4.16)$$

где $m = m_\phi + m_J$ – результирующая масса сферической частицы [167], состоящая из ферромагнитной массы частицы m_ϕ и присоединенной массы жидкой среды m_J , равной *половине* массы жидкости, вытесненной сферической частицей, кг; $f_M(r)$ – магнитная сила притяжения, значение которой зависит от расстояния r удаления частицы от оси симметрии и имеет радиальное направление [17, 21, 24], Н; f_T – сила трения в жидкости, Н.

Сила трения, описанная теорией Стокса, которая правомерна для сферического тела при значениях чисел Рейнольдса $Re < 3$, [201, с. 31]. С учетом динамической силы трения [195] уравнение (4.16) принимает следующий вид:

$$m \frac{d^2 \Delta r_M}{dt^2} + K_{c1} \frac{d \Delta r_M}{dt} = f_M(r), \quad (4.17)$$

где $K_{c1} = 3\pi\eta d$ – коэффициент пропорциональности в формуле Стокса, кг·с⁻¹; η – коэффициент динамической вязкости жидкой среды, кг·с⁻¹·м⁻¹; d – диаметр феррочастицы, м.

Уравнение (4.17) в общем случае нелинейное как в силу нелинейной зависимости функции $f_M(r)$, так и в силу метрического соотношения между значениями r и Δr_M . Для получения аналитического решения дифференциального уравнения движения феррочастицы нелинейную зависимость магнитной силы $f_M(r)$ заменим кусочно-линейной зависимостью (3.78), (3.83). Заметим, что сила $f_{MK}(r)$ положительна относительно направления магнитных перемещений $\Delta \mathbf{r}_M$ и отрица-

тельна вдоль радиус-вектора \mathbf{r} .

4.4.2. Представление системы уравнений в полярных координатах

Утверждение 4.1. Стандартная система ДУ (4.14), (4.15), (4.17) перемещения феррочастицы на множестве $\mathbf{r} \in \{r \in \mathbf{r} | R \leq r \leq 0.5a\}$ в потоке жидкой среды под действие магнитных сил преобразуется в такую систему ДУ (4.24) – (4.26) (или (4.24), (4.27), (4.28)), направленный граф которой имеет *последовательную структуру* (рисунок 4.6, а), а *метрическая нелинейность исходной системы локализуется в одном звене графа* – в ветвях прямой и обратной связей.

Проведем преобразование системы векторных кинематических уравнений (4.14) – (4.15) в систему двух скалярных уравнений, выраженных в полярной системе координат. Для этого сначала запишем результирующую скорость частицы $\mathbf{v} = \frac{d(\mathbf{r}e_r)}{dt}$ через производную по времени от радиус-вектора \mathbf{r} ; после подстановки в (4.14), получим

$$\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = v_M \mathbf{e}_M + v_{жr} \mathbf{e}_r + v_{ж\tau} \mathbf{e}_\tau, \quad (4.18)$$

где \mathbf{e}_r – орт радиус-вектора \mathbf{r} ; $\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_M$ – направляющий единичный вектор \mathbf{v}_M , \mathbf{e}_τ – орт тангенциальной составляющей скорости потока.

Для первой секции сепарации из (4.18), с учетом (4.10), (4.11), следует система двух скалярных кинематических уравнений в полярной системе координат:

$$\frac{dr}{dt} = -v_M - \frac{v_{жн}}{k\sqrt{1-k^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2}} \right) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right); \quad (4.19)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = v_{жн} [1 - k^2 (\sin \varphi)^2]^{-1} \sin \varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (4.20)$$

Для второй, третьей и последующих секций сепарации разложим осредненную скорость $\bar{v}_{жс}$ поступательного потока на два взаимно перпендикулярных вектора

$$\bar{v}_{жс} \mathbf{e}_x = -\bar{v}_{жс} \cos \varphi \mathbf{e}_r + \bar{v}_{жс} \sin \varphi \mathbf{e}_\tau, \quad (4.21)$$

где \mathbf{e}_x – орт координатной оси Ox . Тогда векторному уравнению (4.18), с учетом (4.21), соответствует система двух скалярных кинематических уравнений в полярной системе координат:

$$\frac{dr}{dt} = -v_M - \bar{v}_{жс} \cos\varphi; \quad (4.22)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = \bar{v}_{жс} \sin\varphi. \quad (4.23)$$

При этом использовали следующие представления векторов \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_τ и $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$:

$$\mathbf{e}_r = \cos(\pi-\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\pi-\varphi)\mathbf{e}_y; \quad \mathbf{e}_\tau = \sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y; \quad \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\tau,$$

где \mathbf{e}_y – орт координатной оси Oy .

Для образования полной системы уравнений движения частицы необходимо к кинематическим уравнениям (4.19), (4.20) или (4.22), (4.23) добавить динамическое уравнение

$$m \frac{d v_M}{dt} + K_{c1} v_M = -f_k + \alpha_{0k} r, \quad (4.24)$$

которое получено из (4.17) подстановкой (3.78), (3.82) при $k = 1, 2$.

В системах уравнений (4.19), (4.20), (4.24) и (4.22), (4.23), (4.24) механическое состояние частицы полностью определяется скоростью v_M и радиус-вектором r частицы. Тогда дополнительная независимая переменная φ будет избыточной, поэтому следует найти способ её исключения из соответствующих систем дифференциальных уравнений.

Во второй главе представлен способ согласования порядка построенной математической модели со степенью свободы исследуемого физического объекта для случая дифференциальной линейной модели. Дифференциальную линейную математическую модель можно представить в виде такой системы дифференциальных уравнений первого порядка, направленный граф которой имеет последовательную структуру.

Полные системы уравнений (4.19), (4.20), (4.24) и (4.22), (4.23), (4.24) являются нелинейными даже при кусочно-линейной аппроксимации магнитной силы из-за метрической нелинейности

$$r = \sqrt{(x(0) - \Delta r_{mx} - \bar{v}_{жс} t)^2 + (y(0) - \Delta r_{my})^2}.$$

Для получения аналитического решения каждой системы обратимся к направленному графу системы уравнений, который изображен на рисунке 4.6, а.

Граф, наглядно характеризующий распределение причинно-следственной

связи между переменными состояниями частицы v_M , r , φ , содержит как линейные, так и нелинейными связи. Линейные связи, обуславливаемые линейным дифференциальным оператором первого порядка, изображены одной стрелкой, оператором второго порядка – двумя стрелками. Нелинейные связи, обуславливаемые нелинейными дифференциальными операторами первого порядка, изображены стрелкой и двумя штрихами.

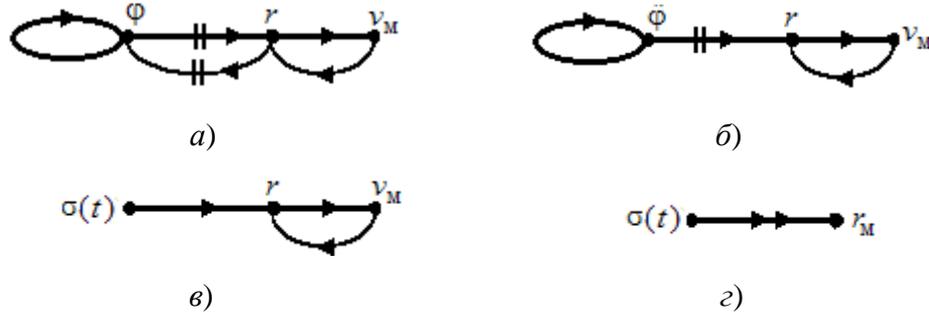


Рисунок 4.6 – Направленные графы: *а* – исходной системы уравнений; *б* – упрощенной системы уравнений; *в* – уравнения пониженного порядка; *г* – свернутой системы уравнений; v_M , r , φ – переменные механического состояния феррочастицы; r_M – дополнительная переменная; $\hat{\varphi}$ – усредненная переменная; $\sigma(t)$ – временная функция. Связи: \rightarrow – линейный оператор 1-го порядка, $\parallel\rightarrow$ – нелинейный оператор 1-го порядка, \Rightarrow – линейный оператор 2-го порядка

Подчеркнем, что переменным состояниям частицы v_M , r , φ соответствует направленный граф канонической структуры, в котором причинно-следственные связи между переменными строго последовательные.

Утверждение 4.2. Система ДУ (4.19), (4.20) и (4.24) (или (4.22) – (4.24)) с направленным графом последовательной структуры (рисунок 4.6, *а*) на множестве $r \in \{r \in R | R \leq r \leq 0.5a\}$ интегрируема в квадратурах, если провести развязку ветвей графа обратной связи (рисунок 4.6, *б*).

Отметим, что в реальных сепараторах диапазон вариации значения радиальной координаты r частицы ограничен конструктивным фактором и не снижается ниже уровня двух третей максимального значения r_{\max} ($r_{\max} = \frac{a}{2} \geq r \geq r_{\min} = R$). Влиянием небольшой вариации значения переменной r не будем учитывать в уравнениях (4.19), (4.20) и (4.23) системы. Для этого усредним каждое уравнение по переменной r в диапазоне её вариации:

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle_r = -\langle v_M \rangle_r - \left\langle \frac{v_{\text{жн}}}{k\sqrt{1-k^2}} \arctg \left(\frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2}} \right) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right\rangle_r;$$

$$\langle r \frac{d\varphi}{dt} \rangle_r = v_{\text{жн}} \langle [1 - k^2 (\sin \varphi)^2]^{-1} \sin \varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \rangle_r;$$

$$\langle r \frac{d\varphi}{dt} \rangle_r = \langle \bar{v}_{\text{жс}} \sin \varphi \rangle_r.$$

Для точечных объектов линейная скорость $v_M = v_M(t)$ и угловая скорость $\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t)$ – это функции времени, поэтому средние значения есть:

$$\langle v_M \rangle_r = v_M; \quad \langle r \frac{d\varphi}{dt} \rangle_r = \left(\frac{d\varphi}{dt} \int_R^{(a/2)} r dr \right) / [((a/2) - R)] = \frac{d\varphi}{dt} \bar{r};$$

$$\text{где } \bar{r} = 0.5[(a/2) + R]; \quad \left\langle \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \right\rangle_r = (1 - k); \quad \left\langle \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \right\rangle_r = (1 + k).$$

В результате усреднения кинематические уравнения (4.19), (4.20) и (4.22), (4.23) соответственно примут вид:

$$\frac{dr}{dt} \cong -v_M - \frac{v_{\text{жн}}}{k\sqrt{1-k^2}} (1 - k) \operatorname{arctg} \left(\frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2}} \right); \quad (4.25)$$

$$\bar{r} \frac{d\varphi}{dt} = v_{\text{жн}} [1 - k^2 (\sin \varphi)^2]^{-1} (1 + k) \sin \varphi; \quad (4.26)$$

$$\frac{dr}{dt} = -v_M - \bar{v}_{\text{жс}} \cos \varphi; \quad (4.27)$$

$$\bar{r} \frac{d\varphi}{dt} = \bar{v}_{\text{жс}} \sin \varphi. \quad (4.28)$$

Уравнение (4.28) при замене переменной $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ преобразуется к уравнению сепаратрисы математического маятника

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\bar{v}_{\text{жс}} \cos \theta}{\bar{r}}.$$

Так как сепаратриса выражает предел колебательного нелинейного движения математического маятника, то данное уравнение характеризует максимальную нелинейность колебательной системы. Поэтому, подчеркнем, линеаризованное уравнение (4.28) не устраняет существенную нелинейность переменной φ , которая влияет на основные переменные v_M и r состояния ферромагнитной частицы.

Сначала проинтегрируем уравнения (4.27), (4.28), которые правомерны для второй, третьей и следующих секций сепарации. Интегрируя (4.28), получим

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2} e^{\frac{\bar{v}_{\text{жс}} t}{\bar{r}}}. \quad (4.29)$$

Отметим, что на основе упрощений (4.28), (4.29) проведена развязка нелинейной обратной связи между переменными φ и r – связь между ними становится односвязной, направленный граф исходной системы упрощается (рисунок 4.6, б).

Интегрируя (4.27) с учетом (4.28), получим формулу для определения расстояния r частицы до центра симметрии магнитных сил:

$$r = r(0) - \Delta r_M - \Delta r_{жр}; \quad (4.30)$$

$$\Delta r_{жр} = \bar{v}_{жс} \int_{\varphi_H}^{\varphi} \cos \varphi \left(\frac{dt}{d\varphi} \right) d\varphi = \bar{r} \int_{\varphi_H}^{\varphi} \operatorname{ctg} \varphi d\varphi = \bar{r} \ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_H} = \bar{r} \sigma(\varphi), \quad (4.31)$$

где $\Delta r_{жр}$ – проекция на радиальное направление перемещения, обусловленного поступательной составляющей потока с осредненной скоростью $\bar{v}_{жс}$. Эта составляющая выражается через нормированную функцию

$$\sigma(\varphi) = (\Delta r_{жр} / \bar{r}) = \ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_H}.$$

Семейство зависимостей $\sigma(\varphi)$, вычисленное для разных начальных значений углов φ_H вхождения ферромагнитной частицы в магнитоактивный элемент сепарации (рисунок 4.5, в), представлено на рисунке 4.7. На данной зависимости можно выделить две характерные области, которые ограничены тремя кардинальными точками: $\varphi = \varphi_H$; $\varphi = 90^\circ$; $\varphi = 180^\circ - \varphi_H$. В точках φ_H и $180^\circ - \varphi_H$ функция $\sigma(\varphi) = 0$, в точке $\varphi = 90^\circ$ функция $\sigma(\varphi)$ принимает максимальное значение. Итак, на интервале $(\varphi_H; 180^\circ - \varphi_H)$ функция $\sigma(\varphi) > 0$; при $\varphi > 180^\circ - \varphi_H$ функция $\sigma(\varphi) < 0$.

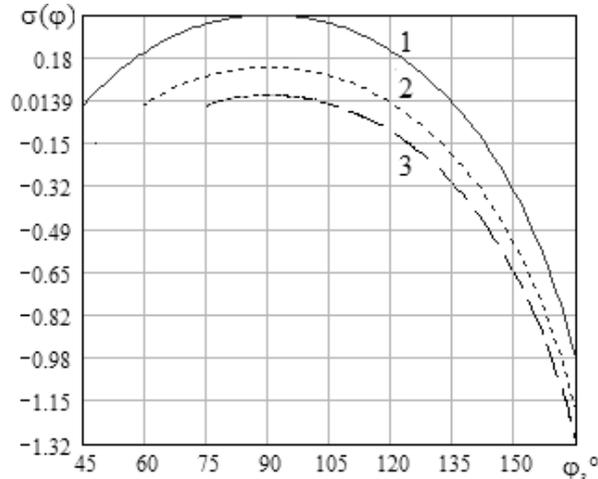


Рисунок 4.7 – Семейство зависимостей нормированных перемещений частицы в радиальном направлении, вызванных течением жидкой среды во второй, третьей и т.д. секциях сепарации: 1 – $\varphi_H = 45^\circ$; 2 – $\varphi_H = 60^\circ$; 3 – $\varphi_H = 75^\circ$

Подчеркнем, что полученные аналитическим путем зависимости (4.30), (4.31) с учетом (4.29) позволяют линеаризовать исходную нелинейную систему ДУ (4.22), (4.24) и понизить её порядок до уровня, соответствующего количеству

переменных v_m и r , необходимых для описания механического состояния ферромагнитной частицы. При этом направленный граф приведенной системы уравнений принимает упрощенный вид (рисунок 4.6, в).

Проинтегрируем уравнения (4.25), (4.26), предназначенные для первой секции сепарации. Отметим, что уравнение (4.26) интегрируется в квадратурах, но искомая функция $\varphi(t)$ будет задана неявно относительно аргумента t .

Для получения явной зависимости $\varphi(t)$ найдем приближенное решение уравнения (4.26) в форме выражения (4.29), представив интеграл

$$I1(\varphi, \varphi_H, k) = \int_{\varphi_H}^{\varphi} \left(\frac{1}{\sin \varphi} - k^2 \sin \varphi \right) d\varphi \quad (4.32)$$

приближенным выражением:

$$I1(\varphi, \varphi_H, k) \cong \zeta1(\varphi_H, k) \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}}, \quad (4.33)$$

в котором функция $\zeta1(\varphi_H, k)$ в допустимой области вариации переменных: $\varphi_H \leq \varphi \leq 180^\circ$; $\varphi_{H\text{гр}} \leq \varphi_H \leq 90^\circ$, $k_{\text{мин}} \leq k \leq k_{\text{мак}}$ удовлетворяет условию

$$\min \left[I1(\varphi, \varphi_H, k) - \zeta1(\varphi_H, k) \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}} \right].$$

В результате аппроксимации найдено выражение:

$$\zeta1(\varphi_H, k) = c1(k)[\varphi_H - 1.56]^2 + c2(k), \quad (4.34)$$

где $c1(k) = 0.64k - 0.23$, $c2(k) = -1.42k + 1.49$. На рисунке 4.8 представлена зависимость $\zeta1(\varphi_H, k)$.

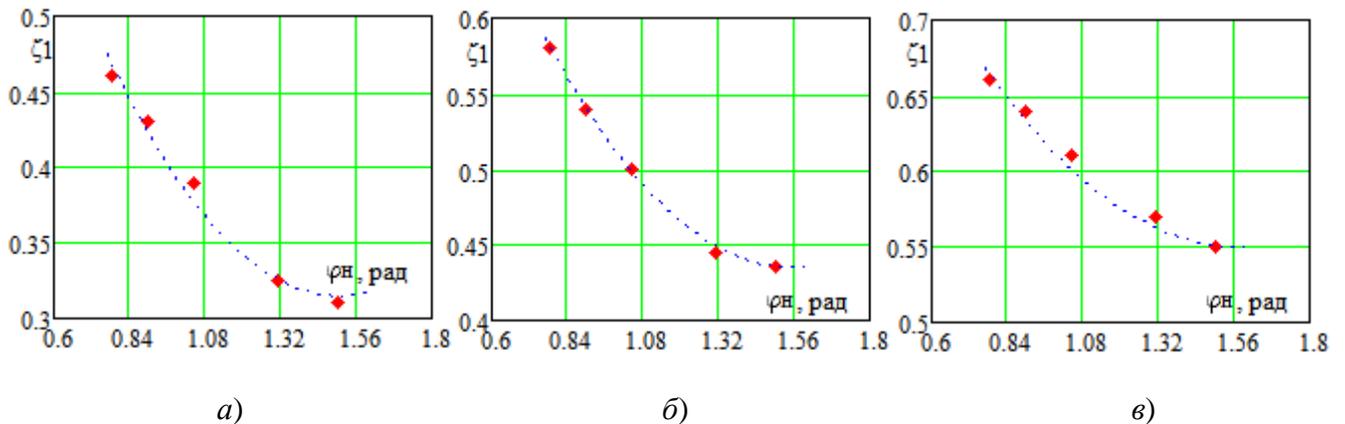


Рисунок 4.8 – Аппроксимационная зависимость $\zeta1(\varphi_H, k)$: а – $k = 0.833$; б – $k = 0.75$; в – $k = 0.667$; $\diamond \diamond$ – числовые значения функции $\zeta1$, соответствующие максимальному приближению к равенству (4.32)

Интегрируя дифференциальное уравнение (4.26) с учетом (4.32), (4.33), по-

лучим следующее приближенное решение ДУ (4.26)

$$tg \frac{\varphi}{2} \cong tg \frac{\varphi_H}{2} e^{\frac{v_{жэ} t}{\bar{r}}}. \quad (4.35)$$

В (4.35) введена эквивалентная расчетная скорость потока

$$v_{жэ} = \frac{v_{жн}(1+k)}{\zeta_1(\varphi_H, k)}. \quad (4.36)$$

После интегрирования (4.25), аналогично (4.31), с учетом (4.26), получим

$$\Delta r_{жр} = \frac{\bar{r}\sqrt{(1-k)}}{k(1+k)^{1.5}} \int_{\varphi_H}^{\varphi} \left(\frac{1}{\sin \varphi} - k^2 \sin \varphi \right) \arctg \left(\frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2}} \right) d \varphi. \quad (4.37)$$

Для получения зависимости $\Delta r_{жр}(\varphi)$, подобной зависимости (4.31), в выражении (4.37) интеграл

$$I_2(\varphi, \varphi_H, k) = \int_{\varphi_H}^{\varphi} \left(\frac{1}{\sin \varphi} - k^2 \sin \varphi \right) \arctg \left(\frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2}} \right) d \varphi$$

заменяем следующим приближенным выражением:

$$I_2(\varphi, \varphi_H, k) \cong \zeta_2(\varphi_H, k) \sigma(\varphi), \quad (4.38)$$

в котором функция $\zeta_2(\varphi_H, k)$ в допустимой области вариации переменных $\varphi_H \leq \varphi \leq 180^\circ$; $\varphi_{нгр1} \leq \varphi_H \leq 90^\circ$, $k_{мин} \leq k \leq k_{мак}$ удовлетворяет условию

$$\min \left[I_2(\varphi, \varphi_H, k) - \zeta_2(\varphi_H, k) \ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_H} \right].$$

В результате аппроксимации найдено выражение

$$\zeta_2(\varphi_H, k) = s_1(k)[\varphi_H - 1.6]^2 + s_2(k), \quad (4.39)$$

$$s_1(k) = 0.57k - 0.27, \quad s_2(k) = 0.5 - 2.1(k - 0.705)^2.$$

На рисунке 4.9, а, б, в сопоставлены зависимости $I_2(\varphi, \varphi_H, k)$, $\zeta_2(\varphi_H, k) \sigma(\varphi)$.

Итак, выражение (4.37) принимает следующий вид:

$$\Delta r_{жр} \cong \frac{\bar{r}\sqrt{(1-k)}}{k(1+k)^{1.5}} \zeta_2(\varphi_H, k) \sigma(\varphi) = \bar{r}_3 \sigma(\varphi), \quad (4.40)$$

в котором

$$\bar{r}_3 = \frac{\bar{r}\sqrt{(1-k)}}{k(1+k)^{1.5}} \zeta_2(\varphi_H, k).$$

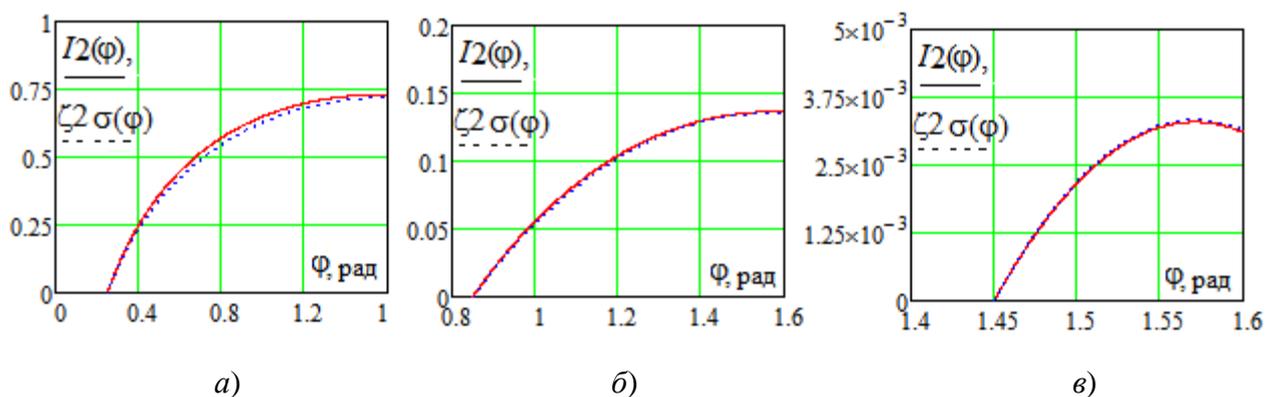


Рисунок 4.9 – Сопоставление зависимостей $I2(\varphi, \varphi_n, k)$ и $\zeta2(\varphi_n, k)\sigma(\varphi)$ при $k = 0.53$:
 а– для $\varphi_n = 0.25$ рад ; б– для $\varphi_n = 0.85$ рад ; в– для $\varphi_n = 1.45$ рад

В итоге сделаем следующие выводы:

- обнаружена такая совокупность из трех переменных, характеризующих механическое состояние частицы (v_m, r, φ) , в рамках которых задача перемещения частицы описывается полной системой трех ДУ первого порядка с канонической структурой направленного графа (с последовательными связями между переменными динамического состояния ферромагнитной частицы);

- найдена возможность устранить нелинейную обратную связь между двумя переменными состояния частицы, линеаризовать исходную систему ДУ и понизить её порядок по методике, разработанной во второй главе, тем самым, избавиться от избыточных уравнений;

- разработан метод представления решения систем кинематических уравнений (4.25), (4.26) и (4.27), (4.28) в одинаковой форме, что позволяет в дальнейшем унифицировать процедуры исследования этих решений, которые будут изложены в следующем пункте.

4.4.3. Эквивалентная добавочная сила

Для получения удобного для дальнейшего анализа аналитического решения систем уравнений (4.25), (4.28) и (4.29), (4.31) семейство универсальных зависимостей $\sigma(\varphi)$ аппроксимируем следующим выражением:

$$\sigma(\varphi) \approx \beta + 2\alpha \cdot \text{sign}(\varphi - 90^\circ) \text{ctg } \varphi; \quad \alpha = 0.2 \sin \varphi_n; \quad \beta = 0.4 \cos \varphi_n, \quad (4.41)$$

где обобщенная функция: $\text{sign}(\varphi - 90^\circ) = -1$ при $\varphi < 90^\circ$; $\text{sign}(\varphi - 90^\circ) = 1$, при $\varphi > 90^\circ$.

Подставив в (4.41) известное тригонометрическое выражение $ctg\varphi = (ctg\frac{\varphi}{2} - tg\frac{\varphi}{2})/2$, с учетом зависимости (4.35) для первой секции сепарации в диапазоне вариации угловой координаты $\varphi_H \leq \varphi \leq 90^\circ$ получим

$$\sigma 1(\varphi(t)) \approx \beta + \alpha \cdot \text{sign}(\varphi - 90^\circ) \left[ctg\frac{\varphi_H}{2} e^{-\frac{v_{жэ}t}{\bar{r}}} - tg\frac{\varphi_H}{2} e^{\frac{v_{жэ}t}{\bar{r}}} \right]; \quad (4.42)$$

с учетом зависимости (4.29) для первой секции в диапазоне вариации $90^\circ \leq \varphi$, а также для второй, третьей и других секций сепарации в диапазоне вариации $\varphi_H \leq \varphi$, получим

$$\sigma 2(\varphi(t)) \approx \beta + \alpha \cdot \text{sign}(\varphi - 90^\circ) \left[ctg\frac{\varphi_H}{2} e^{-\frac{\bar{v}_{жэ}t}{\bar{r}}} - tg\frac{\varphi_H}{2} e^{\frac{\bar{v}_{жэ}t}{\bar{r}}} \right]. \quad (4.43)$$

Подставив (4.43) в правое выражение (4.31) и (4.42) в (4.40) и далее каждое в (4.30), получим соответственно текущее радиальное расстояние частицы:

$$r = r_M - \bar{r}\sigma 2(\varphi(t)) \quad \text{или} \quad r = r_M - \bar{r}_3\sigma 1(\varphi(t)), \quad \text{где} \quad r_M = r(0) - \Delta r_M. \quad (4.44)$$

Подставив (4.44) в (4.24), получим соответственно для каждого случая неоднородное линейное обыкновенное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$m \frac{d^2 r_M}{dt^2} + K_{c1} \frac{dr_M}{dt} - \alpha_{0к} r_M = -f_k - \alpha_{0к} \bar{r} \sigma 2(\varphi(t)); \quad (4.45)$$

$$m \frac{d^2 r_M}{dt^2} + K_{c1} \frac{dr_M}{dt} - \alpha_{0к} r_M = -f_k - \alpha_{0к} \bar{r}_3 \sigma 1(\varphi(t)), \quad (4.46)$$

сигнальный граф которых иллюстрируется рисунком 4.6, *г*.

В уравнениях (4.45), (4.46) для относительного перемещения r_M частицы каждая функция $f_{эк2}(t) = \alpha_{0к} \bar{r} \sigma 2(\varphi(t))$, $f_{эк1}(t) = \alpha_{0к} \bar{r}_3 \sigma 1(\varphi(t))$ представляет собой дополнительную эквивалентную силу, которая является составляющей переменной магнитной силы $f_{МГ}(r)$ (4.17) и (4.24), обусловленной переносным сдвигом частицы $\Delta r_{жГ}$ (4.30) за счет потока жидкой среды. Степень влияния эквивалентных сил на характер движения ферромагнитной частицы определяется знаком зависимости $\sigma(\varphi)$, (см. рисунок 4.7).

В диапазоне угловых перемещений $\varphi_H \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_H$, эквивалентные силы $f_{эк1,2} > 0$, поэтому они способствуют ускорению движения частицы к маг-

ниту. В диапазоне угловых перемещений $\varphi > 180^\circ - \varphi_n$, $f_{\text{эк}1,2} < 0$, поэтому они способствуют торможению движения частицы к магниту.

Из вышеизложенного следует, что:

– каждая система (4.19) – (4.24) из трех дифференциальных нелинейных уравнений первого порядка, описывающая движение ферромагнитной частицы под действием магнитных сил в потоке жидкой среды, вследствие обоснованных приближений и преобразований приводится к *неоднородному линейному обыкновенному ДУ второго порядка* с постоянными коэффициентами (4.45), (4.46);

– в неоднородной части каждого ДУ второго порядка появляется дополнительная составляющая $f_{\text{эк}1}$ (и $f_{\text{эк}2}$) с размерностью силы, которая выполняет роль эквивалентной добавочной силы;

– введение добавочной эквивалентной силы полезно для изучения поведения математической модели, на основе которой обнаружены две существенные зоны изменения состояния движения ферромагнитной частицы. Дальнейшее изучение этого вопроса будет продолжено в пункте 4.4.4 и параграфе и 4.5.

Обобщим результаты исследований в пунктах 4.4.1 – 4.4.3.

Следствие 4.1. В результате реализации процедур, предусматриваемых утверждениями 4.1 и 4.2, исходная нелинейная система ДУ (4.14), (4.15), (4.24) преобразуется в приближенное неоднородное обыкновенное линейное ДУ пониженного порядка (4.45) или (4.46), моделирующее динамику феррочастицы.

Следствие 4.2. Добавочная неоднородная составляющая приведенного неоднородного линейного ДУ играет роль дополнительного эквивалентного воздействия на процесс перемещения феррочастицы в потоке жидкой среды под действием внешних (магнитных) сил.

Следствие 4.3. Добавочная неоднородная составляющая приведенного неоднородного линейного ДУ позволяет сделать качественные заключения о динамическом состоянии феррочастицы: при $\varphi_n \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_n$ добавочная сила $f_{\text{эк}1,2} > 0$ способствует ускорению сближения частицы с магнитом; при $\varphi > 180^\circ - \varphi_n$ добавочная сила $f_{\text{эк}1,2} < 0$ способствует удалению частицы от магнита.

4.4.4. Решение уравнения траектории ферромагнитной частицы

Обыкновенное неоднородное линейное ДУ с постоянными коэффициентами (4.45), (4.46) имеет аналитическое решение, которое совместно с (4.42)–(4.44) описывает радиальную составляющую траектории частицы $r(t)$. Угловая координата $\varphi(t)$ траектории описывается зависимостями (4.28), (4.35).

Общее решение ДУ (4.45), (4.46) в начальный момент времени наблюдения движения частицы t_1 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} r_m(t) = & A_{1к} e^{P_{1к}(t-t_1)} + A_{2к} e^{P_{2к}(t-t_1)} - \frac{F_{0к}}{P_{2к}-P_{1к}} \left[\frac{e^{P_{2к}(t-t_1)} - 1}{P_{2к}} - \frac{e^{P_{1к}(t-t_1)} - 1}{P_{1к}} \right] + \\ & + \frac{1}{(P_{1к}-P_{2к})} \left\{ \left(\frac{\beta_2}{\gamma-P_{1к}} - \frac{\beta_2}{\gamma-P_{2к}} \right) e^{\gamma t} - \left[\frac{\beta_2}{\gamma-P_{1к}} e^{P_{1к}(t-t_1)} - \frac{\beta_2}{\gamma-P_{2к}} e^{P_{2к}(t-t_1)} \right] e^{\gamma t_1} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\beta_1}{\gamma+P_{1к}} - \frac{\beta_1}{\gamma+P_{2к}} \right) e^{-\gamma t} - \left[\frac{\beta_1}{\gamma+P_{1к}} e^{P_{1к}(t-t_1)} - \frac{\beta_1}{\gamma+P_{2к}} e^{P_{2к}(t-t_1)} \right] e^{-\gamma t_1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Здесь:

$$F_{0к} = \frac{f_{0к}}{m}, \quad \text{где} \quad f_{0к} = f_k + \alpha_{0к} \bar{r}_0 \beta \quad \text{или} \quad f_{0к} = f_k + \alpha_{0к} \bar{r} \beta; \quad (4.48)$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha \cdot \text{sign}(\varphi-90^\circ) \alpha_{0к} \bar{r}_0 \cdot ctg \frac{\varphi_H}{2}}{m}; \quad \beta_2 = \frac{\alpha \cdot \text{sign}(\varphi-90^\circ) \alpha_{0к} \bar{r}_0 \cdot tg \frac{\varphi_H}{2}}{m}; \quad \gamma_1 = \frac{v_{жэ}}{\bar{r}} \quad \text{или} \quad \gamma_2 = \frac{\bar{v}_{жс}}{\bar{r}}, \quad (4.49)$$

где для левой части первой секции $\bar{r}_0 = \bar{r}_0$ и $\gamma = \gamma_1$, для остальных частей и секций $\bar{r}_0 = \bar{r}$ и $\gamma = \gamma_2$.

Корни $P_{1к}$ и $P_{2к}$ определяются из характеристического уравнения:

$$P^2 + \frac{K_{с1}}{m} P - \frac{\alpha_{0к}}{m} = 0, \quad (4.50)$$

где $k = 1$ или 2 .

$$P_{1к,2к} = -\frac{K_{с1}}{2m} \pm \sqrt{\left[\frac{K_{с1}}{2m} \right]^2 + \frac{\alpha_{0к}}{m}}; \quad (4.51)$$

$$P_{1к} P_{2к} = -\frac{\alpha_{0к}}{m}. \quad (4.52)$$

Постоянные интегрирования $A_{1к}$, $A_{2к}$ в (4.47) определяются через начальные условия $r_m(t_1)$, $v_m(t_1)$ при $t = t_1$:

$$\begin{aligned} r_m(t_1) = & A_{1к} + A_{2к}; \quad v_m(t_1) = P_{1к} A_{1к} + P_{2к} A_{2к}; \\ A_{1к} = & \left[\frac{r_m(t_1) P_{2к} - v_m(t_1)}{P_{2к} - P_{1к}} \right]; \quad A_{2к} = - \left[\frac{r_m(t_1) P_{1к} - v_m(t_1)}{P_{2к} - P_{1к}} \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

В (4.53) начальные условия определяются из (4.44) (4.25) и (4.27) соответ-

ственно следующим образом:

$$r_M(t_1) = r(t_1) + \bar{r}_3 \sigma 1(t(\varphi_1)); \quad -v_M(t_1) = v(t_1) + \frac{v_{жн}(1-k)}{k\sqrt{1-k^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{k \cos \varphi_H}{\sqrt{1-k^2}} \right)$$

или $r_M(t_1) = r(t_1) + \bar{r} \sigma 2(\varphi(t_1)); \quad -v_M(t_1) = v(t_1) + \bar{v}_{жс} \cos \varphi_H.$

Подставив в (4.44) выражения (4.27) и (4.40)–(4.43), с учетом (4.48), (4.49), (4.52), получим

$$\begin{aligned} r(t) = & \frac{f_K}{\alpha_{ок}} + \left[A_{1K} - \frac{f_K}{mP_{1K}(P_{1K}-P_{2K})} \right] e^{P_{1K}(t-t_1)} + \left[A_{2K} + \frac{f_K}{mP_{2K}(P_{1K}-P_{2K})} \right] e^{P_{2K}(t-t_1)} - \\ & - \frac{\alpha_{0K} \bar{r}_0 \beta}{mP_{1K}(P_{1K}-P_{2K})} \left\{ [e^{P_{1K}(t-t_1)} - 1] - \frac{P_{1K}}{P_{2K}} [e^{P_{2K}(t-t_1)} - 1] \right\} + \frac{\alpha_{0K} \bar{r}_0 \alpha \operatorname{sign}(t-t_0)}{mP_{1K}(P_{1K}-P_{2K})} \times \\ & \times \left\{ \frac{P_{1K} e^{-\gamma t_1} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2}}{P_{1K} + \gamma} [e^{-\gamma(t-t_1)} - e^{P_{1K}(t-t_1)}] - \frac{P_{1K} e^{\gamma t_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}}{P_{1K} - \gamma} [e^{\gamma(t-t_1)} - e^{P_{1K}(t-t_1)}] - \right. \\ & \left. - \frac{P_{1K} e^{-\gamma t_1} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2}}{P_{2K} + \gamma} [e^{-\gamma(t-t_1)} - e^{P_{2K}(t-t_1)}] + \frac{P_{1K} e^{\gamma t_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}}{P_{2K} - \gamma} [e^{\gamma(t-t_1)} - e^{P_{2K}(t-t_1)}] \right\} - \\ & - \bar{r}_0 [\beta + \alpha \operatorname{sign}(t-t_0) (e^{-\gamma t} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2} - e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2})], \end{aligned} \quad (4.54)$$

где для левой части первой секции $\bar{r}_0 = \bar{r}_3$, для правой части первой секции и для остальных секций сепарации $\bar{r}_0 = \bar{r}$.

В (4.54) время t_0 определяется соответственно по зависимостям (4.35) и (4.16) при подстановке $\varphi(t_0) = 90^\circ$

$$t_0 = \frac{\bar{r}_3}{v_{жэ}} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2} \right) \quad \text{или} \quad t_0 = \frac{\bar{r}}{v_{жс}} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2} \right). \quad (4.55)$$

Оценка значений $|P_{2K}|$ и P_{1K} показывает, что $|P_{2K}| \gg P_{1K}$, поэтому (4.54) упрощается и с учетом (4.53) принимает рабочий вид

$$\begin{aligned} r(t) \approx & \frac{f_K}{\alpha_{ок}} + \left[r_M(t_1) - \frac{f_K}{\alpha_{ок}} + \frac{v_M(t_1)}{(P_{1K}-P_{2K})} \right] e^{P_{1K}(t-t_1)} - \bar{r}_0 \beta [e^{P_{1K}(t-t_1)} - 1] + \bar{r}_0 \alpha \times \\ & \times \operatorname{sign}(t-t_0) \left\{ \frac{P_{1K} e^{-\gamma t_1} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2}}{P_{1K} + \gamma} [e^{-\gamma(t-t_1)} - e^{P_{1K}(t-t_1)}] - \frac{P_{1K} e^{\gamma t_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}}{P_{1K} - \gamma} [e^{\gamma(t-t_1)} - \right. \\ & \left. - e^{P_{1K}(t-t_1)}] \right\} - \bar{r}_0 [\beta + \alpha \operatorname{sign}(t-t_0) (e^{-\gamma t} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2} - e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2})]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Выражение (4.56) положим в основу анализа траекторий частиц и моделирования зависимости степени очистки жидкости от диаметра частиц.

Для определения условий попадания частиц на магнит сепаратора рассмот-

рим характерные траектории движения феррочастиц в магнитоактивном элементе сепаратора, представленные на рисунке 4.10. Рисунок 4.10, *а* соответствует аппроксимации распределения магнитного поля в рабочем пространстве элемента сепарации двумя отрезками (при $r_{\text{ГР1}} \leq 0.5a$); рисунок 4.10, *б* соответствует аппроксимации – одним отрезком (при $r_{\text{ГР1}} \geq 0.5a$) в соответствии с (3.73), (3.81).

Все траектории различаются как местом попадания частиц на магнит, так и местами их пересечения с полярной координатой $\varphi = 90^\circ$ в момент времени t_0 (4.55) и с полярной координатой $\varphi = (180^\circ - \varphi_{\text{Н}})$ в момент времени t_{01} , определяемый следующими формулами:

$$t_{01} = \frac{\bar{r}_3}{v_{\text{жэ}}} \ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2} \right) + \frac{\bar{r}}{v_{\text{жс}}} \ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2} \right), \quad t_{01} = \frac{2\bar{r}}{v_{\text{жс}}} \ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2} \right); \quad (4.57)$$

первая формула соответствует для первой секции сепарации, вторая – для последующих секций.

Каждая траектория делится на несколько участков, а каждый участок можно описывать уравнениями (4.54) или (4.56) при подстановке в них соответствующих начальных условий.

На рисунке 4.10, *а*, имеют место пять траекторий.

Траектория 1 состоит из двух участков: №1.1 – $t_1 = 0$, $r_{\text{М}}(t_1) = a/2$; №1.2 – $t_1 = t_{\text{М1}}$, $r_{\text{М}}(t_1) = r_{\text{ГР1}} - \bar{r}_0 [\beta - \alpha (e^{-\gamma t} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2} - e^{\gamma t} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2})]$,

где $t_{\text{М1}}$ – интервал времени прохождения участка $r_{\text{ГР1}} \leq r \leq 0.5a$.

Траектория 2 состоит из трех участков: №2.1 – $t_1 = 0$, $r_{\text{М}}(t_1) = a/2$; №2.2 – $t_1 = t_{\text{М1}}$, $r_{\text{М}}(t_1) = r_{\text{ГР1}} - \bar{r}_0 [\beta - \alpha (e^{-\gamma t} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2} - e^{\gamma t} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2})]$; №2.3 – $t_1 = t_0$, $r_{\text{М}}(t_1) = r(t_0 - t_{\text{М1}}) - \bar{r}\beta$.

Траектория 3 состоит из трех участков: №3.1 – $t_1 = 0$, $r_{\text{М}}(t_1) = a/2$; №3.2 – $t_1 = t_0$, $r_{\text{М}}(t_1) = r(t_0) - \bar{r}\beta$; №3.3 – $t_1 = t_{\text{М1}}$, $t_{\text{М1}} = t_0 + (t_{\text{М1}} - t_0)$;

$$r_{\text{М}}(t_1) = r_{\text{ГР1}} - \bar{r} [\beta + \alpha (e^{-\gamma t} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2} - e^{\gamma t} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{Н}}}{2})].$$

Траектория 4 по структуре участков аналогична траектории 3, только при пересечении полярной координаты $\varphi = 180^\circ - \varphi_{\text{Н}}$ траектория переходит из зоны

ускорения в зону торможения движения к магниту.

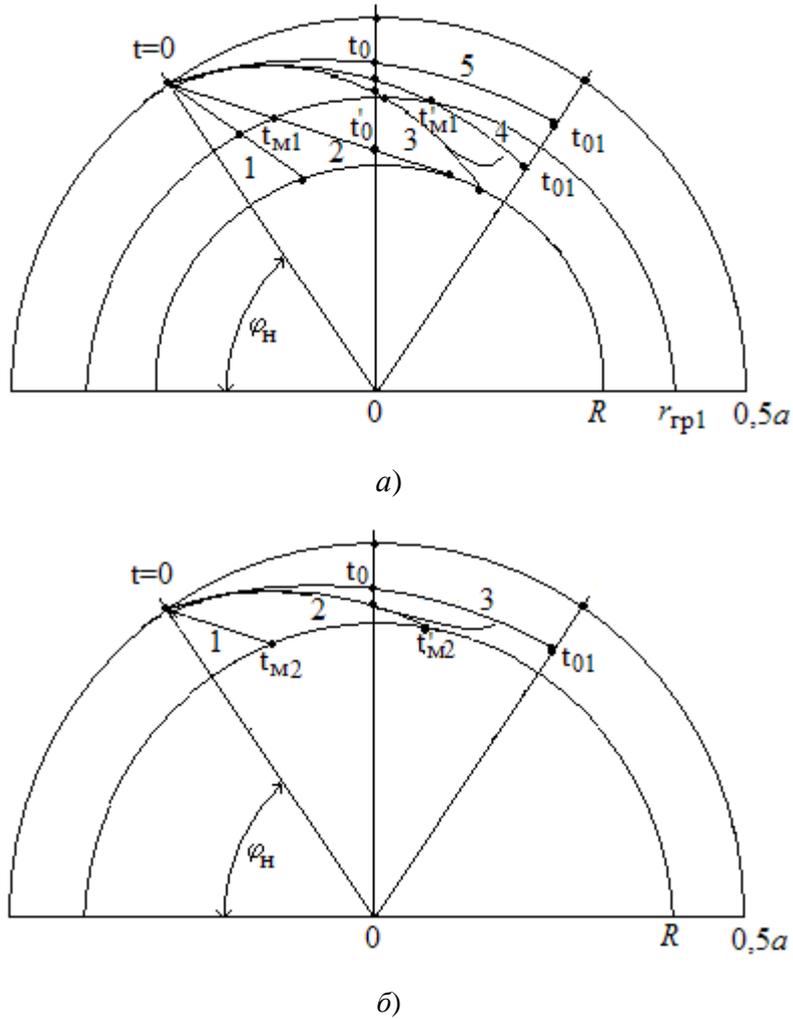


Рисунок 4.10 – Совокупность схематических траекторий движения феррочастицы в рабочей области сепаратора: $a - r_{gp1} < 0,5a$ – возможны пять характерных траекторий; $a - r_{gp1} > 0,5a$ – возможны три характерных траектории

Траектория 5 состоит из двух участков: № 5.1 – $t_1 = 0, r_M(t_1) = a/2$; № 5.2 – $t_1 = t_0, r_M(t_1) = r(t_0) - \bar{r}\beta$, и также переходит из зоны ускорения в зону торможения.

Для ситуации, представленной на рисунке 4.10, б, имеют место 3 траектории: траектория 1 состоит из одного участка: $t_1 = 0, r_M(t_1) = 0,5a$; траектория 2 состоит из двух участков: № 2.1: $t_1 = 0, r_M(t_1) = 0,5a$; № 2.2 – $t_1 = t_0,$

$$r_M(t_1) = r(t_0) - \bar{r}\beta.$$

Траектория 3 по структуре участков аналогична траектории 2, только она переходит из зоны ускорения в зону торможения. На рисунке 4.6, б t_{M2} – интервал времени прохождения области $R \leq r \leq r_{gp1}$.

Из анализа совокупности траекторий следует, что частица может попадать на магнит в трех зонах рабочего пространства: $\varphi_H \leq \varphi \leq 90^\circ$; $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_H$; $\varphi \geq 180^\circ - \varphi_H$. В каждой зоне воздействие ламинарного потока ВТЖ на радиальное перемещение частицы специфично. Так, в первой и во второй зонах динамическая составляющая ускоряющая ($f_{\text{эк}1,2} > 0$), а в третьей – тормозящая ($f_{\text{эк}1,2} < 0$). Однако кинематическая составляющая (последнее слагаемое в (4.54), (4.56), соответствующее зависимостям (4.30), (4.31) и (4.40)) в первой зоне способствует приближению частицы к магниту, а во второй и третьей зонах – удалению от него, в силу того, что обобщенная функция $\text{sign}(t - t_0) = -1$, при $t < t_0$ и $\text{sign}(t - t_0) = 1$, при $t > t_0$.

Для траектории 1 критерий осаждения феррочастицы простой:

$$r(t_0) \leq R. \quad (4.58)$$

Универсальным критерием осаждения феррочастицы на магнит является выполнение следующего равенства:

$$r(t_m) = R, \quad (4.59)$$

которое связано с поиском момента времени t_m достижения частицей поверхности магнита.

В следующем пункте представлено аналитическое исследование траекторий движения феррочастиц на предмет конкретизации условий осаждения их на поверхность магнитов сепаратора.

4.5. Система критериальных условий для сортировки траекторий ферромагнитных частиц

4.5.1. Система критериев осаждения ферромагнитных частиц

В пункте 4.4.4 разработана математическая модель расчета траектории движения ферромагнитной частицы на прямолинейном участке ламинарного потока жидкой среды под действием магнитных сил в рабочем пространстве магнитного

сепаратора. Для отбора частиц, достигающих поверхности магнита $r = R$, по критерию (4.59) связано с трудоемкими вычислениями момента времени t_m достижения частицей поверхности магнита.

Математическая модель траекторий ферромагнитных частиц в потоке жидкой среды базируется на решениях обыкновенных линейных ДУ (4.45), (4.46). Разработаем критерии отбора осажденных на магнит частиц, основанные на выявлении тенденции развития процесса в окрестности кардинальных точек $\varphi(t_0) = 90^\circ$ и $\varphi(t_{01}) = 180^\circ - \varphi_H$ по математической модели радиальной координаты (4.56) траектории движения.

Представив (4.56) в виде суммы постоянного и переменного слагаемых

$$r(t) = \frac{f_K}{\alpha_{OK}} + \Delta r(t) \quad (4.60)$$

и учитывая условие, что при $t \geq t_0$ ($\varphi \geq 90^\circ$) $sign(t - t_0) = 1$, получим

$$\Delta r(t) = \alpha \bar{r} \left\{ \left[\frac{v_K e^{\gamma t_1} t g \frac{\varphi_H}{2}}{v_K - 1} - \frac{v_K e^{-\gamma t_1} c t g \frac{\varphi_H}{2}}{v_K + 1} - B_K(t_1) \right] e^{P_{1K}(t-t_1)} - \frac{c t g \frac{\varphi_H}{2}}{1 + v_K} e^{-\gamma t} - \frac{t g \frac{\varphi_H}{2}}{v_K - 1} e^{\gamma t} \right\}, \quad (4.61)$$

$$B_K(t_1) = \frac{1}{\alpha \bar{r}} \left[\frac{f_K}{\alpha_{OK}} + \bar{r} \beta - r(t_1) - \bar{r} \sigma(\varphi(t_1)) - \frac{v_M(t_1)}{(P_{1K} - P_{2K})} \right]; \quad (4.62)$$

$$v_K = \frac{P_{1K}}{\gamma}, \quad (4.63)$$

Напомним, что при переходе траекторией кардинальных точек изменяются условия воздействия потока ВТЖ на перемещение ферромагнитной частицы в поле магнитных сил. Поэтому проводим исследования выражений (4.60) – (4.63) для двух значений начального времени отсчета: $t_1 = t_0$ и $t_1 = t_{01}$.

Из (4.60), (4.61) следует, что при выполнении неравенства

$$B_K(t_1) \geq \frac{v_K e^{\gamma t_1} t g \frac{\varphi_H}{2}}{v_K - 1} - \frac{v_K e^{-\gamma t_1} c t g \frac{\varphi_H}{2}}{v_K + 1}, \quad (4.64)$$

расстояние r частицы до оси симметрии магнита будет неотвратно уменьшаться (так как $\Delta r(t) < 0$ и по значению монотонно возрастает).

Неравенство (4.64) является достаточным абсолютным критерием, гарантирующим осаждение ферромагнитные частицы на магнит сепаратора. Соблюдение условия (4.64) физически означает, что магнитная сила будет преобладать над

тормозящим эффектом, вызванным течением жидкой среды. Это условие будет выполняться только тогда, когда $v_k > 1$, или, согласно (4.63), $P_{1k} > \gamma$.

Критериальное условие (4.64) разделяется на два критерия. Если частица осаждается на магнит в зоне $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_H$, то $t_1 = t_0$ и неравенство (4.64) принимает следующий вид:

$$B_k(t_0) \geq \frac{2 v_k}{v_k^2 - 1}. \quad (4.65)$$

Для частиц, которые осаждаются на магнит в зоне $\varphi \geq 180^\circ - \varphi_H$, начальный момент времени $t_1 = t_{01}$ и (4.64) принимает вид

$$B_k(t_{01}) \geq \frac{v_k c t g \frac{\varphi_H}{2}}{v_k - 1} - \frac{v_k t g \frac{\varphi_H}{2}}{v_k + 1}. \quad (4.66)$$

Заметим, что при $\varphi_H = 90^\circ$ $\varepsilon(d) \rightarrow 1$ условие (4.66) переходит в (4.65), а моменты времени t_{01} и t_0 совпадают друг с другом

Для выяснения цены абсолютного критериального условия проводим вычисление по неравенству (4.65) допустимых значений обобщенного параметра v_k в зависимости от обобщенного параметра $B_k(t_{01})$. Результаты расчета сведены в таблице 4.1.

Для обобщенного параметра

$$v_k = \frac{P_{1k}}{\gamma} = \frac{P_{1k} \bar{r}}{\bar{v}_{жс}}$$

P_{1k} — есть положительный корень (4.51) характеристического уравнения, который характеризует степень притяжения частицы к магниту (его значение быстро увеличивается с увеличением диаметра частицы, согласно (3.78) и (3.82)).

Таблица 4.1

Допустимые значения v_k при $\varphi_H = 90^\circ$

$B_k(t_{01})$	0.25	0.5	1	1.5	2	3	5
$v_k \geq$	8.1	4.2	2.4	1.9	1.6	1.4	1.2

С увеличением средней скорости $\bar{v}_{жс}$ потока параметр v_k уменьшается, что требует увеличения параметра $B_k(t_1)$ по таблице 4.1. Однако из (4.62) следует, что произвольно варьировать параметром $B_k(t_1)$ не представляется возможным. По-

этому возникает необходимость рассмотреть поведение траекторий движения феррочастиц при пониженных значениях скорости v_k , при которых не выполняется абсолютное критериальное условие (4.64).

Преобразуем (4.61) к следующему уравнению:

$$\lambda(\tau) = \frac{\Delta r(\tau)}{\alpha \cdot \bar{r}} = -\frac{e^{-\gamma t_1} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2}}{1 + v_k} e^{-\frac{\tau}{v_k}} - \frac{e^{\gamma t_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}}{v_k - 1} e^{\frac{\tau}{v_k}} - B_k^*(t_1) e^\tau;$$

$$B_k^*(t_1) = B_k(t_1) - \frac{v_k e^{\gamma t_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}}{v_k - 1} + \frac{v_k e^{-\gamma t_1} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2}}{v_k + 1};$$

$$\tau = P_{1k}(t - t_1).$$

В зоне ($90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_H$)

$$t_1 = t_0; \quad \lambda(\tau) = -\frac{e^{-\frac{\tau}{v_k}}}{1 + v_k} - \frac{e^{\frac{\tau}{v_k}}}{v_k - 1} - B_k^*(t_0) e^\tau. \quad (4.67)$$

В зоне торможения ($\varphi \geq 180^\circ - \varphi_H$):

$t_1 = t_{01}$, $v_k \neq 1$:

$$\lambda(\tau) = -\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}}{1 + v_k} e^{-\frac{\tau}{v_k}} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2}}{v_k - 1} e^{\frac{\tau}{v_k}} - B_k^*(t_{01}) e^\tau; \quad (4.68)$$

$$B_k^*(t_{01}) = B_k(t_{01}) - \frac{v_k \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2}}{v_k - 1} + \frac{v_k \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2}}{v_k + 1}; \quad (4.69)$$

$t_1 = t_{01}$, $v_k = 1$:

$$\lambda(\tau) = (1 + \tau) \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2} e^\tau - \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \operatorname{ch} \tau - B_k(t_{01}) e^\tau;$$

$t_1 = t_{01}$, $v_k = 1$, $\varphi_H = 90^\circ$:

$$\lambda(\tau) = \tau e^\tau - \operatorname{sh} \tau - B_k(t_{01}) e^\tau. \quad (4.70)$$

Подчеркнем, что уравнение (4.67) является частным случаем уравнения (4.68), которое переходит в (4.67) при $\varphi_H = 90^\circ$. Поэтому в дальнейшем интерес для нас будут представлять процессы, происходящие только в зоне торможения.

Семейство зависимостей, соответствующее уравнению (4.70), представлено на рисунке 4.11. Как видим, частица в зоне торможения может по инерции проходить в сторону магнита максимальное расстояние λ_m , которое соответствует точке седловины траектории феррочастицы. Поэтому, если траектория по форме седлообразная, то ферромагнитная частица может достичь поверхности магнита сепаратора при выполнении следующего критериального условия:

$$\lambda_m \geq \frac{r(t_{01}) - R}{\alpha \cdot \bar{r}} > 0. \quad (4.71)$$

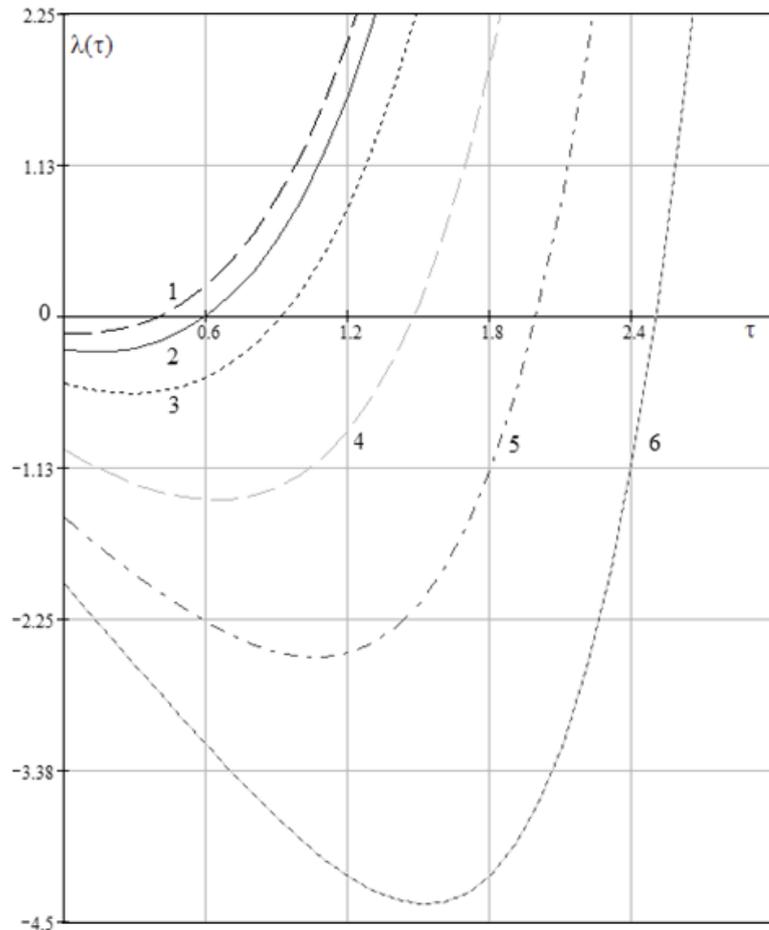


Рисунок 4.11 – Семейство участков траекторий $\lambda(\tau)$ частицы на выходе из рабочего пространства сепаратора при $\nu_K = 1$: 1 – $B_K = 0.125$; 2 – $B_K = 0.25$; 3 – $B_K = 0.5$; 4 – $B_K = 1$; 5 – $B_K = 1.5$; 6 – $B_K = 2$

Для определения λ_m проведем исследования уравнения (4.68) на экстремум:

$$\frac{\partial \lambda(\tau_3)}{\partial \tau} \equiv \frac{tg \frac{\varphi_H}{2}}{\nu_K(1 + \nu_K)} e^{-\frac{\tau_3}{\nu_K}} - \frac{ctg \frac{\varphi_H}{2}}{\nu_K(\nu_K - 1)} e^{\frac{\tau_3}{\nu_K}} - B_K^*(t_{01}) e^{\tau_3} = 0. \quad (4.72)$$

По уравнению (4.72) можно рассчитать обобщенную временную координату τ_3 , которой соответствует значение λ_m .

Заметим, что $B_K^*(t_{01}) < 0$, так как мы рассматриваем случай, когда не выполняется абсолютное критериальное условие (4.66). При $\tau \rightarrow \infty$ производная $\frac{\partial \lambda(\tau)}{\partial \tau}$ будет положительной. Чтобы существовал корень уравнения (4.72), необходимо чтобы при значении аргумента $\tau = 0$ производная $\frac{\partial \lambda(\tau=0)}{\partial \tau}$ была бы меньше нуля. Подставив в уравнение (4.72) нулевой аргумент $\tau = 0$, получим с учетом (4.69) условие отсутствия экстремума для (4.68):

$$B_K(t_{01}) \leq \frac{(\nu_K + 1)ctg \frac{\varphi_H}{2}}{\nu_K} - \frac{(\nu_K - 1)tg \frac{\varphi_H}{2}}{\nu_K}, \quad (4.73)$$

которое соответствует удаляющейся от магнита траектории движения феррочастицы.

Неравенство (4.73) представляет собой абсолютный критерий непопадания частицы на магнит в зоне торможения только для значений обобщенного параметра $v_k \geq 1$.

В силу эквивалентности уравнений (4.67) и (4.68) при $t_1 = t_0$ ($\varphi_H = 90^\circ$), по критерию (4.73) можно получить абсолютный критерий непопадания частицы на магнит в зоне $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_H$, положив в (4.73) $\varphi_H = 90^\circ$:

$$B_k(t_0) \leq \frac{2}{v_k}. \quad (4.74)$$

К абсолютным критериям не осаждения ферромагнитных частиц (4.72) – (4.74), правомерным для значений обобщенного параметра $v_k \geq 1$, добавляется ещё один абсолютный критерий не осаждения частиц

$$v_k < 1. \quad (4.75)$$

При этом, согласно (4.63), имеет место соотношение параметров $\gamma > P_{1k}$, поэтому приращение радиальной координаты частицы (4.61) $\Delta r(t) > 0$, а значение этой координаты $r(t)$ (4.60) будет монотонно возрастать, а феррочастица удаляться от магнита при $\varphi(t) \geq 90^\circ$. В этом случае сила притяжения частицы данного размера недостаточна для противодействия потоку.

С целью раскрытия физического смысла обобщенного параметра v_k (4.63) выразим относительную скорость (магнитную составляющую скорости) v_M ферромагнитной частицы в зависимости от P_{1k} (4.51). Для этого возьмем производную по времени от магнитной (относительной) составляющей перемещения $r_M = r(0) - \Delta r_M = r + \Delta r_{жр}$ радиальной координаты феррочастицы r (4.22) на основе использования выражения (4.56), которое, с учетом (4.49), запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} r_M &\approx D_0 + D_1 e^{P_{1k}(t-t_1)} + D_2 \left(\frac{ctg\frac{\varphi_H}{2}}{P_{1k}+\gamma} e^{-\gamma t} - \frac{tg\frac{\varphi_H}{2}}{P_{1k}-\gamma} e^{\gamma t} \right); \\ D_0 &= \frac{f_k}{\alpha_{ok}} + \bar{r}_0 \beta; & D_2 &= P_{1k} \alpha \bar{r}_0 \text{sign}(t - t_0); \\ D_1 &= r_M(t_1) - \frac{f_k}{\alpha_{ok}} - \bar{r}_0 \beta - D_2 \left(\frac{ctg\frac{\varphi_H}{2} e^{-\gamma t_1}}{(P_{1k}+\gamma)} - \frac{tg\frac{\varphi_H}{2} e^{\gamma t_1}}{(P_{1k}-\gamma)} \right); \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\Delta r_{жр} = - \left[\beta \bar{r}_0 + \frac{D_2}{P_{1k}} \left(e^{-\gamma t} ctg \frac{\varphi_H}{2} - e^{\gamma t} tg \frac{\varphi_H}{2} \right) \right];$$

$$v_M = P_{1k} D_1 e^{P_{1k}(t-t_1)} - \gamma D_2 \left(\frac{ctg \frac{\varphi_H}{2}}{P_{1k} + \gamma} e^{-\gamma t} + \frac{tg \frac{\varphi_H}{2}}{P_{1k} - \gamma} e^{\gamma t} \right). \quad (4.77)$$

Выражая $D_1 e^{P_{1k}(t-t_1)}$ из (4.76) и подставляя в (4.77), с учетом (4.55) получим

$$v_M = P_{1k} \left(r_M - \frac{f_k}{\alpha_{ok}} - \bar{r}_0 \beta - \frac{D_2}{P_{1k}} \left[e^{-\gamma t} ctg \frac{\varphi_H}{2} - e^{\gamma t} tg \frac{\varphi_H}{2} \right] \right) = -P_{1k} \left(\frac{f_k}{\alpha_{ok}} - r \right). \quad (4.78)$$

В (4.78) $r = r(t)$ есть радиальная координата ферромагнитной частицы в активной области сепаратора, которая является функцией времени $r = r_M(t) - \bar{r}_0 \sigma_1(\varphi(t))$ в соответствии с формулой (4.44). За время пребывания феррочастицы в активной зоне сепаратора, на основе (4.78), в общем случае среднее значение скорости частицы будет равно

$$\bar{v}_M = P_{1k} \left(\frac{f_k}{\alpha_{ok}} - \bar{r} \right),$$

где \bar{r} – средняя радиальная координата активной области сепаратора.

Тогда отношение \bar{v}_M к средней скорости $\bar{v}_ж$ потока ВТЖ приводит к выражению

$$\frac{\bar{v}_M}{\bar{v}_ж} = \nu_k \left(\frac{f_k}{\alpha_{ok} \bar{r}} - 1 \right), \quad (4.79)$$

которое раскрывает физический смысл обобщенного параметра ν_k .

В (4.79) $f_k/\alpha_{ok} = a/2$ при $k = 2$, $f_k/\alpha_{ok} \approx r_{гp1}$ при $k = 1$, поэтому сомножитель $(f_k/\alpha_{ok} \bar{r}) - 1$ выражает влияние геометрического фактора на отношение $\bar{v}_M/\bar{v}_ж$. С учетом геометрического фактора параметр ν_k выражает превышение средней скорости относительного перемещения ферромагнитной частицы над средней скоростью потока ВТЖ.

В итоге из критериального условия (4.75) и формулы (4.79) следует предельно возможная скорость потока $\bar{v}_{жпр}$ для каждого размера феррочастицы и магнитной системы, при которой сепарация в принципе невозможна. Ограничение скорости потока определяет предельно возможную *производительность магнитного сепаратора*. Это положение имеет чрезвычайно важное значение для разработки научно-обоснованных рекомендаций по классификации принципиальных возможностей магнитных сепараторов различных модификаций.

4.5.2. Дополнительные критериальные условия

В пункте 4.5.1 определены границы двух диапазонов значений обобщенного параметра B_K , при которых наблюдаются седлообразные траектории движения феррочастиц:

в зоне $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_H$

$$\frac{2}{v_K} = B_{\text{кпп}} < B_K(t_0) \leq B_{\text{каб}} = \frac{2 v_K}{v_K^2 - 1};$$

в зоне $\varphi \geq 180^\circ - \varphi_H$

$$\frac{(v_K+1)ctg\frac{\varphi_H}{2}}{v_K} - \frac{(v_K-1)tg\frac{\varphi_H}{2}}{v_K} = B_{\text{кпп}} < B_K(t_{01}) \leq B_{\text{каб}} = \frac{v_K ctg\frac{\varphi_H}{2}}{v_K-1} - \frac{v_K tg\frac{\varphi_H}{2}}{v_K+1}. \quad (4.80)$$

На рисунке 4.12 представлены два семейства кривых диапазона (4.80), в котором наблюдаются седлообразные траектории. С увеличением начального угла φ_H вхождения частицы в магнитоактивную область сепаратора условия осаждения частицы на магнит облегчаются. При этом частицы, гидромагнитное состояние которых соответствует множеству значений обобщенных параметров B_K , v_K , лежащих ниже зависимости $B_{\text{кпп}}(v_K)$, не будут осаждаться на магнит сепаратора. Частицы, характеризующиеся множеством значений параметров B_K , v_K , которые лежат выше зависимости $B_{\text{каб}}(v_K)$, будут осаждаться на магнит.

Определим корни трансцендентного уравнения (4.72), которое в общем виде не имеет явного решения. Когда первым слагаемым правой части зависимости (4.72)

$$tg\frac{\varphi_H}{2} tg\frac{\varphi_H}{2} (v_K - 1)(1 + v_K)^{-1} e^{-\frac{2\tau_\Delta}{v_K}} \ll 1,$$

можно пренебречь, решение принимает следующий вид

$$\tau_\Delta \cong \left(\frac{v_K}{v_K-1} \right) \ln \left[ctg\frac{\varphi_H}{2} \left\{ (1-v_K) v_K \left(B_K(t_1) - \frac{v_K ctg\frac{\varphi_H}{2}}{v_K-1} + \frac{v_K tg\frac{\varphi_H}{2}}{v_K+1} \right) \right\}^{-1} \right].$$

Это решение правомерно при

$$\tau_\Delta \geq \frac{v_K}{2} \ln \left[3 \frac{v_K-1}{(v_K+1)} \left(tg\frac{\varphi_H}{2} \right)^2 \right].$$

Если это неравенство не выполняется, то разлагая экспоненциальные члены (4.72) в ряд Тейлора до третьего слагаемого включительно, приходим к квадратному алгебраическому уравнению:

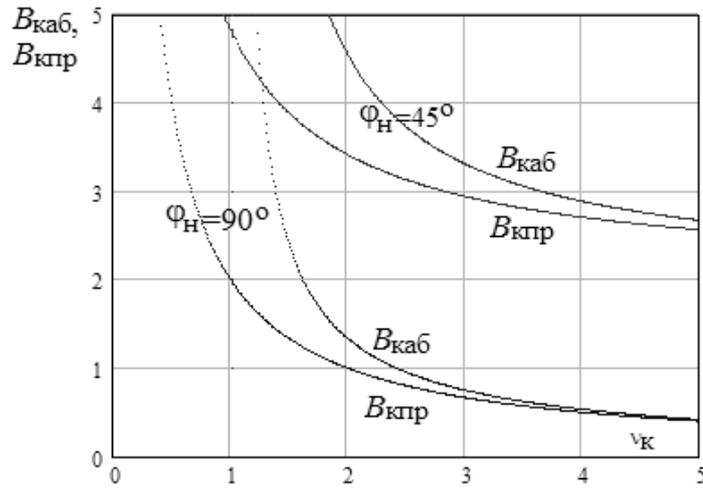


Рисунок 4.12 – Два семейства зависимостей, разделяющих допустимую область варьирования значениями обобщенных параметров $[B_k(t_{01}), v_k]$ на три сектора: $B_k(t_{01}) < B_{кпр}$ – осаждение не возможно; $B_{кпр} < B_k(t_{01}) < B_{каб}$ – требуются дополнительные исследования; $B_k(t_{01}) > B_{каб}$ – осаждение гарантировано

$$A2\tau_3^2 + 2A1\tau_3 + 2A0 = 0, \quad (4.81)$$

$$A2 = B_k^*(t_{01}) + \frac{ctg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k^3(v_k-1)} - \frac{tg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k^3(v_k+1)},$$

$$A1 = B_k^*(t_{01}) + \frac{ctg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k^2(v_k-1)} + \frac{tg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k^2(v_k+1)},$$

$$A0 = B_k(t_{01}) - \frac{(v_k+1)ctg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k} + \frac{(v_k-1)tg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k}.$$

Значение $A0 > 0$ в интервале $B_{кпр} \leq B_k(t_{01}) \leq B_{каб}$. Значения: $A1 < 0$ при $B_{кпр} \leq B_k(t_{01}) \leq B_{кI}$; $A2 < 0$ при $B_{кпр} \leq B_k(t_{01}) \leq B_{кII}$, где

$$B_{кI} = \frac{(v_k^3-1)ctg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k^2(v_k-1)} - \frac{(v_k^3+1)tg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k^2(v_k+1)},$$

$$B_{кII} = \frac{(v_k^4-1)ctg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k^3(v_k-1)} - \frac{(v_k^4-1)tg\frac{\varphi_H}{2}}{v_k^3(v_k+1)},$$

причем $B_{кII} > B_{кI}$. Тогда решение уравнения (4.81) принимает следующий вид:

$$\tau_3 \cong -\left|\frac{A1}{A2}\right| + \sqrt{\left|\frac{A1}{A2}\right|^2 + \frac{2A0}{|A2|}}. \quad (4.90)$$

Если $B_{кI} \leq B_k(t_{01}) \leq B_{кII}$, а значения $A1 > 0$, $A2 < 0$, решением уравнения (4.81) будет выражение

$$\tau_3 \cong \left|\frac{A1}{A2}\right| + \sqrt{\left|\frac{A1}{A2}\right|^2 + \frac{2A0}{|A2|}}. \quad (4.91)$$

При $B_{кII} \leq B_k(t_{01}) \leq B_{каб}$ значения $A1 > 0$, $A2 > 0$, решения уравнения

(4.81) отрицательные, что противоречит физическому смыслу.

Подставив τ_3 в (4.68), вычислим амплитудное значение выброса седлообразной траектории

$$\lambda_m = \frac{tg \frac{\varphi_H}{2}}{1 + \nu_K} e^{-\frac{\tau_3}{\nu_K}} + \frac{ctg \frac{\varphi_H}{2}}{\nu_K - 1} e^{\frac{\tau_3}{\nu_K}} + B_K^*(t_{01}) e^{\tau_3}.$$

При этом, для установления факта попадания ферромагнитной частицы на магнит сепаратора необходимо применить условие (4.71).

Таким образом, проведено теоретическое исследование траекторий движения ферромагнитных частиц в области поступательного потока жидкой среды в рабочем пространстве магнитного сепаратора, выполненное с целью выяснения условий осаждения феррочастиц на магниты сепаратора. Установлено, что вся совокупность, замыкающихся на магнит или удаляющихся от магнита траекторий описывается монотонными или седлообразными кривыми, искривленными в сторону поверхности магнита. Характер траекторий определяется соотношением средней скорости магнитного перемещения ферромагнитной частицы над средней скоростью потока ВТЖ. Аналитическим путем разработаны критерии, гарантирующие осаждение частиц, выраженные через универсальные обобщенные параметры. Все многообразие значений обобщенных параметров подразделяется на три подмножества: абсолютного осаждения частиц на магниты; абсолютного непопадания частиц на магниты и промежуточного подмножества значений параметров, для идентификации которых требуются дополнительные исследования. Установленные критерии полезны в алгоритмах проектирования и оптимизации магнитных сепараторов и задачах математического моделирования процесса коагуляции.

4.6. Математическое моделирование начального участка характеристики разделения суспензии первой секции сепарации

4.6.1. Постановка задачи

Очевидный научный и практический интерес имеет зависимость степени очистки ВТЖ ε от размера феррочастиц d на её начальном участке. Начальному

участку зависимости $\varepsilon(d)$, наблюдаемому при малых значениях крупности частиц d , соответствуют малые значения степени очистки ε . Тогда, согласно выражению (4.12), начальному участку характеристики соответствуют малые значения начальных критических угловых координат $\varphi_H(d)$ вхождения частицы в рабочую область сепаратора.

Если φ_H выражается в радианах, то $\varphi_H \ll 1$. Поэтому

$$\varepsilon(d) \cong \varphi_H. \quad (4.82)$$

Перемещение частицы в зоне $\varphi_H \ll 1$, проходит по траектории $HD0'$ (рисунок 4.16), т.е. на конечном этапе во вращающейся области потока жидкой среды, в которой поток обтекает цилиндрический профиль магнитных патронов. Участок траектории HD заканчивается на точке D с координатами $(x_D = -R; y_D)$, полярный угол при прохождении этого участка траектории изменяется в диапазоне $\varphi_H \leq \varphi \leq \varphi_D$. На этом участке для описания движения ферромагнитной частицы правомерна система ДУ уравнений (4.25), (4.26), (4.45) и полученное решение (4.56) при следующих начальных условиях: $r_m(t_1) = a/2, v_m(t_1) = 0$ при $t_1 = 0$.

Оценим верхнюю числовую границу значения $\varphi_H \ll 1$ при которой точка D будет находиться вблизи поверхности магнита. По рисунку 4.13 находим связь радиальной координаты r_D точки D с угловой координатой φ_D :

$$r_D = \frac{R}{\cos \varphi_D}. \quad (4.83)$$

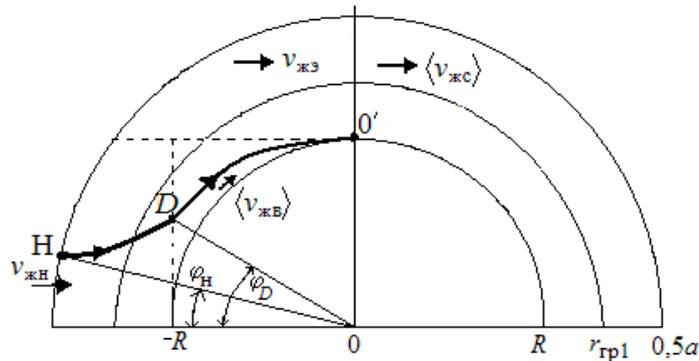


Рисунок 4.13 – Траектория $HD0'$ движения феррочастицы для случая $\varphi_H \ll 1$

Для установления связи между координатами точек H и D воспользуемся математической моделью функции потока ψ в полярной системе координат [26], обтекающего цилиндрический профиль:

$$\psi(r, \theta) = v_{\text{жн}} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right). \quad (4.84)$$

Обе точки будут лежать на одной линии тока $\psi(r, \theta) = \text{const}$, если магнитным перемещением можно пренебречь ($\Delta r_m \cong 0$). Подставив координаты точек H и D в (4.84) и учитывая соотношение $\theta = \pi - \varphi$, получим равенство

$$v_{\text{жн}} \frac{a}{2} \sin \varphi_H \left(1 - \frac{4R^2}{a^2}\right) = v_{\text{жн}} r_D \sin \varphi_D \left(1 - \frac{R^2}{r_D^2}\right),$$

которое приводим, с учетом (4.83), к нелинейному алгебраическому уравнению третьей степени

$$\frac{1-k^2}{k} \sin \varphi_H \cos \varphi_D = (\sin \varphi_D)^3. \quad (4.85)$$

Решение (4.85) при упрощении $\sin \varphi_H \approx \varphi_H \ll 1$ имеет следующий вид [63]:

$$\sin \varphi_D \cong 0.9(\varphi_H)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.96)$$

По зависимости (4.86) определим граничное значение $\varphi_{H,\text{гр}}$ при заданном граничном значении $\varphi_{D,\text{гр}}$. Например, при $\varphi_{D,\text{гр}} \leq 0.5$ рад значение $\varphi_{H,\text{гр}} < 0.172$ рад ($\approx 10^\circ$) и $r_D < 1.14R$.

Участок траектории $D0'$ заканчивается в точке $0'$ на поверхности патрона. На этом участке частица перемещается вращающимся током жидкой среды.

Если вращающий поток выносит частицу в окрестность точки $0'$, тогда она выходит на участок поступательного потока жидкой среды. Для частицы, находящейся в прямолинейном потоке магнитного сепаратора, в пункте 4.5.1 выведены критерии абсолютного непопадания частицы на магнит сепаратора. На основе данного критерия ниже приведено аналитическое обоснование того, что траектория $HD0'$ является предельной для осаждения частицы на магнит.

Обозначим через t_{D0} интервал времени перемещения частицы в радиальном направлении от точки D к поверхности магнита в точке $0'$, через t_B интервал времени переноса частицы вращающимся участком потока. Таким образом, оценочное условие не осаждения частицы на магнит при прохождении её по траектории $D0'$ принимает вид

$$t_B < t_{D0}. \quad (4.87)$$

4.6.2. Математическая модель траектории движения
феррочастицы на вращательном участке потока
водной технологической жидкости

На вращательном участке варьирование радиальной координатой r частицы ограничено узким диапазоном от $r_{\max} = r_D$ до $r_{\min} = R$. Поэтому, усредняя систему кинематических уравнений (4.18), (4.19) по переменной r в диапазоне её вариации, приходим к следующим уравнениям, аналогичным (4.24) и (4.25):

$$\frac{dr}{dt} \cong -v_M - \frac{v_{\text{жн}}}{k\sqrt{1-k^2}} (1 - k_D) \arctg \left(\frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2}} \right); \quad (4.88)$$

$$\bar{r}_B \frac{d\varphi}{dt} = v_{\text{жн}} [1 - k^2 (\sin \varphi)^2]^{-1} (1 + k_D) \sin \varphi, \quad (4.89)$$

где $k_D = R/r_D$ или в соответствии с (4.83) $k_D = \cos \varphi_D$, $\bar{r}_B = 0.5(r_D + R)$.

В пункте 4.6.1 показано, что $R \leq r_D < 1.14R$, поэтому коэффициент k_D может изменяться в пределах от 1 до 1.15, при этом вторым слагаемым в правой части ДУ (4.88) пренебрегает и это ДУ приобретает следующий вид:

$$\frac{dr}{dt} \cong -v_M. \quad (4.90)$$

Согласно ДУ (4.90) поток ВТЖ практически не влияет на радиальное перемещение ферромагнитной частицы, поэтому ДУ (4.23) примет вид

$$m \frac{d^2 r_M}{dt^2} + K_{c1} \frac{dr_M}{dt} - \alpha_{0k} r_M = -f_k.$$

Решение этого уравнения получим из (4.55) подстановкой нулевых параметров эквивалентной добавочной силы ($\alpha = \beta = 0$) и $t_1 = t_D$:

$$r(t) = \frac{f_{01}}{\alpha_{01}} + \left[r_D - \frac{f_{01}}{\alpha_{01}} \right] e^{P_{11}(t-t_D)}. \quad (4.91)$$

Здесь t_D интервал времени, за который феррочастица преодолевает участок траектории HD . При $t = t_D + t_{D0}$ частица попадает на магнит. Подставив в (4.91) значение $r(t_D + t_{D0}) = R$ и $\frac{f_{01}}{\alpha_{01}} = \frac{r_{\text{гп1}} - 0.06R}{0.94}$, определим интервал времени t_{D0} перемещения частицы от точки D к поверхности магнита:

$$t_{D0} = \frac{1}{P_{11}} \ln \left[\frac{r_{\text{гп1}} - R}{r_{\text{гп1}} - 0.06R - 0.94r_D} \right]. \quad (4.92)$$

Решение ДУ (4.89) аналогично решению ДУ (4.25):

$$tg \frac{\varphi}{2} \cong tg \frac{\varphi_D}{2} e^{\frac{v_{жв}(t-t_D)}{\bar{r}_B}}, \quad (4.93)$$

$$v_{жв} = \frac{v_{жн}(1+k_D)}{\zeta_1(\varphi_D, k)}.$$

Подставив в (4.93) интервал времени t_B переноса частицы вращающимся участком потока жидкости в точку O' ($\varphi(t_B + t_D) = 90^\circ$), получим формулу расчета t_B :

$$t_B = \frac{\bar{r}_B}{v_{жв}} \ln(ctg \frac{\varphi_D}{2}). \quad (4.94)$$

Для обоснования того, что траектория $D0'$ является предельной для осаждения частицы на магнит, сформулируем и докажем следующее утверждение 4.3.

Утверждение 4.3. Для первой ступени сепарации траектория $D0'$ является предельной с точки зрения осаждения ферромагнитной частицы определенного размера на магнит: если частица, вынесенная вращательным потоком в точку O' , не достигнет поверхности магнита, то она пройдет мимо него.

Доказательство. Подставив в условие (4.87) не осаждения частицы на магнит выражения (4.92) и (4.94), с учетом (4.93), получим

$$\frac{\bar{r}_B}{v_{жв}} \ln(ctg \frac{\varphi_D}{2}) < \frac{1}{P_{11}} \ln \left[\frac{r_{гп1} - R}{r_{гп1} - 0.06R - 0.94R/\cos\varphi_D} \right].$$

Данное неравенство сначала свернем:

$$\ln \left[\left(1 + \frac{0.94R(1-1/\cos\varphi_D)}{r_{гп1} - R} \right)^{\frac{1}{v_{1B}}} ctg \frac{\varphi_D}{2} \right] < 0,$$

затем последнее неравенство приведем к следующему виду:

$$\left(1 + \frac{0.94R(1-1/\cos\varphi_D)}{r_{гп1} - R} \right)^{\frac{1}{v_{1B}}} < tg \frac{\varphi_D}{2}, \quad (4.95)$$

где $v_{1B} = P_{11}\bar{r}_B/v_{жв}$ – обобщенный параметр для участка вращательного потока.

В пункте 4.6.1 рекомендовано значение $\varphi_D < 0.5$ и соответственно $|1 - 1/\cos\varphi_D| < 0.1$, что позволяет упростить (4.95)

$$1 + \frac{0.94R(1-1/\cos\varphi_D)}{v_{1B}(r_{гп1} - R)} < tg \frac{\varphi_D}{2}. \quad (4.96)$$

Разложив тригонометрические функции $\cos\varphi_D \approx 1 - (\varphi_D)^2/2$ и $tg \frac{\varphi_D}{2} \approx \varphi_D/2$ в ряд Тейлора и пренебрегая членами высшего порядка малости, неравенство (4.96) приведем к виду

$$1 < \frac{0.47R(\varphi_D)^2}{v_{1B}(r_{rp1}-R)} + \frac{\varphi_D}{2}. \quad (4.97)$$

В неравенстве (4.97), согласно неравенству (4.96), символ неравенства физически означает, что частица в момент времени t_B проходит выше точки $0'$ по рисунку 4.13. Когда вращающийся поток выносит частицу в окрестность точки $0'$, она выходит на участок прямолинейного потока жидкой среды с начальным углом $\varphi_H = 90^\circ$. При текущей угловой координате $\varphi \geq 90^\circ$ поведение частицы можно оценить критериальными условиями (4.70), (4.71). Если $v_K \geq 1$, то частица не осаждается на магнит при соблюдении неравенства

$$B_K(t_0) < \frac{2}{v_K}, \quad (4.98)$$

а при $v_K < 1$ она вообще не осаждается.

В (4.98) обобщенные параметры $B_K = B_1$, $v_K = v_1 = \frac{P_{11}}{\gamma_2} = \frac{\bar{r}P_{11}}{\bar{v}_{жс}}$ принимают индекс $k=1$, так как траектория $D0'$ проходит в области сильного поля. Параметр B_1 вычисляется по формуле (4.61)

$$B_1(t_0) = \frac{1}{\alpha\bar{r}} \left[\frac{f_{01}}{\alpha_{01}} - r(t_0) \right],$$

где $\bar{r} = (r_D + R)/2$, $\alpha = 0,225 \sin \varphi_H = 0,225$.

Предельному значению $r(t_{01}) = R$ соответствует максимальное значение параметра $B_1(t_{01})$, равное $B_1 \cong 9.5(r_{rp1} - R)/(r_D + R)$. Подставив $B_1(t_0)$ в (4.98), абсолютный критерий не осаждения частицы на магнит примет вид:

$$1 < \frac{0.42\bar{r}}{v_1(r_{rp1}-R)} = K_y, \quad (4.99)$$

Условие (4.97) не достижения поверхности магнита частицей, прибывшей в окрестность точки $0'$, с учетом правой части (4.110), примет следующий вид:

$$\left(1 - \frac{\varphi_D}{2}\right) \frac{0.42\bar{r}}{0.47R(\varphi_D)^2} \frac{v_{1B}}{v_1} < K_y. \quad (4.100)$$

Траектория $D0'$ будет предельной для осаждения ферромагнитной частицы, если систему двух неравенств (4.99), (4.100) представить в равенства, то получим два уравнения для расчета предельных значений параметров очистки – $K_y \rightarrow K_{yпр}$:

$$K_{yпр}(P_{11пр}) = 1; \quad \left(1 - \frac{\varphi_{Dпр}}{2}\right) \frac{0.42\bar{r}}{0.47R(\varphi_{Dпр})^2} \frac{v_{1B}}{v_1} = (\varphi_{Dпр})^2 K_{yпр}(P_{11пр}). \quad (4.101)$$

Предельная траектория $D0'$ разграничивает траектории, замыкающиеся на магните, и проходящие мимо магнита. Что и требовалось доказать.

По выражениям (4.101) проведены числовые оценки предельных значений параметров очистки на вращательном участке потока ВТЖ (таблица 4.2).

Таблица 4.2

Предельные значения параметров очистки на вращательном участке потока ВТЖ

$v_{\text{жн}}, \text{ м/с}$	0.001	0.01	0.02	0.04
$P_{11\text{пр}}(d), \text{ с}^{-1}$	0.1	1	2.1	4.2

Значению $P_{11\text{пр}}(d) = 4.2 \text{ с}^{-1}$ соответствует размер феррочастицы $d = 1 \text{ мкм}$. Значение $\varphi_{D\text{пр}} = 0.7 \text{ рад}$ по выражению (4.101). Поэтому при скорости потока $v_{\text{жн}} = 0.04 \text{ м/с}$ все частицы с размером более 1 мкм, находящиеся на вращательном участке потока в секторе $0 < \varphi_D \leq \varphi_{D\text{пр}}$, осаждаются в магнитном сепараторе.

Решив второе уравнение (4.101) при $K_y(d) \neq 1$, получим зависимость $\varphi_D(d)$, подставив которую в (4.86), с учетом (4.82,) получим характеристику степени очистки на её начальном участке:

$$\varepsilon(d) \cong 1.37 \sin^3 \sqrt{K_y^{-1}(d)} = 1.37 \sin^3 \sqrt{\frac{(r_{\text{гр1}} - R) P_{11}(d)}{0.42 \bar{v}_{\text{жс}}}}. \quad (4.102)$$

Для частиц с размерами $d \leq 500 \text{ мкм}$ зависимость $P_{11}(d)$ на основе (4.51), с учетом (3.78) и (3.82), упрощается:

$$P_{11}(d) \cong k_0 d^3, \quad k_0 = \frac{\mu_0 \cdot \alpha_1 \cdot \chi_{\text{мо}} \cdot (H_m(d_{\text{ш}}))^3}{50 \cdot \eta \cdot (r_{\text{гр1}} - R)}.$$

Поэтому при $K_y^{-1}(d) \ll 1$ зависимость (4.102) принимает вид:

$$\varepsilon(d) \cong 3.88 b_1^{1.5} = 5 \left[\frac{k_0 (r_{\text{гр1}} - R)}{\langle v_{\text{жс}} \rangle} \right]^{1.5} d^{4.5} = c_0 d^{4.5}. \quad (4.103)$$

Выражения (4.102) – (4.103) положим в основу расчета начального участка характеристики степени очистки $\varepsilon(d)$.

Таким образом, в результате математического моделирования траектории перемещения ферромагнитной частицы во вращающейся области потока жидкой среды, обтекающего цилиндрический профиль магнитных патронов сепаратора, обоснован критерий осаждения частиц на магниты сепаратора и разработана математическая мо-

дель характеристики степени очистки сепаратора на её начальном участке.

4.7. Алгоритм расчета семейства основных зависимостей эффективности разделения монодисперсных ферромагнитных суспензий

В этом параграфе сосредоточим внимание на моделировании «головной» части зависимости $\varepsilon(d)$ для первой ступени сепарации (в соответствии с (4.12)) и полной зависимости $\varepsilon(d)$ для каждой из последующих ступеней сепарации (в соответствии с (4.13)). «Головная» часть зависимости заключается в следующих границах $k \leq \varepsilon(d) \leq 1$ характеристики степени очистки. Именно этот фрагмент характеристики в первую очередь используется в практике проектирования патронных магнитных сепараторов с высокими степенями очистки ВТЖ.

Разработанная нами программа моделирования нескольких типов семейств зависимости $\varepsilon(d)$ основана на математических моделях траекторий движения феррочастиц и на критериальных условиях, полученных в параграфах 4.5, 4.6.

Функциональная схема алгоритма расчета $\varepsilon(d)$ изображена на рисунке 4.14, а его аналитическая версия представлена в приложении 5. Алгоритм построен по принципу сочетания аналитических и численных методов расчета траекторий частиц. Аналитические методы построены на системе критериальных условий, гарантирующих осаждение или не осаждение феррочастицы на магниты. Численные методы используются в узком диапазоне значений обобщенных параметров, которые располагаются в области между альтернативными абсолютными критериальными условиями.

Целью алгоритма и программы является определение для каждого размера d феррочастицы *такого критического значения* угла φ_n вхождения её в активную рабочую область сепаратора, при котором частица будет находиться на границе состояния попадания или непопадания на магнит.

Результаты расчета семейства «головной» части характеристик степени очистки ВТЖ на первой ступени сепарации иллюстрируются на рисунке 4.15, на

второй – на рисунке 4.16.

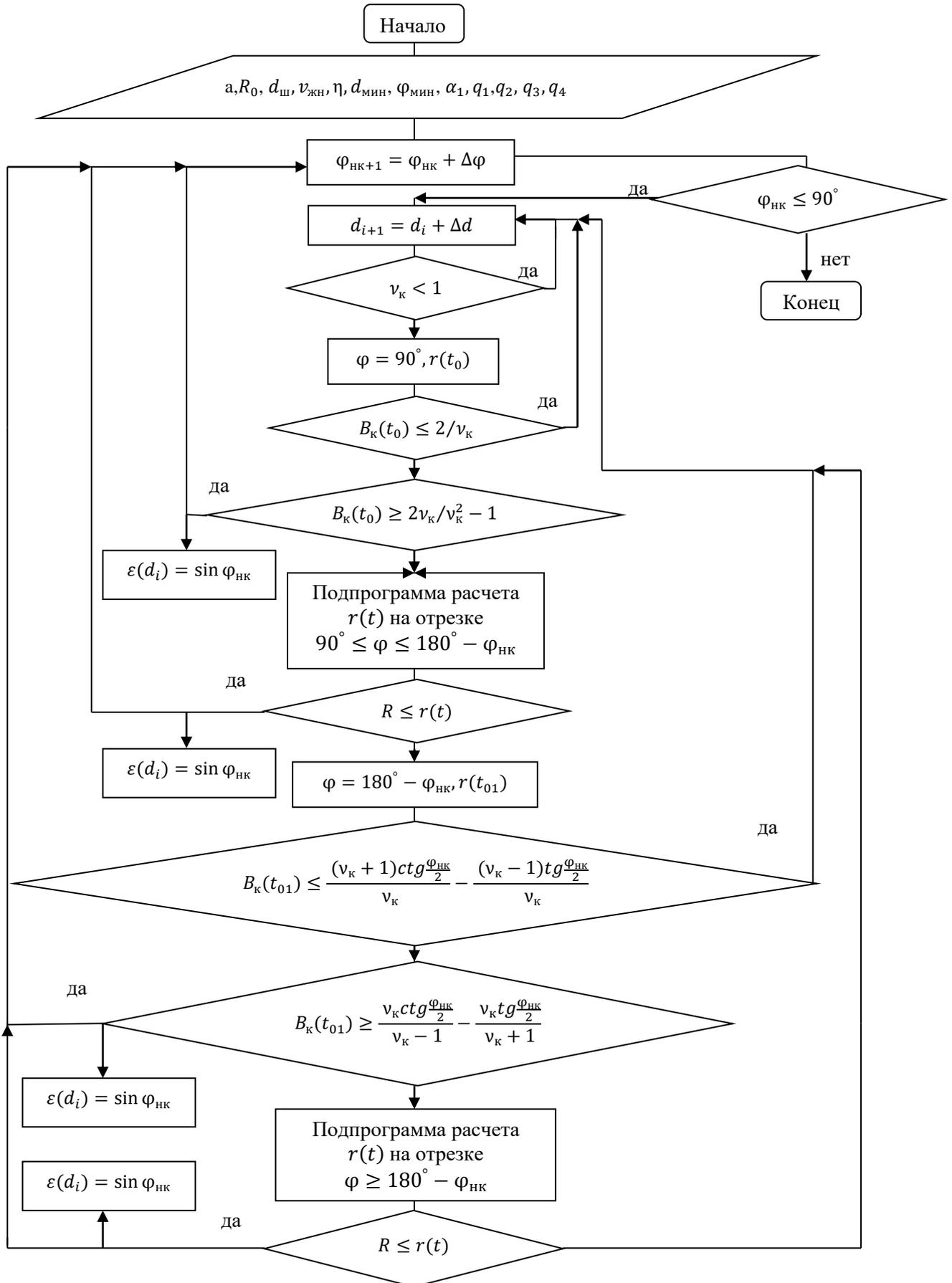


Рисунок 4.14 – Функциональная схема алгоритма расчета $\varepsilon(d)$

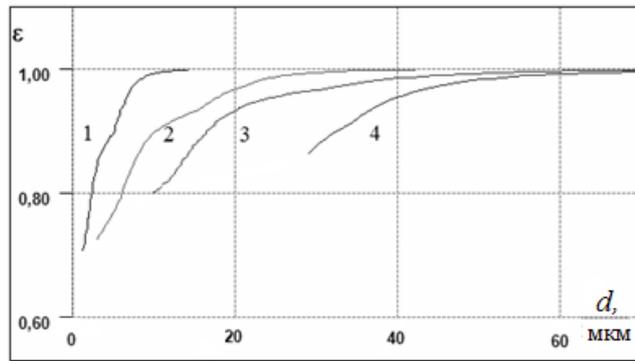


Рисунок 4.15 – Семейство зависимостей степени очистки «головной» части первой ступени от диаметра феррочастиц при разных значений толщин слоя осадка шлама на магнитах: $a = 48$ мм; $v_{жн} = 0.03$ м/с; $\eta = 0.0012$ Н/м; $C_{и} = 0.5$ г/л; $R_0 = 16$ мм: 1. – $d_{ш} = 0$; 2. – $d_{ш} = 1$ м
3. – $d_{ш} = 2$ мм; 4. – $d_{ш} = 3.3$ мм

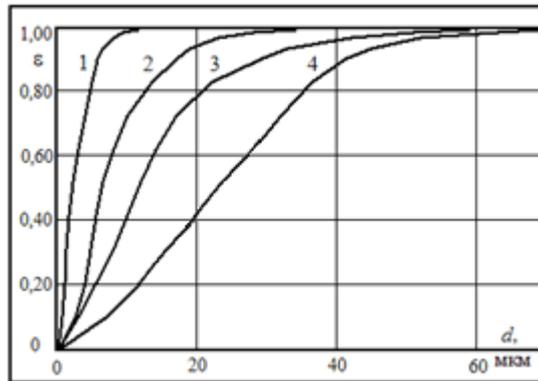


Рисунок 4.16 – Семейство зависимостей степени очистки второй ступени от диаметра феррочастиц для разных значений толщин слоя осадка шлама на магнитах: $a = 48$ мм; $v_{жн} = 0.03$ м/с; $\eta = 0.0012$ Н/м; $C_{и} = 0.5$ г/л; $R_0 = 16$ мм: 1. – $d_{ш} = 0$; 2. – $d_{ш} = 1$ мм; 3. – $d_{ш} = 2$ мм;
4. – $d_{ш} = 3.3$ мм

Для сопряжения двух ветвей зависимости $\varepsilon(d)$ – «головной» части и начального участка – для первой ступени сепарации применим метод, изложенный в главе 2: за основу берутся исходные данные, соответствующие «головной» части зависимости $\varepsilon(d)$, полученные расчетом по программе (см. рисунок 4.15) и по аналитическому выражению (4.103) начального участка характеристики. Для практического использования в первом приближении «головная» часть характеристики степени очистки моделируем ПДУ второго порядка с соответствующими граничными условиями:

$$\varepsilon 2''_d + h \varepsilon 2'_d = 0; \quad \varepsilon 2(d_z), \varepsilon 2'_d(d_z), \varepsilon 2(\infty) = 1,$$

решение которого принимает следующий вид:

$$\varepsilon 2(d) \approx 1 - C e^{-hd}, \quad (4.104)$$

где коэффициенты C и h являются параметрами идентификации.

При сопряжении двух ветвей зависимости $\varepsilon(d)$ ($\varepsilon_2(d)$ «головной» части и $\varepsilon_1(d)$ начального участка) обеспечим равенство функций и их наклон в точке сопряжения d_z

$$\varepsilon_1(d_z) = \varepsilon_2(d_z); \quad \frac{\partial \varepsilon_1(d_z)}{\partial d} = \frac{\partial \varepsilon_2(d_z)}{\partial d}. \quad (4.105)$$

Неизвестные параметры C , h системы уравнений (4.104), (4.105) совместно с коэффициент c_0 в уравнении (4.103) определялись методом наименьших квадратов при задании дискретных значений ε_n и d_n , соответствующих графическим зависимостям по рисунку 4.15.

Полученные параметры представлены в таблице 4.3. На рисунках 4.17 и 4.18 показаны графики зависимостей $\varepsilon(d)$ для разных значений толщин d_{III} осадка ферропримесей.

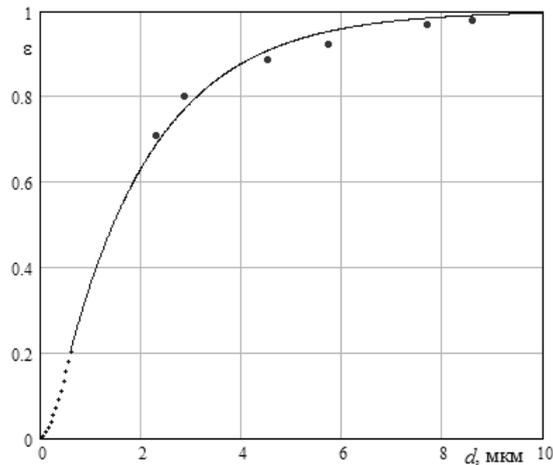


Рисунок 4.17 – Зависимость $\varepsilon(d)$ для $d_{III} = 0$; точками обозначены исходные данные

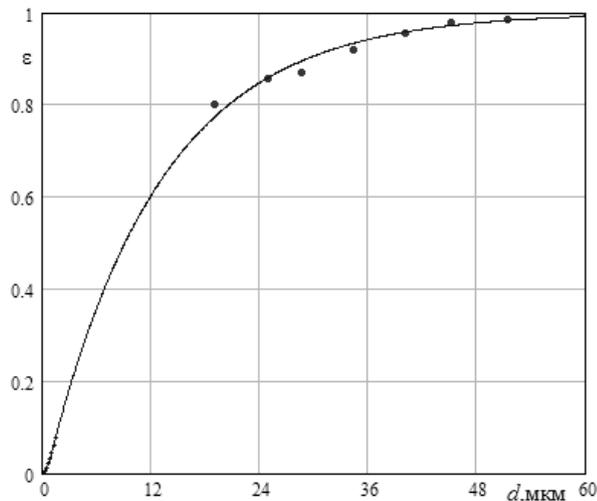


Рисунок 4.18 – Зависимость $\varepsilon(d)$ для $d_{III} = 3.3$; точками обозначены исходные данные

Таблица 4.3

Параметры математической модели $\varepsilon(d)$ при разных значениях $d_{ш}$

$d_{ш}$, мм	C	h , мкм ⁻¹	c_0 , мкм ^{-4,5}	d_z , мкм
0	1.1	0.55	9.35	0.49
1	1.055	0.25	4.88	0.6
2	1.042	0.146	2.04	0.8
3.3	1.032	0.08	0.6	1.2

Таким образом, для первой ступени сепарации реализован метод сопряжения двух ветвей характеристики степени очистки магнитного сепаратора – «головной части» и «хвостовой части».

Адекватность разработанных математических моделей степени очистки оценивалась в приложении 6 путем сопоставления расчетных и экспериментальных данных (рисунок П.6), полученных на промышленной установке Вита-С/ЭО, которая испытывалась на ОАО «Западно-Сибирский металлургический комбинат».

4.8. Математическое моделирование характеристик разделения полидисперсных ферромагнитных суспензий в магнитных полях

4.8.1. Законы распределения механических примесей в дисперсной системе для задач магнитной сепарации и магнитной коагуляции

Для решения задачи сепарации и коагуляции сначала определимся с характеристиками распределения феррочастиц в ВТЖ.

Дисперсный состав механических примесей в теории сепарации традиционно описывается нормированной массовой плотностью распределения частиц по размерам d

$$f_m(d) = \frac{\Delta m_k}{\Delta d_k \cdot C}, \quad (4.106)$$

где Δm_k – масса частиц в единице объема, размеры которых принадлежат интервалу $(d_k, d_k + \Delta d_k)$, кг; C – средняя массовая концентрация примесей, кг/м³.

При этом вид законов распределения примесей может быть различным. Если гранулометрическое распределение примесей симметричное, то подходят нор-

мальное или Симпсона распределения [11, 13], если несимметричное, то логарифмически нормальное распределение [123] с функцией плотности вероятности

$$f(d) = \begin{cases} \frac{1}{sd\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln d - \ln \bar{d}_n)^2}{2s^2}}, & \text{при } d > 0; \\ 0, & \text{при } d \leq 0, \end{cases} \quad (4.107)$$

где $s = \ln\left(\frac{\sigma^2}{\bar{d}_n^2} + 1\right)$; \bar{d}_n и σ – соответственно среднее арифметическое значение и среднее квадратическое отклонение размеров частиц, м.

Магнитная коагуляция априори есть объединение отдельных частиц в агрегаты, при этом масса агрегата аддитивна массам отдельных частиц. Элементарный акт процесса коагуляции, очевидно, можно характеризовать вероятностью объединения i -ых частиц массой m_i с j -ми частицами массой m_j . Отсюда следует, что для задачи моделирования процесса коагуляции приемлем тот закон распределения дисперсного состава частиц, который характеризует зависимость нормированной плотности распределения числа частиц, содержащих в единице объема, от их массы,

$$f_n(m) = \frac{\Delta n_k}{\Delta m_k \cdot N_v}, \quad (4.108)$$

где Δn_k – число частиц в единице объема, массы которых принадлежат интервалу $(m_k, m_k + \Delta m_k)$, кг; N_v – средняя концентрация числа частиц примеси, м⁻³.

Зависимости (4.108) и (4.106) связаны между собой через соотношение $\Delta n_k = \Delta m_k / m_k$, где m_k – масса одиночной частицы k -го сорта. Определив Δm_k из (4.108) и подставив в (4.106), получим в пределе формулу связи

$$f_n(m) = \frac{f_m(d_\phi) \cdot c}{m \cdot N_v} \frac{d(d_\phi)}{dm}, \quad (4.109)$$

в которой обозначение размера частицы d заменено на обозначение d_ϕ в связи с необходимостью взятия производной от размера частицы по её массе.

Приняв сферическую форму частицы примеси, имеем $d_\phi = \sqrt[3]{6m/\pi\rho}$ (ρ – объемная плотность массы части примеси), и подставив это выражение в (4.107) и далее в (4.109), придем к закону плотности распределения концентрации частиц от их массы:

$$f(m) = \begin{cases} \frac{C}{3s\sqrt{2\pi}\cdot N_v \cdot m^2} e^{-\frac{(\ln m - \ln \bar{m}_n)^2}{18s^2}}, & \text{при } m > 0; \\ 0, & \text{при } m \leq 0, \end{cases} \quad (4.110)$$

где $\bar{m}_n = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \bar{d}_n^3}{6}$.

Вычислим отношение C/N_v для логарифмически нормального закона распределения примесей. Из (4.106)

$$\Delta n_k = \frac{C \cdot f_m(d) \cdot \Delta d_k}{m_k},$$

подставляя в него (4.107) и складывая все Δn_k , в пределе получим выражение

$$N_v = \frac{6C}{s\bar{d}_n^3 \rho \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2s^2} - 3y} dy = \frac{6C e^{4.5s^2}}{\pi \rho \bar{d}_n^3} = \frac{C e^{4.5s^2}}{\bar{m}_n}, \quad (4.111)$$

где переменная $y = \ln(d/\bar{d}_n)$.

Подстановка (4.111) в (4.110) дает

$$f(m) = \begin{cases} \frac{K_n}{m^2} e^{-\frac{(\ln(m/\bar{m}_n))^2}{18s^2}}, & \text{при } m > 0; \\ 0, & \text{при } m \leq 0; \end{cases} \quad (4.112)$$

$$K_n = \frac{\bar{m}_n e^{-4.5s^2}}{3s\sqrt{2\pi}}.$$

Зависимости (4.106) и (4.108) связаны между собой через соотношение $\Delta n_k = \Delta m_k/m_k$, где m_k – масса одиночной частицы k -го сорта.

Определив Δm_k из (4.106) и подставив в (4.108), получим в пределе формулу связи

$$f_n(m) = \frac{f_m(d_\phi) \cdot C}{m \cdot N_v} \frac{d(d_\phi)}{dm}, \quad (4.113)$$

в которой обозначение размера частицы d заменено на обозначение d_ϕ в связи с необходимостью взятия производной от размера частицы по её массе.

Сущность и правомерность преобразования (4.113) выражается следующим утверждением.

Утверждение 4.4. В замкнутой дисперсной системе, в которой может происходить только процесс коагуляции дисперсной фазы (процесс седиментации отсутствует), нормированные к единице объема плотностей распределения соответ-

ственно массы частиц по размерам $f_m(d)$ и числа частиц по массам $f_n(m)$ связаны между собой законом сохранения массы.

Доказательство.

Умножив левую и правую части уравнения (4.113) на m и интегрируя их, получим уравнение

$$\int_0^{\infty} m f_n(m) dm = \frac{C}{N_v} \int_0^{\infty} f_m(d_\phi) d(d_\phi),$$

и принимая во внимание, что левый интеграл есть математическое ожидание непрерывной случайной величины распределения массы феррочастиц \bar{m} , а правый интеграл равен единице, то получим строгое обобщенное выражение математического ожидания масс феррочастиц в суспензии

$$\bar{m} = C/N_v,$$

Учитывая закон сохранения массы при коагуляции для замкнутых дисперсных систем (при условии отсутствия осаждения) $C = const$, получим строгое уравнение, устанавливающее связь между параметрами распределения ферропримеси в процессе коагуляции

$$\bar{m} N_v = C \equiv inv. \quad (4.114)$$

Таким образом, утверждение 3.4 доказано.

Выражение (4.114) правомерно для произвольных начальных распределений дисперсного состава примесей, при произвольных механизмах процессов коагуляции и в произвольные моменты времени и будет использовано в главе 5.

Заметим, выражение (4.114) ранее предсказывалось в нестрогой форме [30].

4.8.2. Характеристики процессов разделения полидисперсных ферромагнитных суспензий

В реальных условиях процесс очистки ВТЖ от полидисперсных примесей проходит в последовательных ступенях многорядного магнитного сепаратора, при этом сепаратор изменяет (преобразует) дисперсный состав примесей. При проектировании и оптимизации конструкций магнитных сепараторов нужно знать характеристики многорядных сепараторов при полидисперсном распределении

примесей. На рисунке 4.19, а показана структурная схема N – ступенчатого сепаратора, а на рисунке 4.19, б дана его результирующая эквивалентная схема.

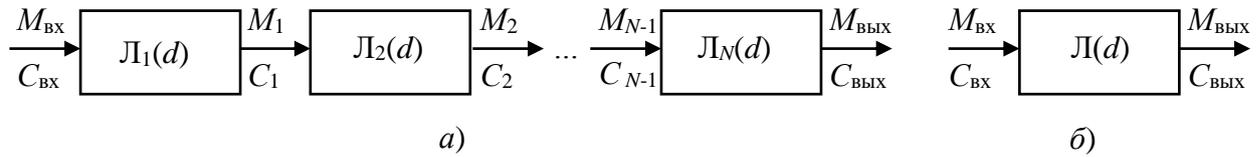


Рисунок 4.19 – Структурная схема многорядного магнитного сепаратора (а); его эквивалентная схема (б)

С математической точки зрения сепаратор можно рассматривать как систему, на которую подается входное воздействие и с которой снимается отклик на выходе.

В параграфах 4.5–4.7 разработана математическая модель семейства характеристик степени очистки ВТЖ при монодисперсном составе феррочастиц для одной ступени магнитного сепаратора. Здесь, в соответствии с рисунком 4.19, б, на вход сепаратора поступает дисперсная фаза с исходной средней массовой концентрацией феррочастиц $C_{\text{ВХ}}$ (масса $M_{\text{ВХ}}$), на выходе получим очищенную ВТЖ с концентрацией $C_{\text{ВЫХ}}$ (массой $M_{\text{ВЫХ}}$). Введя коэффициент передачи

$$\bar{L}(\bar{d}_{\text{ВХ}}) = \frac{M_{\text{ВЫХ}}}{M_{\text{ВХ}}} = \frac{C_{\text{ВЫХ}}}{C_{\text{ВХ}}}, \quad (4.115)$$

можно определить также концентрацию осаждаемой в сепараторе примеси $C_{\text{Ш}}$

$$C_{\text{Ш}} = [1 - \bar{L}(\bar{d}_{\text{ВХ}})]C_{\text{ВХ}}. \quad (4.116)$$

Разделяя полидисперсное распределение примеси на отдельные фракции по размерам, по формуле (4.106) можно определить массу фракции в единице объема, поступающей на вход сепаратора $\Delta m_{\text{ВХ}k} = C_{\text{ВХ}} f_{\text{ВХ}m}(d_k) \Delta d_k$. В нашей работе [123] показано, что на выходе сепаратора масса $\Delta m_{\text{ВЫХ}k}$ данной фракции в единице объема определяется выражением

$$\Delta m_{\text{ВЫХ}k} = L(d_k) \Delta m_{\text{ВХ}k} = [1 - \varepsilon(d_k)] \Delta m_{\text{ВХ}k}, \quad (4.117)$$

где $L(d_k) = 1 - \varepsilon(d_k)$ – коэффициент передачи сепаратора для монодисперсного распределения примеси.

Далее, суммируя на выходе все фракции $\Delta m_{\text{ВЫХ}k}$ и переходя к пределу, получим

$$C_{\text{ВЫХ}} = C_{\text{ВХ}} \left[1 - \int_0^{\infty} \varepsilon(d_{\phi}) f_{\text{ВХ}}(d_{\phi}) d(d_{\phi}) \right] = [1 - \bar{\varepsilon}(\bar{d}_{\text{ВХ}})] C_{\text{ВХ}} = C_{\text{ВХ}} \bar{L}(\bar{d}_{\text{ВХ}}), \quad (4.118)$$

где $\bar{\varepsilon}(\bar{d}_{\text{ВХ}})$ – среднее значение степени очистки сепаратора при полидисперсном распределении феррочастиц по размерам, определяемое зависимостью (1.2). Здесь: $\bar{d}_{\text{ВХ}}$ – среднее арифметическое значение диаметра феррочастиц, поступающих на вход сепаратора, м; $f_{\text{ВХ}}(d_{\phi})$ – функция дисперсного распределения феррочастиц по размерам на входе сепаратора, м⁻¹; d_{ϕ} – эффективный диаметр сферической частицы, м; $\varepsilon(d_{\phi})$ – степень очистки сепаратора в зависимости от диаметра феррочастиц d_{ϕ} при монодисперсном их распределении в ВТЖ.

С позиции теории систем сепаратор преобразует спектральный состав феррочастиц, другими словами изменяет функцию распределения плотности вероятности по размерам, которую на выходе можно выразить формулой (4.106) следующим образом:

$$f_{\text{ВЫХ}}(d_k) = \frac{\Delta m_{\text{ВЫХ}k}}{\Delta d_k C_{\text{ВЫХ}}}.$$

Выразив $\Delta m_{\text{ВЫХ}k}$ формулой (4.117) и $C_{\text{ВЫХ}}$ формулой (4.118) и перейдя к пределу при $\Delta d_k \rightarrow 0$, получим закон преобразования дисперсного состава примесей на выходе сепаратора:

$$f_{\text{ВЫХ}}(d_k) = \frac{L(d_k) \Delta m_{\text{ВХ}k}}{\Delta d_k \bar{L}(\bar{d}_{\text{ВХ}}) C_{\text{ВХ}}}; \quad f_{\text{ВЫХ}}(d_{\phi}) = \frac{L(d_{\phi}) f_{\text{ВХ}}(d_{\phi})}{\bar{L}(\bar{d}_{\text{ВХ}})}, \quad (4.119)$$

где $f_{\text{ВХ}}(d_{\phi}) = \frac{1}{C_{\text{ВХ}}} \frac{dm_{\text{ВХ}}}{dd_{\phi}}$.

Используя в (4.119) выражения (4.117), (4.118), получим

$$f_{\text{ВЫХ}}(d_{\phi}) = \frac{[1 - \varepsilon(d_{\phi})]}{[1 - \bar{\varepsilon}(\bar{d}_{\text{ВХ}})]} f_{\text{ВХ}}(d_{\phi}). \quad (4.120)$$

Рассмотрим процесс сепарации в многорядном сепараторе, состоящем из N последовательных ступеней (рисунки 4.19, а), где M_k – масса, а C_k – средняя массовая концентрация феррочастиц в ВТЖ на выходе k -ой ступени ($k = 1, \dots, N$); \bar{L}_k – среднее значение коэффициента передачи соответствующей ступени:

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_1(\bar{d}_{\text{ВХ}}) = \frac{C_1}{C_{\text{ВХ}}}; \quad \bar{L}_2 = \bar{L}_2(\bar{d}_1) = \frac{C_2}{C_1}; \quad \dots; \quad \bar{L}_N = \bar{L}_N(\bar{d}_{N-1}) = \frac{C_{\text{ВЫХ}}}{C_{N-1}},$$

где $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{N-1}$ – среднее арифметическое значение размера феррочастиц, посту-

пающих на вход соответственно второй, третьей, ..., N -ой ступени.

Результирующая передаточная функция, согласно его эквивалентной схеме на рисунке 4.19, б, выражается формулой

$$\bar{L}(\bar{d}_{\text{ВХ}}) = \frac{C_{\text{ВЫХ}}}{C_{\text{ВХ}}} = \prod_{k=1}^N \bar{L}_k(\bar{d}_{k-1}). \quad (4.121)$$

Средние степени очистки каждой ступени равны:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_1(\bar{d}_{\text{ВХ}}) &= \frac{C_{\text{ВХ}} - C_1}{C_{\text{ВХ}}} = 1 - \bar{L}_1; \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_2(\bar{d}_1) = 1 - \bar{L}_2; \dots; \\ \bar{\varepsilon}_N &= \bar{\varepsilon}_N(\bar{d}_{N-1}) = 1 - \bar{L}_N. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Выразив \bar{L}_k из (4.122) и подставив в (4.121), получим:

$$\bar{L}(\bar{d}_{\text{ВХ}}) = \prod_{k=1}^N (1 - \bar{\varepsilon}_k(\bar{d}_{k-1})).$$

Средняя степень очистки многорядного сепаратора равна

$$\bar{\varepsilon}(\bar{d}_{\text{ВХ}}) = \frac{C_{\text{ВХ}} - C_{\text{ВЫХ}}}{C_{\text{ВХ}}} = 1 - \bar{L}(\bar{d}_{\text{ВХ}}) = 1 - \prod_{k=1}^N (1 - \bar{\varepsilon}_k(\bar{d}_{k-1})).$$

Средняя степень очистки k -ой ступени рассчитывается по формуле

$$\bar{\varepsilon}_k(\bar{d}_{k-1}) = \int_0^{\infty} \varepsilon_k(d_{\phi}) f_{k-1}(d_{\phi}) d(d_{\phi}), \quad (4.123)$$

где плотность вероятности распределения феррочастиц по размерам на входе k -ступени (или на выходе $k-1$ - ступени) $f_{k-1}(d_{\phi})$ определяется по выражению (4.119), тогда

$$f_{k-1}(d_{\phi}) = \frac{\Delta m_{j,k-1}}{\Delta d_j C_{k-1}} = \frac{L_{k-1}(d_{\phi}) \Delta m_{j,k-2}}{\Delta d_j L_{k-1} C_{k-2}} = \frac{L_{k-1}(d_{\phi}) f_{k-2}(d_{\phi})}{L_{k-1}}, \quad (4.124)$$

где $\Delta m_{j,k-1}$ – масса частиц в единице объема жидкости на выходе $k-1$ -ступени, размеры которых принадлежат интервалу $(d_j - d_j + \Delta d_j)$, м; $L_{k-1}(d_{\phi})$ – коэффициент передачи $k-1$ -ступени по массовой концентрации при монодисперсном распределении феррочастиц в ВТЖ:

$$L_{k-1}(d_{\phi}) = 1 - \varepsilon_{k-1}(d_{\phi}).$$

В приложении 6 проведено сопоставление расчетных по разработанной математической модели значений средней степени очистки с экспериментальными значениями (рисунок П.6.4). Показано, что по критерию Фишера с уровнем риска не более 1% разработанная математическая модель степени очистки адекватна экспериментальным данным.

4.9. Выводы

На основе разработанных методов математического моделирования траекторий феррочастиц разработаны характеристики магнитных сепараторов, предназначенных для задач оптимизации и создания научно-обоснованной методики проектирования эффективных средств очистки ВТЖ от ферропримесей.

1. Разработан и реализован метод математического моделирования и изучения траекторий движения ферромагнитных частиц в магнитном сепараторе, который базируется на преобразовании нелинейной системы ДУ динамики и переноса потоком ВТЖ феррочастицы в эквивалентное с некоторым приближением неоднородное обыкновенное линейное ДУ второго порядка. На основе полученной математической модели траекторий феррочастиц в магнитных сепараторах построена математическая теория магнитной сепарации и разработаны алгоритм и программа расчета различных семейств характеристик очистки ВТЖ от монодисперсных феррочастиц. Алгоритм программы базируется на аналитических и численных методах расчета траекторий частиц. Аналитические методы строятся на смоделированной системе критериальных условий (системы абсолютных критериев, гарантирующих осаждение феррочастицы на патрон; абсолютного критерия, гарантирующего непопадание феррочастицы на патрон). Численные методы применяются в узком диапазоне значений обобщенных параметров, которые располагаются в области между альтернативными абсолютными критериальными условиями.

2. При разработке метода развиты следующие теоретические положения.

2.1. На основе численного моделирования характера обтекания жидкой средой сетки цилиндрических магнитов на программном пакете компании Mentor Graphics – FloEFD установлено различие *картины линий тока первой ступени и последующих ступеней*, в которых поток *поступает и проходит прямолинейной ламинарной струей*.

2.2. Разработан подход аналитического моделирования обтекания сетки цилиндрических профилей магнитов, в которой математическая модель обтекания идеальной жидкостью одиночного цилиндра преобразуется процедурой коррекции линий тока с наложением условий непрерывности потока и потенциальности его скорости.

2.3. Разработан метод преобразования традиционного нелинейного ДУ дина-

мики частицы в приближенное неоднородное линейное ДУ второго порядка. Он состоит из трех этапов: на первом этапе исходная система ДУ преобразуется в систему ДУ с направленным графом последовательной структуры (утв. 4.1); на *втором этапе* проводится развязка нелинейных параметрических связей графа путем усреднения кинематических ДУ по радиальной независимой переменной в силу ограничения её диапазона вариации конструктивными факторами (утв. 4.2); на третьем этапе проводится интегрирование дифференциальных уравнений системы, описывающих переносную составляющую перемещения частицы.

2.4. Введено понятие дополнительной эквивалентной силы, обусловленной появлением добавочного неоднородного члена в правой части линеаризованного ДУ динамики частицы (следст. 4.1 и 4.2), полезной для изучения и математического моделирования процесса магнитной сепарации.

2.5. По характеру воздействия переменной добавочной силы на динамику феррочастицы рабочая область магнитного сепаратора условно разделяется *на три характерные зоны*. В первой зоне траектории апериодические, во второй и третьей зонах добавляются седлообразные траектории (следст. 4.3). Зонные представления предназначены для разработки критериальных условий осаждения феррочастиц в магнитном сепараторе, а также для построения математической модели процесса магнитной коагуляции в магнитном сепараторе.

2.6. Разработаны критериальные условия, гарантирующие осаждение частиц на поступательном участке их переноса жидкой средой. Они необходимы для аналитического и численного моделирования характеристик степени очистки магнитного сепаратора и представляют собой систему функциональных неравенств, зависящих от универсальных обобщенных параметров, отражающих явный физический смысл.

2.7. Для каждого размера феррочастицы и магнитной системы установлены условия, при которой сепарация в принципе невозможна. Ограничение скорости потока определяет предельно возможную производительность магнитного сепаратора, что имеет чрезвычайно важное значение для разработки научно обоснованных рекомендаций по классификации принципиальных возможностей

магнитных сепараторов различных модификаций.

2.8. При моделировании характеристики степени очистки на участке обтекания профиля цилиндра разработан критерий предельной траектории феррочастицы (утв. 4.3), позволивший построить математическую модель степени очистки на начальном участке этой характеристики.

2.9. Разработан подход моделирования характеристик степени очистки многорядных сепараторов при полидисперсном распределении ферропримесей в ВТЖ, суть которого состоит в композиции отличающихся друг от друга характеристик очистки, вызванных различием толщин осаждаемых слоев феррошлама на патроны последовательных рядов сепарации.

2.10. Для полидисперсного распределения феррочастиц выведено *уравнение связи между плотностями вероятности распределения дисперсного состава частиц по размерам и массам*, которое для замкнутых дисперсных систем выражает фундаментальный закон сохранения массы при коагуляции (утв. 4.4) и будет использован в главе 5 для разработки критерия глубины магнитной коагуляции.

2.11. В разработанных аналитических и численных моделях семейств характеристик магнитных сепараторов впервые учтено влияние технологического фактора – накопление слоя осадка феррочастиц на поверхности магнитной системы.

2.12. Разработанные теоретические положения будут использованы в пятой главе при моделировании магнитной коагуляции, а в шестой главе для решения задачи параметрической оптимизации магнитных сепараторов

3. Разработанные математические модели и программа расчета характеристик степени очистки магнитных сепараторов при полидисперсном распределении ферромагнитных частиц в ВТЖ предназначены для решения задач параметрической оптимизации и расчета магнитных сепараторов, которые будут использованы в шестой главе.

4. Адекватность математической модели степени очистки, характеризующей качество очистки магнитного сепаратора, доказана экспериментальными исследованиями.

Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОЙ КОАГУЛЯЦИИ

5.1. Методология моделирования преобразования дисперсного состава ферромагнитных частиц на основе математической операции свертки вероятностных функций

В первой главе подчеркнуто, что в магнитных сепараторах процессы магнитной коагуляции предшествуют процессам магнитной седиментации и играют важную роль в процессах осаждения ферромагнитных частиц, что определяет актуальность задачи математического моделирования магнитной коагуляции.

Анализ априорной научно-технической информации в первой главе показал, что в суспензиях с ферромагнитными частицами наблюдается формирование нитевидных агрегатов и устойчивое выстраивание их вдоль магнитных линий внешнего поля. Это свойство является характерной особенностью процесса наведенной магнитной коагуляции [10, 55].

Современная теория магнитной коагуляции в основном нацелена на изучение и моделирование динамики формирования цепочечных агрегатов и полностью игнорирует в связи с её сложностью задачу моделирования распределения дисперсного состава ферромагнитных частиц при магнитной коагуляции.

Традиционная стохастическая теория коагуляции, обусловленная внутренними физическими механизмами сближения и слипания частиц и базирующаяся на уравнениях Смолуховского, ставит своей целью определение эволюции во времени функции распределения частиц взвеси, исходя из простейших начальных распределений частиц. При этом, в каждом частном случае необходимы специальные математические исследования и индивидуальные алгоритмы. Математические модели, разработанные на основе этой теории, не только требуют больших вычислительных ресурсов, но и не универсальны – не решают задачу при произвольных начальных распределениях частиц по размерам.

В основе магнитной коагуляции лежит процесс объединения намагниченных

внешним магнитным полем ферромагнитных частиц. Существенная анизотропия магнитных сил диполь-дипольного взаимодействия во внешнем поле, раскрытая в параграфе 3.4, является причиной объединения феррочастиц в цепочечные агрегаты, строго ориентированные по направлениям магнитных линий. Поскольку взаимное притяжение ферромагнитных частиц (агрегатов) происходит вдоль магнитных линий, то в однородном поле сближаться могут только лежащие на линиях поля соседние частицы (агрегаты), объединяясь в пары. Если массы соседних частиц (агрегатов) m_i и m_j , то результирующая масса объединенной пары равна $m_i + m_j$. При моделировании магнитной коагуляции положим допущение об исключительно парном объединении частиц (агрегатов) в каждом элементарном акте процесса коагуляции, которое является традиционным приближением при моделировании коагуляции [29].

Утверждение 5.1. Функцию плотности вероятности $f_k(m)$ распределения дисперсной фазы при магнитной коагуляции можно представить *сверткой* (5.1) функции плотности вероятности $f_n(m)$ распределения дисперсной фазы до коагуляции и весовой функции $g(x)$, являющейся характеристикой процесса магнитной коагуляции, при условии, что функции $g(m)$ и $f_n(m)$ непрерывны:

$$f_k(m) = \int_0^m f_n(\eta)g(m - \eta)d\eta. \quad (5.1)$$

Утверждение 5.2. Стохастический процесс «магнитная коагуляция» – характеризуется двумя независимыми случайными величинами $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$.

Доказательство. Пусть на вход процесса магнитной коагуляции поступает дисперсная система с функцией распределения по массам $f_n(m)$ дисперсной фазы. Сначала раскроем то, что стохастический процесс «магнитная коагуляция» характеризуется двумя независимыми случайными величинами $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$.

Случайная величина $\xi_1(m)$ обусловлена случайным порядком расположения вдоль магнитных линий ансамбля ферромагнитных частиц с различными, но детерминированными массами. Тогда при парном объединении соседних частиц, например, частиц с массами m_i и m_j , случайной величиной $\xi_1(m)$ является количество пар с одинаковой бинарной массой $m = m_{i1} + m_{j1} = C_n = const$, которое обусловлено вариацией детерминированных масс m_{i1} и m_{j1} за счет случайного их размещения. Так как пространственное размещение ферромагнитных частиц при-

водит к их объединению, то вероятностная характеристика $g(x)$ размещения пар частиц вдоль магнитных линий может выступать одной из характеристик процесса магнитной коагуляции.

Случайной величиной $\xi_2(m)$ является количество пар с одинаковой бинарной массой $m = m_{i_2} + m_{j_2} = C_n = const$, но при условии фиксированного пространственного расположения ферромагнитных частиц вдоль магнитных линий, при котором массы m_{i_2} и m_{j_2} феррочастиц варьируются случайным законом $f_{\text{и}}(m)$ их исходного распределения в дисперсной системе.

Случайные величины $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$ не зависят друг от друга по следующим причинам. Первая связана со случайным пространственным размещением различных, но детерминированных по массе частиц. Вторая причина связана со случайным исходным распределением количества частиц по их массам в ВТЖ. Поэтому при объединении частиц (агрегатов) число пар с массой $m_i + m_j$ будет состоять из числа пар $m_{i_1} + m_{j_1} = const$, обусловленных пространственным распределением частиц (агрегатов), и числа пар $m_{i_2} + m_{j_2} = const$, обусловленных исходным распределением частиц по их массам.

Следовательно, процесс коагуляции характеризуется суммой двух независимых непрерывных случайных величин $\xi_1(m) + \xi_2(m)$.

Положим, что распределения случайных величин $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$ задаются непрерывными функциями плотности вероятности $g(m)$ и $f_{\text{и}}(m)$ соответственно.

Согласно «формуле свертки» теории вероятностей [197], «если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют абсолютно непрерывные распределения с плотностями $f_{\xi_1}(x_1)$ и $f_{\xi_2}(x_2)$, то плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ равна свертке плотностей f_{ξ_1} и f_{ξ_2}

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u)f_{\xi_2}(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(u)f_{\xi_1}(x-u)du»$$

Заменяя абстрактные переменные на физические $x = m$, $f_{\xi_1}(x_1) = g(m)$, $f_{\xi_2}(x_2) = f_{\text{и}}(m)$, $f_{\xi_1+\xi_2}(x) = f_{\text{к}}(m)$ и учитывая физическое условие положительности массы $m \geq 0$, т.е. носители функций $g(m)$ и $f_{\text{и}}(m)$ ($\text{supp } g(m)$ и $\text{supp } f_{\text{и}}(m)$, $m \in R$) содержатся в интервале $[0, \infty]$, приходим к (5.1).

Таким образом, утверждение 5.1 доказано. Свертка (5.1) является обобщенной математической моделью преобразования произвольной непрерывной функции $f_{и}(x)$ распределения дисперсного состава ферромагнитной взвеси при магнитной коагуляции ферромагнитных частиц в ВТЖ.

С точки зрения функционального анализа свертка (5.1) выступает интегральным оператором преобразования вероятностных функций распределений (рисунок 5.1). В теории линейных стационарных систем ядро $g(x)$ называется весовой функцией и является откликом системы на нормированное воздействие, в частности, на обобщенную δ -функцию [152].

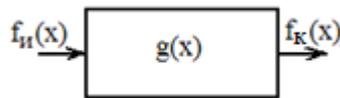


Рисунок 5.1 – Функциональный алгоритм математического моделирования магнитной коагуляции на базе свертки вероятностных функций распределения феррочастиц

Теория детерминированных линейных стационарных систем базируется на развитой методологии и строгой методике синтеза весовых функций (называемой идентификацией) исследуемых процессов [187], что позволяет привлечь богатый математический аппарат для реализации математической модели магнитной коагуляции. Методика идентификации линейной динамической системы основана на процедурах определения функций отклика системы при воздействии на входе системы тестовыми функциями.

Для процесса магнитной коагуляции тестовыми математическими функциями могут быть только вероятностные функции распределения дисперсного состава ферромагнитных частиц в дисперсионной среде. Достоинство методики идентификации детерминированных линейных систем состоит в том, что для реализации весовой функции системы достаточно определить частную функцию отклика системы при простейших тестовых воздействиях. Для стохастического процесса простейшим тестовым воздействием является равновероятностное распределение, например, конечное множество дискретных ферромагнитных частиц.

На основе изложенного подхода общая задача математического моделирования магнитной коагуляции разбивается на четыре последовательных этапа (см.

рисунок 5.2), которые будут реализовываться в рамках данной главы.

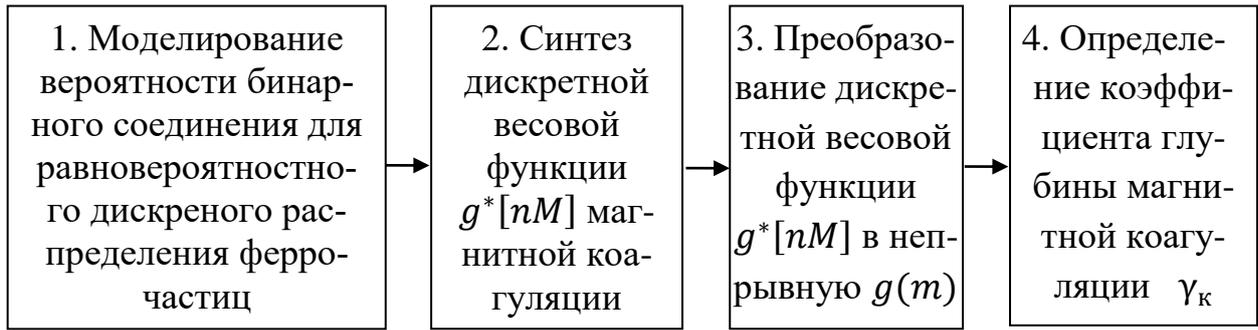


Рисунок 5.2 – Этапы решения задачи математического моделирования магнитной коагуляции

Утверждение 5.3. Для характеристики глубины коагуляции вводим коэффициент глубины магнитной коагуляции, который положим в качестве критерия процесса магнитной коагуляции

$$\gamma_k = \bar{m}_k / \bar{m}_и = N_{ви} / N_{vk}. \quad (5.2)$$

Доказательство. На основе уравнения инвариантности (4.114) получим $\bar{m}_k N_{vk} = \bar{m}_и N_{ви} \equiv C$, поэтому утверждение 5.2 доказано.

Физический механизм парного объединения частиц (агрегатов) в однородном и неоднородном магнитных полях различный. В однородном поле его градиент равен нулю, поэтому притяжение пар происходит за счет механизма диполь-дипольного взаимодействия, рассмотренного в пункте 3.4. В неоднородном поле на каждую частицу (агрегат) действует градиентная пондеромоторная сила (3.71), приводящая к их ускорению. Согласно (4.76) и (5.101) частицы с большими массами, разгоняющиеся до более высоких скоростей, догоняют частицы с меньшими массами. Рассмотрим оба механизма магнитной коагуляции.

5.2. Синтез весовой функции процесса магнитной коагуляции в однородном магнитном поле

5.2.1. Вероятность бинарного соединения для дискретного распределения ферромагнитных частиц в дисперсной системе

В нашей статье [16] проведено сопоставление спектров частиц, создаваемых диффузионно-броуновским сближением частиц по кинетике Смолуховского и

магнитным дипольно-дипольным взаимодействием. Заметим, что сопоставляемые механизмы сближения существенно отличаются друг от друга. Диффузионно-броуновский механизм изотропен, поэтому сближение произвольной частицы к некоторой условной центральной частице со всех ракурсов равновероятно. Магнитный механизм сближения существенно анизотропен (см. параграф 3.4). При анизотропии сил нарушается условие перемешивания дисперсной фазы случайными силами (неотъемлемое условие теории коагуляции Смолуховского), поэтому спектр частиц для магнитного механизма коагуляции отличается от спектра для диффузионно-броуновского механизма сближения частиц.

Диффузионно-броуновский механизм коагуляции конкурирует с магнитным механизмом. Критериями преобладания магнитного механизма над диффузионно-броуновским механизмом коагуляции являются скорости и время сближения частиц. Оценка отношения интервалов времени сближения ферромагнитных частиц, полученных в статье [16], показала, что при уровне интенсивности магнитных полей порядка $H_0 = 10^4 \dots 5 \cdot 10^4$ В/м магнитное взаимодействие значительно преобладает над диффузионно-броуновским механизмом сближения частиц при их размере более 1 мкм.

Следовательно, при магнитной коагуляции преобладает механизм объединения только таких пар частиц, которые выстроены вдоль магнитных линий. Например, для монодисперсной фазы процесс сближения и объединения взаимодействующих пар можно принять синхронным. При этом в каждом акте сближения агрегатов их массы будут удваиваться, в первом акте масса агрегата увеличивается в два раза, во втором в четыре раза относительно начальной массы и т. д., тогда как спектр диффузионно-броуновского механизма коагуляции представляет собой ряд натуральных чисел [29].

Для магнитного механизма число частиц в единице объема уменьшается соответственно в два, четыре, ..., 2^n раз, что соответствует статистическому инвариантному уравнению (4.114). При этом вероятности монодисперсного распределения частиц (агрегатов) до коагуляции и после акта коагуляции описываются единичным отсчетом [171] (рисунок 5.3).

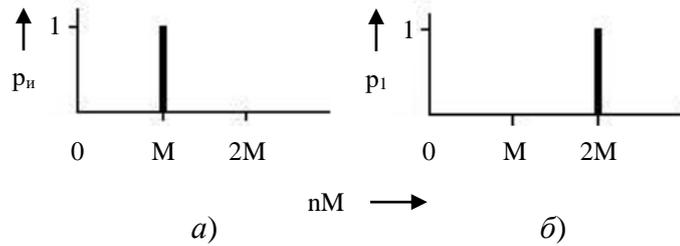


Рисунок 5.3 – Вероятность распределения монодисперсных частиц:
 а) до объединения; б) после бинарного объединения; M – масса исходной частицы, кг;
 $2M$ – масса бинарного агрегата, кг

Таким образом, на примере монодисперсного распределения ферромагнитных частиц во взвеси показаны принципы формирования вероятности бинарного объединения частиц (агрегатов).

Для полидисперсного распределения ферромагнитных частиц при анализе процесса магнитной коагуляции существенный интерес представляет моделирование вероятности $p(m_i + m_j)$ распределения пар соседних частиц *вдоль магнитной линии с фиксированной результирующей массой* $m_i + m_j$. В параграфе 5.1 отмечено, что в силу того, что взаимодействие ферромагнитных частиц (агрегатов) происходит *вдоль магнитных линий*, поэтому сближаться могут только лежащие на линиях соседние частицы (агрегаты), объединяясь в пары. Поэтому вероятность $p(m_i + m_j)$ распределения пар соседних частиц представляет собой потенциальную вероятность магнитной коагуляции, которую примем за среднестатистическую вероятность дисперсного распределения механических примесей при магнитной коагуляции.

Среднестатистическая картина распределения частиц примесей в единице объема жидкой среды представляется в виде набора дискретных частиц, расположенных друг от друга на среднестатистическом удалении $l_0 = \sqrt[3]{1/N_v}$, м, где N_v – средняя концентрация частиц, м^{-3} . По направлению внешнего поля (*вдоль магнитных линий*) в единице объема ВТЖ выстраиваются $N_v^{\frac{2}{3}}$ среднестатистических рядов частиц примеси с равным среднестатистическим числом частиц $N = N_v^{\frac{1}{3}}$. В каждом таком продольном (относительно магнитных линий) ряду преобладает процесс объединения частиц. Так как под действием поперечных сил ферромаг-

нитные частицы взаимно отталкиваются, то можно допустить приближение – среднестатистические продольные ряды частиц не взаимодействуют между собой. Очевидно, в силу среднестатистической однородности вероятности объединения частиц в каждом продольном ряду одинаковые. Тогда задачу поиска вероятности объединения частиц можно свести к одномерному приближению – вычислению вероятности объединения частиц в рамках одного продольного ряда.

Задачу будем решать в рамках традиционных идеализаций:

- сосредоточимся только на механизме бинарного объединения дискретных частиц (агрегатов), в которые вступает каждая соседняя пара частиц;

- в результате одного акта парного объединения частиц количество агрегатов будет составлять половину числа исходных частиц $N_1 = 0.5N$, поэтому рассмотрим случай, когда число частиц N – четное;

- вероятности бинарного объединения частиц будем привязывать к массе бинарных агрегатов, так как при объединении двух частиц масса агрегата складывается из масс отдельных частиц;

- процессом разрушения агрегатов в ламинарном водном потоке пренебрегаем, так как такие процессы наблюдаются только при $v \geq 0,6$ м/с [14].

В качестве исходного дискретного распределения частиц по массам рассмотрим случай равной вероятности: зададим N частиц разного калибра, массы которых соответствуют последовательности дискретных чисел nM (M – интервал дискретизации массы частиц примеси, кг; так как частица с нулевой массой отсутствует, то $n = 1, 2, \dots, N$). Тогда вероятность исходного дискретного распределения частиц с массой nM равна

$$p_i[nM] = N^{-1}. \quad (5.3)$$

Максимальная масса бинарного объединения соответствует значению $(2N - 1)M$ как результат объединения частиц с массами NM и $(N - 1)M$.

При вычислении вероятности бинарного объединения учитывали, что порядок расположения частиц в одномерном среднестатистическом ряду выстраивается по случайному закону. Для расчета всевозможных комбинаций парного объединения частиц обратимся к аппарату комбинаторной математики [185, 206]. Так

число сочетаний из N элементов по два равно

$$C_N^2 = N! (2! (N - 2)!)^{-1} = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (5.4)$$

Количество возможных распределений (комбинаций) из $0.5N$ бинарных агрегатов

$$C_{p_{\frac{N}{2}}} = N! \left(2^{\frac{N}{2}} (N/2)! \right)^{-1}. \quad (5.5)$$

Масса k -го бинарного агрегата равна

$$m_k = (i + j)M, \quad (5.6)$$

где $k = i + j$.

Минимальная масса агрегата $m_3 = 3M$, максимальная масса $m_{2N-1} = (2N - 1)M$. Вероятность $p_1[kM]$ распределения числа бинарных частиц равна отношению числа агрегатов λ_k с массой kM к общему числу бинарных комбинаций C_N^2 :

$$p_1[kM] = \frac{\lambda_k}{C_N^2} = \frac{2\lambda_k}{N(N-1)}, \quad (5.7)$$

Подставив в (5.7) выражение (5.3) и заменив nM на kM , получим общую формулу для расчета вероятности распределения числа бинарных частиц при равновероятностном исходном распределении:

$$p_1[kM] = \frac{\lambda_k}{(N-1)} 2p_{и}[kM]. \quad (5.8)$$

Значения коэффициентов λ_k можно определить по следующим зависимостям:

при $3 \leq k \leq N + 1$

$$\lambda_k = \lambda_{k1} = \sum_{v=1}^{\frac{N}{2}+2} (v-2)(\delta[k+3-2v] + \delta[k+2-2v]); \quad (5.9)$$

при $N + 2 \leq k \leq 2N$

$$\lambda_k = \lambda_{k2} = \sum_{v=\frac{N}{2}+3}^{N-2} (N+v-2)(\delta[k+3-2v] + \delta[k+4-2v]), \quad (5.10)$$

где выражение

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

называется единичным отсчетом [171], а выражение

$$\delta[k-v] = \begin{cases} 1, & k = v; \\ 0, & k \neq v \end{cases} \quad (5.12)$$

называется смещенным единичным отсчетом. При этом в (5.9) и (5.10) λ_{k1} выражает число бинарных агрегатов с одинаковым номером k ($k = i + j = \text{const}$ при $i \neq j$ с левой стороны от значения $k = N + 1$, λ_{k2} – с правой стороны от значения $k = N + 1$.

Значения (5.9), (5.10) совпадают со значениями матрицы (5.13), составленной из чисел номеров k . В этой матрице значения λ_k совпадают с количеством номеров k . Максимальное значение $\lambda_{k_{\text{макс}}} = 0.5N$ имеем при $k = N + 1$. При этом выражения (5.9) и (5.10) являются обобщением (5.13):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & | & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & | & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \hline 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & & 13 & 0 & \vdots & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & & 14 & 15 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N + 1 & N + 2 & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & 2N - 1 & \dots \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

В исходном множестве (ансамбле) частиц, распределение которых по массе описывается вероятностью $p_n[nM]$, выбор частиц с массами iM и jM можно рассматривать как два независимых события A и B соответственно. Тогда сумму масс $kM = (i + j)M$ выбранных частиц можно рассматривать как объединенное событие $A \cup B$. Учитывая, что вероятность объединенного события $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, получим $p_n[kM] = p_n[iM] + p_n[jM]$. Этому свойству в (5.8) подчиняется сомножитель $2p_n[kM] = 2N^{-1} = N^{-1} + N^{-1}$.

Представление выбора произвольной пары частиц из исходного множества в виде объединенного события $A \cup B$ позволило представить частное выражение (5.8) в форме обобщенного алгоритма для не равновероятностного закона распределения исходного ансамбля частиц:

$$p_1[kM] = \frac{1}{(N-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k=i+j} (p_n[iM] + p_n[jM]), \quad (5.14)$$

где $\sum(\dots)$ подсчитывает полное число бинарных агрегатов с одинаковым номером

k ($k = i + j = \text{const}$).

Для (5.8), (5.14) выполняется условие нормировки

$$\sum_{k=1}^{2N-1} p_1[kM] = 1.$$

Математическое ожидание исходного равномерного распределения

$$\bar{m}_n = \sum_{n=1}^N nM p_n[nM] = 0.5M(N + 1). \quad (5.15)$$

Математическое ожидание выходного распределения

$$\bar{m}_1 = \sum_{k=1}^N kM p_1[kM] = M(N + 1). \quad (5.16)$$

Из сопоставления (5.15) и (5.16), $\bar{m}_1 = 2\bar{m}_n$. При парном объединении концентрация частиц примесей в ВТЖ уменьшается в два раза. Следовательно, выполняется закон сохранения массы для построенной математической модели магнитной коагуляции, и предложенная математическая модель удовлетворяет критерию инвариантности (4.114). Заметим, что для любого набора из N дискретных частиц масса бинарных агрегатов не может превышать значение $(2N - 1)M$. Поэтому $p_1[kM] = 0$ при $k \geq 2N$.

Рассмотрим пример для $N = 6$; число сочетаний $C_6^2 = 15$, которые представляют собой следующие комбинации дискретных номеров: 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56. Количество комбинаций по $0.5N = 3$ бинарных агрегатов, рассчитанных по зависимости (5.5), равно $C_{p_3} = 15$ и представлено в таблице 5.1

Таблица 5.1

Совокупность комбинаций по $0.5N$ бинарных агрегатов для $N = 6$

12	12	12	13	13	13	14	14	14	15	15	15	16	16	16
34	35	36	24	25	26	23	25	26	23	24	26	23	24	25
56	46	45	56	46	45	56	36	35	46	36	34	45	35	34

В таблице 5.1 число столбцов $N - 1 = 5$; при двух фиксированных номерах $ij = \text{const}$ (в каждом столбце) содержится по 3 комбинации.

В матрице (5.13) пунктирными линиями выделена подматрица для $N = 6$,

для которой число соответствующих агрегатов: $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_{10} = \lambda_{11} = 1$; $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_8 = \lambda_9 = 2$; где $\lambda_{\max} = 0.5N = \lambda_7 = 3$.

Вероятность распределения бинарных агрегатов при равномерном исходном распределении частиц примесей, вычисленная по зависимостям (5.7) – (5.10) для $N = 6$, представлена в таблице 5.2, а график их распределения изображен на рисунке 5.4.

Таблица 5.2

Вероятности распределения исходных и бинарных агрегатов для $N = 6$

n, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_n[nM]$	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0
$p_1[kM]$	0	0	0	1/15	1/15	2/15	2/15	3/15	2/15	2/15	1/15	1/15	0

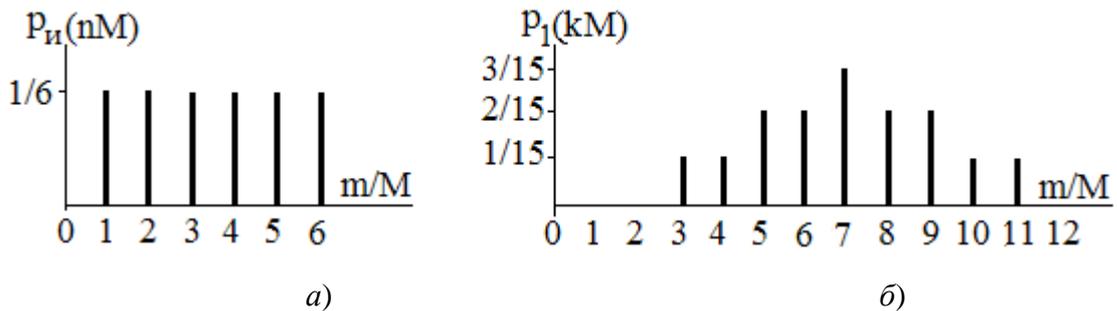


Рисунок 5.4 – Вероятности распределения дисперсного состава примесей:
 а – исходного распределения для $N = 6$; б – после акта коагуляции

Для произвольного исходного распределения вероятности частиц при начальном числе их $N = 6$ по алгоритму (5.14) вероятность распределения бинарных агрегатов иллюстрируется таблицей 5.3.

Задавая численные значения вероятностей распределения исходных частиц (вторая строка в таблице 5.4), по алгоритму таблицы 5.3 численные значения вероятностей распределения бинарных агрегатов иллюстрируются таблицей 5.4 (третья строка).

Графики зависимостей соответствующих распределений по данным таблицы 5.4 представлены на рисунке 5.5.

Таблица 5.3

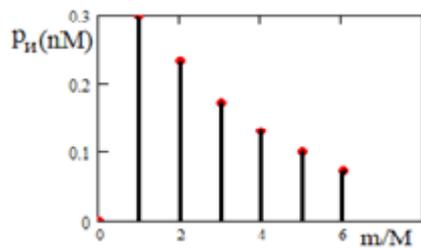
Развернутый алгоритм распределения вероятности бинарных агрегатов для $N = 6$

n, k	$p_n[nM]$	$(N - 1)p_1[kM]$
0	0	0
1	$p_n[M]$	0
2	$p_n[2M]$	0
3	$p_n[3M]$	$p_n[M] + p_n[2M]$
4	$p_n[4M]$	$p_n[M] + p_n[3M]$
5	$p_n[5M]$	$(p_n[M] + p_n[4M]) + (p_n[2M] + p_n[3M])$
6	$p_n[6M]$	$(p_n[M] + p_n[5M]) + (p_n[2M] + p_n[4M])$
7	0	$p_n[M] + p_n[6M] + p_n[2M] + p_n[5M] + p_n[3M] + p_n[4M]$
8	0	$(p_n[2M] + p_n[6M]) + (p_n[3M] + p_n[5M])$
9	0	$(p_n[3M] + p_n[6M]) + (p_n[4M] + p_n[5M])$
10	0	$p_n[4M] + p_n[6M]$
11	0	$p_n[5M] + p_n[6M]$
12	0	0

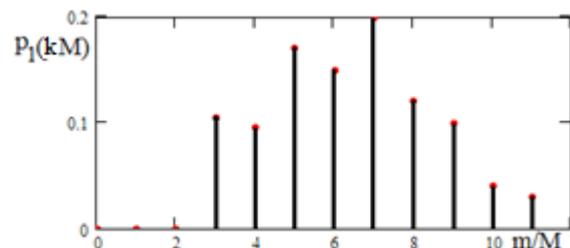
Таблица 5.4

Пример распределения вероятностей для $N = 6$ при неравномерном исходном распределении частиц примеси

n, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p_n[nM]$	0	0.3	0.23	0.17	0.13	0.1	0.07	0	0	0	0	0
$p_1[kM]$	0	0	0	0.105	0.095	0.17	0.15	0.20	0.12	0.10	0.04	0.03



а)



б)

Рисунок 5.5 – Вероятности распределения дисперсного состава примесей:
а – исходного распределения для $N = 6$; б – после акта коагуляции

Таким образом, на основе принципа бинарного объединения соседних частиц, выстроенных вдоль магнитных линий, получена математическая модель функции вероятности распределения дисперсного состава частиц (агрегатов) ферромагнитных примесей.

5.2.2. Синтез дискретной весовой функции процесса коагуляции

Воспользуемся вероятностью (5.7) распределения по массам бинарных агрегатов в дискретной форме $p_1[kM] = 2\lambda_k p_n[kM](N-1)^{-1}$, заданной на интервале $[0, (2N-1)M]$ для случая равновероятностного исходного распределения (5.3) феррочастиц по массам $p_n[nM] = N^{-1}$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Где N число частиц, расположенных вдоль магнитной линии; $2\lambda_k$ определяется по выражению (5.9) при $3 \leq k \leq N+1$ и по выражению (5.10) при $N+2 \leq k \leq 2N$.

Аналогом выражения (5.1) является дискретная свертка [171]

$$f_k[nM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n[kM]g^*[(n-k)M], \quad (5.17)$$

где $f_n[kM]$ – плотность вероятности исходного распределения примеси, 1/кг; $f_k[nM]$ – плотность вероятности распределения агрегатов, 1/кг; $g^*[kM]$ – дискретная весовая характеристика процесса магнитной коагуляции, которая по смыслу является откликом на единичный отсчет.

Функции дискретных аргументов запишем в форме дискретных рядов, с учетом свойств $f_n(m) = f_k(m) = g^*(m) = 0$ при $m < 0$, следующим образом

$$f_n[nM] = \sum_{k=0}^{\infty} f_n[kM]\delta[(n-k)M]; \quad (5.18)$$

$$f_k[nM] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k[kM]\delta[(n-k)M]; \quad (5.19)$$

$$g^*[nM] = \sum_{k=0}^{\infty} g^*[kM]\delta[(n-k)M]. \quad (5.20)$$

С учетом (5.19), (5.20) дискретная свертка примет вид

$$f_k[nM] = \sum_{k=0}^n f_n[kM]g^*[(n-k)M]. \quad (5.21)$$

Представив вероятности соответствующих распределений следующим образом

$$p_n[kM] = Mf_n[kM]; \quad p_1[kM] = Mf_k[kM], \quad (5.22)$$

перейдем к дискретной свертке, моделирующей вероятность распределения агрегатов бинарного объединения частиц

$$p_1[nM] = \sum_{k=0}^n p_n[kM]g^*[(n-k)M]. \quad (5.23)$$

Применив z -преобразование [45, 202] к свертке (5.23), перейдем к выражению, устанавливающему связь между изображениями соответствующих дискретных функций $F_k(z) = W(z)F_n(z)$, где $W(z)$ – передаточная функция, которая, с учетом (5.22), имеет следующий вид:

$$W(z) = \frac{F_k(z)}{F_n(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} p_1[kM]z^{-k}}{\sum_{k=0}^N p_n[kM]z^{-k}}, \quad (5.24)$$

где $z = e^{sM}$ – комплексная переменная, s – оператор Лапласа, $1/\text{кг}$, $F_n(z)$, $F_k(z)$ – z -изображения функций (5.22), представляющих собой бесконечный односторонний ряд Лорана по степеням z^{-1} [202].

Подставив в (5.22) условия тестового опыта $p_n[kM] = 0$ (при $k = 0, N, N + 1, \dots$) и $p_n[kM] = N^{-1}$ (при $k = 1, 2, \dots, N$), придадим z -изображению $F_n(z)$ вид $F_n(z) = \{\sum_{k=0}^{N-1} z^{-(k+1)}\}N^{-1}$. Аналогично, учитывая соответствующие нулевые значения $p_1[kM]$ ($p_1[kM] = 0$ при $k = 0, 2N, 2N + 1, \dots$), перейдем к следующему виду z -изображения: $F_k(z) = \{\sum_{k=0}^{2N-2} p_1[(k+1)M]z^{-(k+1)}\}$. После подстановки скорректированных z -изображений $F_n(z)$ и $F_k(z)$ в (5.24) и вычисления $p_1[kM]$ по зависимости (5.7), получим выражение передаточной функции

$$W(z) = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sum_{k=0}^{2N-2} \lambda_{k+1} z^{-(k+1)}}{\sum_{k=0}^{N-1} z^{-(k+1)}} \right] = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sum_{k=0}^{2N-2} \lambda_{k+1} z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}} \right].$$

Процедура деления полинома числителя на полином знаменателя приводит к следующему выражению:

$$W(z) = \frac{2}{N-1} \left[\lambda_{2N-1} z^{-(N-1)} + \sum_{k=2}^{N-1} (\lambda_{2N-k} - \lambda_{2N+1-k}) z^{-(N-k)} + \frac{a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_{N-2} z^{-(N-2)} + \dots + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1}}{z^{-(N-1)} + z^{-(N-2)} + \dots + z^{-2} + z^{-1} + 1} \right]; \quad (5.25)$$

$$a_{N-1} = (\lambda_{2N} + \lambda_N - \lambda_{N+1}), a_{N-2} = (\lambda_{2N-1} + \lambda_{N-1} - \lambda_{N+1}), \dots, a_k = (\lambda_{N+k+1} + \lambda_{k+1} - \lambda_{N+1}),$$

$$a_2 = (\lambda_{N+3} + \lambda_3 - \lambda_{N+1}), a_1 = (\lambda_{N+2} + \lambda_2 - \lambda_{N+1}), \lambda_{2N} = \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$$

Коэффициенты λ_k , вычисленные по выражениям (5.10), (5.11), имеют следующие значения:

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_{2N-1} = \lambda_{2N-2} = 1, \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_{2N-3} = \lambda_{2N-4} = 2, \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_{2N-5} = \lambda_{2N-6} = 3, \dots, \lambda_{N-3} = \lambda_{N-2} = \lambda_{N+5} = \lambda_{N+4} = 0.5N - 2, \lambda_N = \lambda_{N-2} = \lambda_{N+3} =$$

$$= \lambda_{N+2} = 0.5N - 1, \lambda_{N+1} = 0.5N.$$

Тогда коэффициенты a_k примут следующие значения: $a_{N-1} = a_{N-3} = \dots = a_3 = a_1 = -1$, $a_{N-2} = a_{N-4} = \dots = a_4 = a_2 = 0$. Также $\lambda_{2N-k} - \lambda_{2N+1-k} = 0$ при $(k = 2, 4, \dots, N - 2)$, $\lambda_{2N-k} - \lambda_{2N+1-k} = 1$ при $(k = 3, 5, \dots, N - 1)$.

Подставив в (5.25) соответствующие коэффициенты, получим:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{2}{N-1} \left[\sum_{k=1}^{N/2} z^{-(2k-1)} - 1 + \frac{z^{-(N-2)} + z^{-(N-4)} + \dots + z^{-2} + 1}{z^{-(N-1)} + z^{-(N-2)} + \dots + z^{-2} + z^{-1} + 1} \right] = \\ &= \frac{2}{N-1} \left[\sum_{k=1}^{N/2} z^{-(2k-1)} - 1 + \frac{1}{z^{-1} + 1} \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Переведя z -изображение (5.26) в оригинал [171, 202], получим дискретную весовую функцию процесса магнитной коагуляции:

$$g^*[nM] = \frac{2}{N-1} \sum_{k=1}^{N/2} \delta[(n - 2k + 1)M] + (-1)^n - \delta[nM]. \quad (5.27)$$

В частности, для $N = 6$ функция (5.27) примет вид

$$g^*[nM] = \frac{2}{5} [\delta[(n - 5)M] + \delta[(n - 3)M] + \delta[(n - 1)M] + (-1)^n - \delta[nM]]. \quad (5.28)$$

Численные значения (5.28) представлены в таблице 5.5 при $0 \leq n \leq 2N - 1$.

Таблица 5.5

Значения отклика на единичный дискретный отсчет для $N = 6$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$g^*[nM]$	0	0	0.4	0	0.4	0	0.4	-0.4	0.4	-0.4	0.4	-0.4

Подведем итог. В пункте 5.2.1 предложен алгоритм расчета (5.14) вероятности процесса бинарного объединения ферромагнитных частиц для исходного дискретного распределения частиц. В пункте 5.2.2 проведен синтез дискретной весовой функции (5.27) этого процесса, на основе которой вероятность процесса выражается дискретной сверткой (5.29). Сопоставим теперь на конкретном числовом примере результаты моделирования этого процесса алгоритмом и дискретной сверткой.

Вероятность процесса магнитной коагуляции по формулам свертки (5.23), (5.28) при произвольном законе распределении исходной вероятности $p_i[kM]$ для $N = 6$ имеет следующий вид

$$p_1[nM] = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^n p_n[kM] \{ \delta[(n-5-k)M] + \delta[(n-3-k)M] + \delta[(n-1-k)M] + (-1)^{(n-k)} - \delta[(n-k)M] \}. \quad (5.29)$$

В таблице 5.6 развернута зависимость (5.29).

Таблица 5.6

Распределение вероятностей в общем случае для $N = 6$

n, k	$p_n[nM]$	$(N-1)p_1[kM]/2$
0	0	0
1	$p_n[M]$	0
2	$p_n[2M]$	0
3	$p_n[3M]$	$p_n[M]$
4	$p_n[4M]$	$p_n[2M]$
5	$p_n[5M]$	$p_n[M] + p_n[3M]$
6	$p_n[6M]$	$p_n[2M] + p_n[4M]$
7	0	$p_n[M] + p_n[3M] + p_n[5M]$
8	0	$-p_n[M] + p_n[2M] + p_n[4M] + p_n[6M]$
9	0	$p_n[M] - p_n[2M] + p_n[3M] + p_n[5M]$
10	0	$-p_n[M] + p_n[2M] - p_n[3M] + p_n[4M] + p_n[6M]$
11	0	$p_n[M] - p_n[2M] + p_n[3M] - p_n[4M] + p_n[5M]$
12	0	$-p_n[M] + p_n[2M] - p_n[3M] + p_n[4M] - p_n[5M] + p_n[6M]$

Сопоставление данных таблиц 5.6 и 5.3 приводит к выводу, что если $p_n[nM] = const$, результаты вычисления вероятности коагуляции $p_1[kM]$ по алгоритму (5.14) и по формуле свертки (5.29) одинаковы. В частности, задавая равновероятностное исходное распределение феррочастиц $p_n[nM] = 1/6$, приходим к совпадающему с данными таблицы 5.2 и рисунка 5.2 распределению бинарных агрегатов.

Если распределение исходной вероятности $p_n[nM]$ неравномерное, но симметричное ($p_n[M] = p_n[6M]$, $p_n[2M] = p_n[5M]$, $p_n[3M] = p_n[4M]$), то максимальная невязка между рассчитанными каждым методом значениями вероятно-

стей бинарного распределения примесей принимает вид:

$$\Delta p_{1\text{мак}} = \{p_{\text{и}}[nM] - p_{\text{и}}[(n-1)M]\}/(N-1). \quad (5.30)$$

Величина невязки (5.30) уменьшается с уменьшением интервала дискретизации M и с увеличением числа частиц N .

Наибольшая невязка наблюдается, когда распределение исходной вероятности несимметрично. Если в качестве примера сильной асимметрии распределения вероятности использовать экспоненциальный закон

$$p_{\text{и}}[nM] = p_0(N)e^{-\gamma(N)M(n-1)}1[M(n-1)],$$

где $1[M(n-1)]$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда [150], то числовые значения распределения вероятностей при $N = 6$ иллюстрируются таблицей 5.7 и рисунком 5.6.

Таблица 5.7

Пример распределения вероятностей для $N = 6$ при неравномерном исходном распределении частиц примесей

n, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p_{\text{и}}[nM]$	0	0.3	0.23	0.17	0.13	0.1	0.07	0	0	0	0	0
$p_1[kM]$	0	0	0	0.11	0.09	0.19	0.16	0.28	0.05	0.135	-0.03	0.08

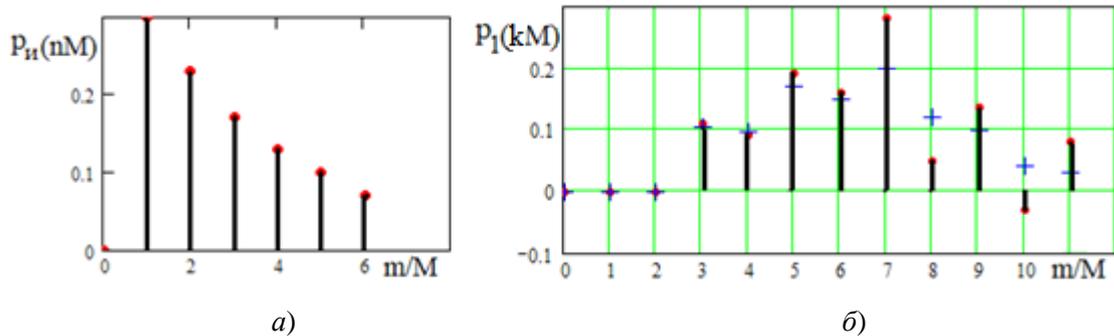


Рисунок 5.6 – Вероятности распределения дисперсного состава примесей:

a – исходного распределения для $N = 6$; b – после акта коагуляции; символы «+++» соответствуют точкам, перенесенным из рисунка 5.5, б

На рисунке 5.6, б наблюдаются различия между бинарными распределениями частиц, полученными разными методами расчета – по формуле свертки (5.29) и непосредственно по алгоритму (5.14), которому соответствует рисунок 5.5, б. Точки, перенесенные с рисунка 5.5, б на рисунок 5.6, б, обозначены символами «+++».

Максимальная невязка между двумя методами расчета

$$\Delta p_{1\text{макс}} = \sum_{k=1}^{N/2} \{p_{\text{и}}[(2k-1)M] - p_{\text{и}}[2kM]\} = 0.5p_0(N)/(N-1). \quad (5.31)$$

Так как должно выполняться условие нормировки $\sum_{k=1}^{2N-1} p_{\text{и}}[kM] = 1$, число $p_0(N)$ в (5.31) слабо изменяющаяся функция от числа частиц N в дисперсной системе, поэтому значение невязки уменьшается с ростом N .

Таким образом, синтезирована дискретная весовая функция $g^*[nM]$ процесса магнитной коагуляции на основе z -преобразования вероятностных функций. Это стало возможным, потому что процесс магнитной коагуляции можно моделировать сверткой случайных функций (см. параграф 5.1). Математическая операция свертка является линейной операцией. Поэтому в рамках принятых приближений стохастический процесс магнитной коагуляции является линейным процессом.

Утверждение 5.4. Если стохастический процесс бинарного объединения частиц в рамках принятых приближений линейный, то весовая функция этого процесса определяется как оригинал z -изображения передаточной функции данного преобразования.

5.2.3. Оператор магнитной коагуляции для непрерывных функций распределения дисперсного состава ферромагнитных примесей

Замена непрерывных функций совокупностью выборок основана на теореме отсчетов, доказанной В. А. Котельниковым в монографии [64]. В соответствии с этой теоремой непрерывный сигнал $u(t)$, ограниченный по спектру наивысшей частотой $\Omega_m = \pi/T$, где T интервал между двумя отсчетами времени, представляется рядом

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} u(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-Tn)}{\pi(t-Tn)}. \quad (5.32)$$

Такой ряд используем для восстановления непрерывной весовой функции $g(m)$ магнитной коагуляции.

Утверждение 5.5. Если существует дискретная весовая функция $g^*[nM]$ процесса магнитной коагуляции, то существует непрерывная весовая функция

$g(m)$, которые связаны рядом В. А. Котельникова.

Доказательство. В [34], на основе представления непрерывных функций рядом (5.32), проведено преобразование непрерывной свертки, например, (5.1) в её дискретный эквивалент, который для переменных магнитной коагуляции имеет следующий вид:

$$p_1[nM] = M \sum_{k=0}^n p_n[kM] g[(n-k)M]. \quad (5.33)$$

Сопоставив (5.33) с (5.23), приходим к зависимости

$$g[(n-k)M] = \frac{g^*[(n-k)M]}{M}. \quad (5.34)$$

Подставив (5.34) в ряд, аналогичный ряду (5.32), получим разложение непрерывной весовой функции $g(m)$ в ряд В. А. Котельникова:

$$g(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{n=\infty} g^*[nM] \frac{\sin \frac{\pi}{M}(m-Mn)}{\frac{\pi}{M}(m-Mn)}. \quad (5.35)$$

Подставив (5.27) в (5.35) и учтя свойства $\delta[nM]$ функций и диапазон изменения n ($2 \leq n \leq 2N-1$), в котором задана функция $g^*[nM]$, получим рабочую формулу

$$g(m) = \frac{2}{(N-1)M} \left[\sum_{n=1}^{N/2} \frac{\sin \pi(2n-\frac{m}{M})}{\pi(2n-\frac{m}{M})} + \sum_{n=N+1}^{2N-1} \frac{(-1)^n \sin \pi(n-\frac{m}{M})}{\pi(n-\frac{m}{M})} \right]. \quad (5.36)$$

При этом в (5.36) N – число отсчетов на участке $[0, m_m]$, m_m – максимальная масса агрегата (цепочки ферромагнитных частиц), M – параметр дискретизации массы агрегата, кг.

Рисунки 5.7 и 5.8 иллюстрируют графики непрерывной весовой функции (5.36) для разных параметров дискретизации N и M при $NM = m_m = const$.

Дискретная весовая функция $g^*[nM]$ (5.27) зависит от дискретной массы агрегата, являющейся суммой масс бинарных составляющих. Так как при магнитной коагуляции агрегаты представляют собой цепочки частиц, выстроенных вдоль магнитных линий внешнего поля, то длина цепочек агрегатов тоже подчиняются принципу сложения по размерам исходных частиц. Следовательно, методология моделирования распределения частиц по массам при магнитной коагуляции будет правомерна для моделирования распределения частиц по *продольным размерам* агрегатов.

Массе nM дискретной частицы (агрегата) неотъемлемо соответствует её (его) продольный размер nD , м. Так как функция $g^*[nM]$ по структуре является алгебраической суммой безразмерных смещенных единичных отсчетов $\delta[(n - 2k + 1)M]$ по массам, то формально их можно заменить на эквивалентные единичные отсчеты $\delta[(n - 2k + 1)D]$ по размерам тех же частиц (агрегатов). При этом (5.27) примет следующий вид:

$$g^*[nD] = \frac{2}{N-1} \left[\sum_{k=1}^{N/2} \delta[(n - 2k + 1)D] + (-1)^n - \delta[nD] \right]. \quad (5.37)$$

Обозначим символом d_k длину цепочек агрегатов, которая выражается через параметры дискретизации $d_k = nD$, где D интервал между двумя соседними отсчетами. Тогда (5.37) является откликом на единичный отсчет $\delta[nD]$.

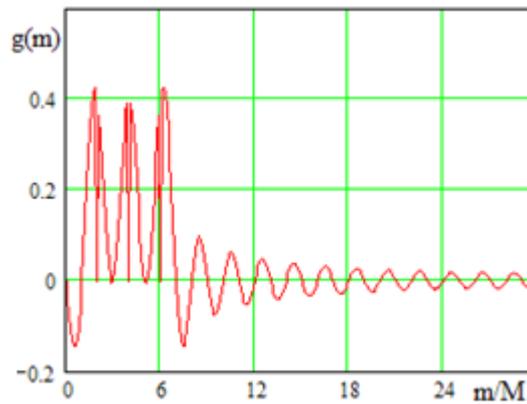


Рисунок 5.7 – Весовая функция магнитной коагуляции при $N = 6$, $M = 1$, $NM = 6$

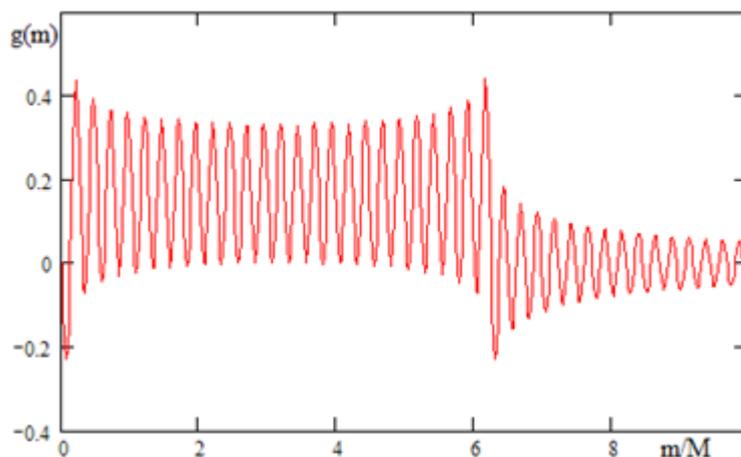


Рисунок 5.8 – Весовая функция магнитной коагуляции при $N = 50$, $M = 0.12$, $NM = 6$

Дискретной весовой функции (5.37), по аналогии с (5.35), (5.36), соответствует непрерывная весовая функция

$$g(d_k) = \frac{2}{(N-1)D} \left[\sum_{n=1}^{N/2} \frac{\sin \pi \left(2n - \frac{d_k}{D} \right)}{\pi \left(2n - \frac{d_k}{D} \right)} + \sum_{n=N+1}^{2N-1} \frac{(-1)^n \sin \pi \left(n - \frac{d_k}{D} \right)}{\pi \left(n - \frac{d_k}{D} \right)} \right]. \quad (5.38)$$

Подстановка (5.36) и (5.38) в (5.1) дает для соответствующих непрерывных функций операторы магнитной коагуляции

$$f_k(m) = \int_0^m f_n(\xi) g(m - \xi) d\xi; \quad f_k(d_k) = \int_0^{d_k} f_n(\xi) g(d_k - \xi) d\xi. \quad (5.39)$$

На рисунках 5.9 и 5.10 представлены зависимости плотности вероятности входного $f_n(m)$ и выходного $f_k(m)$ распределений дисперсного состава примеси для двух значений числа отсчетов $N = 6$ и 50 . При этом исходное распределение задается ступенчатой функцией на интервале $[0, MN]$:

$$f_n(m) = [1(m) - 1(m - MN)](MN)^{-1},$$

где $MN = 6$.

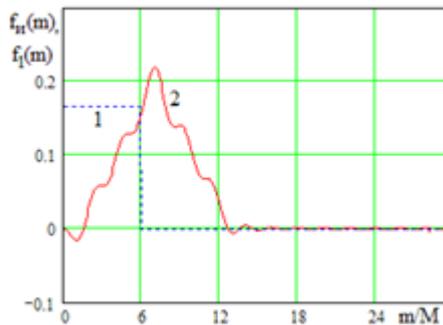


Рисунок 5.9 – Функции плотности вероятности распределения дисперсного состава ферромагнитных примесей при $N = 6, M = 1$: 1- $f_n(m)$; 2- $f_1(m)$

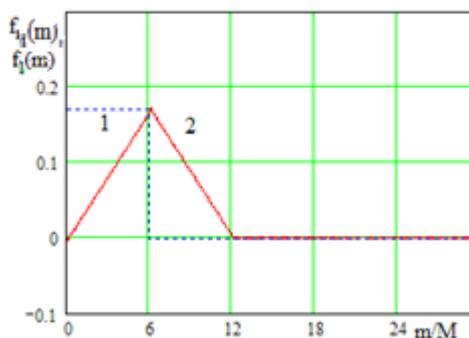


Рисунок 5.10 – Функции плотности вероятности распределения дисперсного состава ферромагнитных примесей при $N = 50, M = 0.12$: 1- $f_n(m)$; 2- $f_1(m)$

Выходное распределение системы $f_k(m)$ моделируется сверткой (5.39) заданного исходного распределения $f_n(m)$ и весовой функцией $g(m)$, моделируемой функциональным рядом (5.36). Поэтому при малом значении числа отсчетов N функциональный ряд (5.36) искажает моделируемое распределение (рисунок 5.9).

Для исключения искажений при моделировании непрерывного сигнала функциональным рядом (5.32) в теории В. А. Котельникова интервал дискретизации $T = \pi/\Omega_m$ определяется через граничную частоту Ω_m спектра этого сигнала. Тогда оптимальное число отсчетов $N_0 = t_m/T$, где t_m – верхняя граница интервала $[0, t_m]$, на котором используется математическая модель (5.32).

При моделировании сверткой (5.39) функции распределения $f_k(m)$ ферромагнитных агрегатов магнитной коагуляции необходимо задать параметры дискретизации M, D, N этой функции распределения, которые, в свою очередь, задают свойства весовой функции (5.36). Так как функция $f_k(m)$ является объектом поиска, то её преобразование Фурье неизвестно. Поэтому нельзя определить элементарный интервал дискретизации M (или D) по методу В. А. Котельникова.

В этом случае задаем относительно большое значение N , так как по теории В. А. Котельникова при избыточном числе отсчетов ($N > N_0$) ряд (5.32) описывает непрерывную функцию без искажений. Отметим, что число N для дискретного распределения примесей имеет прямой физический смысл – является числом частиц; для непрерывного распределения становится числом отсчетов (выборок) непрерывного распределения (ферропримесей), расположенных через интервал M (или D) независимой переменной. Тогда значения M или D определим следующим образом:

$$M = m_m N^{-1}; \quad D = d_m N^{-1}, \quad (5.40)$$

где m_m, d_m – максимальные значения соответственно массы и продольного размера бинарных агрегатов, которые тоже в общем случае неизвестны.

В пункте 5.2.4 установим связь m_m и d_m с глубиной коагуляции (5.2).

5.2.4. Определение интервала дискретизации массы ферромагнитных агрегатов

В пункте 5.2.1 получена математическая модель (5.9) вероятности бинарного объединения дискретных частиц при равновероятном исходном распределении. Если максимальная масса исходного распределения ферромагнитных частиц со-

ставляет $m_{mн} = MN$, то после первого акта бинарного объединения максимальная масса агрегата равна $m_{m1} = M(2N - 1)$, а коэффициент глубины коагуляции (5.2) $\gamma_k = 2$. Этот частный случай использован, в силу его строгой прогнозируемости, для синтеза весовых характеристик $g^*[nM]$, $g(m)$. В случае произвольного γ_k правомерно следующее утверждение.

Утверждение 5.6. При магнитной коагуляции изменение верхней границы массы ферромагнитных агрегатов m_m определяется изменением коэффициента глубины коагуляции γ_k .

Доказательство. Подставив (5.36) в (5.39), вычислим $f_k(m)$:

$$\begin{aligned} f_k(m) &= \frac{2}{(N-1)M} \int_0^m f_{и}(\xi) \left[\sum_{n=1}^{N/2} \frac{\sin \pi \left(2n - \frac{m-\xi}{M} \right)}{\pi \left(2n - \frac{m-\xi}{M} \right)} + \sum_{n=N+1}^{2N-1} \frac{(-1)^n \sin \pi \left(n - \frac{m-\xi}{M} \right)}{\pi \left(n - \frac{m-\xi}{M} \right)} \right] d\xi = \\ &= \frac{2M}{\pi(N-1)M} \sum_{n=1}^{N/2} \int_{y_{н}}^{y_{в}} f_{и} \left(\frac{My}{\pi} - 2nM + m \right) \frac{\sin y}{y} dy + \\ &+ \frac{2M}{\pi(N-1)M} \sum_{n=N+1}^{2N-1} (-1)^n \int_{z_{н}}^{z_{в}} f_{и} \left(\frac{Mz}{\pi} - nM + m \right) \frac{\sin z}{z} dz, \end{aligned} \quad (5.41)$$

где $y = \pi \left(2n - \frac{m-\xi}{M} \right)$; $z = \pi \left(n - \frac{m-\xi}{M} \right)$; $y_{в} = 2\pi n$; $y_{н} = \pi \left(2n - \frac{m}{M} \right)$; $z_{в} = \pi n$; $z_{н} = \pi \left(n - \frac{m}{M} \right)$.

Функция $\frac{\sin x}{x} \cong 0$ при $|x| \geq \pi$, поэтому верхние пределы интегралов (5.41) можно ограничить значением $y_{в} = z_{в} = \pi$. Нижний предел интегрирования $y_{н} = -\pi$ при выполнении условия $m \geq m_{гр1} = (2n + 1)M$; предел $z_{н} = -\pi$ при выполнении условия $m \geq m_{гр2} = (n + 1)M$. С учетом разделения нижнего предела интегрирования

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f_{и} \left(\frac{My}{\pi} - 2nM + m \right) \frac{\sin y}{y} dy &\cong f_{и}(m - 2nM) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy \cong \\ &\cong 2f_{и}(m - 2nM) Si(\pi). \end{aligned} \quad (5.42)$$

В интеграле (5.42) подынтегральная функция изменяется в пределах от $f_{и}(-M - 2nM + m)$ до $f_{и}(M - 2nM + m)$. При малом значении M функция изменяется незначительно, поэтому выбрали среднее значение вариации этой функции. Аналогично имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{и}} \left(\frac{Mz}{\pi} - nM + m \right) \frac{\sin z}{z} dz \cong 2f_{\text{и}}(m - nM)Si(\pi). \quad (5.43)$$

При $0 \leq m \leq m_{\text{гp1}} = (2n + 1)M$; $0 \leq m \leq m_{\text{гp2}} = (n + 1)M$ и соответственно $f_{\text{и}} \left(\frac{My}{\pi} - 2nM + m_{\text{гp1}} \right) = f_{\text{и}} \left(\frac{My}{\pi} - M \right)$; $f_{\text{и}} \left(\frac{Mz}{\pi} - nM + m_{\text{гp2}} \right) = f_{\text{и}} \left(\frac{Mz}{\pi} - M \right)$, и в пределах изменения переменных интегрирования $-\pi < y, z \leq \pi$ получим отрицательные значения $\frac{My}{\pi} - 2nM + m \leq 0$; $\frac{Mz}{\pi} - nM + m \leq 0$. Тогда в этих пределах $f_{\text{и}} \left(\frac{My}{\pi} - 2nM + m \right) = f_{\text{и}} \left(\frac{Mz}{\pi} - nM + m \right) = 0$. Как видим, значения интегралов (5.42), (5.43) являются значениями этих же интегралов во всей области изменения пределов интегрирования $(y_{\text{н}}, y_{\text{в}})$ и $(z_{\text{н}}, z_{\text{в}})$ соответственно. После подстановки (5.42) и (5.43) в (5.41) получим

$$f_{\text{к}}(m) = \frac{4Si(\pi)}{\pi(N-1)} \left[\sum_{n=1}^{N/2} f_{\text{и}}(m - 2nM) + \sum_{n=N+1}^{2N-1} (-1)^n f_{\text{и}}(m - nM) \right]. \quad (5.44)$$

Вычисляем среднее значение массы $\bar{m}_{\text{к}} = \int_0^{\infty} m f_{\text{к}}(m) dm$, если $\bar{m}_{\text{и}} = \int_0^{\infty} m f_{\text{и}}(m) dm$, то:

$$\begin{aligned} \bar{m}_{\text{к}} &= \frac{4Si(\pi)}{\pi(N-1)} \sum_{n=1}^{N/2} \int_{-2nM}^{\infty} (\eta + 2nM) f_{\text{и}}(\eta) d\eta + \\ &+ \frac{4Si(\pi)}{\pi(N-1)} \sum_{n=N+1}^{2N-1} (-1)^n \int_{-nM}^{\infty} (\varepsilon + nM) f_{\text{и}}(\varepsilon) d\varepsilon = \\ &= \frac{4Si(\pi)}{\pi(N-1)} \sum_{n=1}^{N/2} (\bar{m}_{\text{и}} + 2nM) + \sum_{n=N+1}^{2N-1} (-1)^n (\bar{m}_{\text{и}} + nM) = \\ &= \frac{3.7N}{\pi(N-1)} \left[\bar{m}_{\text{и}} \left(1 - \frac{2}{N} \right) + M \left(\frac{N}{2} - 2 \right) \right], \end{aligned} \quad (5.45)$$

где $\eta = m - 2nM$, $\varepsilon = m - nM$.

При вычислении интегралов в (5.45) учитывали условие $f_{\text{и}}(\eta) = 0$ при $\eta \leq 0$; $Si(\pi) = 1.85$.

Выразив M из (5.45) и подставив в (5.40), с учетом (5.2), получим линейную зависимость максимального значения массы m_m ферромагнитного агрегата от коэффициента глубины коагуляции $\gamma_{\text{к}}$:

$$m_m = \frac{2N\bar{m}_{\text{и}}}{N-4} \left[\frac{\pi\gamma_{\text{к}}(N-1)}{3.7N} + \frac{2}{N} - 1 \right]. \quad (5.46)$$

Следовательно, утверждение 5.6 доказано.

Следствие 5.6.1. Так как $g(m)$ (5.36) подобно $g(d_k)$ (5.38) и из выражений соответствующих сверток (5.39) следует подобность функций распределений $f_k(m)$ и $f_k(d_k)$, тогда будет подобной и процедура преобразований (5.41) – (5.45), необходимых для вычисления функции $f_k(d_k)$ и \bar{d}_k . Поэтому \bar{d}_k по аналогии с (5.45) примет следующий вид:

$$\bar{d}_k = \frac{3.7N}{\pi(N-1)} \left[\bar{d}_и \left(1 - \frac{2}{N} \right) + D \left(\frac{N}{2} - 2 \right) \right], \quad (5.47)$$

где \bar{d}_k , $\bar{d}_и$ математические ожидания продольных размеров соответственно бинарных агрегатов и исходных ферромагнитных частиц.

Следствие 5.6.2. В силу подобности (5.47) и (5.45), с учетом (5.2), получим:

$$\gamma_k = \frac{\bar{m}_k}{\bar{m}_и} = \frac{\bar{d}_k}{\bar{d}_и}, \quad (5.48)$$

из которого следует средняя длина ферромагнитного агрегата \bar{d}_k :

$$\bar{d}_k = \gamma_k \bar{d}_и. \quad (5.49)$$

Следствие 5.6.3. На основе (5.46) и подобия процедур (5.41) – (5.45) для вычисления функции $f_k(d_k)$ и $\bar{d}_и$, с учетом (5.48) и (5.47), следует использовать зависимость максимального значения продольного размера цепочечного ферромагнитного агрегата d_m от значения коэффициента глубины коагуляции γ_k

$$d_m = \frac{2N\bar{d}_и}{N-4} \left[\frac{\pi\gamma_k(N-1)}{3.7N} + \frac{2}{N} - 1 \right]. \quad (5.50)$$

Обобщая аналитические связи (5.40) и (5.46), приходим к утверждению 5.7.

Утверждение 5.7. При математическом моделировании магнитной коагуляции значение интервала дискретизации M ферромагнитных агрегатов определяется коэффициентом глубины коагуляции γ_k .

Аналогично при заданном значении коэффициента глубины коагуляции (5.48) вычисляется интервал D дискретизации продольных размеров ферромагнитных агрегатов по формулам (5.40), (5.50). Далее по выражениям (5.38) и (5.39) определяется плотность вероятности $f_k(d_k)$ дисперсного распределения ферромагнитных примесей при магнитной коагуляции при заданной математической

модели $f_{и}(d)$ исходного дисперсного распределения частиц во взвеси.

На рисунке 5.11 представлены расчетные зависимости распределения дисперсного состава примесей в водной среде при магнитной коагуляции по математическим моделям (5.38) – (5.40) и (5.46), которые сопоставляли с экспериментальными данными, полученными в [12] (см. рисунок 1.8). В эксперименте для приготовления суспензий использовали классифицированные порошки шламов, полученных при шлифовании заготовок из стали ШХ15, HRC 61...64 с различным дисперсным составом.

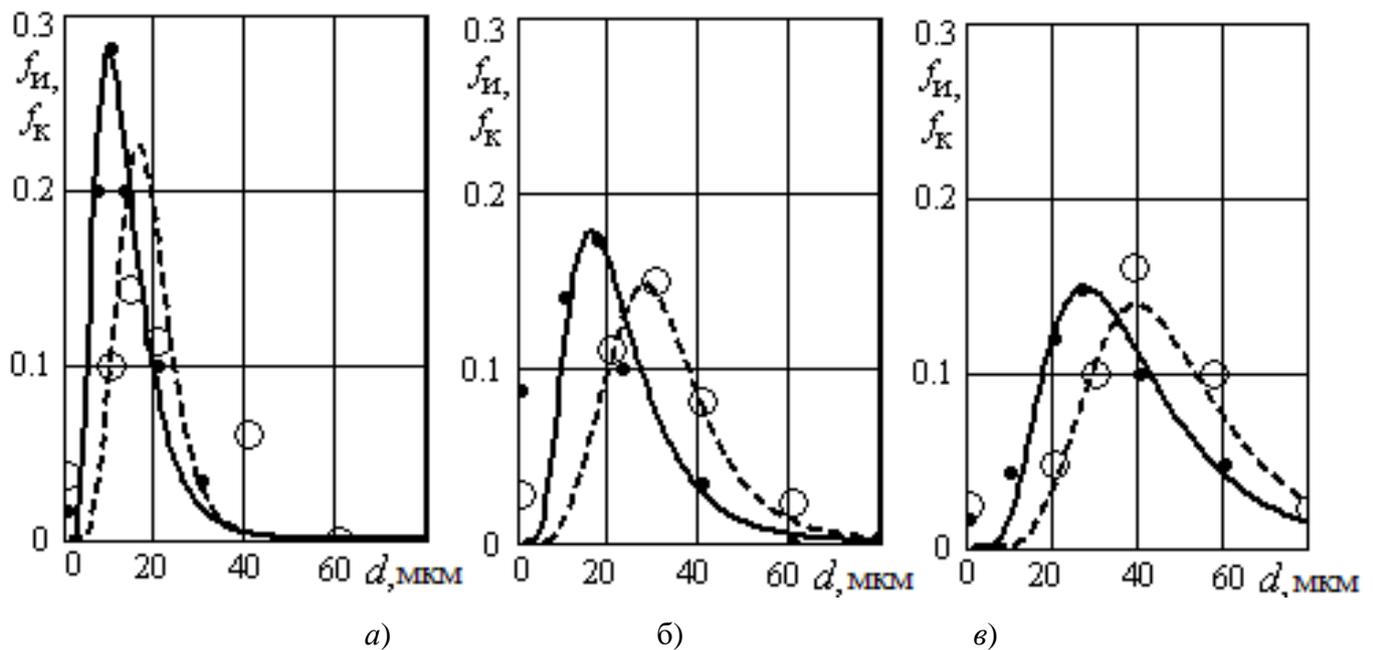


Рисунок 5.11 – Экспериментальные и теоретические зависимости гранулометрического состава водной суспензии: а, б, в – соответственно для проб: №1; №3; №5. Экспериментальные данные: ... – исходные; О О О – обработанные в магнитном поле. Теоретические: — — — — исходные (аппроксимированные логарифмически нормальным законом); - - - - вычисленные по математической модели

Соответственно средний размер и среднее квадратическое отклонение в мкм экспериментальных проб следующие: 1 – 16.8 и 15.6; 2 – 17.1 и 12.1; 3 – 16.8 и 9.8; 4 – 21.7 и 11.2; 5 – 24 и 11,8; 6 – 18.6 и 10.9. Исходные распределения аппроксимировали логарифмически-нормальным законом. При этом средний размер и среднее квадратическое отклонение в мкм для соответствующих графиков на рисунке 1.8 следующие: №1 – 12 и 9; №3 – 20 и 16; №5 – 35 и 28. На рисунках 1.8 и 5.11 продольный размер исходных частиц и агрегатов, образованных при магнит-

ной коагуляции изображается символом d . Предварительно, перед расчетом оценивали математические ожидания экспериментальных распределений дисперсного состава ферропримесей и по формуле (5.48) определяли значения коэффициентов глубины коагуляции. На рисунке: 5.11, $a - \gamma_k = 1.85$; 5.11, $b - \gamma_k = 2.80$; 5.11, $в - \gamma_k = 1.45$.

Адекватность расчетных и экспериментальных зависимостей, показанных на рисунке 5.11, оценивали по критерию Фишера [61]. При этом задавали следующие данные, значения которых до коагуляции (исходные) и после коагуляции (выходные) представлены в таблицах 5.8 – 5.10.

Результаты оценок адекватности как аппроксимационных исходных распределений $f_{и}$, так и теоретических распределений после коагуляции f_k с соответствующими экспериментальными данными сведены в таблицу 5.11.

Таблица 5.8

Значения распределений по рисунку 5.11, а

		1	2	3	4	5	6
До коагуляции	$f_{и}$ эксп.	0.017	0.2	0.28	0.2	0.1	0.033
	$f_{и}$ расч.	0	0.2	0.11	0.23	0.08	0.01
После коагуляции	f_k эксп.	0.037	0.1	0.143	0.114	0.06	0
	f_k расч.	0	0.1	0.215	0.18	0.004	0

Таблица 5.9

Значения распределений по рисунку 5.11, б

		1	2	3	4	5	6
До коагуляции	$f_{и}$ эксп.	0.087	0.14	0.172	0.1	0.033	0
	$f_{и}$ расч.	0	0.12	0.175	0.13	0.03	0.004
После коагуляции	f_k эксп.	0.027	0.11	0.15	0.08	0.022	0
	f_k расч.	0	0.11	0.14	0.08	0.032	0.012

Таблица 5.10

Значения распределений по рисунку 5.11, в

		1	2	3	4	5	6
До коагуляции	$f_{и}$ эксп.	0.017	0.043	0.12	0.147	0.1	0.047
	$f_{и}$ расч.	0	0.019	0.12	0.15	0.11	0.04
После коагуляции	$f_{к}$ эксп.	0.025	0.047	0.1	0.16	0.1	0.023
	$f_{к}$ расч.	0	0.035	0.1	0.14	0.082	0.026

Таблица 5.11

Оценка адекватности моделей по критерию Фишера

Тип распределений	Число сравниваемых точек	Критерий Фишера F	Предельное значение F_T , при 5% уровне значимости
Исходные	18	2.32	2.23
После коагуляции	18	2.25	2.23

Из данных таблицы 5.11 следует $F > F_T$, поэтому по критерию Фишера с уровнем риска не более 5% разработанная математическая модель магнитной коагуляции ферромагнитных примесей в однородном магнитном поле адекватно моделирует распределения дисперсионного состава ферромагнитных агрегатов.

5.3. Синтез весовой функции магнитной коагуляции при неоднородном магнитном поле

В магнитных сепараторах силовое поле неоднородно. При этом на ферромагнитные частицы будет действовать внешняя градиентная магнитная сила, приводящая их к ускоренному движению. Согласно математической модели (3.72) градиентная сила пропорциональна объему феррочастицы V_{ϕ} и соответственно её инертной массе $m_{\phi} = \rho_{\phi} V_{\phi}$, где ρ_{ϕ} массовая плотность материала феррочастицы. Тогда в поле внешних сил более массивная частица, обладая большим ускорением и скоростью, будет догонять частицу с меньшей массой. Такой механизм объеди-

нения частиц положим в основу механизма магнитной коагуляции и рассмотрим в данном параграфе.

Задачу будем решать в рамках следующих идеализаций:

- сосредоточимся только на механизме бинарного объединения дискретных частиц (агрегатов);

- в результате одного акта парного объединения частиц количество агрегатов будет составлять половину числа исходных частиц $N_1 = N/2$, поэтому рассмотрим случай, когда число частиц N – четное;

- минимальная масса бинарной частицы равна $1M + 2M = 3M$, максимальная масса бинарного объединения соответствует значению $(2N - 1)M$ как результат объединения частиц с массами NM и $(N - 1)M$;

- процессом разрушения агрегатов в ламинарном водном потоке пренебрегаем.

Для решения поставленной задачи достаточно синтезировать весовую функцию данного механизма коагуляции, по разработанной выше методике. Для этого необходимо определить вероятность распределения объединенных в пары ферромагнитных частиц при простейшем распределении исходных частиц до процесса бинарного объединения (ограничимся простейшим случаем – равной вероятности исходного распределения частиц по массам).

Пусть на вход системы подается N дискретных частиц разного калибра, массы которых образуют последовательность натуральных дискретных чисел nM (M – интервал дискретизации массы частиц примеси, а при отсутствии частицы с нулевой массой $n = 1, 2, \dots, N$). Во-первых, такое множество частиц становится упорядоченным – каждой частице присваивается номер $n = 1, 2, \dots, N$. Во-вторых, вероятность присутствия частицы с массой nM равна $p_n[nM] = 1/N$.

При парном соединении частиц масса агрегата складывается из масс отдельных частиц, поэтому вероятности бинарного объединения частиц будем привязывать к массе бинарных агрегатов. Для определения распределения вероятности по массам при бинарном объединении ферромагнитных частиц необходимо подсчитать все возможные правильно ориентированные пары i, j ($i > j$) при выполнении условия $i + j = k = const$ ($k = 3, 4, \dots, 2N - 1$).

Пусть порядок расположения среднестатистических частиц вдоль направления движения выстраивается по случайному закону. Возьмем конкретную правильно ориентированную пару N, j ($j = 1, 2, 3, \dots, N - 1$), которая будет повторяться в перестановках элементов подмножества из $N - 1$ элементов: одним элементом будет сама пара N, j , другими элементами будут $N - 2$ оставшихся номеров, не вошедших в пару N, j . Количество перестановок равно $(N - 1)!$ [185, 206]. Таким образом, общее количество возможного соответствующего бинарного соединения обозначим символом $q_{N,j}$:

$$q_{N,j} = (N - 1)! \quad (5.51)$$

Количество возможных соединений в правильно ориентированную пару $(N - 1), j$ ($j = 1, 2, 3, \dots, N - 2$) будет определяться возможным числом перестановок, равным $(N - 1)!$ за исключением результирующего числа возможных случаев выстраивания тройки частиц в следующий порядок следования $N, (N - 1); j$. При таком порядке следования частиц будет формироваться другая пара $N, (N - 1)$, которая исключает появление пары $(N - 1), j$, так как скорость сближения первой комбинации выше скорости сближения второй комбинации. Таким образом, при данном порядке следования тройки частиц более тяжелая пара частиц будет перехватывать процесс формирования бинарного объединения у менее тяжелой пары. При этом тройка элементов $[N; (N - 1); j]$ с оставшимися частицами образуют подмножество, состоящее из $N - 2$ элементов. Поэтому возможное количество перехватов равно числу перестановок в данном подмножестве $(N - 2)!$. Итак, общее количество возможного соответствующего бинарного соединения

$$q_{N-1,j} = (N - 1)! - (N - 2)! \quad (5.52)$$

Количество возможных соединений в правильно ориентированную пару $(N - 2), j$ ($j = 1, 2, 3, \dots, N - 3$) будет определяться возможным числом перестановок, равным $(N - 1)!$, за исключением результирующего числа возможных случаев выстраивания тройки частиц в следующие порядки следования: $N, (N - 2); j$ и $(N - 1), (N - 2); j$. Поэтому возможное суммарное количество перехватов будет равно $2(N - 2)!$. При этом для второй комбинации тройки частиц (номеров) возможны вторичные перехваты в случае выстраивании четвертки номеров в сле-

дующем порядке: $N, (N - 1); (N - 2), j$. В такой комбинации построения порядка поступления номеров образуются две пары соединений: $N, (N - 1)$ и $(N - 2), j$. А значит, добавляется количество возможных событий формирования бинарного соединения типа $(N - 2), j$, которое соответствует количеству перестановок в подмножестве, состоящем из $N - 3$ элементов: четвертки номеров $[N; (N - 1); (N - 2); j]$ и $N - 4$ оставшихся номеров, не вошедших в четверку элементов. Это число событий равно $(N - 3)!$. Итак, общее количество $q_{N-2,j}$ возможного соответствующего бинарного соединения

$$q_{N-2,j} = (N - 1)! - 2(N - 2)! + (N - 3)!. \quad (5.53)$$

Обобщая изложенные принципы подсчета $q_{i,j}$ при $i = N - \nu$, получим

$$q_{N-\nu,j} = (N - 1)! + \sum_{\alpha=2}^{\nu+1} (-1)^{\alpha+1} C_{\nu,\alpha} (N - \alpha)!. \quad (5.54)$$

$$q_{j+1,j} = (N - 1)! + \sum_{\alpha=2}^{N-j} (-1)^{\alpha+1} C_{N-j-1,\alpha} (N - \alpha)!. \quad (5.55)$$

Значения коэффициентов $C_{\nu,\alpha}$ для (5.54) представлены в таблице 5.12.

Таблица 5.12

Значения коэффициентов $C_{\nu,\alpha}$

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$	$\nu=6$
$\alpha=2$	1	2	3	4	5	6
$\alpha=3$	0	1	3	6	10	15
$\alpha=4$	0	0	1	4	10	20
$\alpha=5$	0	0	0	1	5	15
$\alpha=6$	0	0	0	0	1	6
$\alpha=7$	0	0	0	0	0	1

Из данных таблицы 5.12 следуют:

– для строки $\alpha = 2$

$$C_{\nu,2} = \nu = N - i; \quad (5.56)$$

– каждое значение ν столбца и $\alpha = 3$ строки совпадает с суммой значений всех $C_{\nu,2}$, входящих в столбцы от $\nu = 1$ до $\nu - 1 = N - i - 1$:

$$C_{\nu,3} = \sum_{\eta=1}^{\nu-1} C_{\eta,2} = \sum_{\eta=1}^{\nu-1} \eta; \quad (5.57)$$

– каждое значение ν столбца и $\alpha = 4$ строки совпадает с суммой значений всех $C_{\nu,3}$, входящих в столбцы от $\nu = 2$ до $\nu - 1 = N - i - 1$:

$$C_{\nu,4} = \sum_{\eta=2}^{\nu-1} C_{\eta,3} = \sum_{\eta=2}^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\eta-1} k = \sum_{\eta=1}^{\nu-2} \sum_{k=1}^{\eta} k; \quad (5.58)$$

– каждое значение ν столбца и $\alpha = 5$ строки совпадает с суммой значений всех $C_{\nu,4}$, входящих в столбцы от $\nu = 3$ до $\nu - 1 = N - i - 1$:

$$C_{\nu,5} = \sum_{\eta=3}^{\nu-1} C_{\eta,4} = \sum_{\eta=3}^{\nu-1} \sum_{k=2}^{\eta-1} \sum_{\eta=1}^{k-1} \eta = \sum_{\eta=1}^{\nu-3} \sum_{k=1}^{\eta} \sum_{\eta=1}^k \eta. \quad (5.59)$$

Аналогично для произвольного значения α коэффициент $C_{\nu,\alpha}$ будет выражаться через $\alpha - 2$ вставленных друг в друга сумм, которые преобразуются в произведение [153]

$$C_{\nu,\alpha} = \sum_{\eta=1}^{\nu-\alpha+2} \dots \sum_{k=1}^{\eta} \sum_{\eta=1}^k \eta = \prod_{\eta=0}^{\alpha-2} \frac{(v-\eta)}{(\alpha-1)!}. \quad (5.60)$$

Применяя преобразование и учитывая $\nu = N - i$, получим

$$\prod_{\eta=0}^{\alpha-2} \frac{(v-\eta)}{(\alpha-1)!} = \frac{v!}{(\alpha-1)!(v+1-\alpha)!} = \frac{(N-i)!}{(\alpha-1)!(N-i+1-\alpha)!}. \quad (5.61)$$

Таким образом, (5.60) принимает следующий вид:

$$C_{N-i,\alpha} = C_{\nu,\alpha} = \frac{(N-i)!}{(\alpha-1)!(N-i+1-\alpha)!}; \quad (5.62)$$

соответственно (5.54) приводится к

$$q_{i,j} = q_{N-\nu,j} = \sum_{\alpha=1}^{N-i+1} (-1)^{\alpha+1} \frac{(N-\alpha)!(N-i)!}{(\alpha-1)!(N-i+1-\alpha)!}. \quad (5.63)$$

Для подсчета вероятности p_{ij} соединения пары i, j вычислим сначала общее количество возможных пар соединений при условии $(N \geq i \geq j + 1, j = 1, 2, \dots, i - 1)$. При этом количество правильно ориентированных пар i, j при фиксированном i определяется варьированием номерами j от 1 до $i - 1$ и будет равно числу $i - 1$. Учитывая, что согласно (5.63), значения $q_{i,j}$ не зависят от номера j , общее количество возможных пар соединений i, j при условии $(N \geq i \geq j + 1, j = 1, 2, \dots, i - 1)$ определяется следующей формулой:

$$Q_N = \sum_{i=2}^N (i - 1) q_{i,j}. \quad (5.64)$$

Подставив (5.64) и (5.63) и совершив алгебраические преобразования, получим окончательное выражение:

$$Q_N = \sum_{i=2}^N (i-1) \sum_{\alpha=1}^{N-i+1} (-1)^{\alpha+1} \frac{(N-\alpha)!(N-i)!}{(\alpha-1)!(N-i+1-\alpha)!}. \quad (5.65)$$

На основе (5.63) и (5.65) вероятность p_{ij} соединения пары i, j можно определить по формуле (5.66), которая выражает вероятность присутствия частицы с массой $kM = (i+j)M$, ($k = 3, 4, \dots, 2N-1$):

$$p_{ij} = P_1[kM] = \frac{q_{ij}}{Q_N}. \quad (5.66)$$

Передаточная функция (5.24) по аналогии с (5.25) примет вид:

$$W(z) = \frac{N}{Q_N} [W_1(z) + W_2(z)]; \quad (5.67)$$

$$W_1(z) = [\lambda_{2N-1} z^{-(N-1)} + \sum_{k=2}^{N-1} (\lambda_{2N-k} - \lambda_{2N+1-k}) z^{-(N-k)}]; \quad (5.68)$$

$$W_2(z) = \frac{a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_{N-2} z^{-(N-2)} + \dots + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1}}{z^{-(N-1)} + z^{-(N-2)} + \dots + z^{-2} + z^{-1} + 1}; \quad (5.69)$$

$$a_{N-1} = (\lambda_{2N} + \lambda_N - \lambda_{N+1}), a_{N-2} = (\lambda_{2N-1} + \lambda_{N-1} - \lambda_{N+1}), \dots;$$

$$a_k = (\lambda_{N+k+1} + \lambda_{k+1} - \lambda_{N+1}), a_2 = (\lambda_{N+3} + \lambda_3 - \lambda_{N+1}); \quad (5.70)$$

$$a_1 = (\lambda_{N+2} + \lambda_2 - \lambda_{N+1}), \text{ где } \lambda_{2N} = \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$$

Разложив дробную функцию $W_2(z)$ в ряд Тейлора по обратным степеням переменной z [39, 63, 202]:

$$W_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^{-k}, \quad A_0 = 0; \quad (5.71)$$

$$A_k = a_k - \sum_{\nu=1}^k A_{k-\nu}, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1); \quad (5.72)$$

$$A_{N+r} = -\sum_{i=1}^{N-1} A_{i+r}, \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.73)$$

Подставив последовательно формулы (5.70) для расчета a_k в рекуррентную формулу (5.72), получим

$$A_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k + \lambda_{N+k+1} - \lambda_{N+k}, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (5.74)$$

При $A_0 = 0$

$$A_{N-1} = a_{N-1} - \sum_{\nu=1}^{N-2} A_{N-1-\nu} = a_{N-1} - \sum_{i=N-2}^1 A_i. \quad (5.75)$$

По формуле (5.73) для $r = 0$ с учетом (5.75)

$$A_N = -\sum_{i=1}^{N-1} A_i = -A_{N-1} - \sum_{i=1}^{N-2} A_i = -a_{N-1}. \quad (5.76)$$

Для $r = 1$ с учетом (5.76)

$$A_{N+1} = -\sum_{i=1}^{N-1} A_{i+1} = -\sum_{\nu=2}^N A_{\nu} = A_1 - A_N - \sum_{\nu=1}^{N-1} A_{\nu} = A_1,$$

Аналогично:

$$A_{N+2} = A_2, A_{N+3} = A_3, \dots, A_{2N} = A_N;$$

$$A_{2N+1} = A_{N+1} = A_1, A_{2N+2} = A_{N+2} = A_2, \dots, A_{3N} = A_{2N} = A_N;$$

$$A_{kN+v} = A_v, \quad (v = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots) \quad (5.77)$$

Индексы при λ_k выражают результирующую массу $Mk = M(i + j)$ бинарного соединения частиц i и j , тогда как число λ_k соответствует количеству пар с массой Mk . Принимая это во внимание, подсчитаем все возможные вариации номеров i и j при условиях $k = i + j = \text{const}$, $i > j$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$ для шести значений k : $2v - 1$; $2v$, $2v + 1$; $N + 2v - 1$; $N + 2v$; $N + 2v + 1$.

$$\lambda_{2v-1} = q_{2v-2,1} + q_{2v-3,2} + \dots + q_{v+2,v-3} + q_{v+1,v-2} + q_{v,v-1}; \quad (5.78)$$

$$\lambda_{2v} = q_{2v-1,1} + q_{2v-2,2} + \dots + q_{v+3,v-3} + q_{v+2,v-2} + q_{v+1,v-1}; \quad (5.79)$$

$$\lambda_{2v+1} = q_{2v,1} + q_{2v-1,2} + \dots + q_{v+3,v-2} + q_{v+2,v-1} + q_{v+1,v}; \quad (5.80)$$

$$\lambda_{N+2v-1} = q_{N,2v-1} + q_{N-1,2v} + \dots + q_{\frac{N}{2}+v+1, \frac{N}{2}+v-2} + q_{\frac{N}{2}+v, \frac{N}{2}+v-1}; \quad (5.81)$$

$$\lambda_{N+2v} = q_{N,2v} + q_{N-1,2v+1} + \dots + q_{\frac{N}{2}+v+2, \frac{N}{2}+v-2} + q_{\frac{N}{2}+v+1, \frac{N}{2}+v-1}; \quad (5.82)$$

$$\lambda_{N+2v+1} = q_{N,2v+1} + q_{N-1,2v+2} + \dots + q_{\frac{N}{2}+v+2, \frac{N}{2}+v-1} + q_{\frac{N}{2}+v+1, \frac{N}{2}+v}. \quad (5.83)$$

Подставив (5.78) – (5.83) в (5.74) и учитывая равенство $q_{i,j} = q_{i,v}$, при $j \neq v < i$ получим:

при $k = 2v - 1$ с учетом $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$A_1 = a_1 = -q_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}}, \quad A_{2v-1} = q_{2v-1,1} - q_{v,v-1} - q_{\frac{N}{2}+v, \frac{N}{2}+v-1}; \quad (5.84)$$

при $k = 2v$

$$A_{2v} = q_{2v,1}. \quad (5.85)$$

$$A_N = -a_{N-1} = -(\lambda_N - \lambda_{N+1}) = q_{N,1}. \quad (5.86)$$

Подставив (5.84) и (5.85) в (5.71), при $k = 1, 2, \dots, N - 1$ имеем

$$W_2(z) = A_1 + \sum_{\eta=2}^{\frac{N}{2}} A_{2\eta-1} z^{-(2\eta-1)} + \sum_{v=1}^{\frac{N}{2}-1} A_{2v} z^{-2v} + \sum_{k=N}^{\infty} A_k z^{-k}. \quad (5.87)$$

Раскрыв содержание коэффициентов A_{2v-1} , A_{2v} в (5.87), получим

$$W_2(z) = -q_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}} z^{-1} + \sum_{v=2}^{\frac{N}{2}} \left(q_{2v-1,1} - q_{v,v-1} - q_{\frac{N}{2}+v, \frac{N}{2}+v-1} \right) z^{-(2v-1)} +$$

$$+ \sum_{v=1}^{\frac{N}{2}-1} q_{2v,1} z^{-2v} + \sum_{k=N}^{\infty} A_k z^{-k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^{\frac{N}{2}-1} q_{2\nu,1} z^{-2\nu} + \sum_{\nu=2}^{\frac{N}{2}} (q_{2\nu-1,1} - q_{\nu,\nu-1}) z^{-(2\nu-1)} - \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{\frac{N}{2}} q_{\frac{N}{2}+\nu, \frac{N}{2}+\nu-1} z^{-(2\nu-1)} + \sum_{k=N}^{\infty} A_k z^{-k}. \tag{5.88}
\end{aligned}$$

Подставив в (5.68) формулы (5.81) – (5.83), раскрываем содержание выражения

$$W_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\frac{N}{2}-1} q_{N-\nu, N-1-\nu} z^{-(N-2\nu-1)} = \sum_{\frac{N}{2}}^{\eta=1} q_{\frac{N}{2}+\eta, \frac{N}{2}+\eta-1} z^{-(2\eta-1)}, \tag{5.89}$$

вторая версия которого, получена преобразованием индекса суммирования $N - \nu = \eta + \frac{N}{2}$.

Подставив (5.88) и (5.89) в (5.67), с учетом (5.86), приходим к конечному результату:

$$\begin{aligned}
W(z) = \frac{N}{Q_N} \left[\sum_{\nu=2}^{\frac{N}{2}} (q_{2\nu-1,1} - q_{\nu,\nu-1}) z^{-(2\nu-1)} + \sum_{\nu=1}^{\frac{N}{2}} q_{2\nu,1} z^{-2\nu} + \right. \\
\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k z^{-k} \right]. \tag{5.90}
\end{aligned}$$

Переходя от z -изображения (5.90) к оригиналу, получим дискретную весовую характеристику процесса коагуляции

$$\begin{aligned}
g^*[nM] = \frac{N}{Q_N} \left[\sum_{k=1}^{N/2} q_{2k,1} \delta[(n-2k)M] + \sum_{k=2}^{\frac{N}{2}} (q_{2k-1,1} - q_{k,k-1}) \times \right. \\
\left. \times \delta[(n-2k+1)M] + \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \delta[(n-k)M] \right]. \tag{5.91}
\end{aligned}$$

В частности, при $N = 6$ функция (5.91) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
g^*[nM] = \frac{6}{Q_6} [53\delta[(n-2)M] + 11\delta[(n-3)M] + 78\delta[(n-4)M] + \\
+ 32\delta[(n-5)M] + 120\delta[(n-6)M] + \sum_{k=7}^{\infty} A_k \delta[(n-k)M]]. \tag{5.92}
\end{aligned}$$

При вычислении ряда (5.71) можно ограничиться N числом его членов, так как системы алгебраических уравнений (5.72), (5.73) однозначно определяют коэффициенты дробной функции (5.69).

Подставив (5.91) в (5.35), получим непрерывную весовую характеристику процесса коагуляции:

$$\begin{aligned}
g(m) = K \left[\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} q_{2n,1} \frac{\sin \pi(2n-\frac{m}{M})}{\pi(2n-\frac{m}{M})} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} (q_{2n+1,1} - q_{n+1,n}) \frac{\sin \pi(2n+1-\frac{m}{M})}{\pi(2n+1-\frac{m}{M})} + \right. \\
\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \frac{\sin \pi(n-\frac{m}{M})}{\pi(n-\frac{m}{M})} \right]; \tag{5.93}
\end{aligned}$$

$$K = \frac{N}{MQ_N}.$$

При $N = 50$ график (5.93) представлен на рисунке 5.12. Подставив (5.93) в (5.39), получим функцию плотности распределения дисперсного состава примесей при равномерном исходном распределении $f_{\text{и}}(m) = \text{const}$, график которой представлен на рисунке 5.13.

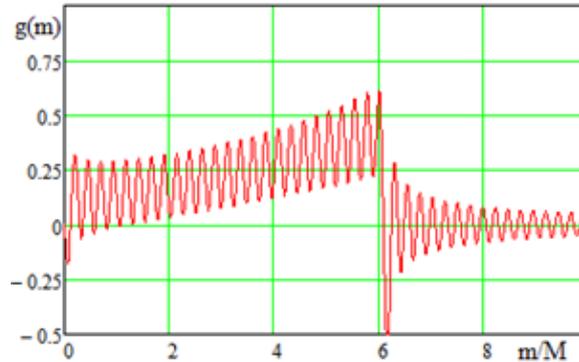


Рисунок 5.12 – Весовая функция магнитной коагуляции

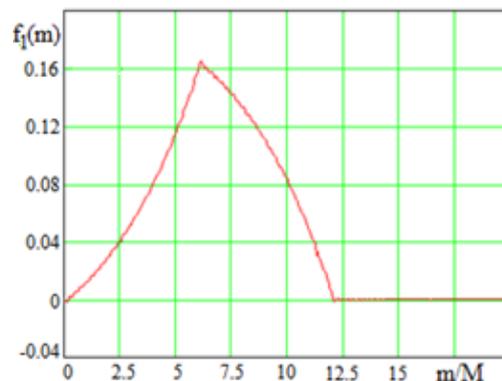


Рисунок 5.13 – Функция плотности распределения дисперсного состава примесей для магнитной коагуляции при $N = 50, M = 0.12$

График зависимости, показанный на рисунке 5.13, рассчитан для следующего равномерного исходного распределения дисперсного состава примесей:

$$f_{\text{и}}(m) = [1(m) - 1(m - MN)]/MN,$$

где $1(m)$ – единичная ступенчатая функция, $m_m = MN = 6$ для случая одного акта парного объединения частиц ($\gamma_k = 2$).

В итоге проведенных в параграфе 5.3 этапов моделирования (определения вероятности (5.66) бинарного слияния феррочастиц для частного дискретного исходного распределения – равновероятностного распределения; синтеза дискретной весовой функции (5.91) методом Z-преобразования; переход к непрерывной

весовой функции на основе теоремы об отсчетах), получена весовая характеристика (5.93) процесса коагуляции в неоднородном магнитном поле. В результате математического моделирования определена зависимость стохастической характеристики $f_k(m)$ этого процесса от параметров исходного распределения $f_n(d, \bar{d}_n, \sigma)$ дисперсного состава феррочастиц и внутренних параметрах математической модели – интервалов дискретизации N, M :

$$f_k(m) = F[m, f_n(d, \bar{d}_n, \sigma), N, M(\gamma_k)],$$

где $F[\dots]$ – оператор (свертка).

При произвольном законе распределения дисперсного состава ферромагнитных частиц интервалы дискретизации N, M определяются формулами (5.40), (5.46) и (5.50), которые устанавливают их связь со значением коэффициента γ_k глубины магнитной коагуляции.

В соответствии с формулой (5.2) средняя масса ферромагнитных агрегатов при магнитной коагуляции определяется значением коэффициента γ_k глубины коагуляции, поэтому его положим в качестве *критерия магнитной коагуляции*.

Для применения этого критерия в практику проектирования магнитных сепараторов в параграфе 5.4 установим зависимость γ_k с геометрическими и физическими параметрами магнитного сепаратора.

5.4. Определение коэффициента глубины магнитной коагуляции

Пусть в среднестатистическом приближении объединение в пары происходит за средний интервал времени $\bar{\tau}_{kv}$, равный

$$\bar{\tau}_{kv} = \frac{\bar{l}_{v-1}}{\bar{v}_{kv-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{N_{vv-1} \bar{v}_{kv-1}}}, \quad (5.94)$$

где $\bar{l}_{v-1} = \sqrt[3]{N_{vv-1}}$ – среднее расстояние между ферромагнитными частицами, м; N_{vv-1} – средняя концентрация не осажденных ферромагнитных частиц, м⁻³; \bar{v}_{kv-1} – средняя скорость парной коагуляции в интервале между $v-1$ и v циклами объединения частиц, м/с.

Тогда за время \bar{t}_{kv-1} одного цикла парного объединения концентрация ферромагнитных частиц уменьшится в два раза, а за время $\bar{t}_{kv-1} + \bar{t}_{kv}$ двух последовательных циклов парного объединения концентрация частиц уменьшится в четыре раза и т.п.

Если T_m интервал времени пребывания дисперсной системы в зоне коагуляции сепаратора, то число циклов ν среднестатистических бинарных объединений пропорционально отношению T_m/\bar{t}_{kv} , а концентрация ферромагнитных агрегатов за это время уменьшится в $2T_m/\bar{t}_{kv} = 2T_m \sqrt[3]{N_{\nu\nu-1}} \bar{v}_{kv-1}$ раз. Используя закон сохранения массы при коагуляции (4.114), запишем уравнение

$$\frac{\bar{m}_\nu}{\bar{m}_и} = 2T_m (\sqrt[3]{N_{\nu\nu-1}}) \bar{v}_{kv-1},$$

из которого в соответствии с (5.2) и (4.114) следует выражение коэффициента глубины магнитной коагуляции

$$\gamma_{kv} = 2T_m \left(\sqrt[3]{\frac{C_0}{\bar{m}_{\nu-1}}} \right) \bar{v}_{kv-1}, \quad (5.95)$$

где C_0 – средняя массовая концентрация феррочастиц во взвеси, кг/м³; $\bar{m}_{\nu-1}$ – средняя масса феррочастиц в интервале между $\nu - 1$ и ν циклами объединения частиц, кг.

Массовую концентрацию феррочастиц C_0 определим из уравнения непрерывности массы

$$C_и = C_0 + C_{ш0}, \quad (5.96)$$

где $C_и$ – исходная концентрация феррочастиц, поступающая в рабочую область ступени сепаратора, кг/м³; $C_{ш0}$ – концентрация осажденных частиц без учета коагуляции, которая определяется по уравнениям (4.115), (4.116), (4.118) следующим образом: $C_{ш0} = \bar{\varepsilon}_0(\bar{d}_и) C_и$, где $\bar{\varepsilon}_0(\bar{d}_и)$ – без учета коагуляции среднее значение степени очистки ступени сепаратора при полидисперсном распределении феррочастиц по размерам.

Выразив C_0 из (5.96) и используя выражение $\bar{m}_{\nu-1} = \gamma_{kv-1} \bar{m}_и$, приводим (5.95) к следующему виду:

$$\gamma_{kv} = 2T_m \left(\sqrt[3]{\frac{[1-\bar{\varepsilon}_0(\bar{d}_и)] C_и}{\gamma_{kv-1} \bar{m}_и}} \right) \bar{v}_{kv-1}, \quad (5.97)$$

Проведем моделирование средней скорости парной коагуляции. В неоднород-

ном поле феррочастицы перемещаются поперек магнитных линий за счет градиентной силы \mathbf{f}_m (3.69) – (3.71). Большая по размеру (и по массе) j частица обладает большим магнитным моментом, её скорость пропорциональна массе (4.78) и (5.101), поэтому она догоняет более легкую i феррочастицу, испытывая при этом диполь-дипольное противодействие с силой \mathbf{F}_{mji} (3.89). На критическом расстоянии $r_{ijkp} = \left[3\chi_{\phi i} R_{\phi i} \alpha^{-1} (3 + \chi_{\phi i})^{-1} \right]^{0.25}$ наступает равновесие сил $\mathbf{f}_{mr} + \mathbf{F}_{mji} = 0$. Под действием результирующей силы $\mathbf{f}_{mz} + \mathbf{F}_{mji}$ феррочастицы j и i взаимно разворачиваются до выстраивания их магнитных моментов вдоль магнитной линии внешнего поля. При этом инверсия силы \mathbf{F}_{mji} (3.88) приводит к объединению j и i феррочастиц, проходящему в режиме $r_{ij} < r_{ijkp}$, $|\mathbf{F}_{mji}| > |\mathbf{f}_{mr}|$, поэтому скорость слияния выше, чем v_m (4.78).

Если $r_{ijkp}/l_0 \ll 1$ (где $l_0 = \sqrt[3]{1/N_v}$ – начальное среднестатистическое расстояние между феррочастицами в ВТЖ (пункт 5.2.1)), то время слияния феррочастиц обуславливается их перемещением поперек магнитных линий под действием силы \mathbf{f}_{mr} .

Скорость, с которой i -частица догоняет j -частицу равна $v_{mi} - v_{mj}$, где v_{mi}, v_{mj} – скорости соответствующих частиц относительно дисперсионной среды (ВТЖ), м/с. Тогда средняя скорость коагуляции по всем взаимодействующим частицам будет равна

$$\bar{v}_{kv-1} = \sum_{i=2}^N p_{ij} \sum_{j=1}^{i-1} (v_{mi} - v_{mj}), \quad (5.98)$$

где $\sum_{j=1}^{i-1} (v_{mi} - v_{mj})$ – сумма разности скоростей между i -ой и j -ми частицами; $p_{ij} = p_{i1}$ – вероятность соединения пары i, j (5.66), которая не зависит от номера j . Представив вторую сумму в (5.98) следующим образом

$$\sum_{j=1}^{i-1} (v_{mi} - v_{mj}) = (i - 1) \left(v_{mi} - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} v_{mj}}{i-1} \right) = (i - 1)(v_{mi} - \bar{v}_{mi-1}), \quad (5.99)$$

получим среднюю скорость коагуляции

$$\bar{v}_{kv-1} = \sum_{i=2}^N (i - 1) p_{ij} (v_{mi} - \bar{v}_{mi-1}), \quad (5.100)$$

где \bar{v}_{mi-1} – усредненная для ферромагнитных частиц с массами от M до $M(i - 1)$ относительная скорость.

Магнитная коагуляция для процессов сепарации имеет ценность для частиц

с малыми размерами $d_\phi < 10$ мкм. При выполнении условия $4m\alpha_{0k}/K_{c1}^2 \ll 1$ формула (4.51) принимает вид $P_{1k} \cong \alpha_{0k}/K_{c1}$, ($k = 1, 2$). Подставляя формулу (3.79) в P_{11} , а (3.83), с учетом (3.82), в P_{12} , получим

$$P_{1k} = C_{1k}m, \quad (5.101)$$

где

$$C_{11} = \frac{0.94C'_0}{r_{rp1}-R}, \quad C_{12} = \frac{0.06C'_0}{\left(\frac{a}{2}-r_{rp1}\right)}, \quad C'_0 = \frac{\alpha_1 \cdot \ln 10 \cdot \mu_0 \cdot \chi_{mo} \cdot \bar{H}_m^3(d_{ш})}{18\pi\eta\rho_\phi}. \quad (5.102)$$

Заметим, что оценка условия $4m\alpha_{0k}/K_{c1}^2 \ll 1$ для параметров магнитной системы, приведенной в главе 3, и минимального коэффициента динамической вязкости $\eta = 0.001$ Н·с/м² жидкой среды удовлетворяется при $d_\phi \leq 10$ мкм. Поэтому формулы (5.101), (5.102) будут правомерны для анализа процессов коагуляции в патронных магнитных сепараторах.

Представив массу i -ой частицы в (5.101) как $m_{i\nu-1} = iM_{\nu-1}$ и подставив её в формулу $\bar{v}_m = P_{1k} \left(\frac{f_k}{\alpha_{0k}} - \langle \bar{r} \rangle \right)$ (4.78) и далее в (5.100), получим усредненную по массам частиц значение средней скорости коагуляции

$$\bar{v}_{k\nu-1} = 0.5M_{\nu-1}C_{1k} \left(\frac{f_k}{\alpha_{0k}} - \bar{r} \right) \sum_{i=2}^N i(i-1)p_{ij}, \quad (5.103)$$

Подставив в (5.97) формулу (5.103), а также максимальное время (4.57) пребывания частицы в активной области сепарации $T_m = t_{01}(\varphi_H)$, получим зависимость $\gamma_k(\varphi_H)$, которую усредним по всем φ_H . Следовательно, усредненное значение коэффициента глубины коагуляции принимает следующий вид:

$$\bar{\gamma}_k = \left(\sqrt[3]{\frac{[1-\bar{\varepsilon}_0(\bar{d}_H)]C_H}{\bar{\gamma}_{k\nu-1}\bar{m}_H}} \right) \frac{4M_{\nu-1}C_{1k} \left(\frac{f_k}{\alpha_{0k}} - \bar{r} \right) \sum_{i=2}^N i(i-1)p_{ij}}{\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t_{01}(\varphi_H) d\varphi_H \right]. \quad (5.104)$$

Выразив из (5.40) шаг дискретизации массы частиц $M_{\nu-1} = m_{m\nu-1}/N$ и приняв максимальное значение массы ансамбля частиц через параметры дисперсного распределения $m_{m\nu-1} \approx \bar{m}_{\nu-1} + 3\sigma_m$ (σ_m —среднее квадратическое отклонение по массе), приводим (5.104) к следующему виду:

$$\bar{\gamma}_k = \left(\sqrt[3]{\frac{[1-\bar{\varepsilon}_0(\bar{d}_H)]C_H}{\bar{\gamma}_{k\nu-1}\bar{m}_H}} \right) \frac{4\bar{m}_{\nu-1} \left(1 + \frac{3\sigma_m}{\bar{m}_{\nu-1}} \right) C_{1k} \left(\frac{f_k}{\alpha_{0k}} - \bar{r} \right) \sum_{i=2}^N i(i-1)p_{ij}}{\pi N} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t_{01}(\varphi_H) d\varphi_H \right].$$

В силу линейности преобразования свертки (5.39) полагаем равенство $3\sigma_m/\bar{m}_{v-1} = 3\sigma_{mi}/\bar{m}_i$. Приняв во внимание, что $\bar{\gamma}_{kv-1} = \bar{m}_{v-1}/\bar{m}_i$ и учтя соотношение $\bar{\gamma}_{kv}/\bar{\gamma}_{kv-1} = 2$, а также содержание (4.57), приводим последнее выражение к следующему виду:

$$\bar{\gamma}_k = \left[\frac{2^{\frac{4}{3}} \bar{m}_i^{\frac{2}{3}} ([1 - \bar{\varepsilon}_0(\bar{d}_i)] C_i)^{\frac{1}{3}} C_{1k} \left(\frac{f_k}{\alpha_{ok}} - \bar{r} \right) \bar{r} \left(1 + \frac{3\sigma_{mi}}{\bar{m}_i} \right) \frac{\sum_{i=2}^N i(i-1) p_{ij}}{N} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi_H}{2} \right) d\varphi_H \right)}{\pi \bar{v}_{жс}} \right]^3. \quad (5.105)$$

Из (5.105) следует, что коэффициент глубины коагуляции пропорционален массовой концентрации C_i феррочастиц в ВТЖ, поступающей в сепаратор. При этом $\bar{\gamma}_k$ спадает с увеличением средней скорости $\bar{v}_{жс}$ потока ВТЖ.

Подчеркнем, что математические модели (5.95), (5.105) правомерны при $\bar{\gamma}_k > 1$, так как для $\bar{\gamma}_k \leq 1$ коагуляция частиц отсутствует. Глубина коагуляции регулируется заданием значения исходной массовой концентрации C_i ферромагнитных примесей, кг/м³, поэтому *существует некоторое критическое значение исходной концентрации $C_{икр}$* , при котором процесс коагуляции будет отсутствовать. Это критическое значение можно оценить по выражению (5.105) при условии $\bar{\gamma}_k = 1$.

Из раскрытого положения следует, что характеристики степени очистки магнитных сепараторов, смоделированные в главе 4, правомерны для значений концентрации ферромагнитных частиц, которые ниже критических значений.

Рисунок 5.14 иллюстрирует функции плотности вероятности дисперсного распределения ферромагнитных частиц по массе для различных значений $\bar{\gamma}_k$. Для описания распределения феррочастиц по массе используем на входе сепаратора логарифмически нормальный закон плотности вероятности (4.113) и (4.110), выраженный в относительных переменных $x = m/\bar{m}_i$, $y_i(x) = f_i(x)\bar{m}_i$

$$y_i(x) = \frac{e^{-4.5s^2}}{3s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{18s^2} - 2\ln x}; \quad (5.106)$$

ферроагрегатов на выходе, на основе выражений (5.39), (5.93) и при $\mu = M/\bar{m}_i$

$$y_k(x) = \frac{e^{-4.5s^2} N}{3s\sqrt{2\pi}\mu Q_N} \int_0^x e^{-\frac{(\ln(\xi))^2}{18s^2} - 2\ln \xi} g(x - \xi) d\xi, \quad (5.107)$$

где параметр \bar{m}_i выражается формулой (4.110).

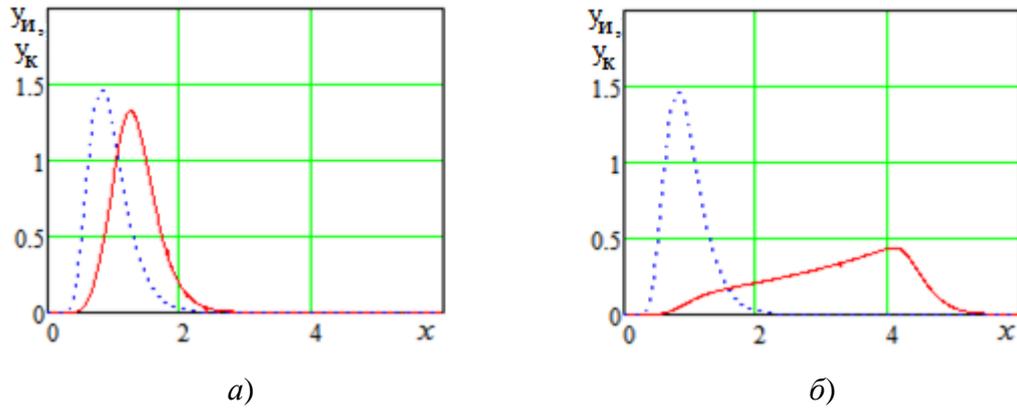


Рисунок 5.14 – Теоретические зависимости стохастических характеристик распределения дисперсного состава ферромагнитных примесей: для входного; ----- для выходного распределений при а) $\bar{\gamma}_k = 1.53$ и б) при $\bar{\gamma}_k = 3.55$

Подставив в формулы для средних значений масс $\bar{m}_k = \int_0^\infty m f_k(m) dm$, $\bar{m}_и = \int_0^\infty m f_и(m) dm$, с учетом (5.58), получим выражение, по которому рассчитывается коэффициент глубины коагуляции преобразованной плотности распределения вероятности (5.107):

$$\bar{\gamma}_k = \frac{\bar{m}_k}{\bar{m}_и} = \frac{N}{3s\sqrt{2\pi}\mu Q_N} \int_0^\infty dx \int_0^x e^{-\frac{(\ln(\xi))^2}{18s^2} - 2\ln\xi} g(x - \xi) d\xi, \quad (5.108)$$

где для логарифмически нормального закона распределения средняя масса ферро-частицы перед процессом коагуляции равна $\bar{m}_и = m_и e^{4.5s^2}$.

Подчеркнем, что увеличение исходной концентрации ферропримесей на входе сепаратора $C_и = C_{вх}$ ведет к увеличению интенсивности коагуляции, что может привести к уменьшению остаточной концентрации $C_0 = C_{вых}$ ферромагнитных частиц на выходе магнитного сепаратора, потому что коагуляция приводит к изменению распределения дисперсного состава примесей в сторону увеличения средней массы агрегатов, согласно рисунку 5.14. Более тяжелые частицы в соответствии с характеристикой степени очистки $\varepsilon(d_k)$ (рисунки 4.14, 4.15) будут осаждаться в сепараторе. Согласно (4.118), остаточная концентрация на выходе сепаратора, определяемая формулой $C_0 = C_и [1 - \bar{\varepsilon}(\bar{d}_k)]$, будет зависеть от среднего значения степени очистки $\bar{\varepsilon}(\bar{d}_k) = \int_0^\infty \varepsilon(d_k) f_k(d_k) d(d_k)$. При увеличении крупности частиц (агрегатов) средняя степень очистки сепаратора $\bar{\varepsilon}(\bar{d}_k)$ приближается к единице. Остаточная концентрация C_0 ферропримесей на выходе ступени сепаратора уменьшается.

Теория магнитной сепарации, развитая в четвертой главе, показала, что осаждение феррочастиц без учета магнитной коагуляции доминирует в начальной части рабочей области сепаратора, ограниченной угловыми координатами $\varphi_n \leq \varphi \leq 90^\circ$ перемещения феррочастицы, так как этому процессу одновременно способствуют два фактора – добавочная эквивалентная сила и поток жидкой среды. По этой причине характеристика степени очистки $\varepsilon(d_\phi)$ без учета магнитной коагуляции в основном формируется процессом осаждения ферропримесей в этой же области.

Процесс магнитной коагуляции доминирует в зоне рабочей области сепаратора, ограниченной угловыми координатами $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_n$ перемещения феррочастицы, так как в этой зоне появляются седлообразные траектории движения феррочастицы. В зоне существенного торможения ($\varphi > 180^\circ - \varphi_n$) характеристика степень очистки $\varepsilon(d_\phi)$ моделируется разработанными критериальными условиями абсолютного попадания (4.66) и абсолютного непопадания (4.77) ферромагнитных частиц на магниты. Так как за счет процесса коагуляции масса агрегатов увеличивается, соответственно возрастает значение обобщенного параметра (4.63) и тем самым преодолевается критерий (4.66), гарантирующий осаждение ферромагнитных примесей на магниты.

Из проведенного анализа последовательности протекания комбинации процессов коагуляции и сепарации в магнитных сепараторах следует, что часть вошедшего в магнитный сепаратор дисперсного ансамбля ферромагнитных частиц осаждается на магнитах до процесса коагуляции. Оставшаяся часть ансамбля ферромагнитных частиц с измененным спектром дисперсного распределения

$$f_{и1}(d_\phi) = \frac{[1 - \varepsilon(d_\phi)]}{[1 - \bar{\varepsilon}(\bar{d}_n)]} f_{и}(d_\phi), \quad (5.109)$$

в соответствии с выражением (4.120) в зоне седлообразных траекторий коагулирует в ансамбль агрегатов, спектр дисперсного распределения которых в соответствии с выражением (5.39) принимает следующий вид:

$$f_k(d_k) = \int_0^{d_k} f_{и1}(\xi) g(d_k - \xi) d\xi. \quad (5.110)$$

На выходе из рабочей области сепаратора осаждение ансамбля агрегатов

оценивается смоделированной по критериальным условиям характеристикой степени очистки $\varepsilon(d_\phi)$. Результирующая степень очистки комбинированного процесса $\bar{\varepsilon}(\bar{d}_k)$ приобретает следующий вид:

$$\bar{\varepsilon}(\bar{d}_k) = \int_0^\infty \varepsilon(d_k) f_k(d_k) d(d_k). \quad (5.111)$$

Алгоритм расчета зависимости $C_0(C_{и})$ на основе математической модели степени очистки (5.109) – (5.111) магнитных сепараторов представлен на рисунке 5.15.

Результаты расчета остаточной концентрации ферропримесей на выходе сепаратора, выполненные по алгоритму при разных значениях скорости $v_{жн}$ ВТЖ, показаны на рисунке 5.16, где сопоставлены с экспериментальными зависимостями, взятыми из [123] (см. рисунок 1.6).

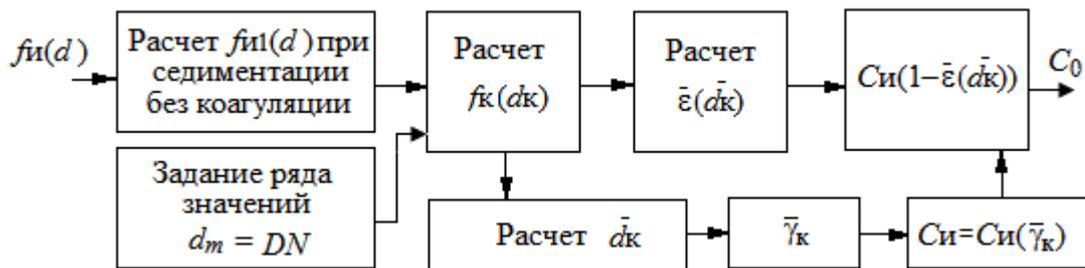


Рисунок 5.15 – Алгоритм расчета остаточной концентрации ферромагнитных примесей на выходе магнитного сепаратора при магнитной коагуляции

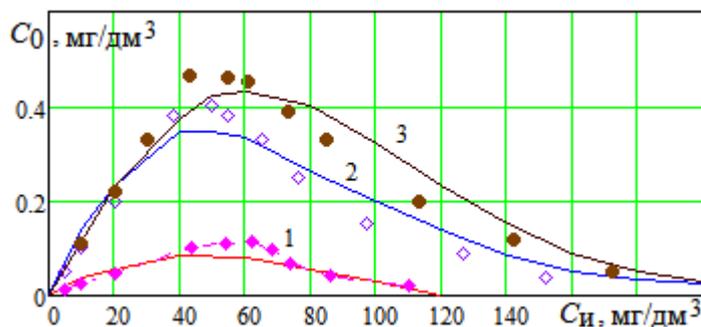


Рисунок 5.16 – Экспериментальные (сплошными линиями) и теоретические зависимости (\blacklozenge ; \blacklozenge ; \bullet) остаточной концентрации C_0 ферромагнитных примесей в очищенной ВТЖ от исходной концентрации примесей $C_{и}$ для сепаратора на феррито-бариевых магнитах: 1, 2, 3 – соответственно при $v_{жн} = 0.001; 0.025; 0.05$ м/с; $\bar{d} = 10$ мкм

Степень совпадения расчетных и экспериментальных зависимостей на рисунке 5.16 оценивали по критерию Фишера [61]. При этом задавали массив данных C_0 , значения которых в 10...11 точках до коагуляции (исходные) и после коагуляции (выходные) представлены в таблицах 5.13 – 5.15.

Таблица 5.13

Значения остаточной концентрации C_0 ферромагнитных примесей для
 $v_{\text{жн}} = 0.001$ м/с

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_{0\text{экс}},$ мг/дм ³	0.017	0.037	0.055	0.086	0.086	0.08	0.075	0.06	0.048	0.02
$C_{0\text{теор}},$ мг/дм ³	0.013	0.026	0.046	0.10	0.11	0.0115	0.096	0.067	0.043	0.023

Таблица 5.14

Значения остаточной концентрации C_0 ферромагнитных примесей для
 $v_{\text{жн}} = 0.025$ м/с

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$C_{0\text{экс}},$ мг/дм ³	0.05	0.14	0.23	0.35	0.35	0.34	0.32	0.28	0.2	0.11	0.06
$C_{0\text{теор}},$ мг/дм ³	0.05	0.1	0.2	0.38	0.4	0.38	0.33	0.25	0.15	0.09	0.04

Таблица 5.15

Значения остаточной концентрации C_0 ферромагнитных примесей для $v_{\text{жн}} = 0.05$ м/с

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$C_{0\text{экс}},$ мг/дм ³	0.10	0.23	0.33	0.37	0.42	0.43	0.30	0.24	0.17	0.08	0.04
$C_{0\text{теор}},$ мг/дм ³	0.11	0.22	0.33	0.47	0.46	0.45	0.39	0.33	0.20	0.12	0.05

Результаты оценок адекватности теоретических к экспериментальным данным сведены в таблицу 5.16.

Из содержания таблицы 5.16 следует $F > F_T$ для каждой зависимости семейства характеристик на рисунке 5.16, то по критерию Фишера разработанная математическая модель магнитной коагуляции в магнитных сепараторах адекватно моделирует реальный процесс при уровне значимости 5%.

Таблица 5.16

Оценка адекватности математической модели по критерию Фишера

Тип характеристики	Число сравниваемых точек	Критерий Фишера F	Предельное значение F_T , при 5% уровне значимости
$v_{\text{жн}} = 0.001$ м/с	10	4.44	4.02
$v_{\text{жн}} = 0.025$ м/с	11	14	3.7
$v_{\text{жн}} = 0.05$ м/с	11	7	3.7

На основе разработанной математической модели магнитной коагуляции ферромагнитных примесей в магнитных сепараторах и алгоритма расчета (см. рисунок 5.15) проведен вычислительный эксперимент для сепаратора на неодим-боровых магнитах, характеристика степени очистки которого соответствует рисункам 4.14 и 4.17 при $d_{\text{ш}} = 0$. Результаты расчетов для двух ВТЖ со следующими дисперсными распределениями ферропримесей ($\bar{d}_{\text{и}} = 1$ мкм, $\sigma = 0.33$ мкм и $\bar{d}_{\text{и}} = 4.5$ мкм, $\sigma = 1.5$ мкм) представлены на рисунке 5.17.

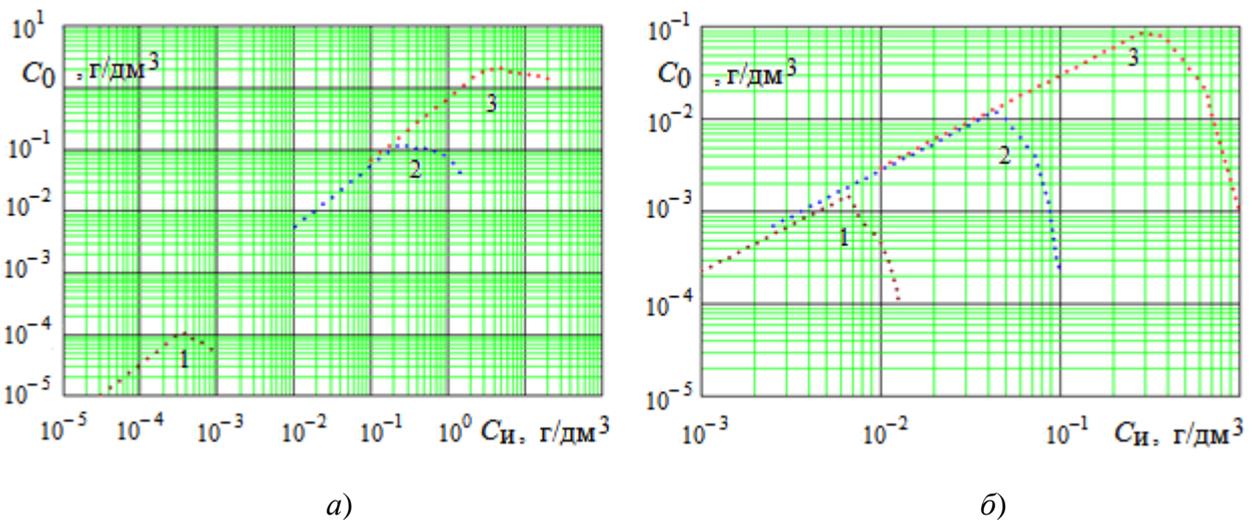


Рисунок 5.17 – Теоретические зависимости остаточной концентрации C_0 ферромагнитных примесей в очищенной ВТЖ в зависимости от концентрации примесей $C_{\text{и}}$ в исходной ВТЖ для сепаратора на неодим-боровых магнитах: *а* – при $\bar{d}_{\text{и}} = 1$ мкм, где 1, 2, 3 – соответственно при $v_{\text{жн}} = 0.001; 0.01; 0.025$ м/с; *б* – при $\bar{d}_{\text{и}} = 4.5$ мкм, где 1, 2, 3 – соответственно для $v_{\text{жн}} = 0.05; 0.1; 0.2$ м/с

Из семейств графических зависимостей, показанных на рисунках 5.16 и 5.17, следует, что с увеличением концентрации ферропримесей $C_{\text{и}}$ в исходной

ВТЖ, начиная с некоторых критических значений $C_{икр}$ (как предсказывает теория и подтверждает эксперимент), остаточная концентрация C_0 ферромагнитных примесей в очищенной ВТЖ уменьшается с ростом $C_{и}$. Это обстоятельство следует учитывать в практике эксплуатации магнитных сепараторов.

5.5. Выводы

1. Решена задача математического моделирования взаимодействия между намагниченными во внешнем поле ферромагнитными частицами. При этом впервые учитывается анизотропный характер взаимодействия, обусловленный продольными силами притяжения и взаимно отталкивающими поперечными силами относительно магнитных линий внешнего поля. Анизотропный характер диполь-дипольного взаимодействия использован для моделирования вероятностных функций распределения дисперсного состава агрегатов при бинарном слиянии ферромагнитных частиц.

2. Обоснован новый подход математического моделирования магнитной коагуляции. Для определения стохастических характеристик коагуляции вместо ДУ М. Смолуховского в основе методологии моделирования заложена математическая операция свертка вероятностных функций, на базе которой также впервые реализован универсальный оператор преобразования вероятностных характеристик распределения дисперсного состава ферромагнитных частиц при магнитной коагуляции (утв. 5.1).

3. Учитывая специфические свойства процесса магнитной коагуляции, раскрыта сущность стохастического процесса магнитной коагуляции – обусловлена двумя независимыми случайными величинами (утв. 5.2), которые характеризуют количество, возможных к объединению пар феррочастиц с одинаковой результирующей массой.

4. Разработан метод математического моделирования магнитной коагуляции, состоящий из четырех этапов. На первом этапе проводится математическое моделирование вероятности бинарного слияния феррочастиц для частного дискретного исходного распределения. На втором этапе разработан синтез дискретной весовой

функции магнитной коагуляции (утв. 5.4). На третьем этапе разработан переход к непрерывной весовой функции на основе теоремы отсчетов В. А. Котельникова (утв. 5.5). Если в теории В. А. Котельникова интервал дискретизации определялся по исходным непрерывным функциям, то в настоящем исследовании функция распределения дисперсного состава ферропримесей при коагуляции является объектом поиска. Поэтому изменен традиционный подход к определению параметров дискретизации непрерывных функций для задачи магнитной коагуляции. Параметры дискретизации выражены через введенный на основе фундаментального закона сохранения массы критерий интенсивности магнитной коагуляции, названный коэффициентом глубины магнитной коагуляции (утв. 5.3, 5.6 и 5.7).

Таким образом, разработанная математическая модель магнитной коагуляции разделяется на две составляющие: на концептуальную и техническую составляющие. Концептуальная составляющая описывает трансформацию распределения дисперсного состава ферромагнитных примесей в зависимости от коэффициента глубины магнитной коагуляции. При этом изменение во времени распределения дисперсного состава феррочастиц сводится к задаче изменения во времени коэффициента глубины коагуляции. Коэффициент глубины коагуляции определяется физико-геометрическими параметрами индивидуального сепаратора.

На четвертом этапе проведено определение коэффициента глубины магнитной коагуляции. Разработанная математическая модель коэффициента глубины коагуляции зависит от соотношений скоростей феррочастиц и потока ВТЖ, геометрических параметров сепаратора и параметров распределения дисперсного состава ферропримесей.

5. Разработаны алгоритм и метод математического моделирования характеристики глубины магнитной коагуляции непосредственно для магнитных сепараторов, а также методика расчета характеристик магнитной сепарации с учетом процессов магнитной коагуляции для магнитных сепараторов.

6. Правомерность методологии, эффективность методов математического моделирования и адекватность построенных моделей и методик расчета характеристик магнитной коагуляции подтверждены экспериментальными данными. Раз-

работанные математические модели магнитной коагуляции адекватно моделируют распределения дисперсного состава ферромагнитных примесей по критерию Фишера со степенью риска не более 5%, а также зависимости, характеризующие влияние магнитной коагуляции на активацию процесса магнитной сепарации, по критерию Фишера со степенью риска тоже не более 5%.

7. На базе разработанных основ теории раскрыты характерные особенности процесса магнитной коагуляции в магнитных сепараторах:

– магнитная коагуляция появляется при определенных, критических значениях массовой концентрации ферромагнитных частиц $C_{икр}$ во взвеси, при превышении которых коэффициент глубины коагуляции γ_k начинает возрастать с увеличением их концентрации;

– с увеличением скорости потока ВТЖ увеличивается критическое значение массовой концентрации ферромагнитных частиц, при которой появляется процесс магнитной коагуляции;

– с уменьшением среднего размера феррочастиц в ВТЖ возрастает критическое значение массовой концентрации ферромагнитных частиц, при которой начинается магнитная коагуляция, а также увеличивается коэффициент глубины коагуляции, при котором достигается определенный уровень очистки ВТЖ от ферромагнитных примесей. Для снижения этих параметров нужно уменьшать скорость потока ВТЖ, при которой увеличивается глубина магнитной коагуляции.

9. Разработанную методологию математического моделирования распределения дисперсного состава ферромагнитных частиц взвеси при магнитной коагуляции рекомендуется применять для моделирования процесса коагуляции в гравитационных сепараторах, потому что гравитационное осаждение (как и магнитное осаждение) проходит с распределением скоростей движения дисперсных частиц в ВТЖ, в зависимости от их размеров.

10. Разработанные математические модели магнитной коагуляции и методика расчета коэффициента глубины магнитной коагуляции положены в основу теории применения магнитной коагуляции для решения задачи тонкой очистки ВТЖ от ферромагнитных частиц.

Глава 6. МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МАГНИТНЫХ СЕПАРАТОРОВ. РАСЧЕТ ПАТРОННЫХ МАГНИТНЫХ СЕПАРАТОРОВ

6.1. Математическая модель параметрической оптимизации конструктивных параметров сепаратора

6.1.1. Постановка задачи оптимизации и формирование целевой функции

Высокопроизводительные магнитные сепараторы могут содержать несколько тысяч постоянных магнитов, поэтому на себестоимость таких сепараторов существенный вклад вносит количество постоянных магнитов. При этом выполнение требований к качеству очищенной ВТЖ связано с выбором конструктивных параметров, режимов очистки и числа секций в многорядных сепараторах.

Ставится следующая параметрическая задача оптимизации: получение таких параметров (геометрических размеров одной ступени (кассеты) и числа ступеней), которые обеспечивают выполнение требований к качеству очищенной ВТЖ при наименьшем количестве постоянных магнитов заданного типоразмера. В такой постановке задачи общее количество магнитов в сепараторе q будет выступать критерием оптимизации.

Таким образом, математическая формулировка данной задачи оптимизации следующая:

– целевая функция в общем виде задается следующим образом:

$$q = q(a, N_0),$$

где a – расстояние между осями магнитов, м; N_0 – число ступеней.

На множестве (a, N_0) требуется найти такой элемент (a_0, N_{00}) , на котором $q(a_0, N_{00}) \rightarrow \min$ при следующих условиях:

$$C_{\text{вых}} \leq C_{\text{д}}; \quad Q = \text{const}; \quad v_{\text{жн}} = \text{const}; \quad l_{\text{я}} = \text{const},$$

где $C_{\text{вых}}$ – остаточная средняя массовая концентрация феррочастиц на выходе сепаратора без учета коагуляции, кг/м³; $C_{\text{д}}$ – допустимая норма массовой концен-

трации ферромагнитных примесей в очищенной ВТЖ (СОЖ), кг/м³; Q – производительность сепаратора, м³/с; $v_{\text{жн}}$ – скорость потока ВТЖ на входе сепаратора, м/с; $l_{\text{я}}$ – длина магнитного элемента магнитной системы, м.

Формируем целевую функцию. Общее количество магнитов в сепараторе в соответствии с рисунком 3.16 равно:

$$q = N_0 n_1 n_2, \quad (6.1)$$

где n_1 – число магнитов в продольной сборке; n_2 – число продольныхборок, расположенных в одной плоскости (число патронов в кассете).

Производительность сепаратора выражается формулой [123]:

$$Q = v_{\text{жн}} a l_{\text{я}} n_1 (n_2 - 1). \quad (6.2)$$

Тогда с учетом (6.1), (6.2) выражение целевой функции примет следующий вид:

$$g(a, N) = \frac{Q}{l_{\text{я}} v_{\text{жн}}} \left(\frac{N_0}{a} \right) + n_1 N_0 \cong \frac{Q}{l_{\text{я}} v_{\text{жн}}} \left(\frac{N_0}{a} \right), \quad (6.3)$$

так как $n_2 \gg 1$.

Минимизация целевой функции $g(a, N_0)$ сводится к процедуре поиска её условного экстремума.

6.1.2. Разработка условия, гарантирующего качество очистки ВТЖ

Для реализации процедуры минимизация целевой функции на основе поиска её условного экстремума, необходимо раскрыть зависимость от параметров конструкции сепаратора левой части условия $C_{\text{вых}} \leq C_{\text{д}}$, гарантирующего выполнение требований к качеству очищенной ВТЖ. Процессом магнитной коагуляции не учитываем в задаче параметрической оптимизации конструктивных параметров, так как процесс коагуляция регулируется режимом работы сепаратора.

В общем случае остаточная массовая концентрация ферромагнитных примесей на выходе сепаратора есть функция как конструктивных, так и технологических параметров: $C_{\text{вых}} = C_{\text{вых}}(a, N_0, d_{\text{ш}})$, где $d_{\text{ш}}$ – толщина слоя осадка феррочастиц, накапливаемых на патроне сепаратора, м. В соответствии с (4.115), (4.118) и (1.2) зависимость $C_{\text{вых}}(a, N_0, d_{\text{ш}})$ определяется семейством характеристик сте-

пени очистки $\varepsilon = \varepsilon(d_\phi) |_{d_{ш}}$.

Смоделированное в главе 4 семейство характеристик степени очистки аппроксимируем экспоненциальной функцией (4.104) по методике, предложенной в главе 2:

$$\varepsilon(d_\phi, d_{ш}, a) = 1 - e^{-h(d_{ш}, a)d_\phi}. \quad (6.4)$$

Модель (6.4) отражает существенные свойства семейства характеристик степени очистки и упрощает их на начальном участке, вносящем незначительный вклад в реализацию требований к качеству очищенной ВТЖ.

Используя развитый в главе 2 метод построения дифференциальной модели, функция $h(d_{ш}, a)$ аппроксимируется тоже экспоненциальным выражением

$$h(d_{ш}, a) = B_0(a)e^{-\gamma(a)d_{ш}} + B_1(a)d_{ш}; \quad (6.5)$$

Подставив (6.5) в (4.123) и учтя (4.122), получим коэффициент передачи первой ступени

$$\bar{\Pi}_1 = 1 - \int_0^\infty (1 - e^{-h_1 d_\phi}) f_{вх}(d_\phi) d(d_\phi) = \int_0^\infty e^{-h_1 d_\phi} f_{вх}(d_\phi) d(d_\phi). \quad (6.6)$$

Подставив (6.5) в (4.124), функция распределения частиц на выходе первой ступени сепаратора примет следующий вид:

$$f_1(d_\phi) = e^{-h_1 d_\phi} f_{вх}(d_\phi) / \bar{\Pi}_1. \quad (6.7)$$

В формулах (6.6) и (6.7) $h_1 = h(d_{ш1}, a)$.

На основе выражений (6.4), (4.128) и (4.123) – (4.124) аналогичным образом получим для второй ступени выражения для определения $\bar{\Pi}_2$ и $f_2(d_\phi)$:

$$\bar{\Pi}_2 = 1 - \int_0^\infty (1 - e^{-h_2 d_\phi}) f_1(d_\phi) d(d_\phi) = \frac{1}{\bar{\Pi}_1} \int_0^\infty e^{-(h_1 + h_2)d_\phi} f_{вх}(d_\phi) d(d_\phi); \quad (6.8)$$

$$f_2(d_\phi) = e^{-h_2 d_\phi} f_1(d_\phi) / \bar{\Pi}_2 = e^{-(h_1 + h_2)d_\phi} f_{вх}(d_\phi) / \bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2, \quad (6.9)$$

где $h_2 = h(d_{ш2}, a)$.

И для последней ступени сепаратора имеем соответственно

$$\bar{\Pi}_N = \frac{1}{\prod_{k=1}^{N_0-1} \bar{\Pi}_k} \int_0^\infty e^{-(\sum_{i=1}^{N_0} h_i)d_\phi} f_{вх}(d_\phi) d(d_\phi); \quad (6.10)$$

$$f_N(d_\phi) = e^{-h_N d_\phi} f_{N-1}(d_\phi) / \bar{\Pi}_N = e^{-(\sum_{v=1}^{N_0} h_v)d_\phi} f_{вх}(d_\phi) / \prod_{v=1}^{N_0} \bar{\Pi}_v, \quad (6.11)$$

где $h_N = h(d_{шN}, a)$.

Пусть распределение дисперсного состава феррочастиц $f_{ex}(d_\phi)$ в ВТЖ описывается нормально логарифмическим законом (4.107) с параметрами:

$\bar{d}_И = \bar{d}_{ВХ}$,
 $s = \ln\left(\frac{\sigma^2}{\bar{d}_{ВХ}^2} + 1\right) \cong \frac{\sigma^2}{\bar{d}_{ВХ}^2}$, при $\frac{\sigma^2}{\bar{d}_{ВХ}^2} \ll 1$, σ – среднеквадратичное отклонение размера ферромагнитных частиц. Подставив (4.107) в (6.6), преобразуем соответствующий интеграл к виду

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1 &= \int_0^\infty \frac{1}{s d_\phi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln d_\phi / \bar{d}_{ВХ})^2}{2s^2}} e^{-h_1 d_\phi} d(d_\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(y^2 + h_1 \bar{d}_{ВХ} e^{-\sqrt{2}sy})} dy \cong \\ &\cong \frac{e^{-h_1 \bar{d}_{ВХ}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-[y^2 + h_1 \bar{d}_{ВХ} \sqrt{2}sy]} dy, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $y = (\ln(d_\phi / \bar{d}_{ВХ})) / \sqrt{2}s$. Выражение (6.12) правомерно при выполнении условия

$$\sqrt{2}sy \leq 0.3. \quad (6.13)$$

В (6.12) интеграл $\int_{-\infty}^\infty e^{-[y^2 + h_1 \bar{d}_{ВХ} \sqrt{2}sy]} dy$ является табличным интегралом [145], равным $\sqrt{\pi} e^{\frac{(s h_1 \bar{d}_{ВХ})^2}{2}}$. Таким образом, (6.12) принимает следующий вид:

$$\bar{\Pi}_1 \cong e^{-h_1 \bar{d}_{ВХ} \left[1 - \frac{h_1 \bar{d}_{ВХ} \cdot s^2}{2}\right]}. \quad (6.14)$$

Заметим, что типовые реальные распределения дисперсного состава ферромагнитных частиц в ВТЖ характеризуются значением $\sigma \leq \sigma_0 = 0.5$, то для всех значений y , которые противоречат условию правомерности (6.13), функция $e^{-y^2} \leq e^{-(0.3/\sqrt{2}\sigma_0)^2} \approx 0.1$ является исчезающе малой. Поэтому формула (6.12) правомерна практически для всех рассматриваемых распределений ферромагнитных частиц в ВТЖ.

Аналогичным образом выполняется интегрирование (6.10), поэтому в соответствии с (6.14) имеем

$$\bar{\Pi}_N \cong \frac{1}{\prod_{k=1}^{N_0-1} \bar{\Pi}_k} e^{-\bar{d}_{ВХ} (\sum_{\nu=1}^{N_0} h_\nu) \left[1 - \frac{(\sum_{\nu=1}^{N_0} h_\nu) \bar{d}_{ВХ} \cdot s^2}{2}\right]}. \quad (6.15)$$

При $\frac{\sigma^2}{\bar{d}_{ВХ}^2} \ll 1$ в (6.14) – (6.15) вторым слагаемым в показателях степени можно пренебречь.

В дальнейшем будем иметь дело с упрощенным выражением

$$\bar{L}_N \cong \frac{1}{\prod_{v=1}^{N_0-1} \bar{L}_k} e^{-\bar{a}_{\text{вх}}(\sum_{v=1}^{N_0} h_v)}. \quad (6.16)$$

6.1.3. Определение оптимальных конструктивных параметров сепаратора

На магнитах первой ступени сепарации толщина осажденного слоя феррочастиц $d_{\text{ш1}}$ наибольшая, поэтому оценим влияние толщины $d_{\text{ш1}}$ на скорость осаждения примесей в последующих ступенях. Если исходная скорость поступления массы ферромагнитных примесей в единицу объема ВТЖ на вход первой ступени равна произведению $QC_{\text{вх}}$, кг/с, то скорость по массе выпадения феррочастиц в осадок в первой ступени, с учетом (4.122) и (6.16), определяется следующим выражением:

$$m_{i1} = QC_{\text{вх}} \bar{\varepsilon}_1 \cong QC_{\text{вх}} (1 - e^{-h_1 \bar{a}_{\text{вх}}}). \quad (6.17)$$

Аналогично, с учетом (6.4), (6.6) и (6.7), скорости по массе выпадения феррочастиц в осадок во второй, в третьей и в k -ой ступенях соответственно равны:

$$m_{i2} = QC_1 \bar{\varepsilon}_2 = QC_{\text{вх}} \bar{L}_1 \bar{\varepsilon}_2 = QC_{\text{вх}} (\bar{L}_1 - \overline{\bar{L}_1 \bar{L}_2}); \quad (6.18)$$

$$m_{i3} = QC_{\text{вх}} (\bar{L}_1 \bar{L}_2 - \overline{\bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{L}_3}); \quad (6.19)$$

$$m_{ik} = QC_{\text{вх}} (\prod_{v=1}^{k-1} \bar{L}_v - \prod_{v=1}^k \bar{L}_v) = QC_{\text{вх}} (1 - e^{-h_k \bar{a}_{\text{вх}}}) e^{-\bar{a}_{\text{вх}}(\sum_{v=1}^{k-1} h_v)}, \quad (6.20)$$

где выражение (6.20) получено на основе (6.16), кг/с.

В (6.17) зависимость $h_1 = h(d_{\text{ш1}}, a)$ задается математической моделью (6.5). При этом, например, характерная зависимость $m_{i1}(d_{\text{ш}})$ для неодим-железо-борового магнита иллюстрируется рисунком 6.1, а. Из этого рисунка следует, что существует предельная толщина $d_{\text{шпр}}$ осадка феррочастиц, так как при $d_{\text{ш}} \geq d_{\text{шпр}}$ лавинообразно уменьшается скорость осаждения ферромагнитных частиц на магниты.

Таким образом, в режиме работы при $d_{\text{ш}} < d_{\text{шпр}}$ процесс сепарации проходит приблизительно с одинаковой скоростью, которая близка к скорости осаждения m_{i0} в начальный момент этого процесса, когда $d_{\text{ш1}} = 0$ (см. рисунок 6.1, а). Тогда, положив $d_{\text{ш}} = 0$, выражение (4.118), с учетом (1.2), (6.4), (6.15) и (6.16), принимает следующий вид:

$$C_{\text{ВЫХ}} \cong C_{\text{ВХ}} e^{-\bar{d}_{\text{ВХ}} N_0 B_0(a)}. \quad (6.21)$$

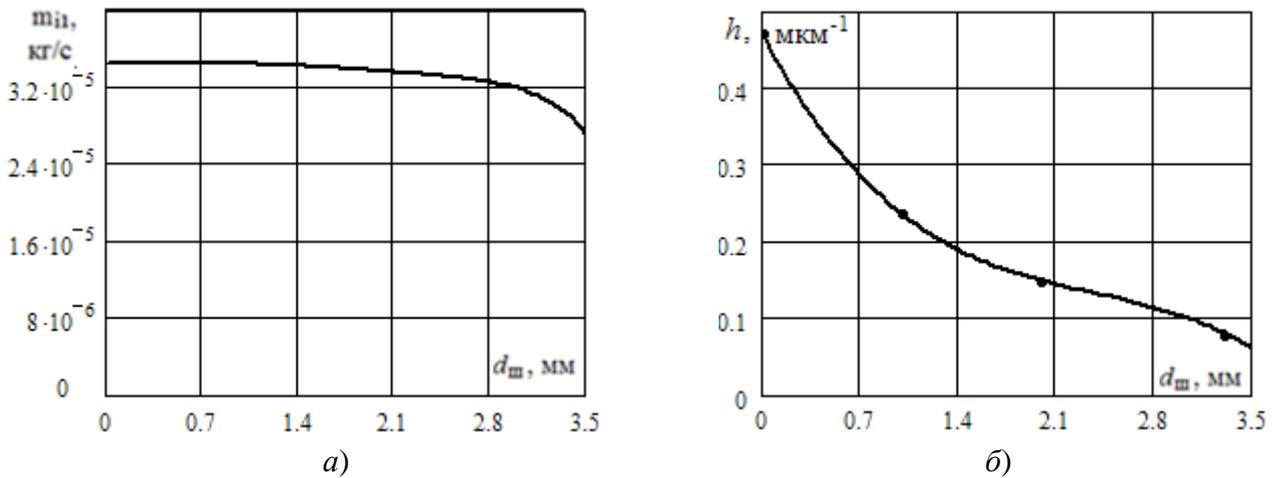


Рисунок 6.1 – Зависимость скорости накопления осадка ферромагнитных частиц на патроне (а); зависимость показателя аппроксимации функции $\varepsilon(d_{\phi}, d_{\text{ш}}, a)$ от толщины слоя осадка ферромагнитных частиц (б); для $a = 0.048$ м

Проводим исследование уравнений (6.3) и $C_{\text{ВЫХ}}(a, N_0) \leq C_{\text{д}} = \text{const}$ на условный экстремум, применяя метод множителей Лагранжа [63]. Система уравнений Лагранжа принимает следующий вид:

$$\frac{\partial g}{\partial N_0} + \mu \frac{\partial C_{\text{ВЫХ}}}{\partial N_0} \leq 0; \quad \frac{\partial g}{\partial a} + \mu \frac{\partial C_{\text{ВЫХ}}}{\partial a} \leq 0, \quad (6.22)$$

где μ – неопределенный постоянный множитель. Раскрыв частные производные и подставив $C_{\text{ВЫХ}} = C_{\text{д}}$ в (6.21), где $C_{\text{д}}$ – допустимое значение концентрации ферропримесей в очищенной ВТЖ, получим:

$$\frac{\partial C_{\text{ВЫХ}}}{\partial a} = -\bar{d}_{\text{ВХ}} N_0 C_{\text{д}} \frac{\partial B_0(a)}{\partial a}; \quad \frac{\partial C_{\text{ВЫХ}}}{\partial N_0} = -\bar{d}_{\text{ВХ}} C_{\text{д}} B_0(a); \quad \frac{\partial g}{\partial N_0} = \frac{Q}{a \cdot l_1 v_{\text{ЖН}}}; \quad \frac{\partial g}{\partial a} = -\frac{Q N_0}{a^2 l_1 v_{\text{ЖН}}}. \quad (6.23)$$

Исключив μ из (6.22) и (6.23), приходим к уравнению

$$a \frac{\partial B_0(a)}{\partial a} + B_0(a) = 0. \quad (6.24)$$

Из уравнения (6.24), получим оптимальное значение расстояния между осями постоянных магнитов:

$$a_0 = -B_0(a_0) \left[\frac{\partial B_0(a)}{\partial a} \right]^{-1}. \quad (6.25)$$

Отметим, что значение a_0 определяется аппроксимационной зависимостью

$B_0(a)$, которая в свою очередь получается из зависимости $\varepsilon(d_\phi, a)$, а последняя определяется типоразмером постоянного магнита. Таким образом, значение a_0 определяется типоразмером постоянного магнита.

Число ступеней N_0 определим из условия удовлетворения допустимого уровня очистки ВТЖ согласно условия $C_{\text{вых}} \leq C_d$ при предельном значении толщины слоя феррошлама $d_{\text{ш1}} = d_{\text{шпр}}$. Толщину осадка феррочастиц на патронах остальных ступенях вычислим из условия практически постоянной скорости осаждения в рабочем режиме сепаратора следующим образом:

$$d_{\text{ш}k} = \frac{m'_{ik} \tilde{t}_c}{2\pi R_0 l_1 \rho_{\text{ш}}} = D_0 m'_{ik} \tilde{t}_c, \quad (6.26)$$

где $\rho_{\text{ш}}$ – массовая плотность шлама, кг/м³; R_0 – наружный диаметр патрона без осадка феррошлама, м; \tilde{t}_c – оценочное время сепарации, равное $\tilde{t}_c = d_{\text{шпр}}/D_0 m_{i0}$, с. В (6.26) $m'_{ik} = \text{const}$ ($k = 1, 2, 3 \dots, N_0$), которые в соответствии с (6.20) при $d_{\text{ш}k} = 0$ и $h = h(0)$ примут следующий вид:

$$m'_{ik} = Q C_{\text{вх}} (1 - e^{-h(0)\bar{d}_{\text{вх}}}) e^{-(k-1)h(0)\bar{d}_{\text{вх}}}. \quad (6.27)$$

Подставив (6.27) в (6.26), получим

$$d_{\text{ш}k} = D_0 t_c Q C_{\text{вх}} (1 - e^{-h(0)\bar{d}_{\text{вх}}}) e^{-(k-1)h(0)\bar{d}_{\text{вх}}} = d_{\text{шпр}} e^{-(k-1)h(0)\bar{d}_{\text{вх}}}. \quad (6.28)$$

Подставив (6.28) в равенство $C_{\text{вых}} = C_d$, вычислим показатель степени экспоненциальной функции

$$\bar{d}_{\text{вх}} (B_1(a) \sum_{k=1}^{N_0} d_{\text{ш}k} + B_0(a) \sum_{k=1}^{N_0} e^{-\gamma(a)d_{\text{ш}k}}) = \ln \frac{C_{\text{вх}}}{C_d}. \quad (6.29)$$

В (6.29), с учетом (6.28), сумма первого слагаемого представляет собой сумму геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{N_0} d_{\text{ш}k} = d_{\text{шпр}} \sum_{k=1}^{N_0} e^{-(k-1)h(0)\bar{d}_{\text{вх}}} = d_{\text{шпр}} \frac{1 - e^{-N_0 h(0)\bar{d}_{\text{вх}}}}{1 - e^{-h(0)\bar{d}_{\text{вх}}}}. \quad (6.30)$$

Сумма второго слагаемого в (6.29) с учетом (6.28)

$$\sum_{k=1}^{N_0} e^{-\gamma(a)d_{\text{ш}k}} = e^{-\gamma(a)d_{\text{шпр}}} + e^{-\gamma(a)d_{\text{шпр}} e^{-h(0)\bar{d}_{\text{вх}}}} + \dots + e^{-\gamma(a)d_{\text{шпр}} e^{-(N_0-1)h(0)\bar{d}_{\text{вх}}}}. \quad (6.31)$$

Когда $\gamma(a)d_{\text{шпр}}e^{-h(0)\bar{d}_{\text{вх}}} \ll 1$, то $N_0h(0)\bar{d}_{\text{вх}} > 1.5$ и $N_0 > 1$;

$$\sum_{k=1}^{N_0} e^{-\gamma(a)d_{\text{шк}}} \cong N_0 - 1; \quad \sum_{k=1}^{N_0} d_{\text{шк}} \cong d_{\text{шпр}}. \quad (6.32)$$

Подставив (6.32) в (6.29), получим

$$\bar{d}_{\text{вх}} \left(B_1(a)d_{\text{шпр}} + B_0(a)(N_0 - 1) \right) \cong \ln \frac{C_{\text{вх}}}{C_{\text{д}}}. \quad (6.33)$$

Из (6.33) определяется минимальное число ступеней

$$N_{00} \cong \frac{1}{B_0(a)} \left[\frac{\ln \frac{C_{\text{вх}}}{C_{\text{д}}}}{\bar{d}_{\text{вх}}} - B_1(a)d_{\text{шпр}} \right] + 1, \quad (6.34)$$

где a , м; $d_{\text{шпр}}$, мм; $\bar{d}_{\text{вх}}$, мкм.

Таким образом, разработана методика оптимизации конструктивных параметров патронных магнитных сепараторов и получены практические формулы, по которым при заданном типоразмере постоянного магнита определяются оптимальные конструктивные параметры сепаратора.

Рассмотрим математическую модель времени цикла накопления осадка феррочастиц на патронах магнитного сепаратора.

При моделировании используем следующий очевидный принцип: скорость выпадения в осадок феррочастиц из исходной ВТЖ должна быть равна скорости накопления осадка феррошлама на патронах. Обе скорости обозначим общим символом m_i .

Скорость выпадения в осадок феррочастиц из исходной ВТЖ в первой секции сепаратора можно определить следующим образом. Если исходная скорость поступления массы ферропримесей на вход секции равна произведению $Q_1 C_{\text{и}}$, то, раскрывая (6.17), получим выражение для расчета скорости выпадения осадка ферропримесей по массе

$$m_i = Q C_{\text{и}} \int_0^{\infty} f(d_{\phi}) \varepsilon(d_{\phi}, d_{\text{ш}}) d(d_{\phi}). \quad (6.35)$$

Скорость накопления осадка ферромагнитного шлама на патронах ступени

$$m_i = n_2 \rho_{\text{ш}} \frac{dV_{\text{ш}}}{dt} = 2\pi n_2 R_0 l_{\text{п}} \rho_{\text{ш}} \frac{d(d_{\text{ш}})}{dt}, \quad (6.36)$$

где n_2 – число патронов в ступени, $V_{ш}$ – объем шлама на одном патроне, м³; $l_{п}$ – длина патрона, м.

Время накопления осадка феррошлама определим из выражений (6.35) и (6.36):

$$t(d_{ш}) = \frac{2\pi R_0 l \rho_{ш}}{Q C_{и}} \int_0^{d_{ш}} \frac{d(d_{ш})}{\int_0^{\infty} f(d_{\phi}) \varepsilon(d_{\phi}, d_{ш}) d(d_{\phi})}. \quad (6.37)$$

Время цикла $t_{ц}$ магнитной сепарации определим по формуле (6.37) из условия

$$t_{ц} = t(d_{шпр}), \quad (6.38)$$

где $d_{шпр}$ – предельное значение толщины пленки шлама.

6.2. Научно-обоснованная методика расчета эффективных патронных магнитных сепараторов и их экспериментальные исследования

Конструктивные параметры ПМС, режим очистки, количество ступеней, время непрерывной очистки до регенерации рассчитываются, исходя из условия обеспечения требуемых ГОСТ Р 50815, концентрации и крупности механических примесей в очищенной ВТЖ и производительности ПМС [36].

Исходными данными являются:

- 1) максимально допустимая остаточная концентрация механических примесей в очищенной ВТЖ $C_{вых} = C_0$, мг/дм³;
- 2) концентрация механических примесей в исходной (загрязненной) ВТЖ $C_{вх} = C_{и}$, мг/дм³;
- 3) средний размер феррочастиц в исходной ВТЖ $\bar{d}_{вх} = \bar{d}_{и}$, мкм;
- 4) среднее квадратическое отклонение размеров частиц в исходной ВТЖ от их среднего арифметического значения σ , мкм;
- 5) производительность очистки Q , м³/с;
- 6) состав ВТЖ и ее характеристики:
 - коэффициент динамической вязкости η , Па·с, и его зависимость от температуры;
 - рабочая температура T , °С;
 - допустимая концентрация частиц $C_{д}$ мг/дм³;
 - толщина гидратной оболочки поверхности частиц $h_{г}$ (определяется эмпи-

рическим методом), мкм;

7) состав и свойства механических примесей:

– содержание ферромагнитной C_m и абразивной C_a компонент, %;

– магнитная восприимчивость частиц χ_f .

На первом этапе выбирают тип материала постоянных магнитов и при выбранных геометрических параметрах постоянного магнита (таблица 1.1) рассчитывают параметры его магнитной схемы замещения по формулам главы 3:

$$r_m = \frac{H_{сВ}}{Br \cdot \pi \cdot (R_0^2 - R_{00}^2)}, \quad \gamma = \sqrt{2 \cdot r_m \cdot g_s}, \quad g_s = g_{\text{снар}} + g_{\text{свнут}}. \quad \text{Для } \frac{l}{R_0} < 1, \quad g_{\text{снар}} = \frac{\pi^2 \cdot \mu_0 \cdot 2 \cdot r_0}{l};$$

$$g_{\text{свнут}} = 2\pi\mu_0 \left(\frac{r_{00}}{l}\right)^2. \quad \text{При этом: } g_s = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ Гн/м; } F_3 = \frac{2H_{сВ}}{\gamma} \text{ th } \frac{\gamma l}{2}, \quad R_{m3}$$

$$= \frac{2r_m}{\gamma} \text{ th } \frac{\gamma l}{2}, \quad U_m = F_{m3} - R_{m3} \Phi_0, \quad H_0 = \Phi_0 R_{m3} / l \text{ м.}$$

Магнитный поток Φ_0 рассчитывают по программе в тестовом режиме (рисунок 3.17). Результаты расчета магнитных параметров постоянных магнитов из Nd-Fe-B и наилучшего из феррито-бариевых материалов ($BrO_6Fe_2O_3$) представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

К расчету магнитных параметров постоянных магнитов

Тип материала	$H_{сВ}$, А/м	B_r , Тл	r_m , (Гн м) ⁻¹	γ , м ⁻¹	F_{m3} , А	R_{m3} , Гн ⁻¹	Φ_0 , Вб	H_0 , А/м	F_0 , А
Nd-Fe-B	$9 \cdot 10^5$	1,27	$2,1 \cdot 10^9$	$3,6 \cdot 10^2$	4940	$1,15 \cdot 10^7$	$3,610^{-5}$	$3 \cdot 10^4$	167
BrO_6 Fe_2O_3	$2,2 \cdot 10^5$	0,35	$1,6 \cdot 10^9$	$3,1 \cdot 10^2$	1350	$0,99 \cdot 10^7$	$1,2510^{-5}$	$0,9 \cdot 10^4$	57

На следующих этапах проводится расчет распределения магнитных сил и их аппроксимация, расчет многопараметрического семейства характеристик степени очистки и аппроксимация этого семейства, на основе которого проводится определение оптимальных конструктивных параметров магнитного сепаратора в соответствии с выражениями (6.25) и (6.34). Общим алгоритм расчета магнитного сепаратора представлен на рисунке 6.2. Режим коагуляции в нем управляется

уменьшением $v_{жн}$.

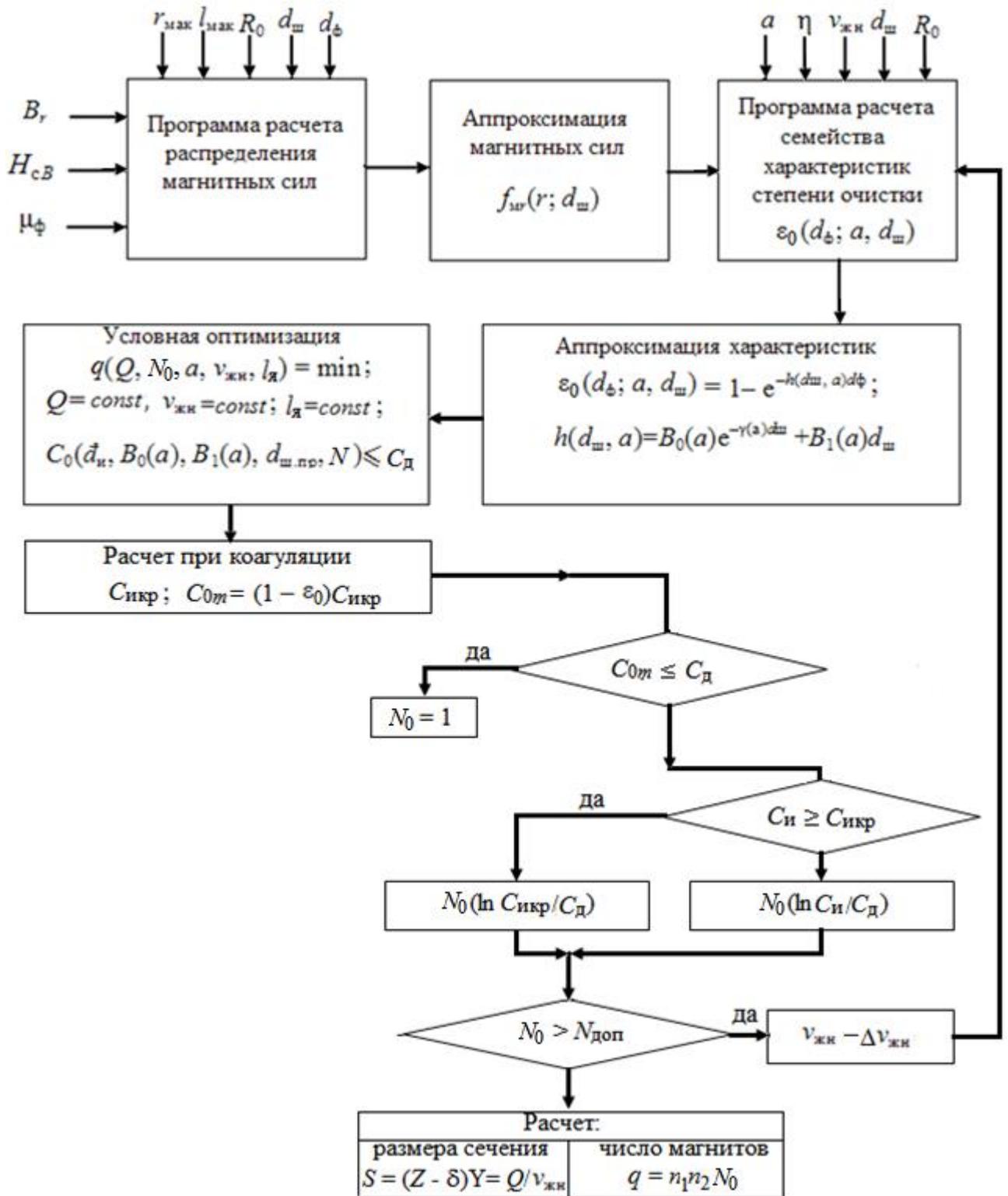


Рисунок 6.2 – Структурная схема расчета магнитного сепаратора:

B_r – остаточная магнитная индукция и $H_{св}$ – коэрцитивная сила материала постоянного магнита; μ_ϕ – относительная магнитная проницаемость материала ферромагнитных частиц; r – радиальная координата; r_{\max} , l_{\max} – максимальные (радиальная и аксиальная) координаты области моделирования распределения поля; R_0 – радиус патрона без ферромагнитного шлама; $d_{ш}$ – толщина слоя ферромагнитного шлама на поверхности патрона; a – расстояние между осями магнитов;

d_{ϕ} – диаметр ферромагнитной частицы; η – коэффициент динамической вязкости жидкой среды (ВТЖ); $v_{\text{жн}}$ – начальная скоростью течения ВТЖ; $f_{\text{Mr}}(r, d_{\text{ш}}, d_{\phi})$ – зависимость магнитной силы от радиальной координаты при разных значениях $d_{\text{ш}}$ и d_{ϕ} ; $\varepsilon(d_{\phi}; a, d_{\text{ш}})$ – зависимость степени очистки от размера d_{ϕ} ферромагнитных частиц при разных значениях a и $d_{\text{ш}}$; $B_0(a)$, $B_1(a)$, $\gamma(a)$ – аппроксимационные зависимости, обуславливаемые типом и материалом постоянного магнита; Q – производительность сепаратора; l_1 – высота магнитного элемента; q – общее количество магнитов в сепараторе; N_0 – количество ступеней; $C_{\text{и}}$ – исходная средняя массовая концентрация ферромагнитных частиц в ВТЖ; $C_{\text{д}}$ – допустимая норма средней массовой концентрации ферромагнитных частиц в ВТЖ; C_0 – остаточная концентрация ферромагнитных частиц в очищенной ВТЖ; $\bar{d}_{\text{и}}$ – средний диаметр ферромагнитных частиц при полидисперсном распределении; $d_{\text{шпр}}$ – среднее предельное значение толщины слоя ферромагнитного шлама, осажденного на поверхность патронов.

На втором этапе проводят расчет распределения напряженности магнитного поля в ячейке магнитного сепаратора по программе для разных толщин слоя феррошлама по методике, описанной в пункте 3.3.1. Исходные данные заносятся в окно программы (рисунок П.1.2).

На третьем этапе проводят обработку результатов распределения напряженности магнитного поля по методике главы 3 и формулам (3.65), (3.66):

$$\lg \bar{H}_{\text{м}} = q_1 - q_2 \cdot d_{\text{ш}} + q_3 \cdot e^{-q_4 \cdot d_{\text{ш}}},$$

где $d_{\text{ш}}$ в метрах, $\bar{H}_{\text{м}}$ в А/м. Для Nd-Fe-B магнита с параметрами из таблицы 6.1 получим:

$$q_1 = 4,5 \text{ м}^{-1}; q_2 = 41,7; q_3 = 1,16; q_4 = 500 \text{ м}^{-1}. \quad (6.39)$$

$$\alpha_1 = \frac{\lg \frac{H_{\text{м}}}{H(R_{\text{к}})}}{R_{\text{к}} - R} = 81, \text{ м}^{-1}; \text{ где } R = R_0 + d_{\text{ш}}, \quad R_{\text{к}} = (1,5 - 2)R_0.$$

Параметры аппроксимации (6.39) подставляют в программу (рисунок П.5.1) для расчета семейства зависимостей степени очистки $\varepsilon(d)$ при разных $d_{\text{ш}}$.

Результаты расчетов выводят в графической (рисунок 3.14, для $\eta=0.001$ Па·с, $v_{\text{жн}}=0.03$ м/с) и в табличной формах (приложение 6).

Рассчитанные многопараметрические семейства характеристик аппроксимируют экспоненциальным выражением (6.4), (6.5).

На четвертом этапе проводят расчет оптимальных конструктивных параметров сепаратора по выражениям (6.25) и (6.34) с учетом (6.4) и (6.5).

На пятом этапе проводят уточнение числа ступеней с учетом процессов магнитной коагуляции.

Определяют критическую концентрацию ферропримесей $C_{икр}$ в исходной ВТЖ, которой соответствует максимальное значение остаточной концентрации $C_{от}$ ферропримесей в очищенной ВТЖ, обусловленной процессом магнитной коагуляции (см. рисунок 5.17). Значение $C_{икр}$ вычисляют по зависимости (5.105) при условии $\bar{\gamma}_k \geq 1$. При этом средняя степень очистки $\bar{\epsilon}_0$ определяют по формуле (1.2), а $C_{от}$ по формуле (6.41):

$$C_{от} = C_{икр}(1 - \bar{\epsilon}_0). \quad (6.41)$$

При $C_{от} \leq C_d$ число ступеней $N_0 = 1$.

При $C_{от} > C_d$ и $C_{и} \geq C_{икр}$ количество ступеней определяют формулой

$$N_{00} \cong \frac{1}{B_0(a)} \left[\frac{\ln \frac{C_{икр}}{C_d}}{\bar{a}_{и}} - B_1(a)d_{шпр} \right] + 1. \quad (6.42)$$

При $C_{от} \geq C_d$ и $C_{икр} \geq C_{и}$ количество ступеней определяют формулой (6.34).

Если N_{00} относительно велико, тогда, управляя режимом коагуляции уменьшением скорости потока $v_{жн}$, проводят перерасчет сепаратора, начиная с третьего этапа (рисунок 6.2).

На шестом этапе проводят расчет числа постоянных магнитов по следующей формуле, полученной по зависимостям (6.1) – (6.3) и рисунку 3.16:

$$q = N_{00} \left[n_1 + n_2 \frac{k_d \delta}{l_{я}} + \left(\frac{Q}{v_{жн} a} - \delta \right) \frac{k_d}{l_{я}} \right], \quad (6.43)$$

где k_d – число магнитов в элементе сепарации, равное 1 или 2; $l_{я}$ – длина ячейки сепарации, м; δ – толщина пограничного слоя на плоской стенке сепаратора, м, которое определяется следующим образом [201]:

$$\delta = \frac{5X}{\sqrt{Re_X}} = 5 \sqrt{\frac{\eta X}{v_{жн} \rho_0}}. \quad (6.44)$$

В (6.44) Re_X – число Рейнольдса; X – размер сепаратора в направлении потока, м; η – коэффициент динамической вязкости ВТЖ. Здесь имеет место формула

$$X = (N_{00} - 1)a + 2R_0, \quad (6.45)$$

где R_0 – наружный радиус патрона, м.

Количество магнитов n_1 и n_2 связаны по рисунку 3.16 с соответствующими габаритными размерами поперечного сечения сепаратора следующими выражениями:

$$n_1 = \frac{k_d}{l_{\text{я}}} Z; \quad n_2 = 1 + \frac{Y}{a}, \quad (6.46)$$

где Z – длина патрона сепаратора, м; Y – ширина сечения сепаратора, м. При этом эффективная площадь сечения сепаратора равна

$$S_{\text{эф}} = (Z - \delta)Y \geq \frac{Q}{v_{\text{жн}}}. \quad (6.47)$$

Время сепарации $t_{\text{ц}}$ определяют по выражениям (6.37) и (6.38).

Таким образом, предложена методика расчета патронного магнитного сепаратора, в которой впервые учтены влияния следующих факторов: процесса магнитной коагуляции, накопление слоя ферромагнитных частиц на поверхности магнитной системы и оптимальные конструктивные параметры сепаратора.

Для подтверждения адекватности разработанных математических моделей, (4.13), (4.56), (4.103), (4.118) проводим сопоставление расчетных с эмпирическими зависимостями. Последние получены экспериментальным путем по методикам, изложенным в [12, 123].

Сущность экспериментов заключалась в проведении процесса очистки ВТЖ, загрязненных механическими примесями, и оценке концентрации и параметров гранулометрического состава примесей в ВТЖ до и после очистки с последующей оценкой критериев эффективности. При проведении экспериментов задавали конструктивные параметры ПМС в сочетании с режимом очистки.

В качестве ВТЖ использовали водную синтетическую (СОЖ-1) и водоземлемую (СОЖ-2) жидкости [175].

При опытах СОЖ загрязняли промытым, высушенным и мелкоизмельченным шламом, полученным при абразивной обработке ($\bar{d}_{\text{ш}} = 2.5$ мкм, $\sigma = 0,83$ мкм). Гранулометрический состав механических примесей $f_i(d_i)$ оценивали фотоседиментационным методом [175] и выполняли на фотоколориметре-нефелометре ФЭК-56М4. Коэффициент динамической вязкости исследуемых ВТЖ измеряли с по-

мощью вискозиметра ВАЖ-2 (ГОСТ 10028) по стандартной методике. Содержание феррошлама в ВТЖ $C_{ш}$ оценивали при анализе проб суспензии, взятой на входе в очистную систему и после нее, по методике, изложенной в работе [12].

В ходе экспериментальных исследований варьировали: скоростью движения ВТЖ в сепараторе $v_{жн}$ от 0,0025 до 0,1 м/с, напряженностью магнитного поля H посредством использования постоянных магнитов из разного магнитотвердого материала (таблица 6.1), концентрацией $C_{и}$ в очищаемой ВТЖ от 10 мг/дм³ до 500 мг/дм³, расстоянием между поверхностями соседних патронов b , числом секций N_0 . Эффективность очистки оценивали величиной значений критериев эффективности $\bar{\epsilon}$, C_0 , $\bar{d}_{и}$, σ . При этом $\bar{\epsilon}$ определялась формулой (1.1).

На рисунках 6.3 – 6.5 представлено сопоставление экспериментальных усредненных из пяти опытов значений средней степени очистки $\langle \bar{\epsilon} \rangle$ с расчетными значениями $\bar{\epsilon}_p$, полученными по изложенной выше методике.

Адекватность разработанных математических моделей и методики расчета патронных магнитных сепараторов оценивалась сопоставлением экспериментальных и расчетных данных в таблице 6.2, соответствующих рисункам 6.3 и 6.4.

Таблица 6.2

Экспериментальный и расчетный массив значений средней степени очистки

$C_{и}$, мг/дм ³	200				500			
$v_{жн}$, м/с $\times 10^{-3}$	2.5	5	7.5	10	10	20	30	50
$\langle \bar{\epsilon} \rangle$	0.95	0.85	0.74	0.61	0.84	0.60	0.43	0.30
$\bar{\epsilon}_p$	0.92	0.82	0.69	0.62	0.83	0.59	0.42	0.29

Из данных таблицы 6.2 расчетное значение критерия $F = 41$, которое больше табличного значения $F_T = 4.3$ (при уровне значимости 2.5%), поэтому по критерию Фишера разработанная математическая модель средней степени очистки адекватно моделирует реальный процесс очистки ВТЖ от ферромагнитных примесей патронными магнитными сепараторами.

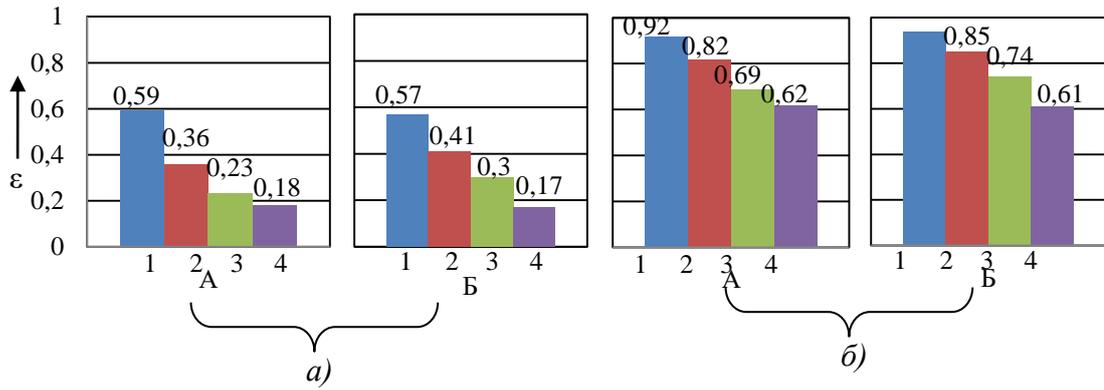


Рисунок 6.3 – Зависимость степени очистки патронных магнитных сепараторов от скорости ВТЖ и типа материала постоянного магнита (таблица 6.1): А, Б – соответственно экспериментальные и теоретические значения; а, б, – соответственно феррито-бариевый и неодим-боровый магнит; 1, 2, 3, 4 – соответственно при $v_{жн} = 0,0025; 0,005; 0,0075; 0,01$ м/с; $\bar{d}_и = 2,5$ мкм; $\sigma = 0,83$ мкм; $C_и = 200$ мг/дм³, $b = 0,016$ м; $\eta = 0,001$ Па·с

6.3. Расчет оптимальных конструктивных параметров патронного магнитного сепаратора

Для реализации магнитного сепаратора выбираем магнит из Nd-Fe-B, так как он обеспечивает требование нормативных документов – на поверхности магнитов значение магнитной индукции $B \geq 0.4$ Тл [123]. Его геометрические параметры следующие: наружный диаметр $2r_0 = 29 \cdot 10^{-3}$ м; диаметр воздушной полости $2r_{00} = 20 \cdot 10^{-3}$ м; длина $l_m = 14 \cdot 10^{-3}$ м. Наружный радиус патрона, исходя из опытных данных, задается $R_0 = 16 \cdot 10^{-3}$ м. Для усиления градиента поля используем патрон из двух магнитов (рисунок 3.10, д) с противоположным расположением полюсов.

Для удовлетворения техническому заданию по производительности сепаратора задается скорость ВТЖ $v_{жн} = 0.03$ м/с. Вычисленный по программе массив значений семейства зависимостей

$$\varepsilon(d_\phi, d_{ш}, a) = 1 - e^{-h(d_{ш}, a)d_\phi},$$

представлен в таблицах 6.3 и 6.4.

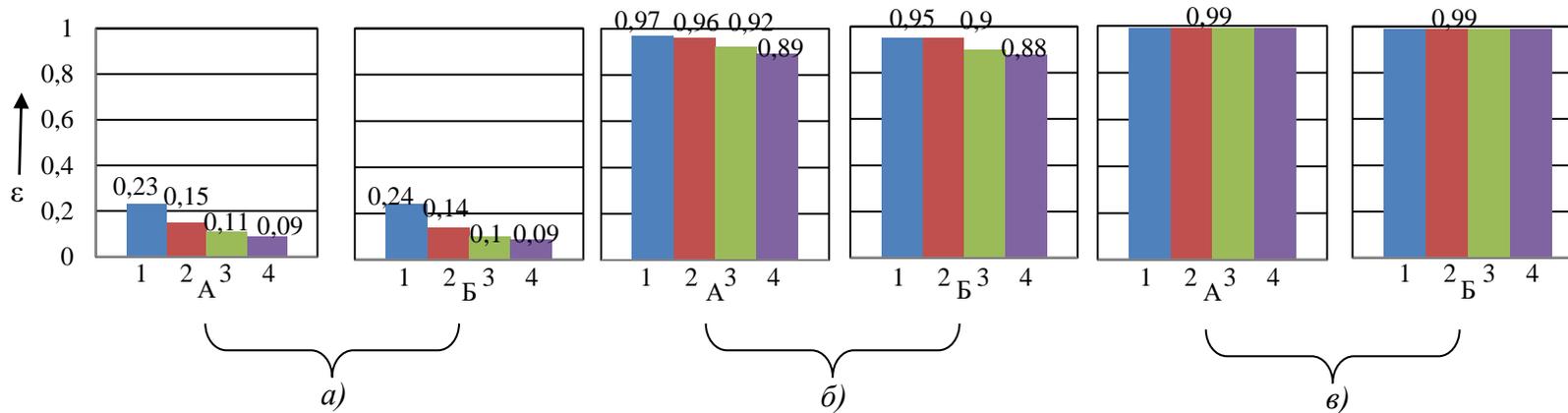


Рисунок 6.4 – Зависимость средней степени очистки патронных магнитных сепараторов от концентрации ферромагнитных примесей и расстояния между патронами:

A, Б – соответственно экспериментальные и теоретические значения; a, б, в – соответственно при $C_{и} = 10; 200; 500 \text{ мг/дм}^3$; 1, 2, 3, 4 – соответственно при $b = 0,01; 0,015; 0,02; 0,025 \text{ м}$; феррито-бариевый магнит; $\eta = 0,001 \text{ Па}\cdot\text{с}$; $C_{д} = 10 \text{ мг/дм}^3$

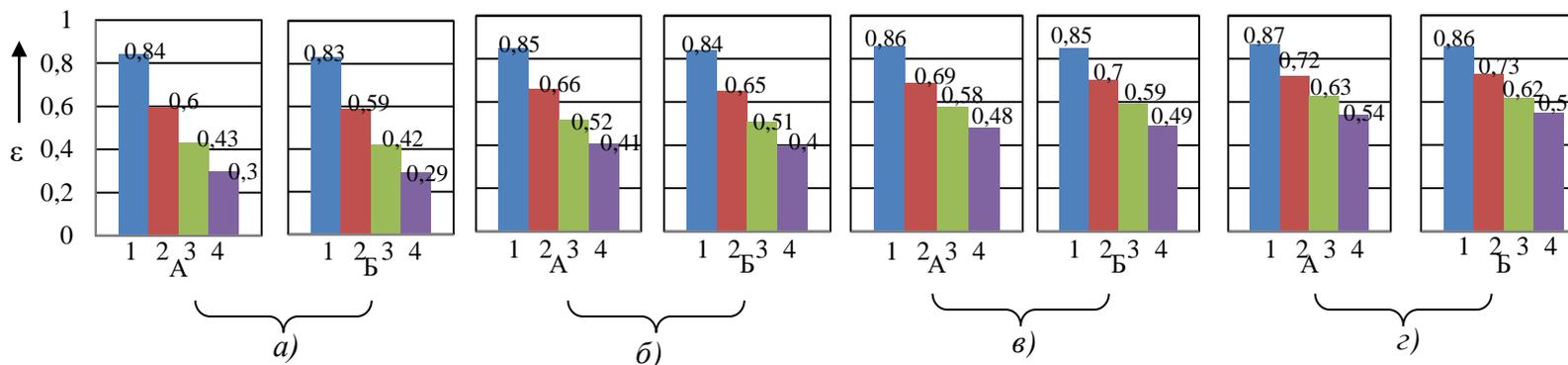


Рисунок 6.5 – Зависимость средней степени очистки патронных магнитных сепараторов от скорости потока ВТЖ и числа секций:

A, Б – экспериментальные и теоретические значения; a, б, в, г – соответственно для одно-, двух-, трех- и четырех секций; 1, 2, 3, 4 – соответственно при $v_{жн} = 0,010; 0,020; 0,030; 0,050 \text{ м/с}$; феррито-бариевый магнит – $b = 0,016 \text{ м}$; $C_{и} = 500 \text{ мг/дм}^3$; $\eta = 0,001 \text{ Па}\cdot\text{с}$; $C_{д} = 10 \text{ мг/дм}^3$

Таблица 6.3

Вычисленный по программе при $a = 0.048$ м и разных $d_{ш}$ массив значений: ε ; $d_{ф}$

$d_{ш}$, мм	ε	0.8	0.87	0.923	0.954	0.977	0.985	0.998
0	d , МКМ	3	-	6	-	8.5	-	14
1	d , МКМ	6	-	12.5	-	20.5	-	35
2	d , МКМ	11	-	20	-	29	-	40
3.3	d , МКМ	18	29.5	-	40	-	51	-

В таблице 6.4 задавались следующие значения: $\varepsilon_{p1} = 0.80$, $\varepsilon_{p2} = 0.9$, $\varepsilon_{p3} = 0.975$, $\varepsilon_{p4} = 0.994$.

На основе исходных данных, приведенных в таблицах 6.3 и 6.4, по зависимости (6.4) вычислены методом наименьших квадратов значения h для разных значений $d_{ш}$, мм и a , м, которые представлены в таблице 6.5

Таблица 6.4

Вычисленный по программе при разных a и $d_{ш}$ массив значений: ε ; $d_{ф}$

При	a , м	0.052				0.056				0.060				0.064			
		ε	ε_{p1}	ε_{p2}	ε_{p3}	ε_{p4}	ε_{p1}	ε_{p2}	ε_{p3}	ε_{p4}	ε_{p1}	ε_{p2}	ε_{p3}	ε_{p4}	ε_{p1}	ε_{p2}	ε_{p3}
0	d , МКМ	3.2	5.7	8	11	5	6.4	8.6	18	5.4	6.7	9	13	5.8	6.4	9.3	13
1	d , МКМ	7	16	23.5	31	12	19	25.5	35	16	20	27.5	38	17.5	21	29	40
2	d , МКМ	13	27	46	63	18	37	51	78	30	40	56	82	35	42.5	58	84
4	d , МКМ	23	33	70	98	27	60	107	177	37	83	125	205	60	95	133	220

Таблица 6.5

Смоделированные значения показателя степени h при разных a и $d_{ш}$

$d_{ш}$, мм	a , м	0.048	0.052	0.056	0.060	0.064
0	h	0.47	0.42	0.39	0.33	0.31
1	h	0.235	0.175	0.125	0.115	0.105
2	h	0.148	0.10	0.07	0.058	0.05
3.3	h	0.08	-	-	-	-
4	h	-	0.06	0.04	0.031	0.05

По данным таблицы 6.5 определен экспоненциальный полином (6.5)

$$h(d_{\text{ш}}, a) = B_0(a)e^{-\gamma(a)d_{\text{ш}}} + B_1(a)d_{\text{ш}},$$

и вычислены значения всех его коэффициентов (B_0, γ, B_1) для разных значений a , которые представлены в таблице 6.6.

Таблица 6.6

Смоделированные значения коэффициентов полинома для выражения (6.5)

$a, \text{ м}$	0.048	0.052	0.056	0.060	0.064
B_0	0.47	0.42	0.39	0.33	0.31
B_1	0.015	0.013	0.008	0.006	0.005
γ	0.78	0.9	1.05	1.0	0.9

По данным таблицы 6.6 смоделированы следующие зависимости:

$$B_0(a) = 0.95 - 10a; B_1(a) = 0.42e^{-70a}; \gamma(a) = 1.07 - 0.03|57.7 - 10^3 a|. \quad (6.40)$$

Результаты аппроксимации иллюстрируются рисунками 6.6, а и 6.6, б.

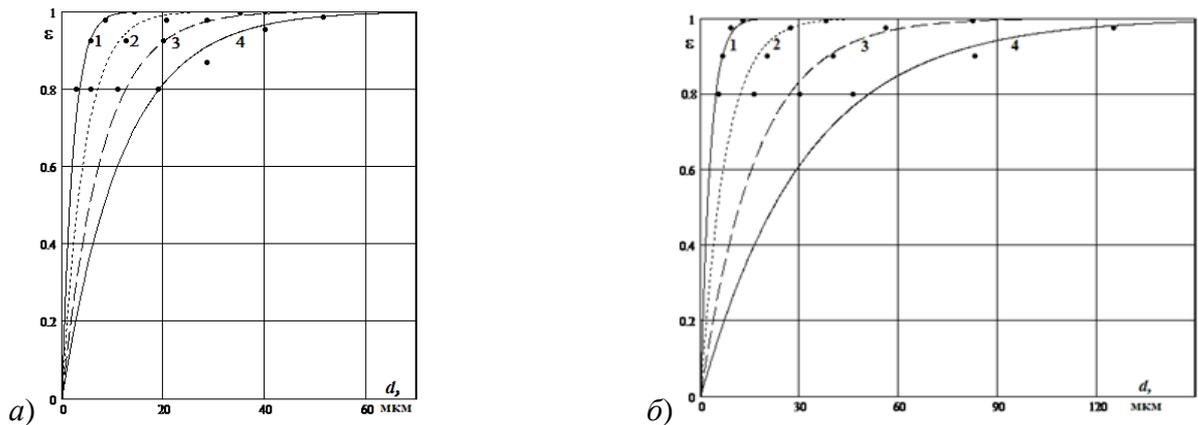


Рисунок 6.6 – Результаты аппроксимации характеристик $\varepsilon(d_{\phi})$ (точки – исходные данные): а) $a = 48$ мм, №1 – $d_{\text{ш}} = 0$, №2 – $d_{\text{ш}} = 1$ мм, №3 – $d_{\text{ш}} = 2$ мм, №4 – $d_{\text{ш}} = 3.3$ мм; б) $a = 60$ мм, №1 – $d_{\text{ш}} = 0$, №2 – $d_{\text{ш}} = 1$ мм, №3 – $d_{\text{ш}} = 2$ мм, №4 – $d_{\text{ш}} = 4$ мм

Подставив в формулу (6.25) выражение $B_0(a)$ из (6.40)

$$a_0 = -B_0(a_0) / \frac{\partial B_0(a)}{\partial a},$$

получим оптимальное значение расстояния между осями постоянных магнитов $a_0 = 0.0475$, м. Округляем a_0 до значения 0.048 м.

Вычислив $\bar{\varepsilon}_0$ по алгоритму на рисунке 5.15, получим по зависимости (5.105) при условии $\bar{\gamma}_k \geq 1$ значения $C_{\text{икр}}$. Максимальные значения остаточной концентрации C_{0m} ферропримесей в очищенной ВТЖ, обусловленной процессом маг-

нитной коагуляции, определим по формуле (6.41). Результаты расчетов при скорости ВТЖ $v_{\text{жн}} = 0.03$ м/с представим в таблице 6.7.

Таблица 6.7

Критическая концентрация ферромагнитных примесей в исходной ВТЖ, средняя степень очистки и максимальное значение остаточной концентрации ферромагнитных примесей при $\bar{\gamma}_k \geq 1$

$\bar{d}_и$, мкм	1	2.5	5	10
$C_{\text{икр}}$, мг/дм ³	4000	30	1.5	0.2
$\bar{\epsilon}_0$	0.344	0.65	0.876	0.984
C_{0m} , мг/дм ³	2624	10.5	0.19	0.003

Для исходных данных: $Q=100$ м³/ч; $C_и = 80$ мг/л; $C_д = 5$ мг/л; $a=48$ мм; $v_{\text{жн}} = 0.03$ м/с; $l_я = 48$ мм определим необходимое число ступеней N_0 .

Сопоставив $C_д$ с C_{0m} из таблицы 6.7, приходим к выводу: при $C_{0m} \leq C_д$, число ступеней $N_0 = 1$; при $C_{0m} > C_д$ и $C_и \geq C_{\text{икр}}$ количество ступеней определяется формулой (6.41); при $C_{0m} \geq C_д$ и $C_{\text{икр}} \geq C_и$ количество ступеней определяется формулой (6.34).

Определив $d_{\text{шпр}} = 3.3$ мм по графику на рисунке 6.1, а и подставив в (6.41) данные таблицы 6.7, получим число ступеней N_{00} , представленных в таблице 6.8

Таблица 6.8

Необходимое число ступеней при различных распределениях дисперсного состава ферромагнитных частиц в ВТЖ

$\bar{d}_и$, мкм	10	5	2.5	1
σ , мкм	3.3	1.7	0.83	0.33
N_{00}	1	1	3	7

Из данных таблицы 6.8 следует, что для распределения дисперсного состава с параметрами $\bar{d}_и = 1$ мкм и $\sigma = 0.33$ мкм требуется уточнение N_{00} по методике параграфа 6.2 (пятого этапа расчета и алгоритма на рисунке 6.2).

Для остальных распределений феррочастиц таблицы 6.8 проводим расчет

количества магнитов и габаритных размеров по формулам (6.43) – (6.47). При этом имеется степень свободы расчета габаритных размеров сечения сепаратора, которая позволяет включить в процедуру расчета технологические требования. Например, высотная компоновка сепаратора позволяет существенно сэкономить производственные площади, поэтому, задавая длину патронов $Z = 2$ м, по формулам (6.47) и (6.4) с учетом (6.44) и (6.45) определяются соответственно Y, n_1, n_2, q . Результаты расчета представлены в таблице 6.9.

Полученные конструктивные данные магнитной системы предназначены для проектирования топологии и общей конструкции патронного магнитного сепаратора.

Таблица 6.9

Геометрические параметры магнитного сепаратора
при $v_{жн} = 0.03$ м/с, $Q=100$ м³/ч, $C_{и} = 80$ мг/л, $C_{д} = 5$ мг/л

$\bar{d}_и$, мкм	10	5	2.5
N_0	1	1	3
X , м	0.032	0.032	0.128
δ , м	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
Y , м	0.46	0.46	0.46
n_1	82	82	82
n_2	10	10	10

На следующем этапе проводят вычисление интервала времени рабочего цикла сепаратора. Подставив в (6.37) формулу (6.4), с учетом выражений (6.5) и (6.40) для значения $a_0 = 0.048$ м, численным методом вычисляем зависимость $t(d_{ш})$

$$t(d_{ш}) = \frac{2\pi R_0 l \rho_{ш}}{Q C_{и}} \int_0^{d_{ш}} \frac{d(d_{ш})}{1 - e^{-[(B_0(a)e^{-\gamma(a)d_{ш}} + B_1(a)d_{ш})\bar{d}_и]}}.$$

Предельное значение времени цикла $t_{цпр}$ магнитной сепарации оценим условием резкого падения скорости накопления феррошлама на патронах, которая обуславливается критическим значением показателя степени $h(d_{шпр}, a)$ на зависимости $h(d_{шп}, a)$, рисунок 6.1,б.

Согласно (6.38) в таблице 6.10 представлены рассчитанные значения времени цикла сепарации в зависимости от среднего значения размера частиц.

Таблица 6.10

Время цикла сепарации для разных значений среднего размера частиц

$\bar{d}_и$, МКМ	2.5	5	10	15	25
$t_{ц}$, МИН	74	45	32	28	26

Сопоставим параметры сепараторов, рассчитанных по существующей в [123] и по новой методикам. Исходные данные и параметры, соответствующие существующей [123, стр. 311 – 313] и новой (таблицы 6.7 – 6.9) методикам расчета, при $l_я = 0.048$ м представлены в таблице 6.11. При этом число постоянных магнитов q оценим по упрощенной формуле (6.45)

$$q \approx \frac{2QN_0}{l_я a v_{жн}}$$

Таблица 6.11

Сопоставление параметров сепараторов, рассчитанных по существующей методике на феррито-бариевых магнитах и по новой методике на неодим-боровых магнитах

Тип	N_0	$v_{жн} = k_{ж} v_{s0}$, м/с	$\bar{d}_и$, МКМ	σ , МКМ	Q , м ³ /ч	$C_и$, МГ/Л	$C_д$, МГ/Л	C_0 , МГ/Л	a , м	Число магн. q	Удел. стоим. $C_{Qм}$
Сущ. №1	1	0,02	5	1.66	100	100	10	20	0.046	2100	-
Сущ. №2	4	0,025	5	1.66	100	100	10	9,9	0,057	5000	100%
Нов. №3	2	0,03	5	1.7	100	80	5	6	0,048	1640	100%
Нов. №4	1	0,03	5	1.7	100	80	5	0,19	0,048	820	50%

В таблице 6.11 $k_{ж}$ коэффициент живого сечения и v_{s0} скорость потока ВТЖ в зазоре согласно работе [123].

Из таблицы 6.11 следует, что однорядный сепаратор №1, рассчитанный по

существующей методике, не удовлетворяет требованию очистки $C_d \geq C_0$. Четырехрядный сепаратор №2 этому требованию удовлетворяет.

Двухрядный сепаратор №3 на более совершенных магнитах (неодим-боровых), рассчитанный по новой методике, *без учета магнитной коагуляции*, содержит в *три раза меньшее* количество постоянных магнитов, но по их удельной себестоимости C_{QM} выигрыша не дает.

Однорядный сепаратор №4 на неодим-боровых магнитах, рассчитанный по новой методике, *с учетом магнитной коагуляции*, содержит в *шесть раз меньшее* количество постоянных магнитов *и по их удельной себестоимости C_{QM} обеспечивает выигрыш в два раза*.

Таким образом, разработанная методика расчета магнитных сепараторов на основе оптимизации конструктивных параметров и учета факторов магнитной коагуляции существенно улучшила характеристики разрабатываемых сепараторов, приблизив их к экспериментально наблюдаемым.

6.4. Оценка погрешности расчета патронного магнитного сепаратора

Для аналитического исследования траекторий феррочастиц в водном потоке рабочей области магнитного сепаратора в четвертой главе разработан метод приближенного решения нелинейной системы ДУ динамики феррочастиц, в которой присутствует две нелинейности – нелинейная ponderomotorная сила, описывающая правую часть динамического ДУ, и метрическая нелинейность, связывающая координаты феррочастицы с расстоянием её удаления от центра симметрии магнитных сил.

Нелинейность правой части ДУ (4.17) динамики феррочастицы устранена кусочно-линейной аппроксимацией силы в (4.24) в третьей главе. Для преодоления метрической нелинейности в параграфе 4.4.2 исходную систему ДУ преобразовали в систему ДУ с направленным графом последовательной структуры. В новой системе ДУ метрическое уравнение линейно, а нелинейность локализована в кинематических уравнениях в виде параметрических зависимостей. При этом

проведена линеаризация нелинейных параметрических зависимостей путем усреднения кинематических ДУ по радиальной переменной на основе того, что диапазон вариации этой переменной ограничен конструктивным фактором рабочей области сепаратора. В результате ДУ динамики (4.45), (4.46) становятся линейными, но с дополнительной неоднородной частью, которая существенно компенсирует влияние метрической нелинейности исходной системы ДУ. В результате определено его решение, сначала в квадратурах, а затем при соответствующей аппроксимации подынтегрального выражения в аналитической форме.

Полученная аналитическая модель траекторий феррочастиц стала, с одной стороны, источником раскрытых теоретических положений (зонных представлений о рабочей области сепаратора, критериальных условий абсолютного осаждения и абсолютного не осаждения феррочастиц, критерия предельно возможной производительности магнитного сепаратора). С другой стороны, базисом математической модели семейства характеристик степени очистки сепаратора.

Приближенные процедуры математического моделирования являются источником погрешностей. При анализе погрешности учтем два основных источника погрешностей – погрешности моделирования и погрешности исходных параметров: феррочастиц, постоянных магнитов и динамической вязкости ВТЖ, которые изменяются по случайным законам.

Погрешности моделирования обусловлены двумя приближениями. Первое приближение связано с заменой экспоненциально изменяющейся магнитной силы (3.72) её кусочно-линейной аппроксимацией (3.78) и (3.83). Отклонение силы принимает следующий вид:

$$\Delta f_{mk}(r) = f_{0k} - \alpha_{0k}r - f_{mr}(r), \quad (k = 1, 2). \quad (6.48)$$

В области сильного поля ($R \leq r \leq r_{гп1}$) отклонение $\Delta f_{m1}(r)$ между двумя зависимостями магнитной силы, иллюстрируемыми рисунком 3.22, представлено на рисунке 6.7 (пунктирная кривая).

Зависимость $\Delta f_{m1}(r)$ аппроксимируем следующим выражением:

$$\Delta f_{m1}(r) = 0.26f_m \left[1 - \left(\frac{2\alpha_{01}(r-R)}{0.94f_m} - 1 \right)^2 - 1 \right], \quad (6.49)$$

которая представлена на рисунке 6.7 (непрерывная кривая).

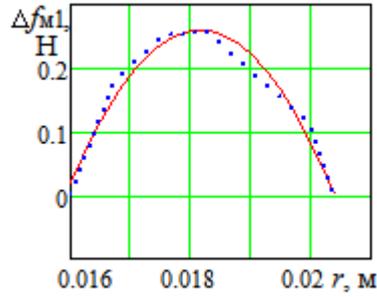


Рисунок 6.7 – Функциональная зависимость отклонения между нелинейной магнитной силой и её линейной аппроксимацией на участке $R \leq r \leq r_{rp1}$:

..... – действительное отклонение $\Delta f_{m1}(r)$; — – аппроксимационная зависимость $\Delta f_{m1}(r)$

В области слабого поля ($r_{rp1} \leq r \leq 0.5a$) учтем максимальное отклонение $\Delta f_{m2}(0.5a)$, которое возникает на границе $r = 0.5a$, принятой в параграфе 4.3 за границу магнитоактивной области сепаратора с нулевым значением силы. Отклонение $\Delta f_{m2}(0.5a)$ в соответствии с (3.72) принимает следующий вид:

$$\Delta f_{m2}(0.5a) = f_m 10^{-3\alpha_1(0.5a-R)}. \quad (6.50)$$

Второе приближение обусловлено усреднениями кинематических ДУ (4.25), (4.26) и (4.28) по радиальной переменной r и аппроксимацией интегралов (4.31), (4.37) соответствующими выражениями (4.41) – (4.43), которые вместе приводят к отклонению значения переносного сдвига феррочастицы $\Delta r_{жr}$ (поток ВТЖ) от истинного значения $\Delta r_{жr}^*$, и это отклонение обозначим следующим образом:

$$\delta r_{ж} = \Delta r_{жr}^* - \Delta r_{жr}. \quad (6.51)$$

Для определения $\Delta r_{жr}^*$ в первый интеграл (4.31) подставим производную $\frac{d\varphi}{dt}$, выразив её из ДУ (4.23), и интегрируем его по частям следующим образом:

$$\Delta r_{жr}^* = \int_{\varphi_H}^{\varphi} r \operatorname{ctg} \varphi d\varphi = r \ln \varphi - r(0) \ln \varphi_H - \int_{\varphi_H}^{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} \ln \sin \varphi d\varphi. \quad (6.52)$$

Оценив отношение подынтегральных выражений на отрезках $[0.5a, R]$ и $[\varphi_H, \pi - \varphi_H]$ вариации переменных r и φ соответственно следующим образом

$$\left| \frac{\frac{dr}{d\varphi} \ln \sin \varphi}{r \operatorname{ctg} \varphi} \right| \cong \frac{0.5a - R}{0.5(0.5a + R)(\pi - 2\varphi_H)} \left| \frac{\ln \sin \varphi}{\operatorname{ctg} \varphi} \right| \leq 0.09,$$

приходим к выводу, что интеграл в правой части (6.52) намного меньше исходного интеграла. Поэтому применим приближенный метод интегрирования правого интеграла:

$$\vartheta(\varphi) = \int_{\varphi_H}^{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} \ln \sin \varphi d\varphi \cong \left\langle \frac{dr}{d\varphi} \right\rangle \int_{\varphi_H}^{\varphi} \left(\ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_H} + \ln \sin \varphi_H \right) d\varphi =$$

$$= -\left\langle \frac{dr}{d\varphi} \right\rangle \left[(\varphi - \varphi_H) (\ln \sin \varphi_H + \beta) + 2\alpha \operatorname{sign}(\varphi - 0.5\pi) \ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_H} \right],$$

где $\left\langle \frac{dr}{d\varphi} \right\rangle$ усредненное значение на отрезках вариации переменных r и φ .

Таким образом, отклонение (6.51) принимает следующий вид:

$$\delta r_{\text{ж}} = r \ln \varphi - r(0) - \vartheta(\varphi(t)) - \bar{r}\sigma(\varphi(t)). \quad (6.53)$$

Общее отклонение δr радиальной координаты r феррочастицы от её истинного значения r^* на основе (4.30) и (4.44) выражается следующим образом:

$$\delta r = r^* - r = \delta r_{\text{м}} - \delta r_{\text{ж}}. \quad (6.54)$$

В (6.54) отклонение относительного перемещения $\delta r_{\text{м}} = r_{\text{м}}^* - r_{\text{м}}$ феррочастицы определим из разности динамических ДУ (4.17) и (4.24) соответственно. С учетом (6.48) результирующее ДУ принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 \delta r_{\text{м}}}{dt^2} + p \frac{d \delta r_{\text{м}}}{dt} = \frac{\Delta f_{\text{МК}}(r)}{m},$$

из которого следует ДУ для отклонения относительной скорости $\delta v_{\text{м}}$ феррочастицы:

$$\frac{d \delta v_{\text{м}}}{dt} + p \delta v_{\text{м}} = \frac{\Delta f_{\text{МК}}(r)}{m}, \quad (6.55)$$

где $p = K_{\text{с1}}/m$.

Решение ДУ (6.55) с начальным условием $\delta v_{\text{м}}(t_1)$ принимает вид:

$$\delta v_{\text{м}} = \delta v_{\text{м}}(t_1) e^{-P(t-t_1)} + e^{-Pt} \int_{t_1}^t \frac{\Delta f_{\text{МК}}(r(t))}{m} e^{Pt} dt. \quad (6.56)$$

В момент $t_1 = 0$ входа феррочастицы в магнитоактивную область сепаратора (при $r = 0.5a$) в силу инерционности процесса развития ускоренного движения и инерционности накопления отклонения $\delta r_{\text{м}}$ имеют место следующие начальные условия: $\delta v_{\text{м}}(0) = 0$, $\delta r_{\text{м}}(0) = 0$.

Аналогично получим:

$$\delta r_{\text{м}} = \delta r_{\text{м}}(t_1) + \int_{t_1}^t \delta v_{\text{м}}(t) dt. \quad (6.57)$$

Отклонение результирующей скорости в радиальном направлении на основе (6.57) принимает следующий вид:

$$\delta v_r = \delta v_{\text{м}} - \delta v_{\text{жср}}. \quad (6.58)$$

Если феррочастица проходит строго фиксированное расстояние

$$r_0 - r(t_1) = \int_{t_1}^{t_{\text{м1}}} v_r dt \quad \text{или} \quad r(t_0) - r(t_{\text{м1}}) = \int_{t_{\text{м1}}}^{t_0} v_r dt$$

например, за интервал времени $t_{\text{м1}} - t_1$ или $t_0 - t_{\text{м1}}$, где t_1 и t_0 фиксированные

моменты времени то, задавая отклонение скорости δv_r , получим погрешность этого интервала с соответствующими отклонениями δt_{m1} :

$$\delta t_{m1} \cong -\frac{1}{v_r(t_{m1}) + \delta v_r(t_{m1})} \int_{t_1}^{t_{m1}} \delta v_r dt \quad \text{или} \quad \delta t_{m1} \cong \frac{1}{v_r(t_{m1}) + \delta v_r(t_{m1})} \int_{t_{m1}}^{t_0} \delta v_r dt, \quad (6.59)$$

где $v_r(t_{m1})$ – результирующая скорость феррочастицы в радиальном направлении в момент времени t_{m1} .

Выражения (6.56) – (6.59) используем для расчета скорректированных значений (истинных значений) зависимости степени очистки $\varepsilon(d_\phi^*)$ на базе математической модели траектории феррочастицы (4.60) – (4.63).

Погрешности исходных параметров феррочастиц, постоянных магнитов и динамической вязкости ВТЖ влияют только на относительное движение феррочастиц, поэтому определим отклонение относительной скорости Δv_m по ДУ (6.60), полученного на основе динамического ДУ (4.17),

$$m \frac{d\Delta v_m}{dt} + K_c \Delta v_m = -\Delta F_p. \quad (6.60)$$

В правой части (6.60) ΔF_p является отклонением от исходного ДУ, в котором суммарная погрешность силы, определяется по правилу суммирования составляющих погрешностей, рассматриваемых как независимые случайные величины:

$$\Delta F_p = \pm \left| v_m \frac{\partial K_c}{\partial \eta} \Delta \eta \right| \pm \left| v'_m V_\phi \Delta \rho_\phi \right| \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f_m}{\partial \alpha_1} \right)^2 (\Delta \alpha_1)^2 + \left(\frac{\partial f_m}{\partial \chi_{m0}} \right)^2 (\Delta \chi_{m0})^2 + \left(\frac{\partial f_m}{\partial \bar{H}_m} \right)^2 (\Delta \bar{H}_m)^2}, \quad (6.61)$$

где η – динамическая вязкость ВТЖ, $\text{кг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$; V_ϕ – объем феррочастицы, м^3 ; α_1 – коэффициент показателя степени показательной функции, описывающей распределение магнитной силы, м^{-1} ; ρ_ϕ – массовая плотность феррочастицы, $\text{кг}/\text{м}^3$; χ_{m0} – максимальное значение магнитной восприимчивости ферромагнитного материала феррочастицы; \bar{H}_m – максимальное значение напряженности магнитного поля на поверхности патрона, $\text{А}/\text{м}$.

Подставив в (6.57) с учетом (6.59) отклонение скорости Δv_m , определяемое ДУ (6.60)– (6.61), получим поправки к динамическому состоянию феррочастицы на любом участке её траектории, на основе которых корректируются зависимости

степени очистки $\varepsilon(d_{\phi}^{\pm\Delta})$. Для этого используем связь значения степени очистки $\varepsilon(d_{\phi})$ с критической траекторией феррочастицы. Критическая траектория характеризует такое граничное состояние феррочастицы, которое разделяет между собой состояния осаждения и не осаждения её на патрон сепаратора. Критическая траектория задается критическим значением начального угла $\varphi_H(d_{\phi}) = \arcsin \varepsilon(d_{\phi})$ (4.12) вхождения феррочастицы в активную область сепаратора.

В пункте 4.4.4 показано, что траектории феррочастиц подразделяется на характерные участки, которые соответствуют условиям воздействия на частицы со стороны магнитного поля и потока ВТЖ: область $r_{гр1} \leq r \leq 0.5a$ слабого поля (с индексом $k = 2$); область $R \leq r \leq r_{гр1}$ сильного поля (с индексом $k = 1$); первая зона $\varphi_H \leq \varphi \leq 90^0$; вторая зона $90^0 \leq \varphi \leq 180^0 - \varphi_H$; третья зона $\varphi \geq 180^0 - \varphi_H$.

Временные зависимости радиальной координаты критической траектории феррочастицы представлены на рисунке 6.8 при $\varepsilon = 0.8$, рассчитанные по математической модели (4.60) – (4.63) для однорядного сепаратора с параметрами, представленными в параграфе 6.3.

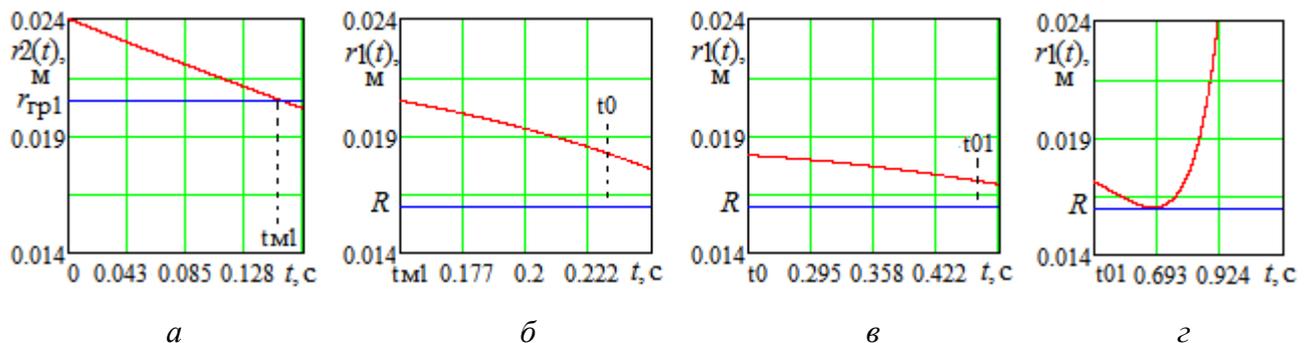


Рисунок 6.8 – Зависимость изменения во времени радиальной координаты феррочастицы на её критической траектории при $\varepsilon = 0.8$: *a* – в области слабого поля в первой зоне; *б* – в области сильного поля в первой зоне; *в* – в области сильного поля во второй зоне; *г* – в области сильного поля в третьей зоне

На рисунке 6.8 зависимость $r_2(t)$ относится к участку траектории в области слабого поля, зависимость $r_1(t)$ относится к участку траектории в области сильного поля; на рисунке 6.8, *a* и *б* траектория лежит в первой зоне; на рисунке 6.8, *в* – во второй зоне; на рисунке 6.8, *г* – в третьей зоне. При этом интервал времени прохождения области слабого поля обозначен $t_{м1}$; интервал времени прохождения

области сильного поля в первой зоне равен $t_0 - t_{m1}$, ... во второй зоне $t_{01} - t_0$, ... в третьей зоне $t > t_{01}$. Осаждение феррочастицы на патрон сепаратора подтверждается на рисунке 6.8, ε условием $r(t_m) = R$ достижения поверхности патрона.

Используя математическую модель (4.59) – (4.62), для каждой критической траектории феррочастицы и на каждом её участке проводим коррекцию начальных условий на основе разработанных выражений (6.56) – (6.59) и (6.54): на первом участке (рисунок 6.8, *а*) определим δt_{m1} ; на втором участке (рисунок 6.8, *б*) определим $\delta r(t_0)$; на третьем участке (рисунок 6.8, *в*) определим $\delta r(t_{01})$, на четвертом участке (рисунок 6.8, *г*) определим δt_m .

Результаты этой коррекции представлены в таблице 6.12, а на рисунке 6.9. представлена скорректированная зависимость $\varepsilon(d_\phi^*)$ (кривая 2). В таблице 6.13 представлены результаты расчета $\varepsilon(d_\phi)$ без коррекции.

Таблица 6.12

Результаты расчета скорректированной зависимости $\varepsilon(d_\phi^*)$

ε	0.75	0.8	0,85	0.9	0.93	0.95	0.975	0.99
$\varphi_H, ^\circ$	48.6	53.1	58.2	64.2	68.4	71.8	77.2	81.9
v_1	0.7	2.0	5.15	15.0	27.6	34.4	54.0	78.5
$d_\phi, \text{МКМ}$	1.7	2.4	3.35	4.7	5.7	6.2	7.2	8.2
$t_{m1}, \text{с}$	0.165	0.156	0.145	0.122	0.106	0.104	-	-
$\delta t_{m1}, \text{с}$	-0.087	-0.04	-0.01	0.0056	0.0063	0.007	-	-
$r_2(t_0), \text{М}$	-	-	-	-	-	-	0.0202	0.0222
$r_2(t_{01}), \text{М}$	-	-	-	-	-	-	0.0205	0.0219
$r_1(t_0), \text{М}$	0.0160	0.01649	0.018	0.0185	0.0189	0.0199	-	-
$r_1(t_{01}), \text{М}$	-	0.0166	0.0169	0.0178	0.0203	0.0205	-	-
$\delta r_2(t_0), \text{М}$	-	-	-	-	-	-	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
$\delta r_2(t_{01}), \text{М}$	-	-	-	-	-	-	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$8.1 \cdot 10^{-4}$
$\delta r_1(t_0), \text{М}$	-	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	-	-
$\delta r_1(t_{01}), \text{М}$	-	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	-	-

Представив линеаризированные выражения магнитной силы (3.78) и (3.83) в следующем виде

$$f_{\text{МК}}(r) = f_m K_{\text{К}}(r), \quad (\text{К} = 1, 2); \quad K_2(r) = \frac{0.06(0.5a-r)}{0.5a-r_{\text{ГР1}}}; \quad K_1(r) = \left[1 - \frac{0.94(r-R)}{r_{\text{ГР1}}-R} \right]$$

и учтя зависимость $f_m = f_m(\alpha_1, \chi_{m0}, \bar{H}_m, d_\phi)$, выразим отклонение (6.61) через относительные погрешности исходных параметров феррочастиц, постоянных магнитов и динамической вязкости ВТЖ следующим образом:

$$\Delta F_p = \pm \left| v_M \frac{\Delta \eta}{\eta} \right| \pm \left| v'_M \frac{\Delta \rho_\phi}{\rho_\phi} \right| \pm K_{\text{К}}(r) f_m \sqrt{\left(\frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \chi_{m0}}{\chi_{m0}} \right)^2 + 9 \left(\frac{\Delta \bar{H}_m}{\bar{H}_m} \right)^2}.$$

Таблица 6.13

Результаты расчета смоделированной зависимости $\varepsilon(d_\phi)$

ε	0.75	0.8	0,85	0.9	0.93	0.95	0.975	0.99
v_1	1.65	2.76	4.04	7.55	13.87	24.45	39.3	61.35
d_ϕ , МКМ	2.25	2.67	3.04	3.74	4.6	5.53	6.5	7.5
t_0 , с	0.265	0.231	0.195	0.156	0.129	0.108	0.075	0.047
t_{01} , с	0.530	0.462	0.390	0.312	0.258	0.216	0.150	0.094
t_{M1} , с	0.159	0.154	0.148	0.136	0.123	0.107	-	-
$r_2(t_0)$, м	-	-	-	-	-	-	0.0214	0.0224
$r_2(t_{01})$, м	-	-	-	-	-	-	0.0210	0.0223
$r_1(t_0)$, м	0.0175	0.01802	0.01897	0.01982	0.02025	0.02045	-	-
$r_1(t_{01})$, м	0.0163	0.01713	0.01816	0.01980	0.02019	0.0203	-	-

Для примера ограничимся значениями относительных погрешностей

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta \rho_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{\Delta \chi_{m0}}{\chi_{m0}} = \frac{\Delta \bar{H}_m}{\bar{H}_m} = \pm 0.1$$

и, используя математическую модель (4.56), (6.58) и (6.60), вычислим границы $\varepsilon(d_\phi^{-\Delta})$ и $\varepsilon(d_\phi^{+\Delta})$ вариации характеристики степени очистки соответственно. Результаты расчета представлены в таблицах 6.14 – 6.15, а также на рисунке 6.10.

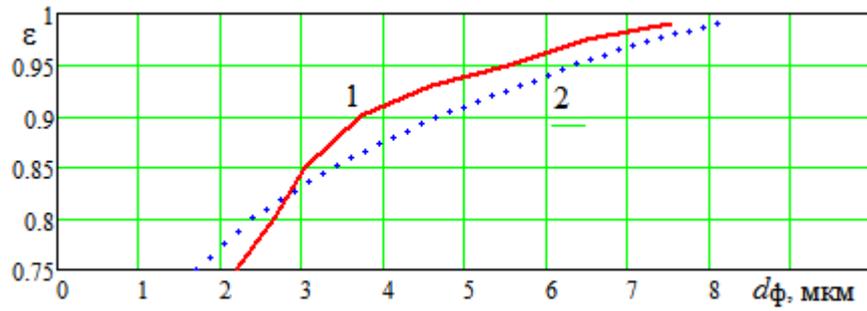


Рисунок 6.9 – Характеристики степени очистки: 1 – смоделированная зависимость $\varepsilon(d_\phi)$; 2 – скорректированная зависимость $\varepsilon(d_\phi^*)$

Таблица 6.14

Результаты расчета верхней границы $\varepsilon(d_\phi^{-\Delta})$ вариации характеристики степени очистки, обусловленной погрешностями исходных параметров

ε	0.75	0.8	0,85	0.9	0.93	0.975	0.99
v_1	0.85	2.24	3.22	5.65	9.1	31.5	48.7
d_ϕ , МКМ	1.8	2.5	2.8	3.4	4.0	6.0	7.0
t_{M1} , с	0.16	0.156	0.150	0.140	0.129	-	-
Δt_{M1} , с	-0.0048	-0.0058	-0.0073	-0.010	-0.013	-	-
$r_2(t_0)$, М	-	-	-	-	-	0.0210	0.0221
$r_2(t_{01})$, М	-	-	-	-	-	0.0202	0.0218
$r_1(t_0)$, М	0.0172	0.0179	0.0187	0.0195	0.01996	-	-
$r_1(t_{01})$, М	0.0160	0.0160	0.01	0.0186	0.01864	-	-
$\delta r_2(t_0)$, М	-	-	-	-	-	$-6.1 \cdot 10^{-4}$	$-3.7 \cdot 10^{-4}$
$\delta r_2(t_{01})$, М	-	-	-	-	-	$-7.6 \cdot 10^{-4}$	$-4.5 \cdot 10^{-4}$
$\delta r_1(t_0)$, М	$-3.8 \cdot 10^{-4}$	$-3.1 \cdot 10^{-4}$	$-2.2 \cdot 10^{-4}$	$-1.3 \cdot 10^{-4}$	$-7.3 \cdot 10^{-5}$	-	-
$\delta r_1(t_{01})$, М	$-2.0 \cdot 10^{-3}$	$-1.9 \cdot 10^{-3}$	$-1.5 \cdot 10^{-3}$	$-1.3 \cdot 10^{-3}$	$-1.28 \cdot 10^{-3}$	-	-

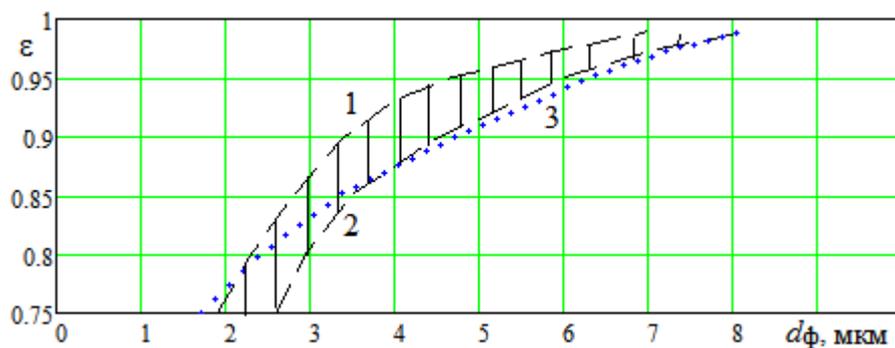


Рисунок 6.10 – Границы вариации характеристики степени очистки, обусловленные 10% погрешностями исходных параметров: при $\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta \rho_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{\Delta \chi_{m0}}{\chi_{m0}} = \frac{\Delta \bar{H}_m}{\bar{H}_m} = \pm 0.1$;

$$1 - \varepsilon(d_\phi^{-\Delta}); 2 - \varepsilon(d_\phi^{+\Delta}); 3 - \varepsilon(d_\phi^*)$$

Из рисунков 6.9 – 6.10 следует, что погрешность $\Delta \varepsilon(d_\phi) = \varepsilon(d_\phi) - \varepsilon(d_\phi^*)$

математической модели степени очистки практически лежит в поле разброса зависимости $\varepsilon(d_\phi)$, обусловленного 10% разбросом исходных параметров феррочастиц, постоянных магнитов и динамической вязкости ВТЖ.

Разработанный метод расчета погрешности математической модели степени очистки $\varepsilon(d_\phi)$ позволяет прогнозировать необходимые упреждения характеристики очистки при разработке магнитных сепараторов.

Таблица 6.15

Результаты расчета нижней границы $\varepsilon(d_\phi^{+\Delta})$ вариации характеристики степени очистки, обусловленной погрешностями исходных параметров

ε	0.75	0.8	0,85	0.9	0.93	0.975	0.99
v_1	2.55	3.65	5.5	12.85	23.3	52	79.5
d_ϕ , МКМ	2.6	2.94	3.5	4.5	5.44	7.1	8.2
t_{M1} , с	0.157	0.1514	0.1438	0.1257	0.1092	0.075	-
Δt_{M1} , с	0.0080	0.0097	0.0130	0.022	0.028	0.033	-
$r_2(t_0)$, м	-	-	-	-	-	0.02155	0.02248
$r_2(t_{01})$, м	-	-	-	-	-	0.02173	0.02269
$r_1(t_0)$, м	0.01786	0.01861	0.0191	0.0203	0.0205	-	-
$r_1(t_{01})$, м	0.01695	0.0177	0.0194	0.0217	0.0215	-	-
$\delta r_2(t_0)$, м	-	-	-	-	-	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$-3.2 \cdot 10^{-4}$
$\delta r_2(t_{01})$, м	-	-	-	-	-	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-4}$
$\delta r_1(t_0)$, м	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$0.6 \cdot 10^{-4}$	$-3.5 \cdot 10^{-5}$	-	-
$\delta r_1(t_{01})$, м	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	-	-

К магнитным сепараторам предъявляют высокие требования по степени очистки ВТЖ от ферромагнитных частиц $C_0/C_n \leq 0.1$, поэтому средняя степень очистки (1.1) должна принимать значения $\bar{\varepsilon}_0 \geq 0.9$.

Среднее значение степени очистки связано с монодисперсной степенью очистки $\varepsilon(d_\phi)$ статистическим выражением (1.2). Оценим выражение средней степени очистки, воспользовавшись условиями, что для типовых распределений дисперсного состава ферропримесей правомерно соотношение $\sigma/\bar{d}_n \leq 0.3$ (σ – среднеквадратичное отклонение размера феррочастиц, \bar{d}_n – средний размер феррочастиц), а участок зависимости степени очистки $\varepsilon(d_\phi)$ от размера монодисперсных примесей при $\bar{\varepsilon}_0 \geq 0.9$ пологий (см. рисунок 4.17), поэтому интеграл

(1.2) преобразуется следующим образом:

$$\bar{\varepsilon}(\bar{d}_и) \cong \int_{\bar{d}_и-\sigma}^{\bar{d}_и+\sigma} \varepsilon(d_\phi) \frac{d(d_\phi)}{2\sigma} = \varepsilon(\bar{d}_и), \quad (6.62)$$

в котором функция распределения дисперсного состава ферропримесей $f_и(d_\phi)$ на рассматриваемом участке заменена прямоугольной функцией $1/2\sigma$.

Сепаратор с параметрами, заданными таблицей 6.11, при $\bar{d}_и = 5$ мкм обладать $\bar{\varepsilon}_0 \geq 0.9$. По данным таблиц 6.12 – 6.13 (или рисунку 6.9) при $\bar{\varepsilon}_0 = 0.9$ на основе (6.62) следует, что погрешности модели дают следующий вклад в погрешность реализации степени очистки ВТЖ

$$\xi_1 = |\varepsilon(\bar{d}_\phi^*) - \varepsilon(\bar{d}_и)| / \varepsilon(\bar{d}_\phi^*) \leq 0.022 \quad (2.2\%). \quad (6.63)$$

По данным таблиц 6.14 – 6.15 (или рисунку 6.10) $\pm 10\%$ разбросы значений исходных параметров феррочастиц, постоянного магнита и динамической вязкости ВТЖ дают следующий вклад в погрешность реализации степени очистки

$$\xi_2 = |\varepsilon(d_\phi^{+\Delta}) - \varepsilon(\bar{d}_и)| / \varepsilon(\bar{d}_и) \leq 0.023 \quad (2.3\%). \quad (6.64)$$

Результирующая погрешность

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \leq 0.045 \quad (4.5 \%). \quad (6.65)$$

Значения погрешностей ξ_1 , ξ_2 , ξ при $\bar{\varepsilon}_0 > 0.9$ по данным таблиц 6.12 – 6.15 меньше значений (6.63) – (6.65).

Таким образом, из расчета погрешностей моделирования степени очистки приходим к следующему выводу:

- разработан метод определения погрешности математической модели степени очистки однорядного патронного магнитного сепаратора, обусловленной приближенными процедурами решения нелинейного уравнения динамики феррочастицы и аппроксимации характеристик, и погрешности, обусловленной разбросом параметров исходных данных (параметров феррочастиц, напряженности магнитного поля и динамической вязкости ВТЖ;

- приближенные процедуры построения математической модели степени очистки $\varepsilon(d_\phi)$ ВТЖ от ферромагнитных частиц при высоких уровнях очистки $C_0/C_и \leq 0.1$ обуславливают погрешность моделирования не более 2.5%;

– погрешность степени очистки $\varepsilon(d_{\phi})$, обусловленная 10% разбросом параметров исходных данных (параметров феррочастиц, напряженности магнитного поля и динамической вязкости ВТЖ) при высоких уровнях очистки $C_0/C_{н} \leq 0.1$ составляет не более 2.5%;

Обеспечение требуемого уровня степени очистки с учетом упреждения результирующей погрешности в новом магнитном сепараторе (см. таблицу 6.11, вариант №4) достигнуто применением новой методики расчета, учитывающей магнитную коагуляцию.

6.5. Выводы

1. Разработан метод параметрической оптимизации конструктивных параметров патронного магнитного сепаратора. В качестве критерия оптимальности выбрано условие минимума количества постоянных магнитов при заданной производительности и уровне качества очистки магнитного сепаратора. Построена математическая модель целевой функции и использован аналитический метод решения задачи (метод множителей Лагранжа). Решение многопараметрической задачи получено в аналитической форме на основе применения дифференциальной математической модели семейства характеристик степени очистки магнитного сепаратора.

2. Разработана машинная методика расчета магнитного сепаратора, в которой впервые учтены влияния процесса магнитной коагуляции, накопление слоя ферромагнитных частиц на поверхности магнитной системы и определены оптимальные конструктивные параметры сепаратора, что позволило уменьшить в два раза себестоимость магнитов, приходящих на единицу производительности.

3. Опытные-промышленные испытания патронных магнитных сепараторов для очистки ВТЖ по типовым заводским методикам подтвердили соответствие расчетных и экспериментальных параметров очистки и критерию достижения цели диссертации. Акты об использовании результатов диссертационной работы прилагаются в приложении 6.

4. Экспериментальные исследования и положительные результаты испыта-

ния подтвердили адекватность разработанных моделей и методик расчета, эффективность методов математического моделирования и правомерность методологии математического моделирования характеристик магнитной сепарации и магнитной коагуляции для реализации практических задач.

5. Разработанная методика расчета, основанная на математических моделях магнитной коагуляции и магнитной сепарации, предназначена для проектирования магнитных сепараторов, обеспечивающих очистку ВТЖ и СОЖ от тонкодисперсных ферромагнитных примесей.

6. Разработан метод оценки погрешности расчета и моделирования основной характеристики (степени очистки) патронного магнитного сепаратора позволил оценить погрешности, обусловленные как приближениями моделирования, так и разбросом параметров исходных данных. Численная оценка показала, что погрешность моделирования не превышает 2.5 %. Погрешность, обусловленная разбросом параметров исходных данных на ± 10 %, не превышает ± 2.5 %. Общая погрешность не превышает 5 %.

Разработанный метод оценки погрешности подтверждает и объясняет хорошее совпадение, проведенных теоретических и экспериментальных результатов исследования характеристик магнитного сепаратора.

Глава 7. ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПТИМИЗИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ СЕПАРАТОРОВ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ИХ ОСНОВЕ

7.1. Оптимизированные магнитные сепараторы и системы применения СОЖ на их основе. Технические характеристики систем

На основе анализа результатов теоретико-экспериментальных исследований и опыта эксплуатации магнитных сепараторов с феррито-бариевыми и неодим-боровыми магнитами с участием автора было разработано техническое задание на конструкторско-технологическое совершенствование патронных магнитных сепараторов с оптимизированных магнитных патронов.

В техническом задании был сделан упор на следующие моменты:

- 1) уменьшение числа магнитов в 6 раз и их стоимости в 2 раза;
- 2) изменение характера движения шламосьемных манжет с поверхности патронов с непрерывного (со скоростью $v = 2$ м/мин) на прерывистое (с длиной участков непрерывного движения, варьируемой от 30 до 100 мм, и с паузами в 10-15 с) для обеспечения истечения связанной в структуре осадка СОЖ и для ее возврата в систему очистки.

Указанные в ТЗ особенности привели к разработке новой платформенной конструкции магнитного сепаратора, обеспечивающей возможность очистки больших объемов СОЖ (до 1000 м³/ч и более) в централизованных системах их применения.

Платформенный магнитный сепаратор

В конструкцию магнитного сепаратора были внесены следующие изменения. Гидравлический привод заменен на цепной. Кассеты патронов и шламосьемных манжет, а также привод вертикального конвейера присоединены к платформам, а не к траверсам как у КМС. Для отдельного удаления СОЖ и осадка были использованы соединенные в единый подвижный блок лотки и поперечные цепные конвейеры, размещаемые непосредственно на верхнем поясе емкости сепаратора. Для удаления шлама со дна емкости предусмотрены донные цепные скребковые продольные кон-

вейеры. Цепной механизм перемещения платформ соединен шарнирно с платформой манжет, а платформы кассет магнитных сепараторов свободно лежат на поверхности платформ манжет. Цепной механизм с червячным приводом обеспечивает возможность прерывистого движения платформы манжет по заданной циклограмме.

Конструкция модуля платформенного магнитного сепаратора ПМС представлена на рисунке 7.1.

В полости корпуса *1* со скошенной передней стенкой *19* встроены два донных цепных скребковых конвейера *21* с приводами *17* для удаления осадка окалины со дна *22* полости корпуса, что позволило предотвратить образование осадка окалины и заиливание корпуса. Трудноудаляемый, консолидирующийся во времени, осадок является прекрасным субстратом для размножающихся колоний анаэробных микроорганизмов, способствующих разложению СОЖ, поэтому его необходимо непрерывно удалять.

С обеих сторон корпуса смонтированы четыре составные колонны *5*. Нижняя часть колонны состоит из 2-х швеллеров, верхняя часть представляет собой трубчатую цилиндрическую направляющую. Для предотвращения раскачивания платформы в процессе перемещения с помощью бесконечных цепей *13* в углы платформ вмонтированы направляющие втулки с четырьмя подпружиненными шаровыми опорами на каждом ярусе. Платформы могут перемещаться по горизонтали на 1-2 мм.

Цилиндрические направляющие объединены в единую клеть с помощью нижней рамы из швеллеров и верхней платформы *8*, на которой размещен привод подъема платформы *6* шламосьемных манжет. Механизм подъема обеспечивает одновременное движение всех углов платформ, поскольку звездочки *12* цепных передач согласованы с помощью системы червячных редукторов *9* и карданных валов *11*, приводимых во вращение червячным электроприводом *10*. Привод подъема работает по заложенной в блок управления программе. В программе предусмотрены прерывисто-шаговый характер подъема – опускания платформ, варьирование скоростью движения (1-3 м/с) и временем пауз (от 1 до 15 с). Нижние концы колонн соединены с корпусом емкости. Верхняя платформа установлена на высоте 2,0 м над верхним поясом *16* корпуса.

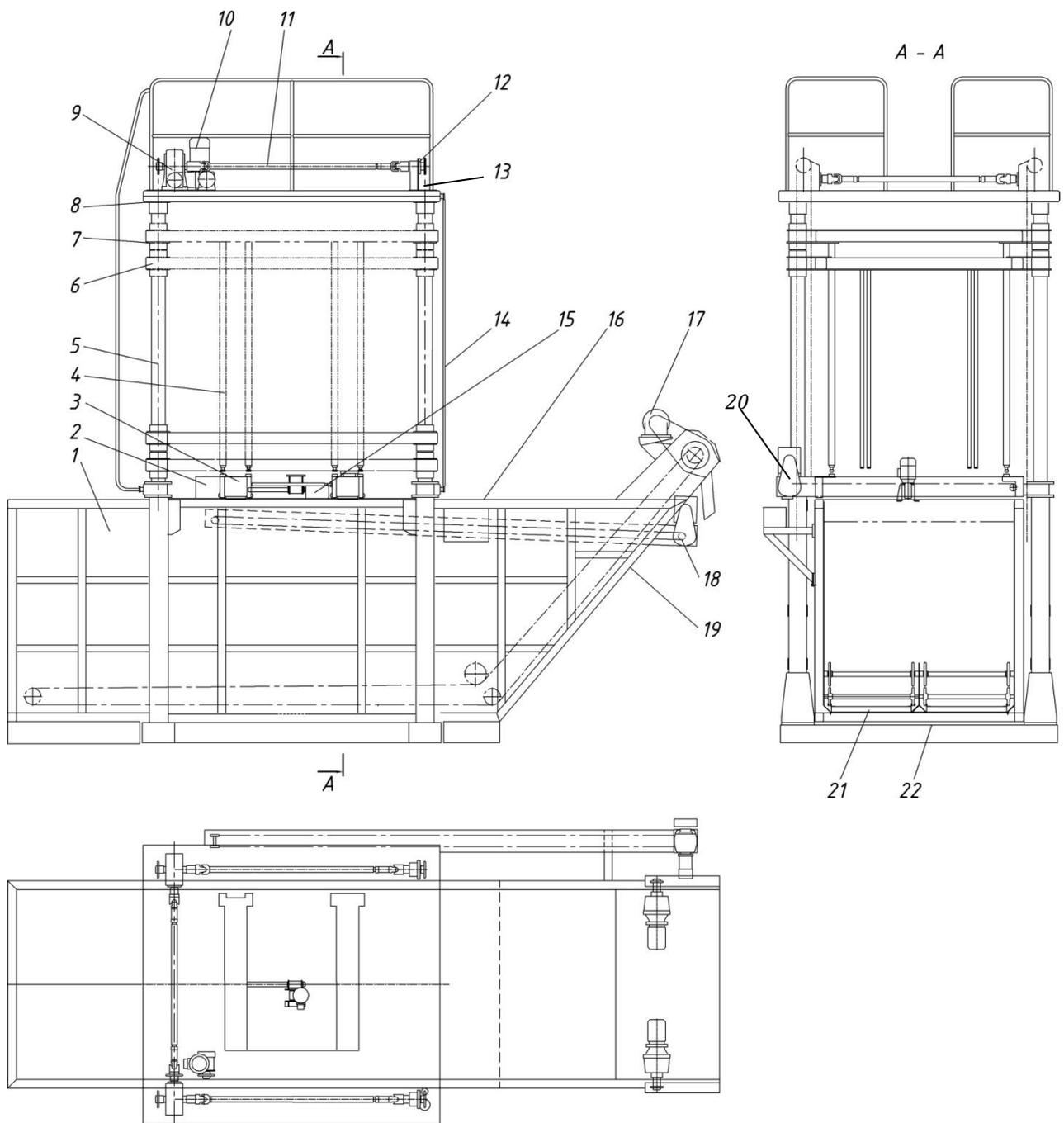


Рисунок 7.1 – Модуль магнитной сепарации

Платформа 7 батарей магнитных патронов 23 свободно лежит на верхней поверхности платформы 6 и может перемещаться с ней. Платформа может с помощью упоров 4 фиксироваться на поверхности блока лотка 2 конвейеров 3 при их нахождении под кассетами патронов. При отведении по поверхности 16 корпуса блока в сторону от кассет патронов платформа 7 имеет возможность опускаться в полость корпуса в рабочее положение для осаждения феррочастиц из СОЖ на по-

верхность патронов. Перемещение блока ступенчатое с помощью винтового механизма от червячного привода 15. Положение платформ и блока регистрируется с помощью индукционных датчиков положения, не показанных на рисунке. Механизмы подъема закрыты с боков ограждением 14.

Полиуретановые шламосьемные манжеты охватывают магнитные патроны и свободно перемещаются в горизонтальном направлении на 1-2 мм, что позволяет минимизировать их истирание шламом при осевом перемещении манжет по поверхности патронов.

Оголовки 20 поперечных конвейеров размещены над продольным цепным конвейером 18, размещенным с одной стороны корпуса.

Модуль платформенного магнитного сепаратора работает в соответствии с циклограммой, представленной в таблице 7.1. Во время перемещения платформы 6 относительно платформы 7 из положения 6.1 в положение 6.2 производится отжим шлама, вытеснение жидкости и сток ее в лоток 2, из положения 6.2 в положение 6.3 – сброс шлама в конвейер 3. Во время пауз при прерывно-шаговом движении платформы 6 из переструктурированного шлама на поверхности патронов 23 вытекает ранее связанная жидкость, которая далее сливается в лоток. Во время паузы в положении 6.4 производится осаждение шлама на поверхности магнитных патронов.

СОЖ перетекает в корпус по лоткам без напора в проем в верхней части корпуса 1 перед патронами, а выходит из корпуса в проем в верхней части корпуса после патронов. СОЖ из лотков сливается в корпус. Шлам из поперечных конвейеров 3 сбрасывается в продольный конвейер 18.

Длительность пауз и скорость движения узлов даны в таблице 7.1.

На основе модулей платформенных магнитных сепараторов были разработаны подсистемы очистки СОЖ для технологических линий механической (лезвийной) и абразивной обработки (шлифования). Технические характеристики системы представлены в таблице 7.2, а принципиальная схема на рисунке 7.2.

Таблица 7.1

Циклограмма движений узлов магнитного сепаратора по переходам

Переход	Положение		Скорость, м/мин	Пауза
	Исходное	Конечное		
Подвод лотка в блоке с конвейером	ЛО1 КО1	ЛО2 КО2	1	–
Опуск платформ 6 и лежащей на его поверхности платформы 7	П7.1	П7.2	2	–
Пауза – фиксация платформы 7, с	–	–	–	0,1-1,0
Прерывно-шаговый опуск платформы 6 Опуск, $l = s$, м	П6.1	П6.2	2	
Пауза, с			–	0,1 –1,0
Быстрый подъем конвейера 6 и платформы 7	П6.2 П7.2	П6.1 П7.1	8	–
Вывод лотка Подвод конвейера	Л2 К2	Л3 К3	1	–
Быстрый опуск платформ 6 и 7	П6.1 П7.1	П6.2 П7.2	8	–
Опуск платформы 6 сброс шламов с патронов	П6.2	П6.3	2	–
Быстрый подъем платформ 6 и 7	П7.2 П6.3	П7.1 П6.1	8	–
Отвод лотка и конвейера	ЛО3 КО3	ЛО1 КО1	1	–
Быстрый опуск платформ 6 и 7	П6.1 П7.1	П6.4 П7.3	8	–
Пауза магнитной сепарации, мин	–	–	–	20-240
Быстрый подъем платформ 6 и 7	П6.4. П7.3	П6.1. П7.1	8	–

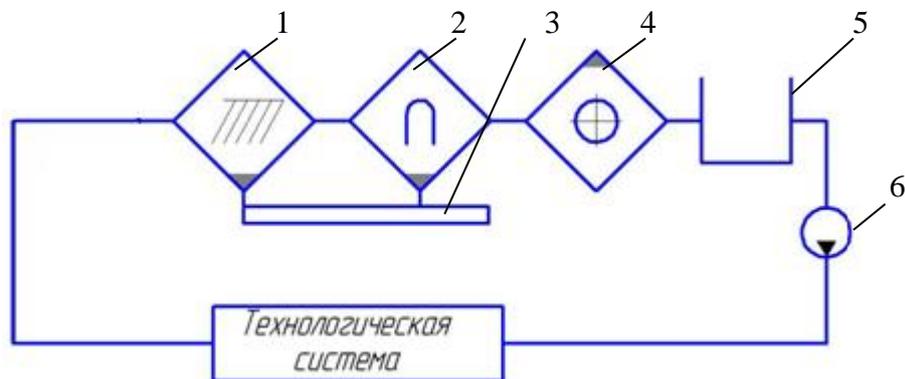


Рисунок 7.2 – Принципиальная схема централизованной системы очистки СОЖ:

1 – (Т) тонкослойный отстойник; 2 – магнитный сепаратор; 3 – транспортная система;

4 – масляесъемный барабан; 5 – приемная емкость; 6 – насос

Таблица 7.2

Технические характеристики систем очистки СОЖ на основе ПМС

Параметр	Символ	Размерность	Системы очистки	
			ЦСО-900	ЦСО-300
Производительность	Q	м ³ /ч	900	300
Тонкость очистки	d_{50}	мкм	5	5
Степень очистки от феррочастиц	$\varepsilon_{\text{ф}}$	–	0,95	0,95
Степень очистки от посторонних масел	$E_{\text{пм}}$	–	0,85	0,85
Мощность	P	кВт	150	50

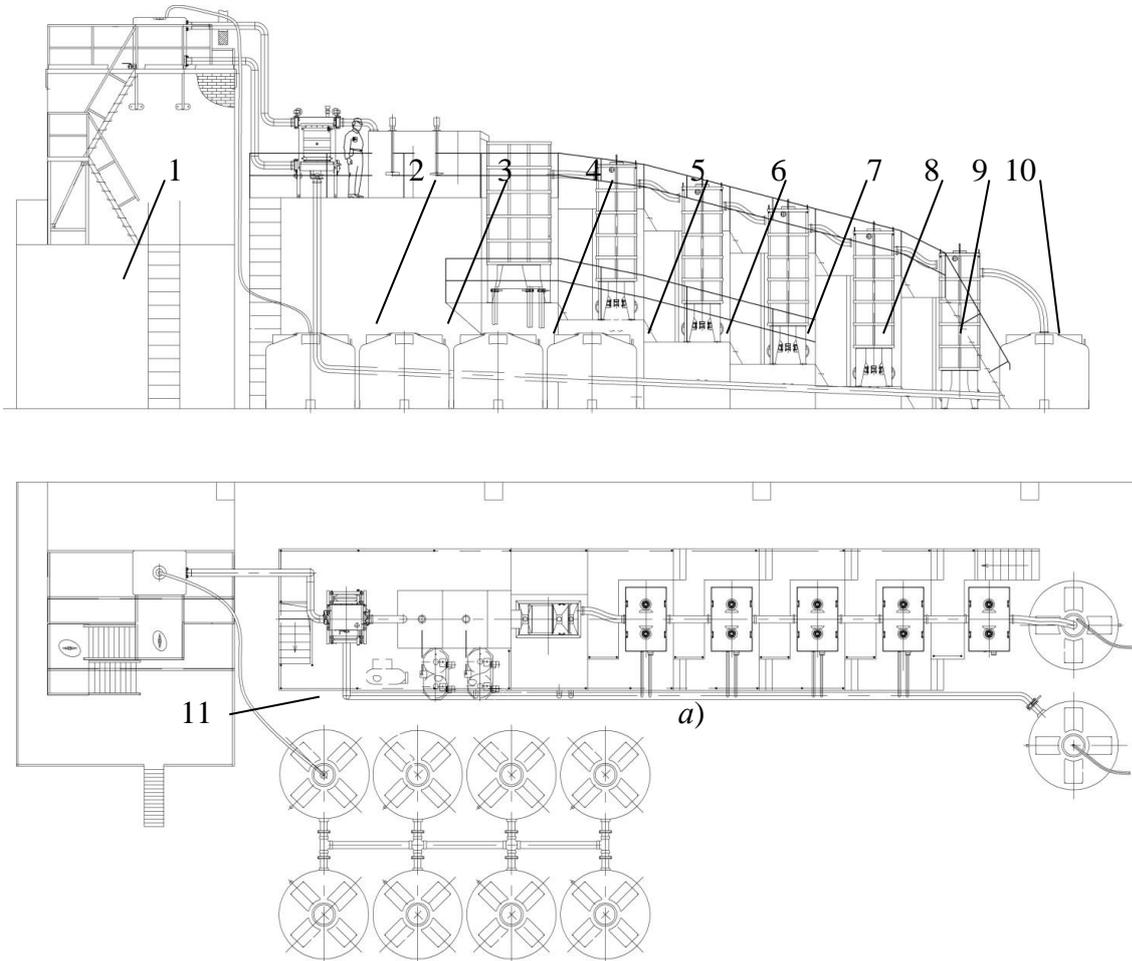
На рисунке 7.3 показан общий вид опытной системы очистки ЦСО-50, обеспечивающей возможность комплексной очистки водных жидкостей от посторонних примесей. Особенностью системы является использование только одной ступени насосов для подачи воды на площадку в расходную емкость. Затем ВТЖ проходит последовательно магнитный сепаратор 2, промежуточную емкость 3, вертикальный тонкослойный отстойник 4, адсорбционный фильтр 5 для удаления нефтепродуктов, адсорбционно-каталитические фильтры 6-9, предназначенные для удаления растворенных примесей. Очищенная ВТЖ собирается в емкость 10, а загрязненная ВТЖ подается из емкостей 11 погружными насосами (на рисунке не показаны).

Используемые при очистке СОЖ кассетные и платформенные магнитные сепараторы практически неприменимы при очистке безмасленных СОЖ и ВТЖ из-за подверженности гильз магнитных патронов абразивному износу, обусловленному более худшими смазочными свойствами ВТЖ по сравнению с СОЖ.

Исследования эффективности магнитной сепарации водных жидкостей без примесей масла проводили на магнитоводном сепараторе в рамках заказа Фонда поддержки малых предприятий. Такие сепараторы используют для снижения износа гильз магнитных патронов при сепарации ВТЖ.

Магнитоводный сепаратор состоит из корпуса 2, немагнитных вставок 5, разделяющих внутреннюю полость корпуса на рабочую 3 и нерабочую 4 зоны (рисунок 7.4). В его корпус вставлены гильзы из немагнитных материалов с размещенными внутри магнитными элементами (см. главу 1 и 3).

Для перевода системы магнитных элементов одновременно из рабочего положения (сепарация) в нерабочее (смыв осадка) сепаратор снабжен двумя исполнительными механизмами 7 и 8, состоящими из плит и диафрагменных приводов.



б)

Рисунок 7.3 – Опытная система очистки ВТЖ (ЦСО-50), выполненная в рамках ФЦП: а – общий вид, б – фото; позиции даны в тексте

Для управления подводом и отводом ВТЖ предусмотрены патрубки 10, 12,

13 и 16 и задвижки 9, 11, 14 и 15.

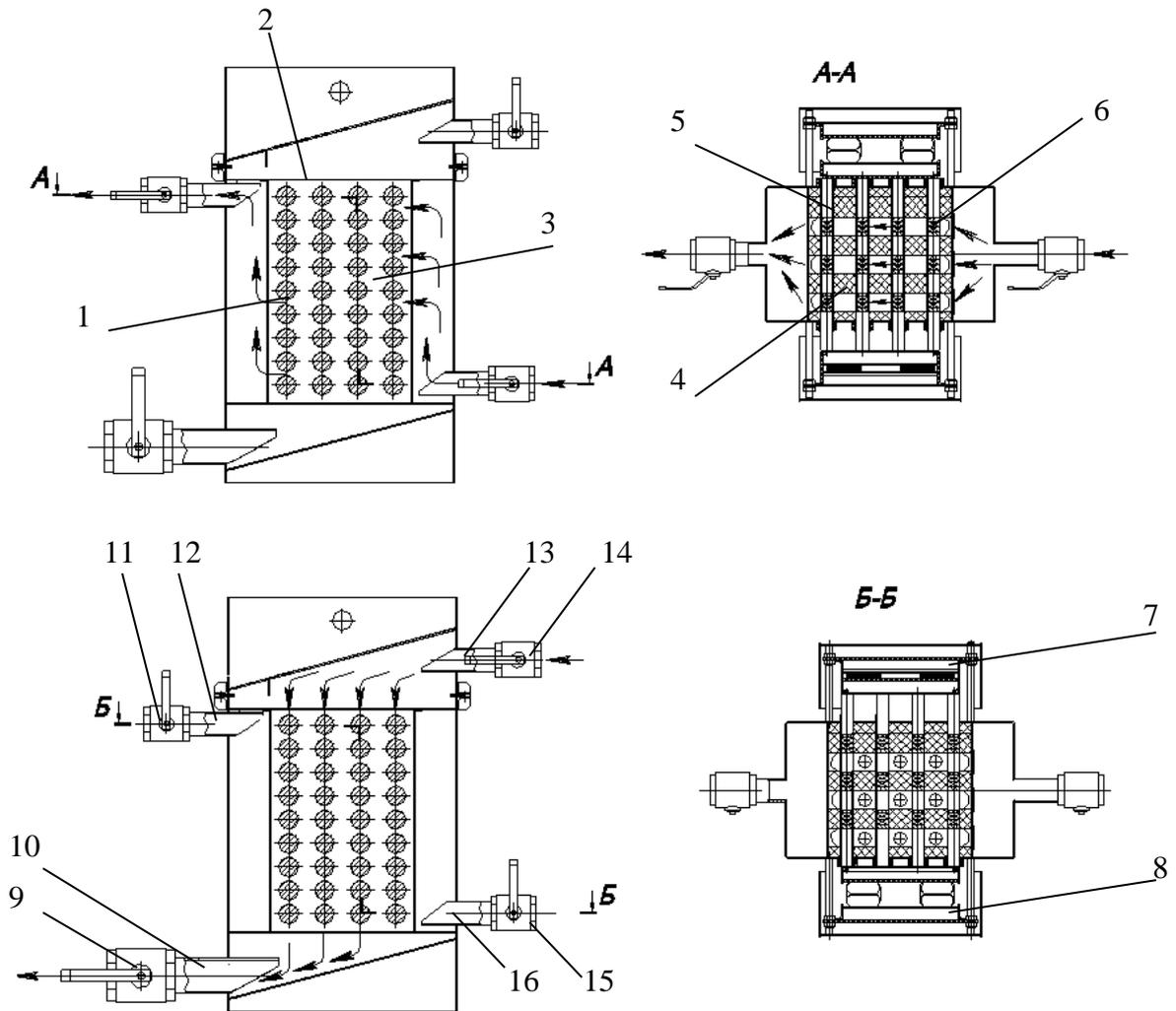


Рисунок 7.4 – Схема магнитоводного сепаратора: *а* и *б* – работа сепаратора в режиме очистки; *в* и *г* – работа сепаратора в режиме промывки; позиции расшифрованы в тексте

Очистка ВТЖ от магнитных агрегатов осуществляется в процессе движения последней перпендикулярно оси патронов (труб) в рабочей зоне 3 со скоростью $v_{ж}$ (больше 80 м/ч), которая должна соответствовать заданной степени очистки. Очищенная жидкость сливается через выходной патрубок 11.

В режиме промывки закрываются задвижки 11 и 15 и открываются задвижки 9 и 14. В этот же момент времени исполнительный механизм 8 смещает магниты в гильзах 5 в нерабочую зону 9, в результате чего снимается магнитное поле в рабочей зоне 3. Промывная вода легко смывает осадок с поверхности гильз и по выходному патрубку 12 отправляется на длительную сепарацию. Скорость жидкости в режиме промывки выше 0,5 м/с и обеспечивает удаление осадка с поверхности труб.

Конструкция сепаратора позволяет использовать мощные постоянные магниты, а отсутствие механического удаления осадка частиц с поверхности трубы в процессе промывки сепаратора предотвращает износ патронов, повышает производительность единичного аппарата, снижает стоимость сепаратора.

На рисунке 7.5, *а* представлен общий вид опытного магнитоводного сепаратора МВ-1, а на рисунке 7.5, *б* – изометрическое изображение, а в таблице 7.3 приведены технические характеристики.

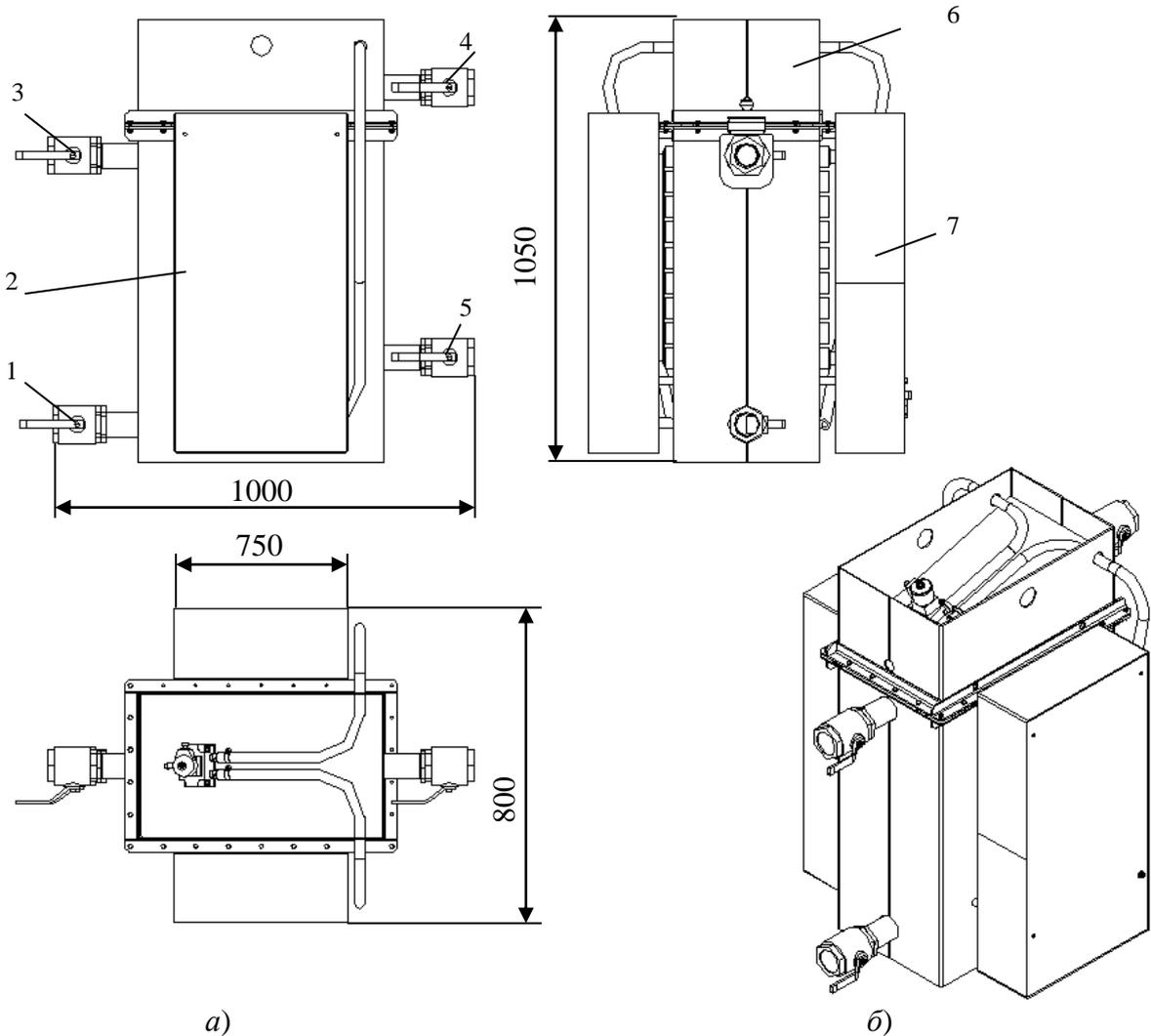


Рисунок 7.5 – Опытный магнитоводный сепаратор СМВ 1:

а) – ортогональные проекции; *б*) – изометрическое изображение;

1, 3 – патрубки подвода и отвода СОЖ; 2 – корпус; 4, 5 – патрубки подвода и отвода ВТЖ; 6 – лоток; 7 – приводы перемещения магнитов

Эффективность магнитоводного сепаратора проверялась в действующем производстве в условиях горячекатаного производства ОАО НЛМК при очистке воды, поступающей со стана 2000 на горизонтальные отстойники. Вода на магнитоводный сепаратор подавалась из лотка после смесительной камеры. В

это время подача флокулянта прекращалась. Во время испытаний контролировались: концентрация взвешенных веществ и нефтепродуктов в ВТЖ. Оценка проводилась в лаборатории энергетического производства. Продолжительность промывки не превышала одной-двух минут.

Из рисунка 7.5 видно, что заданная концентрация взвеси в очищенной воде (≤ 20 мг/дм³) степень очистки $\varepsilon = 0,78$ обеспечиваются при производительности магнитоводного сепаратора ≤ 1 м³/ч

Таблица 7.3

Техническая характеристика СМВ-1

№ п/п	Параметр	Символ	Размерность	Величина
1	Производительность	Q	м ³ /ч	0,5 - 2,0
2	Степень очистки	ε	—	0,75 - 0,98
3	Концентрация феррочастиц в исходной ВТЖ	C_{ϕ}	г/дм ³	до 10
4	Время непрерывной очистки между смежными промывками	T	ч	0,2 – 2,0
5	Габаритные размеры			
	длина	L	мм	1000
	ширина	B	мм	750
	высота	H	мм	1050
6	Масса	M	кг	326

При этом обеспечивается остаточная концентрация нефтепродуктов в очищенной СОЖ менее 5 мг/дм³. Это связано с тем, что при очистке в магнитоводном сепараторе на поверхности магнитоводов оседают частицы с адсорбированными нефтепродуктами. Продолжительность непрерывной очистки в магнитоводном сепараторе между смежными промывками достигает 125 мин при сохранении концентрации механических примесей в очищенной СОЖ в пределах 20 мг/дм³ (рисунок 7.6). Степень очистки ВТЖ более 0,78.

На основе опытного образца разработан магнитоводный сепаратор МВС-250 производительностью 250-500 м³/ч (рисунок 7.8, а), внутреннее устройство магнитоводного сепаратора представлено на рисунке 7.8, б. Технологическая схема данной системы очистки представлены на рисунке 7.9.

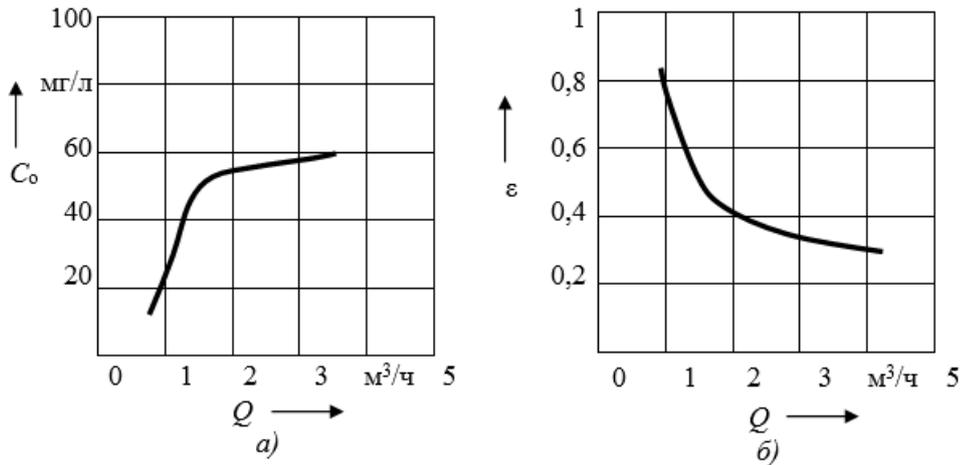


Рисунок 7.6 – Зависимости концентрации взвеси в очищенной ВТЖ (а) и степени очистки (б) магнитоводного сепаратора от его производительности

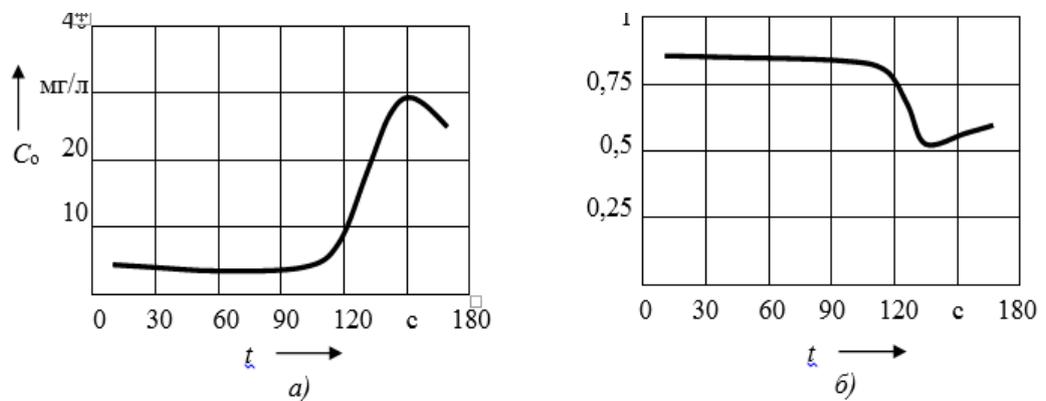


Рисунок 7.7 – Зависимости концентрации взвеси в очищенной ВТЖ (а) и степени очистки (б) магнитоводного сепаратора от времени непрерывной работы

Прямоугольный корпус магнитоводного сепаратора СВМ-250 размещен на четырех опорах 1. Для перемещения кассет предусмотрены восемь пневмоприводов 3 диафрагменного типа. Для подвода и отвода ВТЖ размещены трубопроводы.

Магнитоводный сепаратор СВМ-250 работает следующим образом. В трубопровод 6 через кран I подается загрязненная вода ВТЖ. Через систему каналов далее ВТЖ распределяется по рабочим зонам магнитоводов, в которых находятся магнитные модули 4. Из рабочих зон очищенная ВТЖ через систему каналов попадает в трубопровод 5 и через открытый кран II подается потребителю. При промывке через открытый кран III при закрытых кранах I и II ВТЖ подается на патроны с осадком, из которых выведены в нерабочую зону магнитные модули. Через систему патронов и кран IV ВТЖ с удаленным осадком подается на обезвоживание.

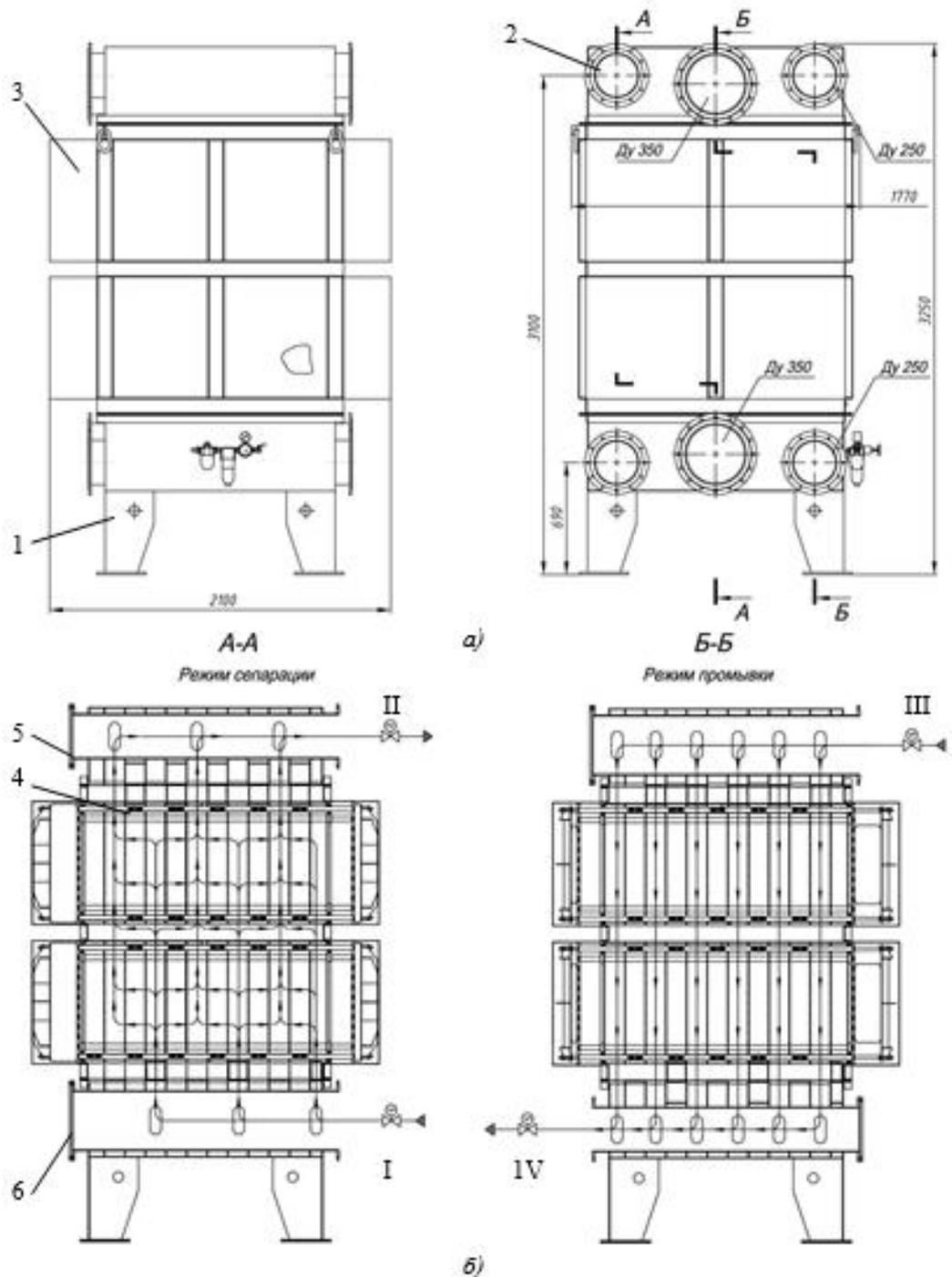


Рисунок 7.8 – Сепаратор магнитоводный ВМС-250:
(а) – общий вид; (б) – разрезы А-А и Б-Б; I, II, III, IV – краны

На рисунке 7.9 показана технологическая схема централизованной системы очистки ВТЖ в цикле ее оборота в производстве горячекатаного листа металлургического комбината, разработанную в рамках ФЦП. Стекающая с прокатного стана ВТЖ подается на магнитные сепараторы МС, а затем возвращается в производство. Осадок направляется в блоки сгущения и обезвоживания.

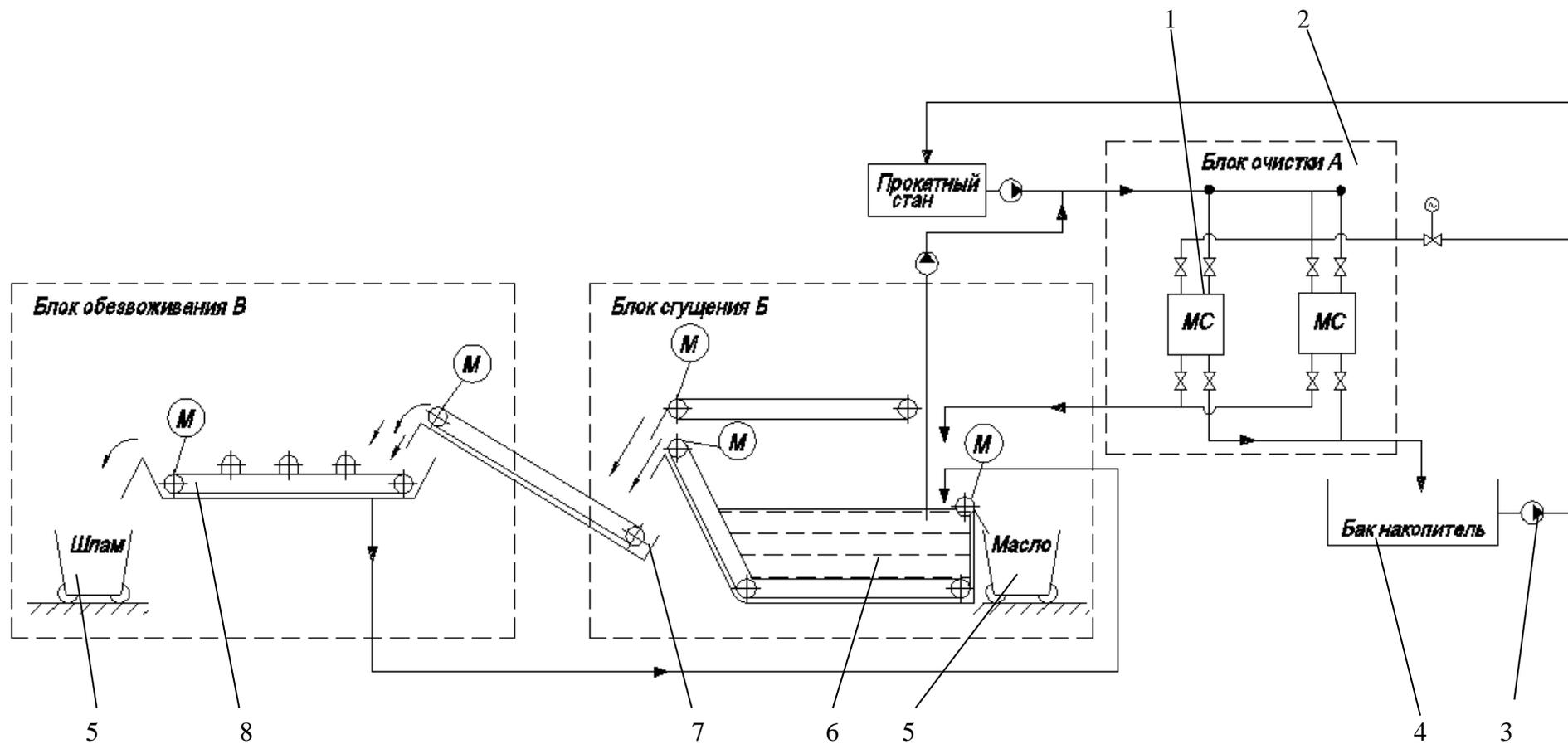


Рисунок 7.9 – Схема системы очистки ВТЖ от магнитной окалины производительностью 500 м³/ч:
 1 – магнитный сепаратор; 2 – блок магнитной очистки; 3 – насос; 4 – бак-накопитель; 5 – тара; 6 – установка сгущения;
 7 – конвейер; 8 – конвейер

7.2. Методика расчеты годового экономического эффекта от внедрения магнитных сепараторов при очистке СОЖ в металлообрабатывающих производствах

Методика расчета годового экономического эффекта основана на сопоставлении экономических эффектов, достигаемых при применении в ЦСО кассетных магнитных сепараторов с магнитными патронами на феррито-бариевых магнитных элементах (базовый вариант), и платформенных магнитных сепараторов на неодим-боровых магнитных элементах (предлагаемый вариант).

1. Оценка годового экономического эффекта от внедрения магнитного сепаратора по варианту определяется по уравнению $\mathcal{E} = \Delta Z + E_n \Delta K$, где

$$\Delta Z = Z_б - Z_{пр}; \quad \Delta K = K_б - K_{пр}, \quad (7.1)$$

где индексы "б" и "пр" означают базовый и предлагаемый варианты; ΔZ и ΔK – разности затрат и капитальных вложений по базовому ($Z_б$ и $K_б$) и предлагаемому ($Z_{пр}$ и $K_{пр}$) вариантам, тыс. руб.; $E_n = 0,16$ – нормативный коэффициент эффективности капиталовложений.

2. Затраты по вариантам по изменяющимся статьям оцениваются для ЦСО производительностью 100 м^3 , а затем преобразуются в затраты для ЦСО с проектной производительностью. Совокупные затраты, тыс. руб., определяются по уравнению

$$Z = Z_{кз} + Z_{кд} + Z_{кмр} + Z_в + Z_{о \text{ ЦСО}} + Z_{фм} + Z_{ам}, \quad (7.2)$$

где $Z_{кз}$ – годовые затраты на концентрат СОЖ при ее замене; $Z_{кд}$ – годовые затраты на концентрат СОЖ при ее доливе; $Z_{кмр}$ – годовые затраты на концентрат моющего раствора; $Z_в$ – затраты на водную основу для СОЖ и моющих растворов; $Z_{о \text{ ЦСО}}$ – годовые затраты на очистку ЦСО; $Z_{фм}$ – годовые затраты на фильтровальные материалы; $Z_{ам}$ – затраты на амортизацию.

В составе совокупных затрат, как правило, присутствуют затраты, связанные с полученными технологическими эффектами. Например, экономические эффекты от снижения прижогообразования, расхода металлообрабатывающего (лезвийного и абразивного) инструментов, потерь на брак при прокатке и др., нами не учитывались. Такой подход вызван отсутствием конкретной априорной информации для анализируемой технологической.

3. Годовые затраты на концентрат при замене СОЖ определяются по формуле

$$Z_{K3} = n_3 \cdot V_{\text{ЦСО}} \cdot K_{\text{СОЖ}} \cdot Ц_{\text{К}} [1 + (k_p - 1) + (k_{\text{пр}} - 1) \cdot (k_y - 1)], \quad (7.3)$$

где n_3 – годовое число замен СОЖ; $V_{\text{ЦСО}}$ – объем разовой заправки, м³; $K_{\text{СОЖ}}$ – концентрация СОЖ; $Ц_{\text{К}}$ – цена концентрата СОЖ, тыс. руб./т; k_p , $k_{\text{пр}}$, k_y – коэффициенты, учитывающие затраты соответственно на разложение, приготовление и утилизацию СОЖ.

4. Годовые затраты на концентрат на доливку СОЖ (замещение убыли от распыления, испарения и унос с продукцией) рассчитывается по уравнению

$$Z_{\text{КД}} = n_{\text{д}} \cdot V_{\text{ЦСО}} \cdot K_{\text{ДОЛ}} \cdot K_{\text{СОЖ}} \cdot Ц_{\text{К}} [1 + (k_p - 1) + (k_{\text{пр}} - 1) \cdot (k_y - 1)], \quad (7.4)$$

где n_3 – годовое число доливок СОЖ в ЦСО.

5. Годовые затраты на концентрат моющего раствора

$$Z_{\text{КМР}} = n_3 \cdot V_{\text{ЦСО}} \cdot k_{\text{зап}} \cdot K_{\text{МР}} \cdot Ц_{\text{МР}}, \quad (7.5)$$

где $k_{\text{зап}}$ – коэффициент заполнения емкостей моющим раствором ЦСО при ее промывке; $K_{\text{МР}}$ – концентрация моющего раствора; $Ц_{\text{МР}}$ – стоимость концентрата моющего раствора, тыс. руб./м³.

6. Годовые затраты на водную основу на приготовления СОЖ и моющих растворов

$$Z_{\text{В}} = [n_3 \cdot 1,5 \cdot V_{\text{ЦСО}} \cdot (1 - K_{\text{СОЖ}}) + n_{\text{ДОЛ}} \cdot k_{\text{зап}} \cdot V_{\text{ЦСО}} \cdot (1 - K_{\text{МР}})] \cdot Ц_{\text{В}},$$

где $Ц_{\text{В}}$ – стоимость 1 м³ воды, тыс. руб.

7. Годовые затраты на очистку централизованных систем при замене СОЖ подсчитывается по уравнению

$$Z_{\text{О ЦСО}} = n \cdot T \cdot Ц_{\text{О ЦСО}},$$

где T – трудозатраты на очистку ЦСО, нч; $Ц_{\text{О ЦСО}}$ – стоимость 1 норма-часа, тыс. руб.

8. Годовые затраты на фильтровальные материалы определяются по формулам

$$Z_{\text{ФМ}} = \Phi_{\text{д}} \cdot Q \cdot M_{\text{р}} \cdot Ц_{\text{ФМ}},$$

где $\Phi_{\text{д}}$ – действительный годовой фонд времени, ч; Q – производительность, м³/ч; $M_{\text{р}}$ – удельный расход фильтроматериалов, м²/м³; $Ц_{\text{ФМ}}$ – стоимость 1 м² фильтроматериала, тыс. руб./м².

9. Годовые затраты на амортизацию оцениваются из выражения

$$Z_{AM} = \alpha_{AM} \cdot K ,$$

где K – капитальные вложения, тыс. руб.; α_{AM} – коэффициент амортизационных отчислений.

7.3. Экономическая эффективность разработанных магнитных сепараторов в системах применения СОЖ в металлообрабатывающих производствах

Расчет годового экономического эффекта выполнен специалистами экономического бюро ЗАО "Системы водоочистки". При расчете базовыми вариантами служили:

- 1) широко распространенный полосовой фильтр – "Zack" производительностью 180 м³/ч;
- 2) кассетный магнитный патронный сепаратор (КМС) производительностью 180 м³/ч.

Расчет производился в 3 этапа. На первом этапе оценивали приведенный экономический эффект для сопоставления различных типов сепараторов производительностью 100 м³/ч (рисунок 7.10). На втором этапе пересматривали эффект с учетом изменения производительности до заданной в ТЗ. При этом предполагали линейный характер зависимости $\Delta(Q)$, характерную для области значений $Q > 100$ м³/ч.

Исходные данные для расчета экономической эффективности сравниваемых вариантов технологической ситуации даны в таблице 7.4.

Графы 1–10, 12, 14, 16 содержат показатели для систем производительностью 100 м³/ч. В остальных графах даны показатели для систем при производительности, указанных в таблице 7.4.

Рассчитанные годовые экономические эффекты для сравниваемых технологических ситуаций представлены в таблице 7.5.

В результате расчета установлено:

1. Суммарный годовой расчетный эффект от применения разработанных систем с КМС и ПМС составил 70 млн. руб.
2. Годовой приведенный совокупный экономический эффект от применения ПМС в 1,6 раза больше достигаемого при применении КМС.
3. Доля экономии на фильтровальных материалах составляет 15 -18 %.

Таблица 7.4

Исходные данные для расчета экономической эффективности

№ п/ п	Статья затрат	Обоз- на- чение	ЦСО с применением			
			фильтров Zack	КМС-180	ПМС-900	ПМС-300
1	2	3	4	5	6	7
1	Производительность централизованной системы	Q	180	180	900	300
2	Концентрация СОЖ, т/м ³	$K_{\text{СОЖ}}$	0,03			
3	Концентрация моющего раствора (МР), т/м ³	$K_{\text{МР}}$	0,02			
4	Трудоемкость очистки оборудования	T	24	24	48	12
5	Капитальные вложения, тыс. руб.		13000	7500	3750	3750
6	Цена концентрата СОЖ, тыс. руб. /м ³	$\Pi_{\text{СОЖ}}$	100			
7	Цена концентрата МР, тыс. руб. /м ³	$\Pi_{\text{МР}}$	89			
8	Цена оборотной воды, тыс. руб. /м ³	$\Pi_{\text{В}}$	0,05			
9	Коэффициент, учитывающий затраты при разложении СОЖ	k_p (7.3)	1,5			
10	Коэффициент, учитывающий затраты на приготовление СОЖ	$k_{\text{пр}}$ (7.3)	1,2			
11	Коэффициент, учитывающий затраты на утилизацию стоков от разложения СОЖ	k_y (7.3)	1,4			
12	Коэффициент, учитывающий затраты на переработку стоков МР	$k_{y \text{ МР}}$	2,1			
13	Коэффициент, учитывающий долив	$k_{\text{дол}}$	0,3	0,25	0,1	0,1
14	Число замен	n_z	6	3	1	1
15	Число доливов	n_d	54			
16	Коэффициент, учитывающий затраты на приготовление и разложение МР	$k_{\text{пр МР}}$	1,5			
17	Объем заправки, м ³		30			
18	Цена фильтровального материала, тыс. руб./м ²	$\Pi_{\text{фм}}$	0,1	–	–	–
19	Расход фильтровального материала, м ² /м ³	$M_{\text{фм}}$	0,4	–	–	–
20	Стоимость трудозатрат, руб./Нч	$\Pi_{\text{оц}}$	0,4			

Таким образом, можно утверждать, что годовой экономический эффект ПМС превышает годовой эффект КМС, то есть конструкторско-технологическое со-

вершенствование магнитных сепараторов является целесообразным и перспективным направлением развития техники очистки для ЦСО.

Таблица 7.5

Годовой экономический эффект разработанных ЦСО
с магнитными сепараторами, тыс. руб.

№ п/п	Показатель	ЦСО с применением			
		фильтров Zack - 180	КМС-180	ПМС-900	ПМС-300
1	2	3	4	5	6
1	Годовые затраты на концентрат при замене СОЖ	1134	567	189	189
2	Годовые затраты на долив СОЖ	1458	1215	486	486
3	Годовые затраты на концентрат моющего раствора	336	168	56	56
4	Годовые затраты на водную основу	52,4	46	41	41
5	Годовые затраты на очистку емкостей ЦСО	58	29	10	10
6	Годовые затраты на амортизацию	722	417	42	117
7	Годовые затраты на фильтроматериалы	1600	–	–	–
8	Совокупные годовые затраты на реагенты, концентраты и воду	3038	2025	782	782
9	Разность совокупных приведенных годовых затрат по п. 8	–	1013	2256	2256
10	Совокупные годовые приведенные затраты	5440	2442	824	824
11	Разность годовых приведенных затрат по п.10	–	2998	4616	4616
12	Приведенные капитальные вложения	7222	4166	416	1250
13	Разность приведенных капитальных вложений	–	3056	6806	5972
14	Составляющая $E_n \cdot \Delta K$ в приведенном годовом экономическом эффекте	–	489	1089	955
15	Разность амортизационных отчислений	–	305	680	605
16	Приведенный годовой экономический эффект	–	3487	5571	5296
17	Годовой экономический эффект	–	6150	47664	16713

Продолжение таблицы 7.5

18	Доля в экономическом эффекте затрат:				
	– на жидкость и реагенты;	–	0,29	0,43	0,40
	– на фильтробумагу;	–	0,46	0,30	0,29
	– на амортизацию;	–	0,09	0,13	0,10
	– $E_n \cdot \Delta K$	–	0,14	0,12	0,17
	Итого		0,98	0,98	0,96
19	Суммарный годовой экономический эффект				70530

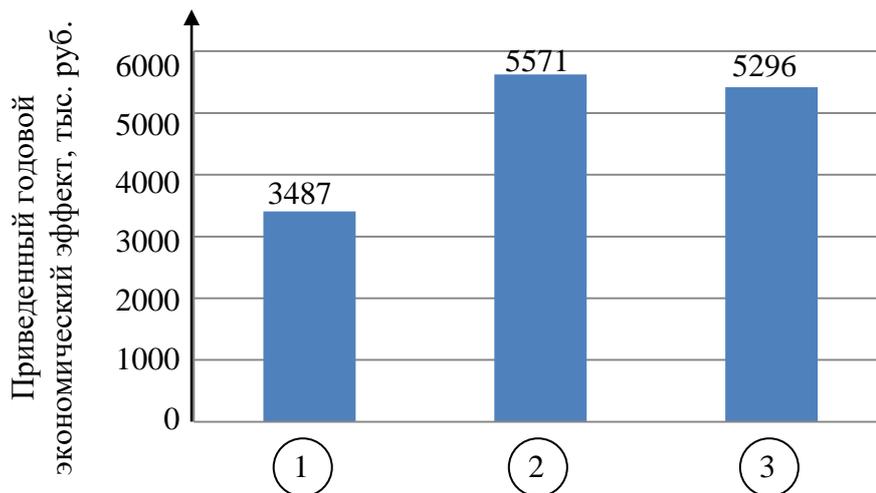


Рисунок 7.10 – Приведенный годовой экономический эффект при $Q = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$:
1 – ЦСО с КМС; 2 – ЦСО ПМС-900; 3 – ЦСО ПМС 300

7.4. Выводы

1. На основе анализа результатов теоретико-экспериментальных исследований и опыта эксплуатации магнитных сепараторов с феррито-бариевыми и неодим боровыми магнитами были разработаны технические задания на усовершенствованные сепараторы с оптимизированными магнитными патронами.
2. В связи с необходимостью уменьшения потерь жидкости со шламом была изменена кинематическая схема магнитного сепаратора – новая схема реализует прерывисто-шаговое движение шламосьемных манжет, реализация которого обеспечивает обезвоживание осадка на поверхности магнитных патронов при его удалении.
3. В кинематической схеме гидропривод был заменен на цепной.
4. В результате применения разработок автора и реализации технических заданий при конструировании магнитных сепараторов получен суммарный расчетный годовой экономический эффект 70 млн. руб.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое моделирование систем магнитного разделения ферромагнитных суспензий, как сложных систем, строилось на принципах декомпозиции и преобразования функционально агрегированных физических моделей (описываемых интегральными и дифференциальными уравнениями) в альтернативные математические модели, которые необходимы для снижения временных и ресурсных затрат на их решения и удобства описания практических задач.

На основе математического моделирования разработаны научные основы тонкого разделения ферромагнитных суспензий во внешних магнитных полях и созданы научные основы проектирования эффективной высокопроизводительной техники тонкой очистки водных технологических жидкостей (ВТЖ) от ферромагнитных частиц.

1. Научные основы тонкого разделения ферромагнитной суспензии составляют разработанные автором и экспериментально проверенные, а также получившие научную апробацию, следующие результаты.

1.1. Разработана математическая модель поля постоянного магнита в немагнитной среде на основе скалярного магнитного потенциала. Отличается от известных тем, что она свободна от сингулярностей и позволяет получать с более высокой точностью оценки характеристик при создании высокоэффективных средств разделения ферромагнитных суспензий.

1.2. Разработан метод синтеза схем замещений постоянного магнита, который отличается от известных тем, что учитывает поток рассеяния магнитного поля через боковую поверхность ПМ. Синтезированные схемы позволяют повысить точность исследования систем из ПМ и применить схемные методы их численного моделирования.

1.3. Построены эквивалентные магнитные схемы (с распределенными и с сосредоточенными параметрами) цилиндрических постоянных магнитов, на основе которых разработан алгоритм численного расчета характеристик силового по-

ля, создаваемого решеткой постоянных магнитов. В отличие от известных в алгоритме учитывается не принимаемое ранее в расчет экранирующее влияние слоя ферромагнитных примесей, осаждаемых при сепарации ВТЖ на поверхность магнитной системы.

1.4. Разработан метод анализа процесса магнитной сепарации ВТЖ на основе преобразования исходной системы нелинейных ДУ в приближенное линейное неоднородное ДУ, описывающее траектории феррочастиц. В отличие от известных метод позволяет определять предельные режимы магнитных сепараторов, проводить моделирование характеристик качества очистки и решать задачу по учету процесса магнитной коагуляции при проектировании и оптимизации эффективных средств очистки ВТЖ.

1.5. Обоснован метод математического моделирования преобразования дисперсного состава ферромагнитных частиц при магнитной коагуляции на основе свертки функций распределения случайных величин. Он отличается от известных методов тем, что дает полное решение задачи при произвольных законах стохастического распределения исходных частиц и позволяет повысить эффективность проектирования магнитных сепараторов для разных областей применения.

1.6. Разработана двухуровневая математическая модель на основе математической операции свертки, по сути, представляет собой новый тип математической модели магнитной коагуляции, в которой весовая функция оператора свертки параметрически зависит от коэффициента глубины магнитной коагуляции, введенного для оценки степени коагуляции на основе закона сохранения массы дисперсной фазы. Первый уровень такой модели выражает фундаментальную зависимость семейства распределения дисперсного состава агрегированных феррочастиц от глубины коагуляции. Второй уровень выражает зависимость коэффициента глубины магнитной коагуляции от времени и физико-технических параметров индивидуального сепаратора, что чрезвычайно важно для задач проектирования и оптимизации магнитных сепараторов.

1.7. Разработан метод аппроксимации семейств апериодических характеристик интегральными кривыми в классе линейных дифференциальных уравнений с посто-

янными коэффициентами. Такой метод необходим для аппроксимации распределения силового поля решетки постоянных магнитов физически реализуемыми экспоненциальными зависимостями, а также для аппроксимации характеристик качества очистки ВТЖ функциональной зависимостью от двух (и более) независимых переменных, учитывающих осаждаемый слой феррошлама, при решении задачи оптимизации магнитных сепараторов. Структура и параметры дифференциального оператора определяются непосредственно из условий решаемой задачи, что существенно расширяет область его применения в отличие от существующих на основе жестко заданных структур аппроксимационных выражений (полиномы, сплайны, линейные и нелинейные регрессии).

2. Разработанные математические модели магнитной коагуляции и магнитной сепарации положены в основу создания научно обоснованной методики расчета и оптимизации магнитных сепараторов, обеспечивающих очистку водных технологических жидкостей от тонкодисперсных ферромагнитных примесей. В качестве критерия оптимальности выбрано условие минимума количества постоянных магнитов при заданной производительности и уровне качества очистки магнитного сепаратора.

2.1. Разработан комплекс программ, моделирующих характеристики процессов сепарации и техники магнитной очистки технологических жидкостей от ферромагнитных частиц.

2.2. Повышена эффективность магнитных сепараторов – в два-три раза могут быть снижены затраты на изготовление магнитных сепараторов.

2.3. Разработанная прерывисто-шаговая организация кинематики движения шлама при его удалении с патронов магнитной системы с одновременным выделением дисперсионной среды приводит к снижению потери смазочно-охлаждающих жидкостей в 2,5 раза.

2.4. Общий суммарный расчетный годовой экономический эффект от реализации теоретико-экспериментальных исследований составляет 70 млн. руб.

2.5. Разработана оригинальная методика проектирования и оптимизации магнитных сепараторов для систем очистки СОЖ, обеспечивающих повышение эффективности процессов очистки и уменьшение капитальных затрат на реализацию

таких систем. Методика основана на данных по магнитным свойствам и дисперсности частиц, с учетом технологических требований к чистоте СОЖ и позволяет с высокой точностью рассчитать степень и тонкость очистки разрабатываемых сепараторов, а, следовательно, и показатели чистоты СОЖ.

Системы очистки СОЖ на основе магнитных сепараторов разрабатывались и совершенствовались в рамках:

– проектов «Разработка общего теоретического подхода к созданию нового поколения высокоэффективных систем очистки больших объемов ВТЖ и стоков от механических примесей в машиностроении и металлургии» аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2007 – 2013 г.г.);

– НИОКР по теме: «Исследование и разработка нового поколения энергосберегающих сепараторов с магнитными стержневыми системами для очистки больших объемов водных жидкостей от тонких механических примесей, магнитных частиц, взвесей и нефтепродуктов для предприятий машиностроения, металлургии и ЖКХ» по контракту с ФГБУ «Фонда содействия развития малых форм предприятий в научно-технической сфере» (2011- 2013 г.г.);

– Федеральной целевой программы «Исследование и разработка по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2020 г.г. по лоту шифр «2011-2.7-527-005» по теме: «Разработка и создание производства нового поколения экономически доступных системных комплексов и станций очистки и оздоровления больших объемов природных, трансграничных и оборотных вод, дождевых и промышленных стоков для предприятий и ЖКХ» в 2011-2013 г.г.

Результаты диссертационной работы, внедренные в практику ЗАО «Системы водоочистки» г. Ульяновск, использовались для разработки систем очистки СОЖ на ряде металлообрабатывающих и металлургических производств: на Орском заводе холодильных агрегатов, заводе двигателей КАМАЗ, на вагоноремонтном заводе (г. Курск), в ПАО «НЛМК», в ПАО «Северсталь» и др.

В дальнейших исследованиях можно разработанную математическую модель магнитных статических характеристик ферритов положить в основу метода идентификации зависимостей свойств феррочастиц от их размеров, а для повышения уни-

версальности математических моделей коагуляции твердых примесей метод свертки можно совместить с методом ИДУ Смолуховского. Последний метод рекомендуется использовать для определения весовой функции свертки, которую определяют из простейшего исходного распределения твердой фазы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алберг Жд., Теория сплайнов и её приложения / Жд. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
2. Алейников Н. А. Структурирование ферромагнитных суспензий / Н. А. Алейников, П. А. Усачев, П. И. Зеленев. – Л.: Наука, 1974. – 149 с.
3. А.с. 515121 (СССР). G06.G7/48. Способ моделирования петли гистерезиса/ Ю. А. Савиновский, Ю. П. Бусаров// Бюл. Изобр. – 1976. – №19.
4. Андреев В. Г. Повышение эффективности обогащения железных руд путем управления параметрами магнитного поля и флокуляции в рабочих зонах сепаратора: дис. ... канд. техн. наук.: 25.00.13/ Андреев Виталий Геннадьевич. – Москва, 2012. – 85 с.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения)/ Н. С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
6. Беляев М. Г. Аппроксимация данных, порожденных декартовым произведением/ М. Г. Беляев // Труды МФТИ: Информатика, математическое моделирование, экономика. – 2013. – Том 5. – № 3. – С. 11-23.
7. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле / Л. А. Бессонов. – М: Высш. школа, 1978. – 231 с.
8. Блинов А. О. Многомерная аппроксимация в задачах моделирования и оптимизации/ А. О. Блинов, В. П. Фраленко// Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 4. – С. 98-109.
9. Бочкарев Г. Р. Высокоградиентный магнитный сепаратор для обогащения слабомагнитных руд/ Г. Р. Бочкарев, В. И. Ростовцев, П. Д. Воблый, Н. И. Зубков и др. // ФТПРПИ. – 2004. – № 2. – С. 94-99.
10. Бутырский Е. Ю. Аппроксимация многомерных функций/ Е. Ю. Бутырский, И. А. Кувалдин, В. П. Чалкин// Научное приборостроение. – 2010. – Том 20. – № 2. – С. 82–92.
11. Булыжев Е. М. Гранулометрический состав абразивного шлама, образующегося при правке шлифовальных кругов / Е. М. Булыжев, А. Ю. Богданов, М. Е. Краснова // Справочник. Инженерный журнал. – 2008. – № 10. – С. 50–54.
12. Булыжев Е. М. Исследования возможности повышения эффективности

обработки деталей шлифованием путем наложения магнитного поля на СОЖ, загрязненную механическими примесями: дис. ... канд. техн. наук: 05.02.08/ Булыжев Евгений Михайлович. – Ульяновск, 1979. – 311 с.

13. Булыжев Е. М. Критериальная модель дисперсионного состава СОЖ / Е. М. Булыжев, А. Ю. Богданов // Справочник. Инженерный журнал. – 2008. – №10. – С. 43-45.

14. Булыжев Е. М. Магнитная коагуляция шлифовального шлама / Е. М. Булыжев, Е. П. Терешенок, Г. А. Джавахия // Справочник. Инженерный журнал. – 2011. – N 8. – С. 48-51.

15. Булыжев Е. М. Математическое моделирование поля постоянного магнита / Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов // **Электричество**. – 2010. – №9. – С. 65-69.

16. Булыжев Е. М. Математическая теория магнитной коагуляции ферромагнитных частиц в слабозагрязненных сточных водах / Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов // **Известия Самарского научного центра** Российской академии наук. – 2014. – Т 16. – №1. – С. 247-254.

17. Булыжев Е. М. Моделирование поля постоянного магнита / Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, Г. А. Джавахия // **Известия Самарского научного центра** Российской академии наук. – 2011. – Т 13. – №4. – С.106-110.

18. Булыжев Е. М. Моделирование характеристик магнитных сепараторов для очистки СОЖ от ферромагнитных частиц / Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов // Справочник. Инженерный журнал. Приложение. – 2009. – № 12. – С. 2-5.

19. Булыжев Е. М. Модернизация централизованной установки очистки с преобразованием ее в установку бессточного применения СОЖ / Е. М. Булыжев, И. Г. Лейбель, Г. А. Джавахия // Справочник. Инженерный журнал. Приложение. – 2010. – № 12. – С. 14-18.

20. Булыжев Е. М. Моделирование эквивалентных схем постоянного магнита для оптимизации магнитного сепаратора/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов // **Электричество**. – 2010. – №10. – С. 68-73.

21. Булыжев Е. М. Основы моделирования и конструирования гравитационных и магнитных очистителей водных технологических жидкостей/ Е. М. Булыжев, Л. В. Худобин, А. Ю. Богданов, Е. Н. Меньшов; под общ. Ред. Л. В. Худобина

и Е. М. Булыжева. – Ульяновск: УлГТУ, 2016. – 290 с.

22. Булыжев Е. М. Очистка водных технологических жидкостей в магнитоводных сепараторах / Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, Г. А. Джавахия // **Инженерный журнал. Справочник.** – 2014. – №1. – С.13-17.

23. Булыжев Е. М. Расчет характеристик качества очистки СОЖ при проектировании патронного магнитного сепаратора / Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, Г. А. Орлов // **Инженерный журнал. Справочник.** – 2014. – №2. – С. 36-45.

24. Булыжев Е. М. Ресурсосберегающее применение смазочно-охлаждающих жидкостей при металлообработке / Е. М. Булыжев, Л. В. Худобин. – М.: Машиностроение, 2004. – 352 с.

25. Булыжев Е. М. Схема замещения постоянного магнита с учетом потока рассеяния / Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов // Вопросы теории и проектирования электрических машин. Моделирование электромеханических процессов: сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – С. 24-35.

26. Валландр С. В. Лекции по гидромеханике. Учебное пособие / С. В. Валландр. – Л.: Из-до Ленинградский ун-т, 1978. – 296 с.

27. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии / Н. Г. Ван Кампен. – М.: Высш. шк., 1990. – 375 с.

28. Волков В. А. Коллоидная химия (Поверхностные явления и дисперсные системы) / В. А. Волков. – М.: МГТУ им. А. Н. Косыгина, 2001. – 640 с.

29. Волков П. К. Взаимодействие частиц как механизм увеличения вязкости суспензии / П. К. Волков, С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач. – Вестник ЮГУ. – 2012. – вып. 2(29). – С.21-24.

30. Галкин В. А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского / В. А. Галкин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 408 с.

31. Гантмахер Ф. Теория матриц / Ф. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

32. Гетманцев С. В. Очистка производственных сточных вод коагулянтами и флокулянтами / Ф. Р. Гетманцев, И. А. Нечаев, Л. В. Гандурина. – М.: Издательства АСВ, 2008. – 272 с.

33. Голобородько Е. И. Программа «Расчет режима электрической цепи постоянного тока любой сложности» // Е. И. Голобородько, А. Е. Меньшов / Компьютерные учебные программы и инновации. – М.: Госкоорцентр, 2002. – №4. – С.40-41.
34. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М.: Сов. Радио, 1971. – 672с.
35. ГОСТ 8.303 – 78. Тесламетры постоянных магнитных полей в диапазоне 0.01 – 2 Тл. Методы и средства поверки. – М.: Изд-во стандартов, 1978. – 18 с.
36. ГОСТ Р 50815 – 95. Промышленная чистота. Жидкости смазочно-охлаждающие. Требования к чистоте СОЖ на операциях круглого наружного и плоского шлифования периферией круга. Введен 01.01.96. – М.: Изд-во стандартов, 1995. – 9 с.
37. Данилова М. Г. Математическое моделирование магнитного и силового полей в рабочем пространстве магнитожидкостных сепараторов: дис. ... канд. техн. наук.: 05.15.08/ Данилова Майя Геннадьевна. – Владикавказ, 1997. – 135 с.
38. Демирчян К. С. Машинные расчеты электромагнитных полей / К. С. Демирчян, В. Л. Чечурин. – М.: Высш. Шк., 1986. – 240 с.
39. Дехтяренко П. И. Определение характеристик звеньев систем автоматического регулирования / П. И. Дехтяренко, В. П. Коваленко. – М.: Энергия, 1973. – 120 с.
40. Доббинс М. Последние достижения в области проектирования и применения магнитных сепараторов / М. Доббинс, П. Данн, Я. Шеррел // Обогащение руд. – 2010. – № 2. – С. 48-54, (USA).
41. Дубовский П. В. Итерационный метод решения уравнения коагуляции с пространственно неоднородными полями скоростей / П. В. Дубовский // Журнал вычислит. матем. и матем. Физики. – 1990. – 30. – С. 1755-1757.
42. Дубовский П. В. Новая дискретная модель кинетики коагуляции и свойства ее непрерывного аналога/ П. В. Дубовский // Математическое моделирование. – 2000. – № 9. – С. 3-15.
43. Епутаев Г. А. Научные основы создания сепараторов на постоянных магнитах: дис... д-ра техн. наук: 05.05.06/ Епутаев Геннадий Алексеевич. – Владикавказ, 2000. – 310 с.

44. Епугаев Г. А. Траектория движения магнитных частиц в дисковом сепараторе при мокром обогащении железосодержащих материалов / Г. А. Епугаев, М. Г. Данилова, Б. С. Варламов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2009. – № 12. – С. 529-537.
45. Залманов Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л. А. Залманов. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
46. Зигирняк М. В. Шкивные магнитные сепараторы: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.09.06/ Зигирняк Михаил Васильевич. – Харьков, 1996. – 260 с.
47. Зимин Е. Ф. Расчет постоянных магнитов с учетом потоков рассеяния / Е. Ф. Зимин, Э. С. Кочанов // Электричество. – 2001. – №11. – С.57-61.
48. Ибрагимов М. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математическое моделирование/ М. Х. Ибрагимов: перевод с англ. И. С. Емельяновой. – Нижний Новгород: НГУ, 2007. – 421 с.
49. Иванов А. О. Структура цепочечных агрегатов в ферроколлоидах/ А.О. Иванов, С. С. Канторович // Коллоидный журнал. – 2003. – Т. 65, №2. – С. 189-200.
50. Исследование распределения поля магнитных сил патронного магнитного сепаратора при очистке СОЖ/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, А. Е. Меньшов, Г. А. Джавахия, Е. П. Терешенок // **Справочник. Инженерный журнал.** – М.: Машиностроение, 2011. – №9. – С. 45-50.
51. Казаков Ю. Б. Системное моделирование и анализ магнитожидкостных устройств/ Ю. Б. Казаков, А. И. Тихонов, И. М. Арефьев. – Сборник научных трудов 16-я Международная Плесская конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям. – Плес, Россия ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина», 2014. – С. 126 – 132.
52. Кандаурова Н. В. Модель цепочечных агрегатов в магнитном поле/ Н. В. Кандауров, В. В. Чеканов //Сборник научных трудов. Серия физико-химическая. – Ставрополь: Изд-во Сев.Кав.ГТУ, 1999. – Вып. 3. – С. 77-80.
53. Кандаурова Н. В. Приповерхностные и межфазные явления в магнитной жидкости в электрическом и магнитном полях и их техническое применение: дис... д-ра техн. наук: 02.00.04/ Кандаурова Наталья Владимировна. – Ставрополь, 2000. – 355 с.
54. Кармазин В. В. Исследование магнитных полей сил барабанного сепаратора

на постоянных магнитах / В. В. Кармазин, Р. В. Ковалев, Г. А. Епугаев // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2006. – № 12/1. – С. 22-26.

55. Кармазин В. В. Магнитные и электрические методы обогащения/ В. В. Кармазин, В. И. Кармазин: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1988. – 304 с.

56. Кармазин В. В. Некоторые закономерности магнитной флокуляции тонкодисперсных сильномагнитных материалов / В. В. Кармазин // Электрические и магнитные методы сепарации: сборник научных трудов. – М.: Наука, 1965. – С. 74-94.

57. Килин В. И. Исследование магнитных систем редкоземельных постоянных магнитов со встречной ориентацией магнитных моментов / В. И. Килин // Обогащение руд. – 2010. – № 5. – С. 28-31.

58. Килин В. И. Научно-техническое обоснование разработки и создания магнитных систем сепараторов и аппаратов для обогащения скарновых магнетитовых руд: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 25.00.13/ Килин Владимир Иванович. – Чита, 2012. – 242 с.

59. Кияткин Р. П. Построение схемных моделей для электромагнитных расчетов токоведущих систем, экранов, волноводов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.09.05/ Кияткин Родион Петрович. – СПб., 2005. – 32 с.

60. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций переменного и сложения/ А. Н. Колмогоров // ДАН СССР. –1957. –Т. 114. – № 5. – С. 953–956.

61. Коновалов Н. И., Мартынов С. И. Обтекание двух сфер нестационарным потоком вязкой жидкости// Вестник СамГУ. – Естественнонаучная 2008. – №3(62). – С. 246-259.

62. Корнилов Д. С. Моделирование магнитного поля и совершенствование конструкции магнитной системы торцевого генератора с постоянными магнитами/ Д. С. Корнилов, Ю. Б. Казаков, В. П. Шишкин // Вестник ИГЭУ. – 2013. – Вып. 2. – С. 29-32.

63. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

64. Котельниковов В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости /

В. А. Котельниковов. – М.-Л.: Энергоиздат, 1956. – 151 с.

65. Кочанов Н. С. Основы синтеза линейных электрических цепей во временной области / Н. С. Кочанов. – М.: Связь, 1967. – 200 с.

66. Котунов В. В. Высокоанизотропные порошки сплавов системы Nd-Fe-B с магнитной энергией до 27 МГсЭ, полученные методом гидрирования-дегидрирования/ В. В. Котунов, Д. А. Шумаков// Металловедение и термическая обработка металлов. – 2005. – №4. – С. 30-33.

67. Кугущев А. М. Основы радиоэлектроники (Линейные электромагнитные процессы) / А. М. Кугущев, Н. С. Голубева. – М.: Энергия, 1969. – 880 с.

68. Кудрявцев Д. А. Моделирование процесса коагуляции в неоднородном магнитном поле дефекта / Д. А. Кудрявцев // Контроль. Диагностика. – 2011. – №6. – С. 40-43.

69. Куневич А. В. Ферриты: Энциклопедический справочник. В 5 томах. Т.1 Магниты и магнитные системы /А. В. Куневич, А. В. Подольский, И. Н. Сидоров. – СПб.: Лик, 2004. – 358 с.

70. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.

71. Лапин Э. С. Качественная модель магнитного сепаратора как объекта управления / Э. С. Лапин, Р. Е. Леонов, В. В. Сидачев // Известия вузов. Горный журнал. – 2009. – № 4. – С. 107-113.

72. Леонтович А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент / А. Ф. Леонтович. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

73. Магнетизм и магнитные материалы. Терминологический справочник: под ред. Ф. В. Лисовского и Л. И. Антонова. – М.: Вагриус, 1997. – 238 с.

74. Магнитная коагуляция механических примесей/ Е. В. Шайдаков, О. Ю. Полетаева, В. В. Шайдаков, В. В. Уметбаев, Н. М. Катрич, Д. М. Балапанов // Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело". – 2011. – №4. – С. 102-114. URL:

75. Магнитная цепь для анализа поля магнитного патронного сепаратора/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, Г. А. Джавахия, А. В. Долгополов // Электрические аппараты и электротехнические комплексы и системы: сборник статей межд. научн.-практ. конф. (Россия, г.Ульяновск, 22-25 мая 2012). Т1. – Ульяновск: Ул-

ГТУ, 2011. – С.210-213.

76. Магнитотвердые материалы [Электронный ресурс]: Группа компаний Северо-Западная лаборатория. – сайт. – 2013. – Режим доступа: <http://www.ferrite.ru/products/magnets>

77. Магнитные наночастицы: методы получения, строение и свойства / С. П. Губин, Ю. А. Кокшаров, Г. Б. Хомутов, Г. Ю. Юрков // Успехи химии. – 2005. – 74(6). – С. 539-574.

78. Математическое моделирование степени очистки СОЖ в каскаде патронного магнитного сепаратора/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, А. Е. Меньшов, Г. А. Джавахия, Е. П. Терешенок // **Справочник. Инженерный журнал.** – М.: Машиностроение, 2011. – №11. – С. 38-44.

79. Математический энциклопедический словарь: Гл. ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Сов. Энциклопедия, 1995. – 847 с.

80. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 768 с.

81. Меньшов Е. Н. Аппроксимация временных характеристик экспоненциальными полиномами [Электронный ресурс] : программа: № 2029 / Е. Н. Меньшов, А. В. Лазарев; Ульянов. гос. техн. ун-т. – ИнФР № 50200200372, рег. 20.06.2002.

82. Меньшов Е. Н. Восстановление характеристик нелинейных магнитных процессов/ Е. Н. Меньшов, Ефимова К. И. // Электрические аппараты и электротехнические комплексы и системы: межд. научн.-практ. конф. (Россия, г.Ульяновск, 22-25 мая 2012). Т2. – Ульяновск: УлГТУ, 2012. – С.345-348.

83. Меньшов Е. Н. Идентификация математической модели ферромагнетика / Е. Н. Меньшов, О. И. Левченко, К. В. Забродин // Компьютерные учебные программы и инновации. – 2005. – № 3. – С. 28-29. – (№ 2913; ВНТИЦ № 50200300916, рег. 14.10.2003).

84. Меньшов Е. Н. Исследование и разработка базовых конструкций технологического процесса производства плоских трансформаторов и дросселей для высокочастотных ИВЭП: отчет о НИР/ Е. Н. Меньшов. – Ульяновск: УлПИ, 1994. – 29 с. – № ГР 01940001149. – Инв. № 02940002925.

85. Меньшов Е. Н. Исследование и разработка высокочастотных магнитных электрокомпонентов для ВИП с бестрансформаторным входом: отчет о НИР/ Е. Н. Меньшов; исполн.: С. В. Приказчиков, С. Ю. Елкин, С. Л. Пирожков.– Ульяновск: УлПИ, 1995. – 85 с. – № ГР 01930011233. – Инв. № 02960006179.

86. Меньшов Е. Н. Компьютерно-аналитическая модель статических и динамических гистерезисных циклов ферритов и магнитодиэлектриков / Е. Н. Меньшов, К. Е. Забродин // Образование, наука, бизнес: сб. тр. Всерос. науч.-практ. конф. «Особенности регионального развития и интеграции» (26-27 мая). – Череповец, 2005. – С. 277-280.

87. Меньшов Е. Н. К вопросу моделирования дисперсного распределения агрегации ферромагнитных частиц/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов // Тенденции развития науки и образования: межд. научн.-практ. конф. (Россия, г. Москва, 25 декабря 2015).– Изд. НИЦ «Л-Журнал», 2015. – С.46-48.

88. Меньшов Е. Н. Математическое моделирование магнитного сепаратора для управления качеством очистки водных потоков / Е. Н. Меньшов // **Автоматизация процессов управления**. – 2014. – №2 (36). – С.52-61.

89. Меньшов Е. Н. Математическая модель взаимодействия ферромагнитной дисперсной фазы в дисперсной системе во внешнем магнитном поле // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: межд. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2013. – Вып 11. – С. 230-234.

90. Меньшов Е. Н. Математическая модель коагуляции твердых частиц при гравитационной очистке смазочно-охлаждающих жидкостей/ Е. Н. Меньшов, Е. М. Булыжев//«LINGVO-SCIENCE». – 2018. – №18. – С. 23-26

91. Меньшов Е. Н. Математическая модель коагуляции твердых частиц при их гравитационном осаждении в смазочно-охлаждающих жидкостях. Ч. 1. Концептуальная составляющая – метод моделирования распределения дисперсного состава частиц / Е. Н. Меньшов, Е. М. Булыжев // **Инженерный журнал. Справочник**. – 2018. – № 3. – С.12-16.

92. Меньшов Е. Н. Математическая модель коагуляции твердых частиц при их гравитационном осаждении в смазочно-охлаждающих жидкостях. Ч. 2. Концеп-

туальная составляющая – синтез дискретной весовой функции процесса коагуляции/ Е. Н. Меньшов, Е. М. Булыжев // **Инженерный журнал. Справочник.** – 2018. – № 4. – С. 28-33.

93. Меньшов Е. Н. Математическая модель коагуляции твердых частиц при их гравитационном осаждении в смазочно-охлаждающих жидкостях. Ч. 3. Техническая составляющая – математическое моделирование коэффициента глубины коагуляции в гравитационных очистителях/ Е. Н. Меньшов, Е. М. Булыжев // **Инженерный журнал. Справочник.** – 2018. – № 5. – С. 14-20.

94. Меньшов Е. Н. Математическая модель магнитной коагуляции при магнитной сепарации водно-технологических жидкостей от ферромагнитных частиц. [Электронный ресурс] / Е. Н. Меньшов// **Интернет-журнал Науковедение.** – 2015. – Том 7. – № 6. – 17 с. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/133TVN615.pdf>.

95. Меньшов Е. Н. Математическая модель ферромагнетиков магнитных элементов электротехнических устройств / Е. Н. Меньшов // Вопросы теории и проектирования электрических машин: сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2000. – С. 46-54.

96. Меньшов Е. Н. Метод расчета погрешности математической модели характеристики степени очистки магнитного сепаратора/Е. Н. Меньшов // **Инженерный журнал. Справочник.** – 2016. – № 12. – С.16-23.

97. Меньшов Е. Н. Методы синтеза схем замещений/ Е. Н. Меньшов// Вопросы теории и проектирования электрических машин: сб.науч. трудов Ульян. Гос. Техн. ун-т. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – С. 68-80.

98. Меньшов Е. Н. Моделирование нелинейных электрических цепей на основе экспоненциальных полиномов / Е. Н. Меньшов // Проблемы нелинейной электротехники: тез. докл. 3-й Всесоюз. науч.-техн. конф. – Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1988. – Ч. 3. – С. 10.

99. Меньшов Е. Н. Моделирование переходных характеристик экспоненциальными полиномами/ Е. Н. Меньшов, К. В. Никитин // Образование, наука, бизнес: сб. тр. Всерос. науч.-практ. конф. «Особенности регионального развития и интеграции» (26-27 мая). – Череповец, 2005. – С. 273-276.

100. Меньшов Е. Н. Некоторые замечания о магнитных линиях// Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: межд. сб. науч. тр. – Ульяновск: УЛГТУ, 2017. – Вып. 13. – С. 184-187.

101. Меньшов Е. Н. «Новый закон взаимодействия электрических токов»: отзыв на работу Ухватава А. В. / Е. Н. Меньшов // **Современные наукоемкие технологии.** – 2007. – № 2. – С. 90-92.

102. Меньшов Е.Н. Оптимизация патронных магнитных сепараторов / Е.Н. Меньшов // **Инженерный журнал. Справочник.** – 2014. – № 11. – С.39-45.

103. Меньшов Е. Н. Программа аппроксимации временных характеристик экспоненциальными полиномами/ Е. Н. Меньшов, А. В. Лазарев // Компьютерные учебные программы и инновации. – М.: Госкоорцентр, 2003. – № 3. – С. 42. – (№ 2029; ИнФР № 50200200372, рег. 20.06.2002).

104. Меньшов Е. Н. Повышение эффективности магнитных сепараторов при очистке водных технологических жидкостей от феррочастиц посредством их магнитной коагуляции/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов // Материалы 8 Международной научн.-технич. конф. «Наукоемкие технологии на современном этапе развития машиностроения», 19-21 мая, 2016 г. – Москва: МАДИ, 2016. – С. 30-33.

105. Меньшов Е. Н. Разработка помехоподавляющих сетевых устройств для систем питания цифровой аппаратуры : дис. ... канд. техн. наук: 05.13.05/ Меньшов Евгений Николаевич. – Ульяновск, 1990. – 204 с.

106. Меньшов Е. Н. Расчет распределения магнитного поля в патронном магнитном сепараторе: программный продукт/ Е. Н. Меньшов, А. Е. Меньшов; свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614326, рег. 12.04.2017.

107. Меньшов Е. Н. Расчет характеристик степени очистки патронного магнитного сепаратора: программный продукт/ Е. Н. Меньшов; свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614324, рег. 12.04.2017.

108. Меньшов Е. Н. Силы взаимодействия ферромагнитных частиц во внешнем магнитном поле/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов // Теория и практика современной науки: XX Межд. заочной научн.-практ. конф. (Россия, г. Москва, 25-26

декабря 2015. – М.: [РИНЦ], 2015. – С.7-9.

109. Меньшов Е. Н. Синтез оператора преобразования дисперсного распределения ферромагнитных частиц в водной среде при магнитной коагуляции / Е. Н. Меньшов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2014. – №8 (67). – С. 39-46.

110. Меньшов Е. Н. Статические и динамические гистерезисные циклы ферритов и магнитодиэлектриков / Е. Н. Меньшов, С. А. Приказчиков, К. В. Забродин // Компьютерные учебные программы и инновации. – 2004. – № 7-8. – С. 98-99. – (№ 2912; ВНИИЦ № 50200300915, рег. 14.10.2003).

111. Меньшов Е. Н. Статические и динамические гистерезисные циклы ферритов и магнитодиэлектриков [Электронный ресурс] : программный продукт : № 2912 // Е. Н. Меньшов, С. А. Приказчиков, К. В. Забродин; Ульян. гос. техн. ун-т. – ИнФР № 50200300915, рег. 14.10.2003.

112. Меньшов Е. Н. Теория и практика интерполяция временных характеристик экспоненциальными полиномами/ Е. Н. Меньшов, А. В. Лазарев: Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники: Труды междунар. конф. «КЛИН-2002» (г.Ульяновск, 14-16 мая 2002 г.)/ Под ред. Л. И. Волгина. – Ульяновск, 2002. – Том 5. – С.54-56.

113. Меньшов Е. Н. Математическая модель взаимодействия ферромагнитной дисперсной фазы в дисперсной системе во внешнем магнитном поле // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: междунар. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2013. – Вып 11. – С. 230-234.

114. Методы классической и современной теории автоматического управления в 3-х т. Т.1: Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления: под ред. Н. Д. Егупова. – Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005.

115. Моделирование процессов коагуляции газодисперсных систем для определения оптимальных режимов акустического воздействия/ В. Н. Хмелёв, А. В. Шалунов, Р. Н. Голых, К. В. Шалунова// Математическое моделирование. – 2010. – №2. – С. 48-52.

116. Моделирование, расчет и проектирование кассетных патронных магнитных сепараторов для очистки больших объемов водных технологических жидкостей/

Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, Н. Н. Кондратьева, А. Ю. Богданов, Э. Е. Булыжев; под общей редакцией Е. М. Булыжева. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 216 с.

117. Назаров Е. А. Разработка компьютерной технологии моделирования процесса магнитной коагуляции/ Е. А. Назаров // Контроль. Диагностика. – 2011. – №4. – С. 29-35.

118. Назаров Е. А. Разработка математической модели процесса магнитной коагуляции частиц суспензии/ Е. А. Назаров // Приборы. – 2011. – №4. – С. 51-53.

119. Налетова В. А. Намагничивающиеся полидисперсные суспензии в однородном магнитном поле: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05/ Налетова Вера Арсеньевна. – М., 2004. – 236 с.

120. Наумова Н. Н. Эффективность очистки СОЖ от частиц размером менее 5 мкм в кассетном патронном магнитном сепараторе / Н. Н. Наумова // Вестник УлГТУ. – 2006. – № 4. – С. 49–53.

121. Неодимовый магнитный сепаратор НМС-1 для извлечения из пластов воды эмульгированных нефтепродуктов с применением нанодисперсного магнетита/ И. Ю. Быков, Н. Д. Цхадая, Ю. Г. Смирнов, А. А. Лютоев, В. И. Семин // SOCAR Proceedings, 2018 . – No. 4. – P. 01-017.

122. Новое в диагностике базовых характеристик магнитных сепараторов и анализаторов / А. А. Сандуляк, Д. В. Ершов, Е. П. Куренков А. В. Сандуляк, В. А. Ершова // Литейщик России. – 2013. – № 1. – С. 49-50.

123. Новое поколение силовых очистителей водных технологических жидкостей/ Е. М. Булыжев, А. Ю. Богданов, Е. Н. Меньшов, М. Е. Краснова, Н. Н. Кондратьева, Г. А. Джавахия, Е. П. Терешонок; под общей редакцией Е. М. Булыжева. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 419 с.

124. Нормализация характеристик намагничивания: под общей ред. В. П. Глухова и Р. К. Шмидте. – Рига: Зинатне, 1974. – 196 с.

125. Оптимизация магнитного сепаратора/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, А. Е. Меньшов, Г. А. Джавахия // Известия Самарского научного центра Российской академии наук . – 2011. – Т 13. – №4. – С. 111-116.

126. Основы моделирования и конструирования гравитационных и магнитных очистителей водных технологических жидкостей/ Е. М. Булыжев, Л. В. Худобин, А. Ю. Бог-

данов, Е. Н. Меньшов; под общ. ред. Л. В. Худобина и Е. М. Булыжева. – Ульяновск: УлГТУ, 2016. – 290 с.

127. Особенности компьютерного моделирования при проектировании магнитных сепараторов для очистки водных технологических жидкостей / Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, Г. А. Джавахия, В. Д. Шуреков// **Справочник. Инженерный журнал.** – М.: Машиностроение, 2011. – №10. – С. 43-51.

128. Падалка В. В. Взаимодействие коллоидных магнитных частиц с электрическим и магнитным полями: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.13. / Падалка Виталий Васильевич. – Ставрополь, 2004. – 358 с.

129. Палин И. В. Совершенствование метода магнитного обогащения железных руд на базе использования сепараторов с перераспределением рабочего пространства: дис. ... канд. техн. наук.: 25.00.13/ Палин Иван Владимирович. – Москва, 2010. – 109 с.

130. Патент 2305008, Россия. Магнитный сепаратор/ А. В. Сандуляк, А. А. Сандуляк, В. Г. Митин, В. А. Ершова. – 2007. – Бюл. № 5.

131. Патент 2305009, Россия. Магнитный сепаратор/ А. В. Сандуляк, А. А. Сандуляк, В. А. Солоков, В. А. Ершова. – 2007. – Бюл. № 5.

132. Патент 2317130, Россия. МПК В01D 35/06, В03С 1/00. Магнитный сепаратор / Е. М. Булыжев, М. Е. Краснова, Н. Н. Наумова. – 2008. – Бюл. № 5.

133. Патент 2324542, Россия. Магнитный сепаратор с ферритовыми и редкоземельными постоянными магнитами / Д. Мольтени. – 2008. – Бюл. № 5.

134. Патент 2348446, Россия. МПК В01D 35/06. Способ извлечения магнитных частиц из жидкой среды и магнитный сепаратор Булыжева для его реализации / Е. М. Булыжев, Э. Е. Булыжев. – 2009. – Бюл. № 7.

135. Патент 2351384, Россия. МПК В01D 35/06. Способ и комплекс очистки жидкости от ферромагнитных частиц / Е. М. Булыжев, Н. Н. Наумова. 2009. – Бюл. № 10.

136. Патент 2354458, Россия. Магнитный сепаратор/ В. В. Ефременков, К. Ю. Субботин. – 2009. – Бюл. № 5.

137. Патент 2364421, Россия. Магнитный сепаратор/ А. Н. Данилин, Ю. К. Левин, Ю. Г. Яновский. – 2009. – Бюл. № 5.

138. Патент 2365420, Россия. Магнитный сепаратор, магнитовод и способ извлечения частиц из жидкой среды / Е. М. Булыжев, Э. Е. Булыжев. – 2009. – Бюл. № 24.
139. Патент 2372133, Россия. МПК В01D 21/02. Технологический модуль тонкослойной очистки больших объемов воды от механических примесей / Е. М. Булыжев. 2009. – Бюл. № 31.
140. Патент 2372135, Россия. МПК В01D 35/06. Устройство для извлечения магнитных частиц из жидкой среды / Е. М. Булыжев, Э. Е. Булыжев. – 2009. – Бюл. № 31.
141. Патент 2385187, Россия. Патронный магнитный сепаратор погружной / А. С. Чеботарев, А. А. Чеботарев. – 2010. – Бюл. № 5.
142. Патент 2440851, Россия. Магнитный сепаратор / О. Л. Федоров, Т. В. Скроботова. – 2012. – Бюл. № 5.
143. Патент 2440852, Россия. Магнитный сепаратор / О. Л. Федоров, Т. В. Скроботова. – 2012. – Бюл. № 5.
144. Патент 2460584, Россия. Магнитный сепаратор / В. В. Кармазин, В. Г. Андреев, С. И. Кретов, Ю. М. Пожарский, Н. П. Кармазина, . – 2012. – Бюл. № 25.
145. Пеньков Н. В. Коагуляционные процессы в дисперсных системах / Н. В. Пеньков. – Екатеринбург, 2005. – 240 с.
146. Поливанов К. М. Ферромагнетики. Основы теории технического применения / К. М. Поливанов. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1957. – 256 с.
147. Пособие «Система неразрушающего контроля. Виды (методы) и технология неразрушающего контроля. Термины и определения. – М., 2003. – 150 с.
148. Постоянные магниты: Справочник / Альтман А. Б., Герберг А. Н., Гладышев П. А. и др.; под ред. Ю. М. Пятина. – М.: Энергия, 1980. – 488 с.
149. Портнягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Портнягин. – М.: Наука, 1970. – 332 с.
150. Приставка А. Ф. Сглаживание эмпирических функций распределения линейными экспоненциальными гистосплайнами / А. Ф. Приставка, Л. Ф. Винниченко // Алгоритмы решения нелинейных задач и обработка данных. – Днепропетровск: ДГУ, 1994. – С. 146-150.
151. Просвирнин В. И. Теоретическое и экспериментальное обоснование

кинетики процессов и параметров электромагнитных устройств очистки железосодержащих дисперсных сред в агропромышленном комплексе: дис. ... д-ра техн. наук: 05.20.02/ Просвирнин Виктор Иванович. – Мелитополь, 1992. – 286 с.

152. Просвирнин В. И. Уточненная математическая модель коагуляции магнитных частиц при криволинейном движении/ В. И. Просвирнин, Е. П. Масюткин, Д. Е. Масюткин // Современные наукоемкие технологии. – 2017. – № 9. – С. 58-63.

153. Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 798с.

154. Пшеничников А. Ф. Магнитное поле в окрестности уединенного магнетика // Магнитная гидродинамика. –1993. – №1. – С. 37-40.

155. Пшеничников А. Ф. Сегрегация частиц в магнитной жидкости при совместном действии магнитного и гравитационного полей /А. Ф. Пшеничников, Е. Н. Буркова, А. Н. Кондрашов // Вестник Пермского университета. Физика. – 2018. – № 1 (39). – С. 5–16.

156. Раба Н. О. Использование технологии CUDA для расчета коагуляции в модели облаков/ Н. О. Раба // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Герценовские чтения. – 2011. – СПб., 2011. – С. 198–205.

157. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн/ М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 2000. – 432 с.

158. Райхер Ю. Л. К теории дисперсии магнитной восприимчивости мелких ферромагнитных частиц / Ю. Л. Райхер, М. И. Шлиомис // ЖЭТФ. – 1974. – Т.67. – №3(9). – С.1060-1073.

159. Распределение поля в каскаде патронного магнитного сепаратора/ Е. М. Булыжев, Е. Н. Меньшов, Г. А. Джавахия, А. В. Долгополов// Электрические аппараты и электротехнические комплексы и системы: сборник статей междунаучн.-практ. конф. (Россия, г.Ульяновск, 22-25 мая 2012). Т1. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – С.214-218.

160. Расчет электрических цепей и электромагнитных полей на ЭВМ/ М. Г. Александрова, А. Н. Белянина, В. Брюкер и др.: под. ред. Л. В. Данилова и Е. С.

Филиппова. – М.: Радио и связь, 1983. – 344 с.

161. Савиновский Ю. А. Понижение порядка линейных дифференциальных уравнений при моделировании энергетических объектов/ Ю. А. Савиновский, Е. Н. Меньшов. // **Известия вузов. Энергетика.** – 1989. – № 12. – С. 45-48.

162. Савиновский Ю. А. Синтезирование электрической модели пассивного четырехполосника / Ю. А. Савиновский, Е. Н. Меньшов // **Известия вузов. Радиоэлектроника.** – 1990. – Т. 33, № 3. – С. 96.

163. Савиновский Ю. А. Синтезирование электрической модели пассивного четырехполосника / Ю.А. Савиновский, Е. Н. Меньшов. – Киев, 1989. – 14 с. – Деп. в ВИНТИ 02.08.89, № 5155-В89.

164. Сандуляк А. А. Аналитическое описание коэффициента размагничивания разнопористых сердцевин цепочек гранул фильтр-матрицы магнитного сепаратора / А. А. Сандуляк // **Вестник МГСУ.** – 2013. – № 9. – С. 62-69.

165. Сандуляк А. А. Характеристики индукции поля в модуле магнитного сепаратора/ А. А. Сандуляк, Д. В. Ершов, Д. В. Орешкин, А. В. Сандуляк // **Вестник МГСУ.** – 2013. – № 5. – С. 103-111.

166. Сандуляк А. А. Экспериментально-расчетное определение силовых и энергетических характеристик рабочих зон магнитных сепараторов / А. А. Сандуляк, А. В. Сандуляк, В. А. Ершова // **Метрология.** – 2012. – № 2. – С. 32-39.

167. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов: В 2-х томах. Т. 2. – М.: Наука, 1973. – 584 с.

168. Севастьянов Б. А. Вероятностные модели/ Б. А. Севастьянов. – М.: Наука, 1992. – 176 с.

169. Середа Ю. Ф. Свойства функций $re(x)$ и экспоненциальные сплайны / Ю. Ф. Середа // **Математические методы анализа динамических систем: темат. сборник науч. трудов.** – Харьков, 1983. – вып. 7. – С. 10-13.

170. Сечнев А. Я. Расчет напряженности поля прямым методом / А. Я. Сечнев.–Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 112 с.

171. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы / У.М. Сиберт: В 2-х ч. Ч. 1; пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 336 с.

172. Сиберт У. М. Цепи, сигналы, системы/ У. М. Сиберт: В 2-х ч. Ч. 2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 360 с.
173. Синельникова Н. Г. Повышение эффективности обогащения магнетитовых кварцитов на основе применения сепараторов с комбинированной амплитудно-частотной модуляцией магнитного поля: дис. ... канд. техн. наук.: 25.00.13/ Синельникова Наталья Григорьевна. – Москва, 2009. – 149 с.
174. Сливинская А. Г. Электромагниты и постоянные магниты: Учебное пособие для студентов вузов/ А. Г. Сливинская. – М.: Энергия, 1972. – 248 с.
175. Смазочно-охлаждающие технологические средства и их применение при обработке резанием: справочник / Л. В. Худобин, А. П. Бабичев, Е. М. Булыжев [и др.] / под общ. ред. Л. В. Худобина. – М.: Машиностроение, 2006. – 544 с.
176. Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1967. – Том 2. – 655 с.
177. Солоденко В. А. К вопросу о математическом моделировании движения частиц в магнитных сепараторах / В. А. Солоденко, И. Ю. Подковыров // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2013. – № 2. – С. 139-140.
178. Солоденко В. А. Установление закономерностей перемещения минеральных частиц в поле постоянных магнитов для разработки магнитных и магнитожидкостных сепараторов: дис. ... канд. техн. наук.: 05.15.08/ Солоденко Виктория Александровна. – Москва, 1998. – 163 с.
179. Справочник по обогащению руд. Основные процессы: под ред. О. С. Богданова. – М.: Недра, 1983. – 382 с.
180. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматлит, 1950. – 512 с.
181. Сыров Е. В. Расчет картины магнитного поля в горизонтальном сечении рабочего зазора роликового магнитного сепаратора / Е. В. Сыров // Автоматизированные технологии и производства. – 2013. – № 5. – С. 16-20.
182. Сыров Е. В. Расчет магнитного потенциала в рабочем пространстве роликового магнитного сепаратора / Е. В. Сыров // Автоматизированные технологии и производства. – 2013. – № 5. – С. 21-25.

183. Тагунов П. Е. Создание высокоградиентных сепараторов на постоянных магнитах для извлечения измельченных слабомагнитных минералов: дис. ... канд. техн. наук.: 25.00.13/ Тагунов Петр Евгеньевич. – Москва, 2012. – 125 с.
184. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
185. Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы / В. Е. Тараканов. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
186. Технический справочник по обработке воды: в 2 т.; пер. с франц. – СПб.: Новый журнал, 2007. – 180 с.
187. Типовые линейные модели объектов управления/ С. А. Анисимов, И. С. Зайцева, Н. С. Райбман, А. А. Яралов; под ред. Н. С. Райбмана. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 264 с.
188. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения / О. А. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М.: Наука, 1985. – 331 с.
189. Тихонова О. А. Понижение порядка и решение в квадратурах дифференциальных уравнений со старшими частными производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Тихонова Ольга Александровна. – Казань, 2010. – 123 с.
190. Трауб. Дж. Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб.: пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
191. Траектория движения магнитных частиц в противоточном ленточном сепараторе с воздушным зазором между обогащаемым и обогащенным материалами / Г. А. Епугаев, М. Г. Данилова, Б. С. Варламов, В. О. Рыжанов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2013. – № 10. – С. 235-240.
192. Худобин Л. В. Технология и техника применения смазочно-охлаждающих жидкостей при механической обработке: Учебное пособие / Л. В. Худобин, Е. М. Булыжев. – Ульяновск: УлГТУ, 2014. – 231 с.
193. Фаге М. К. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов / М. К. Фаге, Н. И. Нагнибида. Новосибирск: Наука, 1987. – 290 с.
194. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

195. Физическая энциклопедия: Гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Сов. Энциклопедия. – Т. 2, 1990. – С. 673-675.
196. Целых В. Р. Многомерные адаптивные регрессионные сплайны/ В. Р. Целых// Машинное обучение и анализ данных. – 2012. – Т.1. – № 3. – С. 272-278.
197. Чернова Н. И. Теория вероятностей / Н. И. Чернова. – Новосибирск: СГУТИ, 2009. – 139 с.
198. Шевалдина Е. В. Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами / Е. В. Шевалдина // Сиб. журн. вычисл. Математики/ РАН, 2006. – Т.9, №4. – С.391-402.
199. Шингаренко В. Ф. Использование межвидовых гомологий при синтезе новых структурных разновидностей магнитных сепараторов / В. Ф. Шингаренко, М. В. Зигирняк, И. А. Шведчикова // Электротехника. – 2010. – № 9. – С. 47-51.
200. Шингаренко В. Ф. Решение задач поискового проектирования магнитных сепараторов с использованием структурно-системного подхода / В. Ф. Шингаренко, М. В. Зигирняк, И. А. Шведчикова // Электротехника. – 2010. – № 1. – С. 69-76.
201. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг: Пер. с нем.; под ред. Л. Г. Лойцановского. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
202. Шипило В. П. Операторно-рекуррентный анализ электрических цепей и систем / В. П. Шипило. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 312 с.
203. Штоф В. А. Моделирование и философия / В. А. Штоф. – М.: Наука, 1966. – 220 с.
204. Шур Я. С. Некоторые вопросы физики магнитных материалов/ Я. С. Шур // ФММ. – 1967. – Т.24. – №5. – С. 868–881.
205. Экология очистки сточных вод физико-химическим методом/ Н. С. Сернокрылов, Е. В. Вильсон, С. В. Гетманцев, А. А. Марочкин. – М.: Из-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 264 с.
206. Элементы комбинаторики/ И. И. Ежов, А. В. Скороходов, М. И. Ядренко. и др. – М.: Наука, 1977. – 80 с.
207. Aharoni A. In: Magnetic properties of fine particles / A. Aharoni, Eds J.L. Dormann, D. Fiorani. Elsevier Amsterdam, 1992. – 430 p.

208. Anoranta M. Magnet design for superconducting open gradient magnetic separator / M. Anoranta, J. Lehtonen, R. Mikkonen // *Physica C: superconductivity and its applications*. – 2003. – Vol. 386. – P. 398-402.

209. Arefyev I. M. Colloidal stability and thermal stability of magnetic fluids/ I. M. Arefyev, T. A. Arefyeva, Yu. B. Kazakov // *Journal of nano- and electronic physics*. 2013. V. 5, N 4, 04037 (3pp).

210. Augusto P. A. Magnetic shielding: application to a new magnetic separator and classifier / P. A. Augusto, P. Augusto, T. Castelo-Grande // *Journal of magnetism and magnetic materials*. – 2004. – Vol. 272- 276. – № 3. – P. 2296-2298.

211. Augusto P. A. Supporting theory of a new magnetic separator and classifier. Limiting conditions: Part 2 – magnetic particle / P. A. Augusto, T. Castelo-Grande , P. Augusto, D. Barbosa, A. M. Estevez // *Current applied physics*. – 2007. – Vol. 7. – № 3. – P. 258-273.

212. Ayel J. L'industrie du raffinage des huiles lubrifiantes 11 Hydrocarbure / J. Ayel. – 1995. – № 208. – P. 10–15.

213. Bell A. J. An information-maximisation approach to blind separation and blind deconvolution / A. J. Bell and T. J. Sejnowski // *Neural Computation*. – 1995. – 7. – P. 1129-1159.

214. Bulyzhev E. M. Approximation method for the characteristics class related to magnetic cleaning quality of reverse waters from ferrous admixtures/ E. M. Bulyzhev, E. N. Menshov // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020. – V. 913 (022025). – 10 p.

215. Bulyzhyev E. M. Mathematical simulation of process of preparation and purification of lubricating coolants in machine building technology/ E. M. Bulyzhyev, P. A. Velmisov // *Applications of Mathematics in Engineering and Economics. Proceedings of the XXVII Summer School, Sozopol'01*. – 2002. – P. 17–28.

216. Bulyzhev E. M. The study on the magnetic separation efficiency of the reverse water technological liquids from scales in industrial production. Part 1. The problems' analysis and solutions/ E. M. Bulyzhev, E. N. Menshov // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020. – V. 913 (022027). – 9 p.

217. Bulyzhev E. M. The study on the magnetic separation efficiency of the re-

verse water technological liquids from scales in industrial production. Part 2. Improving the design efficiency of magnetic separators by determining the cleaning modes' rational parameters/ E. M. Bulyzhev, E. N. Menshov // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2020. – V. 913 (022028). –10 p.

218. Burenin V. V. New designs of filters for purification of water and other process liquids/ V. V. Burenin // Chemical and petroleum engineering. – 2001. – Vol. 37. – № 11-12. – P. 579-482.

219. Chen D. X. Fluxmetric and magnetometric demagnetizing factors for cylinders / D. X. Chen, E. Pardo, A. Sanchez // Journal of magnetism and magnetic materials. – 2006. – Vol. 306. – P. 135-146.

220. Camp T. R. Sedimentation and the design of settlings tanks / T. R. Camp // Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs. – 1996. – Vol. 11. – P. 695.

221. Clements M. S. Velocity variations in rectangular sedimentation tanks / M. S. Clements // J. Inst. Civ. – 1999. – Vol. I. – P. 324.

222. Coleman R. Macroscopic model of particles' capture by the elliptic cross-section collector in magnetic separator / R. Coleman // Journal of magnetism and magnetic materials. – 2004. – Vol. 272- 276. – № 3. – P. 2348-2349.

223. Costas T. Diffusional coagulation of superparamagnetic particles in the presence of an external magnetic/ T. Costas, R. Scarlet, B. Stanley, // Physica. –1999. – A 270.– P. 427- 443.

224. Croat J. J. The current status and future outlook of the bonded neodimum magnet industrial / J. J. Croat // China Magnet Symposium. – Xia`an, 2004. – P. 30.

225. Davis R. H. The rate of coagulation of a dilute polydisperse system of sedimenting spheres // Journal of Fluid Mechanics. – 1984. – Vol. – P. 179-199.

226. Dobbins M. Significant developments in dry rare-earth magnetic separator / M. Dobbins, I. Sherrell // Society for Mining, Metallurgy and Exploration Annual Meeting and Exhibit, February 22-25. – Denver, 2009.

227. Dobbins M. Slon magnetic separator: Anew aproach for recovering and concentrating iron ore fines / M. Dobbins, S. Heara // Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum Conference and Exhibition, april 29 – may 2. –Montreal, 2007.

228. Dormann J. L. Magnetic relaxation in fine particle systems/ J. L. Dormann, D. Fiorani and E. Tronc // *Adv. Chem. Phys.* – 1997. – Vol.98. – P. 283-494.

229. Dullens R. Water purification by magnetic separate [Электронный ресурс]/ R. Dullens, S. Tsai. – 2013 – Режим доступа: <https://www0.maths.ox.ac.uk/groups/occam/research/resources-energy-and-environment/ree11-2>.

230. Eisentrager A. Particle capture efficiency in a multi-wire model for high gradient magnetic separation// A. Eisentrager, D. Vella, I. M. Griffiths// *Applied Physics Letters*. – 2014. – July 103(3): 033508. – 9 p.

231. Elder J. Physical Separation of minerals: Developments and trends / J. Elder // 18th Industrial Minerals International Congress & Exhibition, march 26-29. San Francisco, 2006.

232. Elmore W. C. Ferromagnetic colloid for studying magnetic structure/ W. C. Elmore // *Phys. Rev.* – 1938. – Vol. 54. – N 4. – P. 309.

233. Forrester A.I.J. Engineering design via surrogate modelling: a practical guide/ A. I. J. Forrester, A. S. obester, A. J. Keane. – New York: Wiley, 2008. – 218 p.

234. Garcia-Martinez H. A. In situ observation of quartz particles entrained into magnetite coagulates in a uniform magnetic field/ H. A. Garcia-Martinez, S. Song, A. Lopez-Valdivieso// *Minerals Engineering*. – 2011. –Vol. 24. – P. 963-966.

235. Gazeau F. Dynamique magnétique et browniennes des nanoparticules d'unferrofluide/ F. Gazeau // *Thèse, Université Pierre et Marie Curie.*– Paris, 1997.– 229 p.

236. Ge W. Magnetic matrices used in high gradient magnetic separation (HGMS): A review *Results in Physics*/ W. Ge, A. Encinas, S. Song // *Results in Physics*. – 2017. – № 7. – P. 4278-4286.

237. Hatton T. A. 2-D simulation of continuous separation of magnetic particles in single-wire and multi-wire arrays/ T. A. Hatton , K. A. Smith// *Conference: AIChE Annual Meeting.* –2007.

238. Hayashi H. Development of a mobile-type magnetic separator using high-TC bulk superconductors / H. Hayashi, N. Nagabuchi, N. Sano, T. Misumori, K. Asano // *Physica C: superconductivity and its applications.* – 2004. – Vol. 412-4146. – № spec. iss. – P. 766-770.

239. Hayashi H. Study on a mobile-type magnetic separator applying high- T_c bulk su-

perconductors / H. Hayashi, K. Tsutsumi, N. Sano, N. Nishizima, K. Asano // *Physica C: superconductivity and its applications*. – 2003. – Vol. 392-396. – P. 745-748.

240. Hua L. Simulation of transverse and longitudinal magnetic ripple structures induced by surface anisotropy/ L. Hua, J. E. L. Bishop and J. W. Tucker // *J. Magn.Magn. Mater.* – 1996. – Vol.163. – P. 285.

241. Ifeachor E. *Digital Signal Processing: A Practical Approach*/ E. Ifeachor, B. Jervis. – Addison Wesley, 2002. – 993 p.

242. Injection molded Sm₂Fe₁₇N₃ anisotropic magnet using reduction and diffusion method / S. Yoshizawa, T. Ishikawa, I. Kaneko et al. // *IEEE Trans. Magn.* 1999. – Vol. 35. – P. 3340-3342.

243. Eisenträger A. Particle capture efficiency in a multi-wire model for high gradient magnetic separation/ A. Eisenträger, D. Vella, I. M. Griffiths// *Applied Physics Letters*. – 2014. – Vol.105. – 10 p.

244. Karmasin V. I. Development of a continuous chamber high-gradient magnetic separator with a strong field / V. I. Karmasin, V. V. Karmasin, V. A. Bardovskiy, O. N. Zamytskiy // *Magnetic and electrical separation*. – 2002. – Vol. 11. – № 1-2. – P.103-105.

245. Lenyap P. Modular magnetic separators / P. Lenyap // *Coal International*. – 2000. – Vol. 248. – № 1. – p. 30.

246. Low-field magnetic separation of monodisperse Fe₃O₄ nanocrystals / C. T. Yavuz, J. T. Mayo, W. W. Yu, A. Prakash // *Science*. –2006. –Vol. 314. – P. 964-967.

247. Luo L. A review of principles and applications of magnetic flocculation to separate ultrafine magnetic particles/ L. Luo, A.V. Nguyen// *Separation and Purification Technology*, 2016. – 51 p., doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.seppur.2016.07.021>.

248. Lundt J. High gradient magnetic separation as a means of water purification [Электронный ресурс] / J. Lundt, B. A. Finlayson. – 2007. – 12 p. – Режим доступа: <http://faculty.washington.edu/finlayso/che499/jonathan.pdf>.

249. Mariani G. Theoretical and experimental study of the magnetic separation of pollutants from wastewater [Электронный ресурс]: Ph. D. Thesis By/ Giacomo Mariani. – Alma Mater Studiorum University of Bologna faculty of Engineering Department of Electrical Engineering, 2009. – 124 p. – Режим доступа:

http://www.die.ing.unibo.it/dottorato_it/Mariani/Tesi_Mariani.pdf.

250. Mattei J. L. Percolative behaviour and demagnetizing effects in disordered heterostructures / J. L. Mattei, M. Le Floch // *Journal of magnetism and magnetic materials*. – 2003. – Vol. 257. – P. 335-345.

251. Menshov E. N. Mathematical model of solid impurity coagulation processes in liquid suspensions based on random function convolution operation / E. N. Menshov // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020. – V. 734 (012217). – 6 p.

252. Menshov E. N. The study on the magnetic separation efficiency of the reverse water technological liquids from scales in industrial production. Part 3. Improving the magnetic separation technology parameters/ E. N. Menshov // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020. – V. 913 (022029). – 10 p.

253. Method to evaluate and prove-the-concept of magnetic separation and/or classification of particles/ P. Augusto, T. Castelo-Grande, A. Estévez, D. Barbosa, P. M.Costa// *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2017. – V.426. – P. 405-414.

254. Rayner J. G. A mathematical model of concentrate solids content for the wet drum magnetic separator / J. G. Rayner, T. J. Napiermunn // *International journal of mineral processing*. – 2003. – Vol. 70. – № 1-4. – P. 53-56.

255. Reconstruction of the 3dimensional magnetic fields of the strong focusing separator /A. G. Artukh, A. G. Semchenkov, O. Y. Semchenkova, Y. M. Sereda, V. A. Shchepunov, A/ Budzanowski // *Nukleonika*. – 2003. – Vol. 48. – № 2. – P. 71-77.

256. Rouban A. I. The Dispersing Characteristics of Static Models of Stochastic Objects/ A. I. Rouban // *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*. – 2009. – P. 88-99.

257. Sandulyak A. A. Prospects for use of magnetic separator filters for treatment of ceramic suspensions / A. A. Sandulyak, A. V. Sandulyak // *Glass and ceramic*. – 2006. – Vol. 63. – № 11-12. – P. 391-394.

258. Sappey R. Etude de la dynamique de l'aimantation de nanoparticules magnétiques dans la limite des très basses températures/ R. Sappey // *Thèse, Université Paris XI*. – Orsay, 1997. – 183 p.

259. Scholden P. C. The origin of magnetic birefringence and dichroism in magnetic

fluids/ P. C. Scholden // IEEE Trans. Magnetics. – 1990. Vol. 16, N 2. – P. 221-225.

260. Sedimentation acceleration of remanent iron oxide by magnetic flocculation/ M. Stolarski, C. Eichholz, B. Fuchs, H. Nirschl. – China Particuology. – 2007. – №5. – P. 145-150.

261. Separation of magnetic beads in a microfluidic device: modeling and experimentation / S. S. Tsai, J. S. Wexler, I. M. Griffiths, H. A. Stone: In Proceedings of the ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Denver, Colorado, USA, November 11–17, 2011. – Volume 6: Fluids and Thermal Systems; Advances for Process Industries, Parts A and B. – 2011. – P. 615-616.

262. Sheng C. D. Modelling Acoustic Agglomeration Processes Using Direct Simulation Monte Carlo Method / C. D. Sheng, X.L. Shen. – J. Aerosol Sci. – 2006. – 37. – P. 16-36.

263. Supporting theory of a new magnetic separator and classifier. Equations and modeling: Part II-Magnetic particles/ P. A. Augusto, T. Castelo-Grande, P. Augusto, D. Barbos, A.M. Estevez// Current Applied Physics. – 2007. – 7(3):247-257

264. Todd P. Multistage magnetic particle separator / P. Todd, R. P. Cooper, J.F. Doyle, S. Dunn, J. Vellinger, M. S. Deuser // Journal of magnetism and magnetic materials. – 2001. – Vol. 225. – № 1-2. – P. 294-300.

265. Thomas D. Flocculation modelling: a review/ D. Thomas, S. Judd, N. Fawcett// Water Research. – 1999. – Vol. 33. – № 7. – P. 1579-1592.

266. Tsai S. S. Microfluidic immunomagnetic multitarget sorting - a model for controlling deflection of paramagnetic beads / S. S. Tsai, I. M. Griffiths, H. A. Stone // Lab Chip. –2011. – Vol. 11. – P. 2577-2582.

267. Yuana M. Analyze the multi-wire magnetic field of HGMS by semi-analytical method/ M. Yuana, L. Chen, Y. Lei// Results in Physics. – 2018. – №11. – P. 956-963.

268. Yamashita F. New preparation Method of NdFeB Based Bonded Magnets for Efficient Small motors/ F. Yamashita, A. Watanabe // 2003 Intermag Conf. - Boston (USA), 2003. – P. 18-22.

269. Yavuz C. T. Low-field magnetic separation of monodisperse Fe₃O₄ nanocrystals/ C.T. Yavuz, J.T. Mayo, W.W. Yu, A. Prakash// Science. – 2006. –Vol. 314. – P. 964-967.

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ АББРЕВИАТУР И ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВТЖ – водные технологические жидкости.

ЛДУ – линейные дифференциальные уравнения.

МДС – магнитодвижущая сила источника магнитного поля, А.

ОЛДУ – обыкновенные линейные дифференциальные уравнения.

ПМ – постоянные магниты.

СОЖ – смазочно-охлаждающиеся жидкости.

ЭМП – электромагнитное поле.

a – расстояние между осями магнитов, м;

a_0 – радиус цилиндрического ПМ, м;

B_r – остаточная магнитная индукция материала ПМ, Тл;

C_d – допустимая норма средней массовой концентрации феррочастиц в ВТЖ, кг/м³;

$C_{и}, C_{вх}$ – исходная (на входе сепаратора) средняя массовая концентрация ферромагнитных частиц в ВТЖ, кг/м³;

$C_0, C_{вых}$ – остаточная (на выходе сепаратора) концентрация ферромагнитных частиц в очищенной ВТЖ, кг/м³;

$\bar{d}_и$ – средний диаметр исходных феррочастиц в ВТЖ, м;

d, d_ϕ – диаметр индивидуальной ферромагнитной частицы, м;

$d_{ш}$ – толщина слоя ферромагнитного шлама на поверхности патрона, м;

f_{Mr} – радиальная составляющая градиентной магнитной силы, Н;

$f_и(d)$ – функция распределения исходных феррочастиц по размерам, 1/м;

$f_и(m)$ – функция распределения исходных феррочастиц по массам, 1/кг;

$f_k(m)$ – функция распределения ферроагрегатов по массам, образованных при магнитной коагуляции, 1/кг;

F – критерий Фишера;

$F_{mэ}$ – МДС постоянного магнита, Гн⁻¹;

$g(m)$ – весовая функция свертки при магнитной коагуляции, 1/кг;

$H_{св}$ – коэрцитивная сила материала постоянного магнита, А/м;

l_1 – высота магнитного элемента, м;

$l_я$ – длина ячейки сепарации, м;

- m – масса феррочастиц, кг;
- M – интервал дискретизации массы частиц примеси, кг;
- N_0 – количество рядов (кассет) в магнитном сепараторе;
- N_v – средняя концентрация феррочастиц в ВТЖ, $1/\text{м}^3$;
- q – общее количество магнитов в сепараторе;
- Q – производительность сепаратора, $\text{м}^3/\text{ч}$;
- r – радиальная текущая координата феррочастицы в сепараторе, м;
- $r(0)$ – начальный радиус-вектор положения феррочастицы, м;
- $\Delta r_{\text{ж}r}$ – проекция на радиальное направление перемещения, обусловленного поступательной составляющей потока ВТЖ, м;
- $R_{mэ}$ – внутреннее магнитное сопротивление ПМ, Гн^{-1} ;
- R_0 – радиус патрона без ферромагнитного шлама, м;
- $S_{эф}$ – эффективная площадь сечения сепаратора, м^2 ;
- \mathbf{v}_m – вектор скорости, обусловленный магнитной силой, м/с;
- $\mathbf{v}_\text{ж}$ – вектор скорости потока ВТЖ, м/с;
- $v_{\text{жн}}$ – начальная скоростью течения ВТЖ, м/с;
- X – размер сепаратора в направлении потока, м;
- Y – ширина сечения сепаратора, м;
- Z – длина патрона сепаратора, м;
- γ – коэффициент передачи для распределенной магнитной схеме замещения ПМ, м^{-1} ;
- $\gamma_\text{к}$ – коэффициент глубины магнитной коагуляции;
- δ – толщина пограничного слоя на плоской стенке сепаратора, м;
- ε – степень очистки ВТЖ от монодисперсных феррочастиц;
- $\bar{\varepsilon}$ – средняя степень очистки ВТЖ от полидисперсных феррочастиц;
- η – коэффициент динамической вязкости ВТЖ, $\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$;
- μ_ϕ – относительная магнитная проницаемость ферромагнитных частиц;
- $\sigma(\phi)$ – нормированное перемещение феррочастицы, обусловленное потоком ВТЖ;
- ϕ – угловая текущая координата феррочастицы в сепараторе, рад;
- $\phi_\text{н}$ – угол вхождения феррочастицы в рабочую область сепаратора, рад;
- χ_ϕ – магнитная восприимчивость феррочастицы.

Приложение 1. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА

П. 1.1. Описание алгоритма

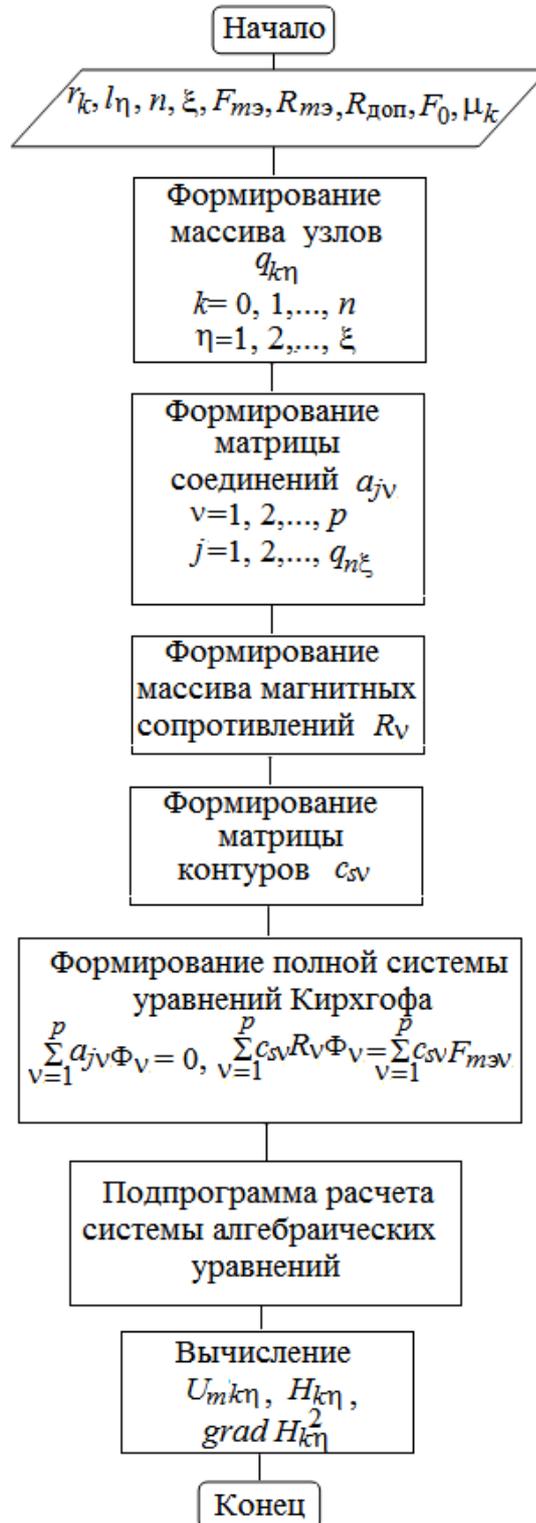


Рисунок П. 1.1 – Алгоритм программы расчета распределения магнитного поля в рабочем пространстве магнитного сепаратора

Для расчета распределения магнитного поля формируется магнитная схема фрагмента сепаратора, состоящего из пяти одинаковых схем элементарных ячеек (рисунок 3.13).

По результирующей схеме фрагмента сепаратора программа нумерует узлы схемы $q_{k\eta}$ ($k = 0, 1, \dots, n; \eta = 1, 2, \dots, \xi$) и на этой основе формирует массив ветвей и матрицу их соединений $a_{j\nu}$ ($j = 1, 2, \dots, q_{n\xi}; \nu = 1, 2, \dots, p$).

Затем программа вычисляет и заполняет матрицу магнитных сопротивлений схемы из продольных $R_{k\eta}^{\parallel}$ и поперечных $R_{k\eta}^{\perp}$ сопротивлений соответственно. Потом формирует массив независимых контуров на основе топологии расположения узлов $c_{s\nu}$.

Программа проводит формирование $(q_{n\xi} - 1)$ уравнений по первому закону Кирхгофа $\sum_{\nu=1}^{l_\lambda} a_{j\nu} \Phi_\nu = 0$ ($j = 1, 2, \dots, q_{n\xi}$), где $q_{n\xi}$ – общее число узлов магнитной цепи фрагмента сепарации; l_λ – число ветвей схемы, подходящих к λ – узлу; Φ_ν – магнитный поток в ν – ой ветви. Составляет соответствующее число уравнений по второму закону Кирхгофа $\sum_{\nu=1}^{\alpha_\varepsilon} c_{s\nu} R_\nu \Phi_\nu = \sum_{\nu=1}^{\beta_\varepsilon} c_{s\nu} F_\nu$, где $s = n\xi$ – число независимых контуров; α_ε – число магнитных сопротивлений R_ν , входящих в ε – контур; Φ_ν – магнитный поток через R_ν магнитное сопротивление; β_ε – число МДС F_ν в ε – контуре.

Таким образом, программа формирует полную систему алгебраических уравнений на основе законов Кирхгофа и проводит численное решение этой системы методом вращающегося вектора [33].

В результате решения системы уравнений определяются магнитные потоки во всех ветвях цепи фрагмента сепаратора: $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\rho$, где ρ – число ветвей цепи. Магнитные напряжения на элементарных участках цепи определяются по закону Ома:

$$U_{k\eta}^{\parallel} = R_{k\eta}^{\parallel} \Phi_{k\nu} = R_{k\eta}^{\parallel} \Phi_{k\eta}^{\parallel}; \quad U_{k\eta}^{\perp} = R_{k\eta}^{\perp} \Phi_{\nu\eta} = R_{k\eta}^{\perp} \Phi_{k\eta}^{\perp},$$

где ν – обобщенное обозначение продольных и поперечных ветвей.

Значения аксиальной составляющей с индексом z (или $-||$), радиальной составляющей с индексом r (или $-\perp$) и полной напряженности магнитного поля соответственно определяются по следующим формулам:

$$H_{zk\eta} = H_{k\eta}^{\parallel} = \frac{|U_{k\eta}^{\parallel}|}{l_{\eta}}; \quad H_{rk\eta} = H_{k\eta}^{\perp} = \frac{|U_{k\eta}^{\perp}|}{r_k - r_{k-1}}; \quad H_{k\eta} = \sqrt{(H_{k\eta}^{\parallel})^2 + (H_{k\eta}^{\perp})^2}.$$

Составляющая градиента в радиальном направлении квадрата полной напряженности поля рассчитывается следующим образом

$$\text{grad}_r H_{k\eta}^2 = \frac{\partial H_{k\eta}^2}{\partial r} = \frac{(H_{k\eta}^{\parallel})^2 + (H_{k\eta}^{\perp})^2 - (H_{k-1\eta}^{\parallel})^2 - (H_{k-1\eta}^{\perp})^2}{r_k - r_{k-1}}.$$

П. 1.2. Описание программы

Программа представляет собой приложение для ОС семейства Windows.

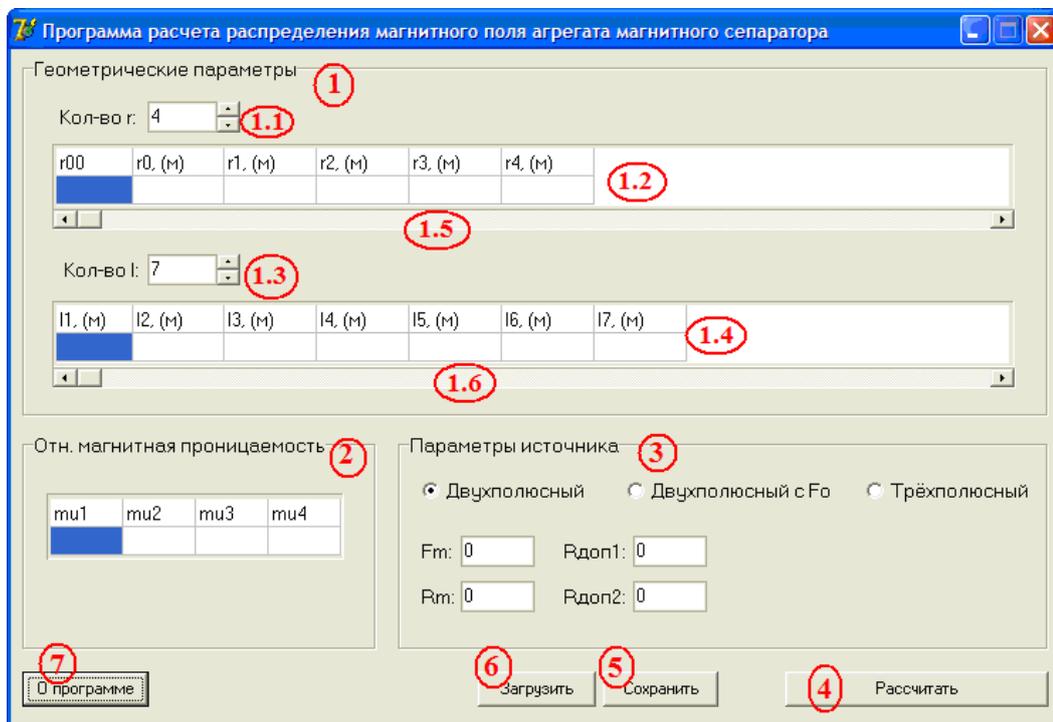


Рисунок П. 1.2 – Интерфейс программы расчета магнитного поля сепаратора:

Для старта программы необходимо запустить файл Separator.exe из каталога программы. После этого на экране появится основное окно.

Интерфейс программы состоит из трех секций (см. рисунок П. 1.2): (1) – геометрические параметры, (2) – относительная магнитная проницаемость, (3) – параметры источника, и нескольких кнопок: (6) – "Загрузить", (5) – "Сохранить", (4) – "Рассчитать" и (7) – "О программе".

Ввод исходных данных

Программа предусматривает ввод источников поля нескольких типов и раз-

личных слоев пассивной среды, в том числе слоя осажденных на патрон феррочастиц. Для ввода исходных данных необходимо ввести соответствующие значения в поля ввода основного окна в следующем порядке.

1. Задание геометрических параметров.

1.1. "**Кол-во r**" – количество элементарных цилиндрических слоев, на которые разбивается магнитоактивный элемент сепаратора, не считая r_{00} и r_0 .

1.1. Таблица значений радиусов r_{00} , r_0 , r_1 , ..., r_n цилиндрических слоев. Значения задаются вещественными числами и вводятся в соответствующие столбцы таблицы. Единица измерения – метр.

1.2. "**Кол-во l**" – количество высот элементарных цилиндрических слоев.

1.3. Таблица значений высот l_1 , l_2 , ..., l_m . Величины задаются вещественными числами и вводятся в соответствующие столбцы таблицы. Единица измерения – метр.

Примечание 1. Одновременно на экране возможно отобразить лишь десять столбцов таблиц. Поэтому если количество столбцов превышает десять, то для навигации по ним используются полосы прокрутки внизу таблиц (позиции 1.5 и 1.6 на рисунке П. 1.2).

2. Относительная магнитная проницаемость.

В столбцы **mu1**, **mu2**, **mu3**, **mu4** таблицы секции (2) задаются значения относительных магнитных проницаемостей μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4 соответствующих слоев магнитоактивного элемента сепаратора (μ_1 – перегородки; μ_2 – втулка патрона, в которую помещается магнит; μ_3 – слой ферромагнитного шлама; μ_4 – область намагниченной суспензии).

3. Параметры источника поля.

3.1. Выбирается тип источника – **двухполюсный**, **двухполюсный с F_0** или **трехполюсный**.

3.2. В соответствующих полях задаются значения параметров источников (вещественные числа). Единицы измерения в системе СИ.

Fm – МДС постоянного магнита, А;

Rm – магнитное сопротивление постоянного магнита, Γ_n^{-1} ;

Rдоп1, **Rдоп2** – дополнительные магнитные сопротивления, Γ_n^{-1} ;

F₀ – дополнительная МДС F_0 (для двухполюсного с **F₀** и трехполюсного источников), А;

F_{m2} – МДС второго источника (для **трехполюсного**) , А;

R_{m2} – сопротивление второго источника (для **трехполюсного**) , Гн⁻¹;

F₀₂ – дополнительная МДС F_0 для второго источника (для **трехполюсного**), А.

Если направление МДС источника противоположно условно-положительному направлению, принятому в схеме (рисунок 3.11), то значение МДС задается со знаком "-".

Примечание 2. Вещественные числа вводятся в формате как с плавающей, так и с фиксированной точкой, например 12,5; -137,0; 10e-3. Дробная часть числа отделяется от целой части знаком ",".

Программа имеет возможность сохранить введенные данные для последующего использования. Данные сохраняются в файлах с расширением .dat. Для сохранения необходимо нажать кнопку "**Сохранить**" (позиция (5) – см. рисунок П. 1.2) и в открывшемся диалоговом окне задать имя сохраняемого файла и папку, в которой будет сохранен файл, и нажать "Сохранить".

Для загрузки сохраненных данных необходимо нажать кнопку "**Загрузить**" (позиция (6) – см. рисунок П. 1.2), в открывшемся диалоговом окне выбрать файл с загружаемыми данными и нажать кнопку "Открыть". После этого поля ввода будут заполнены соответствующими значениями из файла.

После ввода исходных данных (ручного или автоматизированной загрузки из файла), для начала расчета, необходимо нажать кнопку "**Рассчитать**" (позиция (4) – см. рисунок П. 1.2). После окончания расчета на экране появятся окна с результатами.

Результаты расчета

Результаты каждого расчета представляются в трех окнах – одно с числовыми данными и два – с графиками. Окна именуются в соответствии с их назначением и номером произведенного расчета. Расчеты нумеруются с начала запуска программы, при следующем запуске счетчик сбрасывается в исходное состояние. Например, окно с числовыми данными имеет название "Расчет 1. Результаты", а окно с графиком напряженности магнитного поля – "Расчет 1. График напряжен-

ности магнитного поля".

В окне с числовыми данными (рисунок П. 1.3) в текстовой форме представлены результаты и исходные данные производимого расчета. К результатам относятся таблицы значений магнитных сопротивлений $R(r)$ и $R(z)$ элементарных участков соответственно в радиальном и аксиальном направлениях, Гн^{-1} ; соответствующих магнитных потоков $\Phi(r)$ и $\Phi(z)$, Вб; соответствующих магнитных напряжений $U(r)$ и $U(z)$, А; соответствующих напряженностей магнитного поля $H(r)$, $H(z)$, $H = \sqrt{H^2(r) + H^2(z)}$, А/м. Радиальная (поперечная) составляющая отмечена индексом (r) , аксиальная (продольная) – индексом (z) .

Источник: Двухполюсный
Fm = -23220 Rm = 46,6e6 Rdop1 = 0 Rdop2 = 0 Fo = 0 Fm2 = 0 Rm2 = 0 Fo2 =

Результаты расчета:

R(z) 0	3,225153E+06	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
R(r) 1	1,634780E+06	8,173899E+05	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	8,173899E+05
R(z) 2	5,928591E+06	1,185718E+07	1,185718E+07	1,185718E+07	1,600720E+07	1,600720E+07	1,185718E+07
R(r) 2	2,983479E+06	1,491740E+06	1,491740E+06	1,491740E+06	57488E+06	1,657488E+06	1,491740E+06
R(z) 3	5,304529E+06	1,060906E+07	1,060906E+07	1,060906E+07	1,432223E+07	1,432223E+07	1,060906E+07
R(r) 3	2,668813E+06	1,334407E+06	1,334407E+06	1,334407E+06	1,482674E+06	1,482674E+06	1,334407E+06
R(z) 4	4,799335E+06	9,598671E+06	9,598671E+06	9,598671E+06	1,295821E+07	1,295821E+07	9,598671E+06
R(r) 4	2,414235E+06	1,207118E+06	1,207118E+06	1,207118E+06	1,341242E+06	1,341242E+06	1,207118E+06
R(z) 5	4,382002E+06	8,764004E+06	8,764004E+06	8,764004E+06	1,183141E+07	1,183141E+07	8,764004E+06
R(r) 5	2,204024E+06	1,102012E+06	1,102012E+06	1,102012E+06	1,224458E+06	1,224458E+06	1,102012E+06
R(z) 6	4,031442E+06	8,062884E+06	8,062884E+06	8,062884E+06	1,088489E+07	1,088489E+07	8,062884E+06

Рисунок П. 1.3 – Окно с числовыми результатами расчета, в котором выделен текст и вызвано контекстное меню нажатием правой кнопки мыши

Положение значения массива рассчитанных величин в таблице соответствует принципу индексации матричных элементов. Например, обозначению $R(r)$ 2 в третьем столбце соответствует значению $R(r)$ для номера "r", равного 2, и номера "l", равного 3.

Также выводится таблица значений градиента квадрата напряженности ($grad H$) для левой половины симметричной схемы ячейки сепарации.

Текст в окне можно выделить и скопировать в буфер обмена Windows, нажав правую кнопку мыши в окне и из появившегося контекстного меню, выбрав пункт "Копировать". Также можно выделить сразу весь текст, выбрав в контекстном меню пункт "Выделить всё".

Можно сохранить содержимое окна с численными данными в текстовый файл.

Для этого необходимо нажать правую кнопку мыши и из появившегося контекстного меню выбрать пункт "Сохранить...", после чего в появившемся окне задать имя сохраняемого файла и папку сохранения. По-умолчанию программа предлагает имя файла в соответствии с шаблоном "год-месяц-день час-минута-секунда Расчет №расчета.txt".

В окнах с графиками (рисунок П. 1.4) отображаются графики распределения напряженностей магнитного поля и градиентов квадрата напряженности поля.

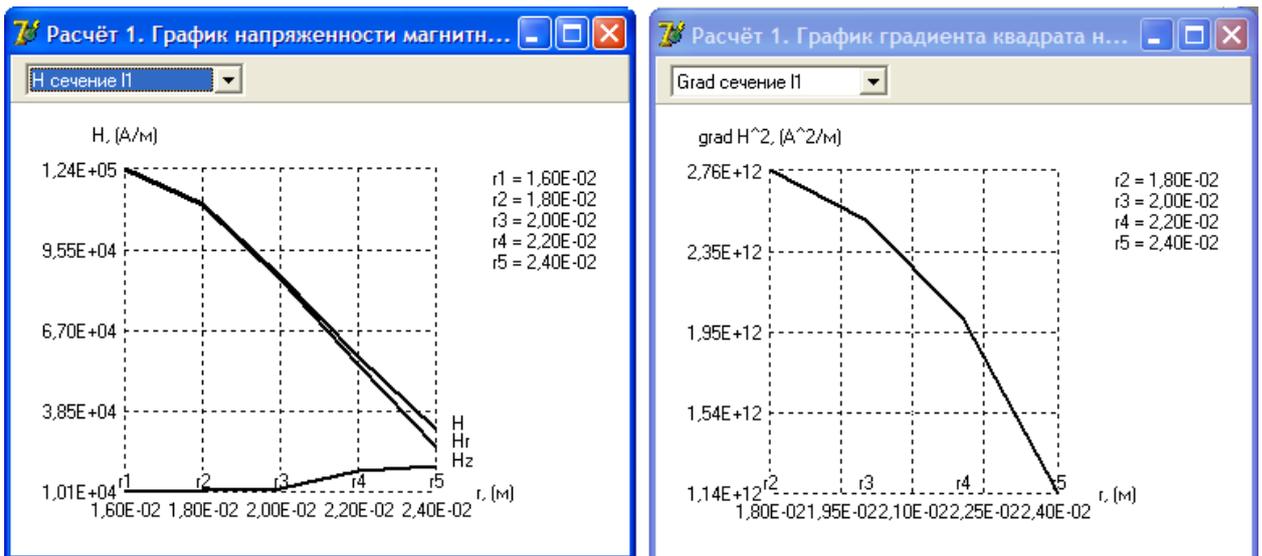


Рисунок П. 1.4 – Окна с графиками напряженности поля и его градиента

В окне с графиком можно выбрать сечение, для которого строится график. При нажатии правой кнопки мыши на графике появляется контекстное меню. Пункт "Сохранить" позволяет сохранить график для выбранного в данный момент сечения в графический файл jpeg-формата, при этом появляется диалоговое окно для указания имени и папки назначения сохраняемого файла. Пункт "Сохранить все" сохраняет графики для всех сечений в каталог с программой, именуя файлы в соответствии с вышеприведенным шаблоном.

Окна с результатами не зависят друг от друга, и каждое из них может быть закрыто, либо оставлено на экране для сравнения результатов разных этапов расчетов.

Программа написана на языке Delphi 7, предназначена для работы в ОС семейства Windows и на диске занимает объем 700 кБ.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПРОГРАММЫ

П.2.1. Результаты расчета распределения магнитного поля

Исходные данные:

r00 = 10e-3; r0 = 15e-3; r1 = 16e-3; r2 = 18e-3; r3 = 20e-3; r4 = 22e-3; r5 = 24e-3; r6 = 26e-3;

l1 = 5e-3; l2 = 10e-3; l3 = 9e-3; l4 = 9e-3; l5 = 9e-3; l6 = 10e-3; l7 = 5e-3;

mu1 = 1; mu2 = 1; mu3 = 1; mu4 = 1;

ИСТОЧНИК:

Fm = -23220; Rm = 46,6e6;

Результаты:		l1	l2	l3	l4			
R(hor)	1	3,225153E+06	0,000000E+00	0,000000E+00		0,000000E+00	0,000000E+00	3,225153E+06
R(vert)	1	1,634780E+06	8,173899E+05	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	8,173899E+05	1,634780E+06
R(hor)	2	5,928591E+06	1,185718E+07	1,600720E+07		1,600720E+07	1,185718E+07	5,928591E+06
R(vert)	2	2,983479E+06	1,491740E+06	1,657488E+06	1,657488E+06	1,657488E+06	1,491740E+06	2,983479E+06
R(hor)	3	5,304529E+06	1,060906E+07	1,432223E+07		1,432223E+07	1,060906E+07	5,304529E+06
R(vert)	3	2,668813E+06	1,334407E+06	1,482674E+06	1,482674E+06	1,482674E+06	1,334407E+06	2,668813E+06
R(hor)	4	4,799335E+06	9,598671E+06	1,295821E+07		1,295821E+07	9,598671E+06	4,799335E+06
R(vert)	4	2,414235E+06	1,207118E+06	1,341242E+06	1,341242E+06	1,341242E+06	1,207118E+06	2,414235E+06
R(hor)	5	4,382002E+06	8,764004E+06	1,183141E+07		1,183141E+07	8,764004E+06	4,382002E+06
R(vert)	5	2,204024E+06	1,102012E+06	1,224458E+06	1,224458E+06	1,224458E+06	1,102012E+06	2,204024E+06
R(hor)	6	4,031442E+06	8,062884E+06	1,088489E+07		1,088489E+07	8,062884E+06	4,031442E+06

φI(hor)	1	-6,545199E-05	-3,908117E-04	-3,908117E-04		-3,908117E-04	-3,908117E-04	-6,545199E-05
φI(vert)	1	-6,545199E-05	3,253597E-04	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	-3,253597E-04	-6,545199E-05
φI(hor)	2	-8,795782E-06	9,569685E-05	6,893445E-05		6,893445E-05	9,569685E-05	-8,795782E-06
φI(vert)	2	7,424777E-05	2,208671E-04	2,676240E-05	7,779665E-20	-2,676240E-05	-2,208671E-04	-7,424777E-05
φI(hor)	3	1,052174E-05	8,008036E-05	7,394721E-05		7,394721E-05	8,008036E-05	1,052174E-05
φI(vert)	3	6,372604E-05	1,513084E-04	3,289555E-05	1,598016E-19	-3,289555E-05	-1,513084E-04	-6,372604E-05
φI(hor)	4	1,826230E-05	7,255625E-05	7,796723E-05		7,796723E-05	7,255625E-05	1,826230E-05
φI(vert)	4	4,546374E-05	9,701448E-05	2,748458E-05	1,670686E-19	-2,748458E-05	-9,701448E-05	-4,546374E-05

$\phi I(\text{hor})$		337E-05	7,031024E-05	8,227695E-05		8,227695E-05	7,031024E-05	2,167837E-05
$\phi I(\text{vert})$		337E-05	4,838260E-05	1,551787E-05	1,447099E-20	-1,551787E-05	-4,838260E-05	2,378537E-05
$\phi I(\text{hor})$	6	2,378537E-05	7,216797E-05	8,768584E-05		8,768584E-05	7,216797E-05	2,378537E-05

U(hor)	1	-2,110927E+02	0,000000E+00	0,000000E+00		0,000000E+00	0,000000E+00	-2,110927E+02
U(vert)	1	-1,069996E+02	2,659457E+02	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	-2,659457E+02	-1,069996E+02
U(hor)	2	-5,214659E+01	1,134695E+03	1,103447E+03		1,103447E+03	1,134695E+03	-5,214659E+01
U(vert)	2	2,215167E+02	3,294761E+02	4,435837E+01	1,289471E-13	-4,435837E+01	-3,294761E+02	-2,215167E+02
U(hor)	3	5,581285E+01	8,495772E+02	1,059089E+03		1,059089E+03	8,495772E+02	5,581285E+01
U(vert)	3	1,700729E+02	2,019070E+02	4,877338E+01	2,369336E-13	-4,877338E+01	-2,019070E+02	-1,700729E+02
U(hor)	4	8,764692E+01	6,964436E+02	1,010315E+03		1,010315E+03	6,964436E+02	8,764692E+01
U(vert)	4	1,097601E+02	1,171079E+02	3,686346E+01	2,240794E-13	-3,686346E+01	-1,171079E+02	-1,097601E+02
U(hor)	5	9,499465E+01	6,161992E+02	9,734520E+02		9,734520E+02	6,161992E+02	9,499465E+01
U(vert)	5	5,242352E+01	5,331821E+01	1,900097E+01	1,771912E-14	-1,900097E+01	-5,331821E+01	5,242352E+01
U(hor)	6	9,588933E+01	5,818820E+02	9,544510E+02		9,544510E+02	5,818820E+02	9,588933E+01

H(hor)	1	-4,221854E+04	0,000000E+00	0,000000E+00		0,000000E+00	0,000000E+00	-4,221854E+04
H(vert)	1	-1,069996E+05	2,659457E+05	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	-2,659457E+05	-1,069996E+05
H(hor)	2	-1,042932E+04	1,134695E+05	8,173683E+04		8,173683E+04	1,134695E+05	-1,042932E+04
H(vert)	2	1,107583E+05	1,647381E+05	2,217919E+04	6,447353E-11	-2,217919E+04	-1,647381E+05	-1,107583E+05
H(hor)	3	1,116257E+04	8,495772E+04	7,845102E+04		7,845102E+04	8,495772E+04	1,116257E+04
H(vert)	3	8,503644E+04	1,009535E+05	2,438669E+04	1,184668E-10	-2,438669E+04	-1,009535E+05	-8,503644E+04
H(hor)	4	1,752938E+04	6,964436E+04	7,483818E+04		7,483818E+04	6,964436E+04	1,752938E+04
H(vert)	4	5,488007E+04	5,855394E+04	1,843173E+04	1,120397E-10	-1,843173E+04	-5,855394E+04	-5,488007E+04
H(hor)	5	1,899893E+04	6,161992E+04	7,210755E+04		7,210755E+04	6,161992E+04	1,899893E+04
H(vert)	5	2,621176E+04	2,665910E+04	9,500486E+03	8,859560E-12	-9,500486E+03	-2,665910E+04	2,621176E+04
H(hor)	6	1,917787E+04	5,818820E+04	7,070007E+04		7,070007E+04	5,818820E+04	1,917787E+04

П.2.2. Оценка точности расчета распределения магнитного поля

Критерием достоверности расчетов по разработанной программе является соответствие законам Кирхгофа величин, характеризующих магнитное состояние цепи.

Сначала проводим проверку баланса магнитных потоков по первому закону Кирхгофа. Примем во внимание, что матричные обозначения магнитных величин соответствуют обозначениям сопротивлений на рисунке 3.13. Точность выполнения балансов будем оценивать максимальной погрешностью.

$$\text{Для узла №1: } \Phi_{01}^{\parallel} - \Phi_{12}^{\perp} - \Phi_0 = 0;$$

$$-6,545 \cdot 10^{-5} - 3,254 \cdot 10^{-4} - (-3,91 \cdot 10^{-4}) = -4 \cdot 10^{-8}.$$

Погрешность:

$$\varepsilon_1 = \left| \Delta\Phi / \Phi_{\text{мин}} \right| \cdot 100\% = \left| -4 \cdot 10^{-8} / 6,545 \cdot 10^{-5} \right| \cdot 100\% = 0,06\%.$$

$$\text{Для узла №2: } -\Phi_{11}^{\perp} - \Phi_{21}^{\parallel} - \Phi_{21}^{\perp} = 0;$$

$$-(-6,545 \cdot 10^{-5}) - (-8,796 \cdot 10^{-6}) - 7,426 \cdot 10^{-5} = -9 \cdot 10^{-9}.$$

Погрешность: $\varepsilon_2 = \left| \Delta\Phi / \Phi_{\text{мин}} \right| \cdot 100\% = \left| -9 \cdot 10^{-9} / 8,796 \cdot 10^{-6} \right| \cdot 100\% = 0,012\%.$

$$\text{Для узла №3: } \Phi_{21}^{\parallel} + \Phi_{12}^{\perp} - \Phi_{22}^{\parallel} - \Phi_{22}^{\perp} = 0;$$

$$(-8,796 \cdot 10^{-6}) + 3,254 \cdot 10^{-4} - 9,57 \cdot 10^{-5} - 2,2087 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-8}.$$

Погрешность: $\varepsilon_3 = \left| \Delta\Phi / \Phi_{\text{мин}} \right| \cdot 100\% = \left| -3 \cdot 10^{-8} / 8,796 \cdot 10^{-6} \right| \cdot 100\% = 0,27\%.$

$$\text{Для узла №4: } \Phi_{22}^{\parallel} - \Phi_{23}^{\perp} - \Phi_{23}^{\parallel} = 0;$$

$$9,5697 \cdot 10^{-5} - 2,676 \cdot 10^{-5} - 6,893 \cdot 10^{-5} = 0,7 \cdot 10^{-8}.$$

Погрешность: $\varepsilon_4 = \left| \Delta\Phi / \Phi_{\text{мин}} \right| \cdot 100\% = \left| 0,7 \cdot 10^{-8} / 2,676 \cdot 10^{-5} \right| \cdot 100\% = 0,03\%.$

$$\text{Для узла №5: } \Phi_{234}^{\parallel} - \Phi_{24}^{\perp} - \Phi_{245}^{\parallel} = 0;$$

$$2,676 \cdot 10^{-5} - 0 - 2,676 \cdot 10^{-5} = 0.$$

В связи с симметрией распределения поля в правой области схемы (в зеркально изображенных узлах) будут те же самые значения погрешностей, что и в левой области. Как видим, балансы потоков в узлах схемы соблюдаются с вы-

сокой степенью точности.

Проверка баланса магнитных напряжений по второму закону Кирхгофа. Задаем направления обхода всех испытуемых контуров по часовой стрелке.

$$\text{Контур: } U_{11}^{\perp} + U_{01}^{\parallel} + U_{12}^{\perp} - U_{21}^{\parallel} = 0;$$

$$-1,074 \cdot 10^2 + (-2,1109 \cdot 10^2) + 2,659574 \cdot 10^2 - (-0,5215 \cdot 10^2) = -0,38.$$

$$\text{Погрешность: } \varepsilon_{u1} = \left| \frac{\Delta U}{U_{\text{мин}}} \right| \cdot 100\% = \left| 0,38 / 0,5215 \cdot 10^2 \right| 100\% = 0,73\%.$$

$$\text{Контур: } U_{11}^{\perp} + U_{01}^{\parallel} + U_{12}^{\perp} - U_{21}^{\parallel} = 0;$$

$$-1,074 \cdot 10^2 + (-2,1109 \cdot 10^2) + 2,6596 \cdot 10^2 - (-0,5215 \cdot 10^2) = -0,38.$$

$$\text{Погрешность: } \varepsilon_{u1} = \left| \frac{\Delta U}{U_{\text{мин}}} \right| \cdot 100\% = \left| 0,38 / 0,5215 \cdot 10^2 \right| 100\% = 0,73\%.$$

$$\text{Контур: } -U_{12}^{\perp} + U_{16}^{\perp} - U_{26}^{\parallel} - U_{245}^{\parallel} - U_{234}^{\parallel} - U_{22}^{\parallel} + R_m \Phi_0 = F_m;$$

$$2,6596 \cdot 10^2 + (-2,6596 \cdot 10^2) - 1,1347 \cdot 10^3 - 1,1034 \cdot 10^3 - 1,1034 \cdot 10^3 - 1,1347 \cdot 10^3 + (-3,9081 \cdot 10^{-4} \cdot 46,6 \cdot 10^6) = -23220;$$

В итоге значения баланса следующие: $-23229 \text{ А} \approx -23220 \text{ А}$;

$$\text{Погрешность: } \varepsilon_{u2} = \left| \frac{\Delta U}{F_m} \right| \cdot 100\% = \left| 9 / 23220 \right| 100\% = 0,04\%.$$

$$\text{Контур: } U_{51}^{\parallel} + U_{52}^{\perp} - U_{61}^{\parallel} - U_{51}^{\perp} = 0;$$

$$9,4995 \cdot 10^1 + 5,3318 \cdot 10^1 - 9,5889 \cdot 10^1 - 5,2424 \cdot 10^1 = 0$$

$$\text{Погрешность: } \varepsilon_{u3} = \left| \frac{\Delta U}{U_{\text{мин}}} \right| \cdot 100\% < 0,002\%.$$

Контур:

$$U_{01}^{\parallel} + U_{07}^{\parallel} + U_{17}^{\perp} + U_{27}^{\perp} + U_{37}^{\perp} + U_{47}^{\perp} - U_{57}^{\perp} - U_{67}^{\parallel} - U_{66}^{\parallel} - U_{645}^{\parallel} - U_{634}^{\parallel} - U_{62}^{\parallel} - U_{61}^{\parallel} - U_{51}^{\perp} - U_{41}^{\perp} - U_{31}^{\perp} - U_{21}^{\perp} + U_{11}^{\perp} + R_m \Phi_0 = F_m;$$

$$(-2,1109 \cdot 10^2) + (-2,1109 \cdot 10^2) + (-1,07 \cdot 10^2) + (-2,2152 \cdot 10^2) + (-1,7007 \cdot 10^2) + (-0,0976 \cdot 10^2) - 5,2424 \cdot 10^1 - 9,589 \cdot 10^1 - 5,8188 \cdot 10^2 - 9,5445 \cdot 10^2 - 9,5445 \cdot 10^2 - 5,8188 \cdot 10^2 - 9,589 \cdot 10^1 - 5,2424 \cdot 10^1 - 1,7007 \cdot 10^2 - 1,7007 \cdot 10^2 - 2,2152 \cdot 10^2 + (-1,07 \cdot 10^2) + (-3,9081 \cdot 10^{-4} \cdot 46,6 \cdot 10^6) = -23220; 23210 \text{ А} \approx -23220 \text{ А};$$

$$\text{Погрешность: } \varepsilon_{u4} = \left| \frac{\Delta U}{F_m} \right| \cdot 100\% = \left| 10 / 23220 \right| 100\% = 0,045\%.$$

$$\text{Погрешность: } \varepsilon_5 = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Phi_{\text{мин}}} \right| \cdot 100\% = \left| 0 / 2,676 \cdot 10^{-5} \right| 100\% = 0.$$

$$\text{Для узла №6: } \Phi_{61}^{\parallel} + \Phi_{52}^{\perp} - \Phi_{62}^{\parallel} = 0;$$

$$2,378 \cdot 10^{-5} + 4,831 \cdot 10^{-5} - 7,217 \cdot 10^{-5} = -1 \cdot 10^{-8}$$

Погрешность: $\varepsilon_6 = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Phi_{\min}} \right| \cdot 100\% = \left| 1 \cdot 10^{-8} / 2,378 \cdot 10^{-5} \right| 100\% = 0,04\%$.

$$\text{Для узла №7: } \Phi_{42}^{\parallel} + \Phi_{33}^{\perp} - \Phi_{43}^{\perp} - \Phi_{43}^{\parallel} = 0;$$

$$7,2556 \cdot 10^{-5} + 3,2896 \cdot 10^{-5} - 7,7967 \cdot 10^{-5} - 2,7484 \cdot 10^{-5} = -0,1 \cdot 10^{-8}$$

Погрешность: $\varepsilon_7 = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Phi_{\min}} \right| \cdot 100\% = \left| 0,1 \cdot 10^{-8} / 2,7484 \cdot 10^{-5} \right| 100\% = 0,004\%$.

$$\text{Для узла №8: } \Phi_{41}^{\perp} - \Phi_{51}^{\perp} - \Phi_{51}^{\parallel} = 0;$$

$$4,5464 \cdot 10^{-5} - 2,3785 \cdot 10^{-5} - 2,1678 \cdot 10^{-5} = -0,1 \cdot 10^{-8}$$

Погрешность: $\varepsilon_8 = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Phi_{\min}} \right| \cdot 100\% = \left| 0,1 \cdot 10^{-8} / 2,1678 \cdot 10^{-5} \right| 100\% = 0,05\%$.

Вывод.

1. Балансы магнитных потоков в узлах схемы соблюдаются с высокой степенью точности – невязка менее 0.5%. Балансы магнитных напряжений в различных контурах схемы удовлетворяются с высокой степенью точности – невязка менее 1%.
2. Для повышения точности расчетов напряженности магнитного поля в программе предусмотрены уменьшения шага дискретизации численных расчетов до семи раз.

Приложение 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ ДАННЫЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА

П.3.1. Экспериментальные исследования

Постоянный магнит закреплялся на штативе, который обеспечивает его фиксацию и перемещение относительно датчика Холла в двух взаимно перпендикулярных направлениях – аксиальном и радиальном. Все элементы конструкции штатива изготовлены из неферромагнитных материалов.

Измерительный стенд (рисунок П.3.1) состоит: 1 – источник постоянного напряжения Б5-47; 2 – датчик Холла ДХК-0.5А; 3 – миллиамперметр для контроля тока датчика; 4 – цифровой вольтметр В7-37; 5 – постоянное сопротивление; 6 – регулируемое сопротивление.

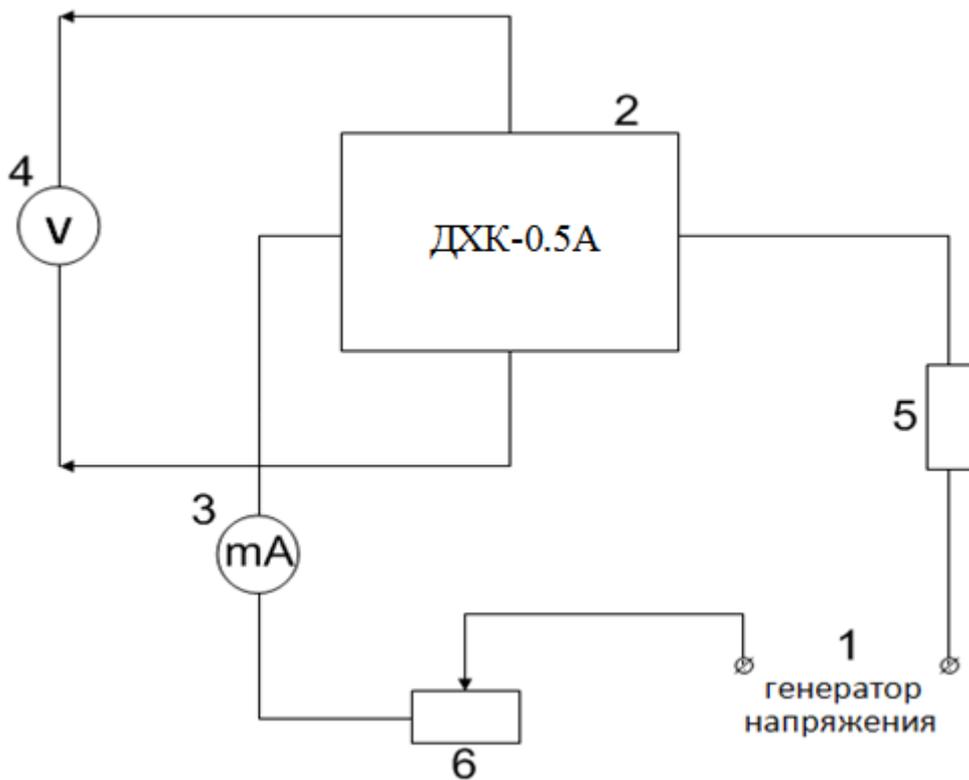


Рисунок П.3.1 – Схема измерительного стенда

В силу влияния посторонних полей линейная характеристика датчика Холла смещается относительно начала координат

$$H = \alpha U_x + \beta, \quad (\text{П.3.1})$$

U_X – напряжение на выходе датчика Холла.

Постоянные коэффициенты α и β определяют калибровкой датчика. В качестве источника калибровочного магнитного поля использован соленоид с постоянным электрическим током. Однослойная обмотка изготовленного соленоида содержит 520 витков провода ПЭЛ–1.0. Запитанный номинальным управляющим током датчик Холла помещался в центр катушки.

Величина напряженности магнитного поля на оси длинного соленоида конечной длины l ($l = 262$ мм) вычисляется по стандартной формуле

$$|H_z| = \frac{iW}{2l} \left[\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{(\frac{l}{2} - z)^2 + a_0^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{(\frac{l}{2} + z)^2 + a_0^2}} \right].$$

Получено для $H \leq 5 \cdot 10^5$ А/м: $\alpha = 3460$ (А/м)/В; $\beta = -1040$ А/м.

Экспериментальные исследования представлены в таблицах П.3.1-П.3.2.

Таблица П.3.1

Экспериментальные значения составляющих напряженности поля со стороны боковой поверхности ПМ

r , мм	6	7	8	9	10	12	15
H_{rp} , А/м	$1,35 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^4$	$5,7 \cdot 10^4$	-	$3 \cdot 10^4$	$2,2 \cdot 10^4$	$1,4 \cdot 10^4$
$H_{z0,5l}$, А/м	$3,6 \cdot 10^4$	$3,2 \cdot 10^4$	$2,85 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^4$	$2,2 \cdot 10^4$	$1,65 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^4$

Таблица П.3.2

Экспериментальные значения аксиальной составляющей напряженности поля на оси ПМ

z , мм	1	2.5	5	7.5	10
$H_z(z)$, А/м	$4 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$4,4 \cdot 10^4$

В таблицах П.3.1-П.3.2: r – расстояние от оси симметрии ПМ; z – расстояние от полюса вдоль оси ПМ; $H_{rp}(r)$ – напряженность радиальной составляющей поля на боковой поверхности около полюса ПМ, А/м; $H_{z0,5l}(r)$ – напряженность аксиальной составляющей поля посередине боковой поверхности ПМ, А/м; $H_z(z)$ – напря-

женность осевой составляющей поля на оси ПМ, А/м.

П.3.2. Вычисления на основе компьютерно-аналитической модели ПМ

Компьютерно-аналитическое моделирование распределения напряженности магнитного поля ПМ проводилось по приведенным ниже выражениям, полученным из (3.19) и (3.21):

$$H_{rp} = \frac{M_r}{4\pi} \int_0^{\psi_m(r)} \left[\frac{r_B \left(\cos\psi - \frac{r \sin^2\psi}{\sqrt{a_0^2 - r^2 \sin^2\psi}} \right)}{\sqrt{l^2 + r_B^2}} + \frac{2r \sin^2\psi}{\sqrt{a_0^2 - r^2 \sin^2\psi}} - \frac{r_H \left(\cos\psi - \frac{r \sin^2\psi}{\sqrt{a_0^2 - r^2 \sin^2\psi}} \right)}{\sqrt{l^2 + r_H^2}} \right] d\psi;$$

$$H_{z0,5l} = \frac{M_r}{4\pi} \int_0^{\psi_m(r)} \left[\frac{l}{\sqrt{(0.5l)^2 + r_H^2}} - \frac{l}{\sqrt{(0.5l)^2 + r_B^2}} \right] d\psi.$$

Зависимость $H_z(z)$ вычислялась по формуле (3.22) при $z_l = -l$. Результаты этих вычислений представлены в таблицах ПЗ.3-ПЗ.4.

Таблица П.3.3

Радиальное распределение радиальной составляющей напряженности магнитного поля у полюса ПМ

r , мм	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9.5	10	11.5	12	14.5	15
H_{rp} , А/м	1,3 $\cdot 10^5$	1 $\cdot 10^5$	8,1 $\cdot 10^4$	6,7 $\cdot 10^4$	5,67 $\cdot 10^4$	4,9 $\cdot 10^4$	3,68 $\cdot 10^4$	3,24 $\cdot 10^4$	2,3 $\cdot 10^4$	2,07 $\cdot 10^4$	1,28 $\cdot 10^4$	1,17 $\cdot 10^4$

Таблица П.3.4.

Радиальное распределение аксиальной составляющей напряженности магнитного поля посередине ПМ

r , мм	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$H_{z0,5l}$, А/м	3,8 $\cdot 10^4$	3,4 $\cdot 10^4$	3 $\cdot 10^4$	2,6 $\cdot 10^4$	2,3 $\cdot 10^4$	2 $\cdot 10^4$	1,7 $\cdot 10^4$	1,5 $\cdot 10^4$	1,3 $\cdot 10^4$	1,1 $\cdot 10^4$

Таблица П.3.5

Распределение аксиальной составляющей напряженности
осевого магнитного поля ПМ

z , мм	1	2.5	5	7.5	10
$H_z(z)$, А/м	$3,9 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^5$	$7,7 \cdot 10^4$	$4,6 \cdot 10^4$

П.3.3. Численное моделирование поля на основе схемной модели

Результаты расчета по разработанной программе представлено в таблице П.3.6. Заметим, что программа целевого назначения, которая предназначена для расчета характеристик поля сборок ПМ магнитных сепараторов. Программа не рассчитывает характеристики осевого поля. Кроме того, в сборку ПМ входят ферромагнитные полюсные наконечники, которые деформируют распределение поля радиальной составляющей у поверхности ПМ. При этом правильное значение находится как среднее значение двух участков сетки разбиения расчетного пространства между полюсом ПМ и немагнитной средой, между которыми находится полюсный наконечник. В частности,

$$\bar{H}_{rp} = 0.5[H_{rp}(l_3) + H_{rp}(l_6)].$$

Рассчитаем параметров эквивалентной схемы замещения неодим борового постоянного магнита с параметрами: $B_r = 1.27$ Тл; $H_{cb} = 9 \cdot 10^5$ А/м. Длина ПМ 20 мм, диаметр ПМ $2r_0 = 10$ мм. Для программы выбираем трехполюсную магнитную схему (рисунок 3.11, д), поэтому эффективная длина магнитного элемента этой схемы составит $l_3 = 10$ мм. По формулам (3.40), (3.41) пункта 3.2.3 $F_{m3} = 2H_{cb}\gamma^{-1}\text{th}(0.5\gamma l)$; $R_{m3} = 2r_M\gamma^{-1}\text{th}(0.5\gamma l)$, $r_M = H_{cb}/B_r S$; $g_{SH} = \pi^2\mu_0 2r_0 l^{-1}$; $\gamma = \sqrt{2r_M g_{SH}}$ параметры схемы замещения принимают следующие значения: $r_M = 9 \cdot 10^9$ 1/Гн·м; $g_{SH} = 1.24 \cdot 10^{-5}$ Гн/м; $\gamma = 4.7 \cdot 10^2$ м⁻¹; $F_{m3} = 3800$ А; $R_{m3} = 3.8 \cdot 10^7$ Гн⁻¹.

В таблице П.3.6 желтым цветом отмечены данные, которые сведены в таблицах П.3.7 и П.3.8.

Таблица П.3.6

Исходные данные:

r00 = 0	r0 = 5e-3	r1 = 6e-3	r2 = 7e-3	r3 = 8e-3	r4 = 9e-3	r5 = 10e-3	r6 = 11e-3			r14	
r7 = 12e-3	r8 = 13e-3	r9 = 14e-3	r10 = 15e-3	r11 = 16e-3	r12 = 17e-3	r13 = 18e-3					
= 19e-3	r15 = 20e-3										
l1 = 8e-3	l2 = 1,5e-3	l3 = 0,5e-3	l4 = 1e-6	l5 = 1e-6	l6 = 1e-6	l7 = 2,86e-3	l8 =				
2,86e-3	l9 = 2,86e-3	l10 = 2,86e-3	l11 = 2,86e-3	l12 = 2,86e-3	l13 = 2,86e-3	l14 = 1e-6					
l15 = 1e-6	l16 = 1e-6	l17 = 0,5e-3	l18 = 1,5e-3	l19 = 8e-3							
mu1 = 1	mu2 = 1	mu3 = 1	mu4 = 1								
Источник: Трёхполюсный											
Fm = 3800	Rm = 3,8e7	Rdop1 = 0	Rdop2 = 0	Fo = 0	Fm2 = 3800	Rm2 = 3,8e7	Fo2 = 0				
Результаты расчета:											
	l1	l2	l3	l4	l5	l6	l7	l8	l9	l10/2	середина
H(z) 2	1,881183E+04	6,297489E+04	1,420092E+05	1,422309E+05	1,422032E+05	1,421756E+05	6,321492E+04	3,961715E+04	3,304206E+04	3,304206E+04	3,304206E+04
H(r) 2	5,658777E+04	1,899761E+05	1,399808E+05	8,722386E+04	8,711812E+04	8,701242E+04	8,690675E+04	2,597250E+04	9,438020E+03	3,146007E+03	1,694476E-08
H 2	5,963271E+04	2,001419E+05	1,994022E+05	1,668461E+05	1,667673E+05	1,666885E+05	1,074658E+05	4,737181E+04	3,436051E+04	3,312018E+04	3,304206E+04
H(z) 3	2,138281E+03	2,964465E+04	3,649536E+04	3,649732E+04	3,649925E+04	3,650117E+04	4,190924E+04	3,383586E+04	2,884206E+04	2,884206E+04	2,884206E+04
H(r) 3	4,985950E+04	9,789992E+04	7,814865E+04	6,938525E+04	6,936773E+04	6,935021E+04	6,933268E+04	3,137984E+04	1,366922E+04	4,556407E+03	6,710484E-09
H 3	4,990533E+04	1,022898E+05	8,625035E+04	7,839877E+04	7,838417E+04	7,836955E+04	8,101484E+04	4,614716E+04	3,191727E+04	2,919975E+04	2,884206E+04
Grad 3	1,065518E+12	2,959357E+13	3,232210E+13	2,169127E+13	2,166725E+13	2,164327E+13	4,985504E+12	1,145286E+11	3,397401E+10	1,208819E+11	1,317454E+11
H(z) 4	3,866772E+03	1,647713E+04	1,896856E+04	1,897195E+04	1,897533E+04	1,897871E+04	2,863901E+04	2,764333E+04	2,565576E+04	2,565576E+04	2,565576E+04
H(r) 4	4,245896E+04	5,991224E+04	5,325981E+04	5,054833E+04	5,054290E+04	5,053748E+04	5,053205E+04	2,877396E+04	1,424290E+04	4,747633E+03	6,435761E-08
H 4	4,263468E+04	6,213673E+04	5,653684E+04	5,399137E+04	5,398748E+04	5,398359E+04	5,808340E+04	3,990106E+04	2,934413E+04	2,609134E+04	2,565576E+04
Grad 4	6,728265E+11	6,602227E+12	4,242709E+12	3,231300E+12	3,229429E+12	3,227558E+12	3,189724E+12	5,374653E+11	1,576337E+11	1,718671E+11	1,736463E+11
H(z) 5	6,048432E+03	1,204218E+04	1,354559E+04	1,354821E+04	1,355082E+04	1,355344E+04	2,103129E+04	2,256254E+04	2,233574E+04	2,233574E+04	2,233574E+04
H(r) 5	3,560343E+04	4,102844E+04	3,818759E+04	3,698795E+04	3,698555E+04	3,698315E+04	3,698075E+04	2,405561E+04	1,299007E+04	4,330025E+03	5,788348E-08
H 5	3,611354E+04	4,275917E+04	4,051882E+04	3,939115E+04	3,938979E+04	3,938844E+04	4,254281E+04	3,298091E+04	2,583848E+04	2,275158E+04	2,233574E+04
Grad 5	5,135280E+11	2,032626E+12	1,554639E+12	1,363405E+12	1,363092E+12	1,362779E+12	1,563790E+12	5,043541E+11	1,934510E+11	1,631238E+11	1,593329E+11
H(z) 6	6,726558E+03	1,014828E+04	1,114632E+04	1,114819E+04	1,115007E+04	1,115194E+04	1,651201E+04	1,869348E+04	1,930775E+04	1,930775E+04	1,930775E+04
H(r) 6	2,956370E+04	2,994288E+04	2,826925E+04	2,756512E+04	2,756371E+04	2,756230E+04	2,756089E+04	1,936288E+04	1,107569E+04	3,691896E+03	2,721033E-09
H 6	3,031929E+04	3,161588E+04	3,038735E+04	2,973412E+04	2,973352E+04	2,973291E+04	3,212863E+04	2,691407E+04	2,225893E+04	1,965755E+04	1,930775E+04
Grad 6	3,849283E+11	8,287833E+11	7,183838E+11	6,675447E+11	6,674739E+11	6,674031E+11	7,776420E+11	3,633735E+11	1,721672E+11	1,312151E+11	1,260960E+11
H(z) 7	6,773955E+03	9,032526E+03	9,738047E+03	9,739412E+03	9,740777E+03	9,742142E+03	1,364557E+04	1,579586E+04	1,672600E+04	1,672600E+04	1,672600E+04
H(r) 7	2,432774E+04	2,260238E+04	2,137209E+04	2,087365E+04	2,087265E+04	2,087165E+04	2,087066E+04	1,531344E+04	9,088936E+03	3,029645E+03	1,220891E-08
H 7	2,525323E+04	2,434038E+04	2,348608E+04	2,303401E+04	2,303368E+04	2,303335E+04	2,493564E+04	2,200024E+04	1,903596E+04	1,699817E+04	1,672600E+04
Grad 7	2,815336E+11	4,071093E+11	3,717952E+11	3,535525E+11	3,535317E+11	3,535108E+11	4,104631E+11	2,403567E+11	1,330921E+11	9,748131E+10	9,302996E+10
H(z) 8	6,558285E+03	8,212331E+03	8,741163E+03	8,742198E+03	8,743232E+03	8,744266E+03	1,170249E+04	1,361946E+04	1,460737E+04	1,460737E+04	1,460737E+04
H(r) 8	1,980255E+04	1,732610E+04	1,633589E+04	1,595024E+04	1,594947E+04	1,594869E+04	1,594792E+04	1,198017E+04	7,275247E+03	2,425082E+03	2,579944E-09

Таблица П.3.6

H 8	2,086030E+04	1,917384E+04	1,852753E+04	1,818890E+04	1,818872E+04	1,818854E+04	1,978091E+04	1,813874E+04	1,631884E+04	1,480731E+04	1,460737E+04
Grad 8	2,025736E+11	2,248180E+11	2,083266E+11	1,997293E+11	1,997208E+11	1,997123E+11	2,305015E+11	1,549965E+11	9,606345E+10	6,968165E+10	6,638392E+10
H(z) 9	6,248730E+03	7,552189E+03	7,969854E+03	7,970673E+03	7,971492E+03	7,972311E+03	1,031516E+04	1,197438E+04	1,291151E+04	1,291151E+04	1,291151E+04
H(r) 9	1,587930E+04	1,331026E+04	1,249921E+04	1,219261E+04	1,219199E+04	1,219138E+04	1,219077E+04	9,268485E+03	5,705957E+03	1,901986E+03	9,319076E-09
H 9	1,706455E+04	1,530355E+04	1,482392E+04	1,456679E+04	1,456672E+04	1,456666E+04	1,596926E+04	1,514234E+04	1,411613E+04	1,305085E+04	1,291151E+04
H(z) 10	5,927600E+03	7,011486E+03	7,356654E+03	7,357331E+03	7,358007E+03	7,358684E+03	9,293386E+03	1,072874E+04	1,158145E+04	1,158145E+04	1,158145E+04
H(r) 10	1,245459E+04	1,012057E+04	9,466864E+03	9,224751E+03	9,224267E+03	9,223783E+03	9,223298E+03	7,051451E+03	4,375081E+03	1,458360E+03	4,956819E-09
H 10	1,379323E+04	1,231206E+04	1,198924E+04	1,179942E+04	1,179947E+04	1,179951E+04	1,309337E+04	1,283857E+04	1,238028E+04	1,167291E+04	1,158145E+04
Grad 10	1,009456E+11	8,261171E+10	7,600684E+10	7,296493E+10	7,296201E+10	7,295909E+10	8,358110E+10	6,446176E+10	4,599371E+10	3,406783E+10	3,257710E+10
H(z) 11	5,635848E+03	6,575682E+03	6,872428E+03	6,873009E+03	6,873589E+03	6,874170E+03	8,533999E+03	9,792946E+03	1,056162E+04	1,056162E+04	1,056162E+04
H(r) 11	9,436530E+03	7,498095E+03	6,990498E+03	6,805045E+03	6,804674E+03	6,804303E+03	6,803932E+03	5,212810E+03	3,247969E+03	1,082656E+03	6,545206E-09
H 11	1,099140E+04	9,973014E+03	9,802925E+03	9,671964E+03	9,672116E+03	9,672267E+03	1,091433E+04	1,109393E+04	1,104975E+04	1,061696E+04	1,056162E+04
Grad 11	6,944237E+10	5,212587E+10	4,764455E+10	4,567946E+10	4,567755E+10	4,567564E+10	5,231362E+10	4,175364E+10	3,117425E+10	2,353689E+10	2,258221E+10
H(z) 12	5,393543E+03	6,237284E+03	6,501523E+03	6,502038E+03	6,502554E+03	6,503070E+03	7,977662E+03	9,105939E+03	9,804514E+03	9,804514E+03	9,804514E+03
H(r) 12	6,745570E+03	5,275710E+03	4,905793E+03	4,771841E+03	4,771573E+03	4,771305E+03	4,771037E+03	3,656937E+03	2,283406E+03	7,611353E+02	2,611327E-09
H 12	8,636725E+03	8,169261E+03	8,144728E+03	8,065170E+03	8,065427E+03	8,065684E+03	9,295476E+03	9,812813E+03	1,006690E+04	9,834014E+03	9,804514E+03
Grad 12	4,621787E+10	3,272419E+10	2,976073E+10	2,849992E+10	2,849870E+10	2,849749E+10	3,271674E+10	2,678387E+10	2,075460E+10	1,601206E+10	1,541924E+10
H(z) 13	5,209811E+03	5,990672E+03	6,233619E+03	6,234092E+03	6,234565E+03	6,235038E+03	7,588116E+03	8,625683E+03	9,272252E+03	9,272252E+03	9,272252E+03
H(r) 13	4,313448E+03	3,338193E+03	3,098412E+03	3,012066E+03	3,011893E+03	3,011720E+03	3,011548E+03	2,307817E+03	1,442430E+03	4,808100E+02	9,354844E-09
H 13	6,763723E+03	6,857965E+03	6,961189E+03	6,923615E+03	6,923966E+03	6,924317E+03	8,163880E+03	8,929078E+03	9,383776E+03	9,284709E+03	9,272252E+03
Grad 13	2,884506E+10	1,970513E+10	1,787844E+10	1,711052E+10	1,710981E+10	1,710910E+10	1,975695E+10	1,656288E+10	1,328719E+10	1,050200E+10	1,015385E+10
H(z) 14	5,087904E+03	5,830818E+03	6,060928E+03	6,061375E+03	6,061823E+03	6,062270E+03	7,342057E+03	8,323100E+03	8,936021E+03	8,936021E+03	8,936021E+03
H(r) 14	2,081669E+03	1,601324E+03	1,484673E+03	1,442795E+03	1,442712E+03	1,442628E+03	1,442544E+03	1,105110E+03	6,909891E+02	2,303297E+02	3,821501E-09
H 14	5,497282E+03	6,046708E+03	6,240120E+03	6,230725E+03	6,231140E+03	6,231556E+03	7,482428E+03	8,396146E+03	8,962697E+03	8,938989E+03	8,936021E+03
Grad 14	1,552784E+10	1,046901E+10	9,519059E+09	9,114517E+09	9,114192E+09	9,113868E+09	1,066220E+10	9,233167E+09	7,725319E+09	6,300307E+09	6,122181E+09

Таблица П.3.7

Радиальное распределение радиальной составляющей напряженности магнитного поля у полюса ПМ

$r, \text{ мм}$	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5
$H_{rp}(l_3), \text{ А/м}$	$1,4 \cdot 10^5$	$7,8 \cdot 10^4$	$5,3 \cdot 10^4$	$3,8 \cdot 10^4$	$2,83 \cdot 10^4$	$2,14 \cdot 10^4$	$1,63 \cdot 10^4$	$1,25 \cdot 10^4$	$9,5 \cdot 10^3$
$H_{rp}(l_6), \text{ А/м}$	$8,7 \cdot 10^4$	$6,9 \cdot 10^4$	$5,05 \cdot 10^4$	$3,7 \cdot 10^4$	$2,76 \cdot 10^4$	$2,09 \cdot 10^4$	$1,6 \cdot 10^4$	$1,22 \cdot 10^4$	$9,2 \cdot 10^3$
$\bar{H}_{rp}, \text{ А/м}$	$1,14 \cdot 10^5$	$7,35 \cdot 10^4$	$5,18 \cdot 10^4$	$3,75 \cdot 10^4$	$2,8 \cdot 10^4$	$2,2 \cdot 10^4$	$1,62 \cdot 10^4$	$1,24 \cdot 10^4$	$9,35 \cdot 10^3$

Таблица П.3.8

Распределение аксиальной составляющей напряженности
осевого магнитного поля ПМ

z , мм	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$H_z(z)$, А/м	3,3 $\cdot 10^4$	2,9 $\cdot 10^4$	2,6 $\cdot 10^4$	2,2 $\cdot 10^4$	1,9 $\cdot 10^4$	1,7 $\cdot 10^4$	1,46 $\cdot 10^4$	1,3 $\cdot 10^4$	1,2 $\cdot 10^4 \cdot 10^4$

Адекватность расчетных и экспериментальных зависимостей оценивалась по критерию Фишера [61]. По данным таблиц П.3.1- П.3.5 и П.3.7-П.3.8 рассчитывались соответствующие компоненты критерия Фишера, которые представлены в таблице П.3.9.

Таблица П.3.9

Оценка адекватности моделей по критерию Фишера

Тип модели соответствующих распределений	Групповая дисперсия \bar{S}	Остаточная дисперсия $\bar{S}_{\text{ост}}$	Отношение дисперсий F	Табличное значение F_T , при 1% уровне значимости
H_{rp} , компьютер.-аналит.	$2,19 \cdot 10^9$	$2,93 \cdot 10^7$	74,9	15,5
H_{rp} , численная	$1 \cdot 10^9$	$6,493 \cdot 10^7$	15,6	15,5
$H_{z0,5l}$, компьютер.-аналит.	$7,19 \cdot 10^7$	$2,7 \cdot 10^6$	26,6	10,7
$H_{z0,5l}$, численная	$6,2 \cdot 10^7$	$7,37 \cdot 10^5$	84,1	6,8
$H_z(z)$, компьютер.-аналит.	$2,2 \cdot 10^{10}$	$3,04 \cdot 10^8$	72,5	28,6

Из данных таблицы П.3.9 следует $F > F_T$, поэтому по критерию Фишера с уровнем риска не более 1% разработанные математические модели распределения поля постоянного магнита адекватны.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА

Исходные данные: для $dш=0$.

$r00 = 10,5e-3$ $r0 = 14,75e-3$ $r1 = 16e-3$ $r2 = 18e-3$ $r3 = 20e-3$ $r4 = 24e-3$ $r5 = 28e-3$ $r6 = 32e-3$
 $r7 = 36e-3$ $r8 = 40e-3$ $r9 = 44e-3$ $r10 = 48e-3$ $r11 = 52e-3$

$l1 = 2,5e-3$ $l2 = 2,5e-3$ $l3 = 5e-3$ $l4 = 5e-3$ $l5 = 5,6e-3$ $l6 = 5,6e-3$ $l7 = 5,6e-3$ $l8 = 5,6e-3$
 $l9 = 5,6e-3$ $l10 = 5e-3$ $l11 = 5e-3$ $l12 = 2,5e-3$ $l13 = 2,5e-3$

$\mu1 = 1$ $\mu2 = 1$ $\mu3 = 1$ $\mu4 = 1$

Источник: Трёхполюсный

$Fm = 5e3$ $Rm = 1,2e7$ $Rdop1 = 0$ $Rdop2 = 0$ $Fo = -1,7e2$ $Fm2 = -5e3$ $Rm2 = 1,2e7$ $Fo2 = -1,7e2$

Результаты расчета:

	$l1$	$l2$	$l3$	$l4$	$l5$	$l6$	$l7/2$	середина
H 2	2,971245E+05	3,297923E+05	4,464758E+05	1,939355E+05	1,867456E+05	3,664615E+05	7,481362E+05	9,839587E+05
H 3	2,279252E+05	2,333804E+05	2,579546E+05	1,531654E+05	1,361411E+05	2,155158E+05	4,186664E+05	5,299705E+05
H 4	1,122412E+05	1,115606E+05	1,202147E+05	9,613441E+04	8,740639E+04	1,063487E+05	1,575051E+05	1,847755E+05
H 5	5,049216E+04	4,987182E+04	5,238831E+04	4,350024E+04	3,766779E+04	4,302146E+04	5,903396E+04	6,734913E+04
H 6	2,291703E+04	2,261242E+04	2,362197E+04	1,964548E+04	1,636836E+04	1,792914E+04	2,380134E+04	2,683819E+04
H 7	1,059761E+04	1,046023E+04	1,090643E+04	9,063021E+03	7,336430E+03	7,626943E+03	1,002972E+04	1,128083E+04
H 8	4,975037E+03	4,920915E+03	5,144470E+03	4,319943E+03	3,457511E+03	3,342385E+03	4,370427E+03	4,916502E+03
H 9	2,299886E+03	2,294141E+03	2,448381E+03	2,145353E+03	1,766737E+03	1,560861E+03	1,974761E+03	2,204943E+03
H10	9,126090E+02	9,524129E+02	1,130393E+03	1,133975E+03	1,032467E+03	8,430087E+02	9,541935E+02	1,022504E+03

Исходные данные: для $d_{ш}=2$ мм.

 $r_{00} = 10,5e-3$ $r_0 = 14,75e-3$ $r_1 = 16e-3$ $r_2 = 18e-3$ $r_3 = 20e-3$ $r_4 = 24e-3$ $r_5 = 28e-3$ $r_6 = 32e-3$
 $r_7 = 36e-3$ $r_8 = 40e-3$ $r_9 = 44e-3$ $r_{10} = 48e-3$ $r_{11} = 52e-3$

$l_1 = 2,5e-3$ $l_2 = 2,5e-3$ $l_3 = 5e-3$ $l_4 = 5e-3$ $l_5 = 5,6e-3$ $l_6 = 5,6e-3$ $l_7 = 5,6e-3$ $l_8 = 5,6e-3$
 $l_9 = 5,6e-3$ $l_{10} = 5e-3$ $l_{11} = 5e-3$ $l_{12} = 2,5e-3$ $l_{13} = 2,5e-3$
 $\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$ $\mu_3 = 56$ $\mu_4 = 1$

Источник: Трёхполюсный

$F_m = 5e3$ $R_m = 1,2e7$ $R_{dop1} = 0$ $R_{dop2} = 0$ $F_o = -1,7e2$ $F_{m2} = -5e3$ $R_{m2} = 1,2e7$ $F_{o2} = -1,7e2$

Результаты расчета:

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	$l_7/2$	середина
H2	2,331349E+05	3,058917E+05	2,632246E+04	2,624845E+04	2,646372E+04	2,712223E+04	2,720935E+04	2,728647E+04
H3	1,188565E+05	1,115526E+05	3,383901E+04	2,653634E+04	2,900087E+04	4,542976E+04	8,184319E+04	1,012374E+05
H4	3,768857E+04	3,655634E+04	2,865569E+04	2,028773E+04	1,864206E+04	2,308741E+04	3,263673E+04	3,763182E+04
H5	1,394436E+04	1,356858E+04	1,324961E+04	1,004155E+04	8,428816E+03	9,713089E+03	1,290599E+04	1,455253E+04
H6	5,949888E+03	5,839469E+03	5,976231E+03	4,728666E+03	3,799202E+03	4,123483E+03	5,391272E+03	6,046658E+03
H7	2,712724E+03	2,672071E+03	2,762576E+03	2,240540E+03	1,759587E+03	1,778091E+03	2,329005E+03	2,617794E+03
H8	1,278829E+03	1,263860E+03	1,314398E+03	1,093785E+03	8,594523E+02	7,965659E+02	1,038987E+03	1,170195E+03
H9	5,974888E+02	5,958581E+02	6,336155E+02	5,557513E+02	4,569153E+02	3,906813E+02	4,868747E+02	5,425490E+02
H10	2,393673E+02	2,497400E+02	2,958136E+02	2,990645E+02	2,767029E+02	2,294404E+02	2,535679E+02	2,693126E+02

Исходные данные: для $d_{ш}=4$ мм.

 $r00 = 10,5e-3$ $r0 = 14,75e-3$ $r1 = 16e-3$ $r2 = 20e-3$ $r3 = 24e-3$ $r4 = 28e-3$ $r5 = 32e-3$ $r6 = 36e-3$
 $r7 = 40e-3$ $r8 = 44e-3$ $r9 = 48e-3$ $r10 = 52e-3$

$l1 = 2,5e-3$ $l2 = 2,5e-3$ $l3 = 5e-3$ $l4 = 5e-3$ $l5 = 5,6e-3$ $l6 = 5,6e-3$ $l7 = 5,6e-3$ $l8 = 5,6e-3$
 $l9 = 5,6e-3$ $l10 = 5e-3$ $l11 = 5e-3$ $l12 = 2,5e-3$ $l13 = 2,5e-3$

$\mu1 = 1$ $\mu2 = 1$ $\mu3 = 56$ $\mu4 = 1$

Источник: Трёхполюсный

$Fm = 5e3$ $Rm = 1,2e7$ $Rdop1 = 0$ $Rdop2 = 0$ $Fo = -1,7e2$ $Fm2 = -5e3$ $Rm2 = 1,2e7$ $Fo2 = -1,7e2$

Результаты расчета:

	$l1$	$l2$	$l3$	$l4$	$l5$	$l6$	$l7/2$	середина
H2	1,306420E+05	1,938719E+05	1,344297E+04	1,341426E+04	1,345239E+04	1,359874E+04	1,366373E+04	1,372613E+04
H3	3,323928E+04	3,354544E+04	1,883196E+04	1,390465E+04	1,384487E+04	1,881086E+04	2,908842E+04	3,473905E+04
H4	1,114926E+04	1,079060E+04	9,872461E+03	7,416172E+03	6,522347E+03	7,719969E+03	1,076142E+04	1,235075E+04
H5	4,584053E+03	4,487343E+03	4,534507E+03	3,574403E+03	2,953908E+03	3,274354E+03	4,355969E+03	4,916370E+03
H6	2,056008E+03	2,024088E+03	2,090622E+03	1,694338E+03	1,355094E+03	1,407228E+03	1,849193E+03	2,079792E+03
H7	9,575080E+02	9,462441E+02	9,857654E+02	8,190358E+02	6,496428E+02	6,221487E+02	8,124371E+02	9,139944E+02
H8	4,425240E+02	4,412881E+02	4,701370E+02	4,106253E+02	3,371496E+02	2,949944E+02	3,714751E+02	4,144569E+02
H9	1,758834E+02	1,835280E+02	2,176252E+02	2,184888E+02	1,996651E+02	1,637084E+02	1,838564E+02	1,964447E+02

Исходные данные: для $d_{ш}=8$ мм.

 $r_{00} = 10,5e-3$ $r_0 = 14,75e-3$ $r_1 = 16e-3$ $r_2 = 24e-3$ $r_3 = 28e-3$ $r_4 = 32e-3$ $r_5 = 36e-3$ $r_6 = 40e-3$
 $r_7 = 44e-3$ $r_8 = 48e-3$ $r_9 = 52e-3$

$l_1 = 2,5e-3$ $l_2 = 2,5e-3$ $l_3 = 5e-3$ $l_4 = 5e-3$ $l_5 = 5,6e-3$ $l_6 = 5,6e-3$ $l_7 = 5,6e-3$ $l_8 = 5,6e-3$
 $l_9 = 5,6e-3$ $l_{10} = 5e-3$ $l_{11} = 5e-3$ $l_{12} = 2,5e-3$ $l_{13} = 2,5e-3$

$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$ $\mu_3 = 56$ $\mu_4 = 1$

Источник: Трёхполюсный

$F_m = 5e3$ $R_m = 1,2e7$ $R_{dop1} = 0$ $R_{dop2} = 0$ $F_o = -1,7e2$ $F_{m2} = -5e3$ $R_{m2} = 1,2e7$ $F_{o2} = -1,7e2$

Результаты расчета:

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	$l_7/2$	середина
H2	5,417962E+04	1,034974E+05	6,341351E+03	6,328945E+03	6,336623E+03	6,375243E+03	6,406136E+03	6,435177E+03
H3	1,172449E+04	1,131758E+04	9,053775E+03	6,630379E+03	6,316487E+03	8,284270E+03	1,275088E+04	1,520928E+04
H4	4,521413E+03	4,406467E+03	4,336120E+03	3,392296E+03	2,959487E+03	3,421506E+03	4,781786E+03	5,495042E+03
H5	1,973309E+03	1,940754E+03	1,998971E+03	1,621551E+03	1,347195E+03	1,462147E+03	1,950895E+03	2,205114E+03
H6	9,008020E+02	8,902071E+02	9,301426E+02	7,729063E+02	6,278468E+02	6,361444E+02	8,331267E+02	9,364914E+02
H7	4,086288E+02	4,074961E+02	4,357264E+02	3,785700E+02	3,121519E+02	2,873293E+02	3,663511E+02	4,090575E+02
H8	1,601226E+02	1,671354E+02	1,986229E+02	1,970770E+02	1,764391E+02	1,431533E+02	1,656965E+02	1,788823E+02

Исходные данные: для $d_{ш}=12$ мм.

 $r_{00} = 10,5e-3$ $r_0 = 14,75e-3$ $r_1 = 16e-3$ $r_2 = 28e-3$ $r_3 = 32e-3$ $r_4 = 36e-3$ $r_5 = 40e-3$ $r_6 = 44e-3$
 $r_7 = 48e-3$ $r_8 = 52e-3$ $r_9 = 56e-3$

$l_1 = 2,5e-3$ $l_2 = 2,5e-3$ $l_3 = 5e-3$ $l_4 = 5e-3$ $l_5 = 5,6e-3$ $l_6 = 5,6e-3$ $l_7 = 5,6e-3$ $l_8 = 5,6e-3$
 $l_9 = 5,6e-3$ $l_{10} = 5e-3$ $l_{11} = 5e-3$ $l_{12} = 2,5e-3$ $l_{13} = 2,5e-3$

$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$ $\mu_3 = 56$ $\mu_4 = 1$

Источник: Трёхполюсный

$F_m = 5e3$ $R_m = 1,2e7$ $R_{dop1} = 0$ $R_{dop2} = 0$ $F_o = -1,7e2$ $F_{m2} = -5e3$ $R_{m2} = 1,2e7$ $F_{o2} = -1,7e2$

Результаты расчета:

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	$l_7/2$	середина
H2	3,113153E+04	6,652296E+04	3,912034E+03	3,901779E+03	3,904353E+03	3,921885E+03	3,940822E+03	3,958275E+03
H3	5,815994E+03	5,546923E+03	5,469880E+03	4,078192E+03	3,779994E+03	4,815618E+03	7,376662E+03	8,785441E+03
H4	2,494468E+03	2,447358E+03	2,515864E+03	2,028575E+03	1,761660E+03	2,000771E+03	2,798983E+03	3,218383E+03
H5	1,137375E+03	1,121887E+03	1,168281E+03	9,651000E+02	8,033233E+02	8,597285E+02	1,150333E+03	1,301875E+03
H6	5,303397E+02	5,247553E+02	5,502119E+02	4,618905E+02	3,763568E+02	3,767644E+02	4,944653E+02	5,564328E+02
H7	2,436558E+02	2,431651E+02	2,604605E+02	2,277445E+02	1,884557E+02	1,719070E+02	2,191214E+02	2,447670E+02
H8	9,627348E+01	1,005670E+02	1,197052E+02	1,193080E+02	1,072868E+02	8,700979E+01	1,003891E+02	1,082742E+02

Исходные данные: для $d_{ш}=16$ мм.

 $r_{00} = 10,5e-3$ $r_0 = 14,75e-3$ $r_1 = 16e-3$ $r_2 = 32e-3$ $r_3 = 36e-3$ $r_4 = 40e-3$ $r_5 = 44e-3$ $r_6 = 48e-3$
 $r_7 = 52e-3$ $r_8 = 56e-3$ $r_9 = 60e-3$

$l_1 = 2,5e-3$ $l_2 = 2,5e-3$ $l_3 = 5e-3$ $l_4 = 5e-3$ $l_5 = 5,6e-3$ $l_6 = 5,6e-3$ $l_7 = 5,6e-3$ $l_8 = 5,6e-3$
 $l_9 = 5,6e-3$ $l_{10} = 5e-3$ $l_{11} = 5e-3$ $l_{12} = 2,5e-3$ $l_{13} = 2,5e-3$

$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$ $\mu_3 = 56$ $\mu_4 = 1$

Источник: Трёхполюсный

$F_m = 5e3$ $R_m = 1,2e7$ $R_{dop1} = 0$ $R_{dop2} = 0$ $F_o = -1,7e2$ $F_{m2} = -5e3$ $R_{m2} = 1,2e7$ $F_{o2} = -1,7e2$

Результаты расчета:

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	$l_7/2$	середина
H2	2,087490E+04	4,705827E+04	2,714595E+03	2,706081E+03	2,707078E+03	2,717032E+03	2,729936E+03	2,741610E+03
H3	3,436373E+03	3,290688E+03	3,658346E+03	2,792876E+03	2,545373E+03	3,166055E+03	4,825817E+03	5,737444E+03
H4	1,588447E+03	1,566588E+03	1,653719E+03	1,363857E+03	1,181602E+03	1,323320E+03	1,850541E+03	2,127894E+03
H5	7,465180E+02	7,378492E+02	7,737741E+02	6,475696E+02	5,398744E+02	5,715422E+02	7,657931E+02	8,672780E+02
H6	3,534922E+02	3,500870E+02	3,679645E+02	3,111719E+02	2,541350E+02	2,520580E+02	3,311579E+02	3,729101E+02
H7	1,639868E+02	1,637547E+02	1,756395E+02	1,543052E+02	1,280311E+02	1,159895E+02	1,477515E+02	1,650729E+02
H8	6,522156E+01	6,817458E+01	8,125673E+01	8,126201E+01	7,331733E+01	5,944902E+01	6,840945E+01	7,372150E+01

Исходные данные: для $d_{ш}=20$ мм.

 $r_{00} = 10,5e-3$ $r_0 = 14,75e-3$ $r_1 = 16e-3$ $r_2 = 36e-3$ $r_3 = 40e-3$ $r_4 = 44e-3$ $r_5 = 48e-3$ $r_6 = 52e-3$
 $r_7 = 56e-3$ $r_8 = 60e-3$ $r_9 = 64e-3$

$l_1 = 2,5e-3$ $l_2 = 2,5e-3$ $l_3 = 5e-3$ $l_4 = 5e-3$ $l_5 = 5,6e-3$ $l_6 = 5,6e-3$ $l_7 = 5,6e-3$ $l_8 = 5,6e-3$
 $l_9 = 5,6e-3$ $l_{10} = 5e-3$ $l_{11} = 5e-3$ $l_{12} = 2,5e-3$ $l_{13} = 2,5e-3$

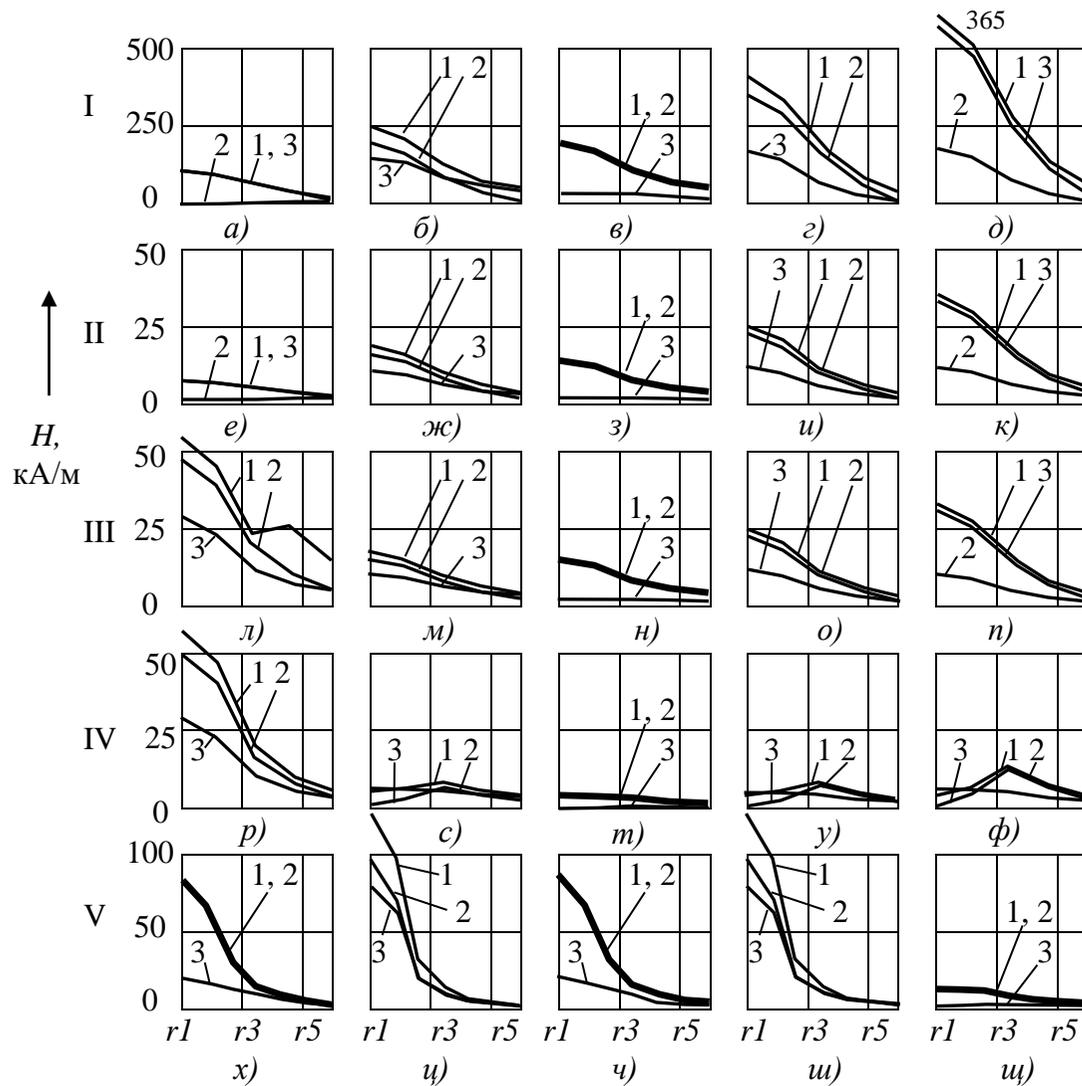
$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$ $\mu_3 = 56$ $\mu_4 = 1$

Источник: Трёхполюсный

$F_m = 5e3$ $R_m = 1,2e7$ $R_{dop1} = 0$ $R_{dop2} = 0$ $F_o = -1,7e2$ $F_{m2} = -5e3$ $R_{m2} = 1,2e7$ $F_{o2} = -1,7e2$

Результаты расчета:

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	$l_7/2$	середина
H2	1,523019E+04	3,532564E+04	2,015918E+03	2,008978E+03	2,009338E+03	2,015710E+03	2,025035E+03	2,033331E+03
H3	2,250731E+03	2,177855E+03	2,602020E+03	2,033288E+03	1,832755E+03	2,234522E+03	3,389799E+03	4,023212E+03
H4	1,098320E+03	1,087521E+03	1,167996E+03	9,803368E+02	8,482058E+02	9,390800E+02	1,311992E+03	1,508327E+03
H5	5,277475E+02	5,223891E+02	5,504581E+02	4,652149E+02	3,883296E+02	4,074465E+02	5,463147E+02	6,189741E+02
H6	2,528839E+02	2,506214E+02	2,638900E+02	2,244100E+02	1,835975E+02	1,806914E+02	2,375348E+02	2,676052E+02
H7	1,182332E+02	1,181238E+02	1,268339E+02	1,118434E+02	9,300016E+01	8,377332E+01	1,066271E+02	1,191342E+02
H8	4,728155E+01	4,944995E+01	5,900519E+01	5,917195E+01	5,353406E+01	4,340721E+01	4,983101E+01	5,365881E+01



Уровень	Источник	Графа	Расчет
I	Два магнита, среда магнитная	<i>a</i>	1 - <i>l1</i>
		<i>б</i>	1 - <i>l2</i>
		<i>в</i>	1 - <i>l3</i>
		<i>г</i>	1 - <i>l4</i>
		<i>д</i>	1 - <i>lcp</i>
II	Два магнита, среда магнитная (без втулки)	<i>e</i>	2 - <i>l1</i>
		<i>ж</i>	2 - <i>l2</i>
		<i>з</i>	2 - <i>l3</i>
		<i>и</i>	2 - <i>l4, a</i>
		<i>к</i>	2 - <i>lcp</i>
III	Два магнита, среда магнитная, втулка	<i>л</i>	3 - <i>l1</i>
		<i>м</i>	3 - <i>l2</i>
		<i>н</i>	3 - <i>l3</i>
		<i>о</i>	3 - <i>l4, a</i>
		<i>п</i>	3 - <i>lcp</i>
IV	Два магнита, среда магнитная, втулка, осадок (шлам)	<i>р</i>	4 - <i>l1</i>
		<i>с</i>	4 - <i>l2</i>
		<i>т</i>	4 - <i>l3</i>
		<i>у</i>	4 - <i>l4, a</i>
		<i>ф</i>	4 - <i>lcp</i>
V	Два магнита, среда магнитная, втулка, осадок (шлам). Радиус расчетной области увеличен	<i>x</i>	5 - <i>l1</i>
		<i>ц</i>	5 - <i>l2</i>
		<i>ч</i>	5 - <i>l3</i>
		<i>ш</i>	5 - <i>l4</i>
		<i>щ</i>	5 - <i>lcp, a</i>

Рисунок П.4.1 – Распределение напряженности магнитного поля:
 1 – $H(r)$; 2 – $H_z(r)$; 3 – $H_r(r)$; $r1 = 1 \cdot 10^2$ м; $r3 = 2 \cdot 10^2$ м; $r5 = 2,4 \cdot 10^2$ м.
 Условия расчета для уровней I – V в таблице

Приложение 5. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК СТЕПЕНИ ОЧИСТКИ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА

П. 5.1. Описание алгоритма

Функциональная схема алгоритма изображена на рисунке 4.15, а его аналитическая версия представлена ниже. Целью алгоритма и программы является определение для каждого размера d феррочастицы *такого критического значения* угла $\varphi_{\text{н}}$ вхождения частицы в активную рабочую область сепаратора, при котором частица будет находиться на границе состояния попадания или не попадания на магнит. При этом варьируются две независимые переменные: $\varphi_{\text{нк}+1} = \varphi_{\text{нк}} + \Delta\varphi$ и $d_{i+1} = d_i + \Delta d$. Шаг изменения каждой переменной $\Delta\varphi$ и Δd задается.

Алгоритм построен по принципу сочетания аналитических и численных методов расчета траекторий частиц. Аналитические методы строятся на системе критериальных условий (системы абсолютных критериев, гарантирующих осаждение феррочастицы на магнит; абсолютного критерия, гарантирующего не попадание феррочастицы на магнит). Численные методы применяются в узком диапазоне значений обобщенных параметров, которые располагается в области между альтернативными абсолютными критериальными условиями.

Аналитическая версия алгоритма.

1. $d_{\text{ш}} = 0$.
2. $d_1 = 10^{-7}$.
3. $r_{\text{гр}1} \leq \frac{a}{2}$; если да, то № 4, иначе № 18.
4. $R \leq \frac{a}{2\sqrt{2}}$; если да, то $\varphi_{\text{н}1} = 45^\circ$, иначе $\varphi_{\text{н}1} = \arcsin \frac{2R}{a}$.

Область слабого поля.

5. $\nu_2 = 1$, если да, то $\nu_2 = 1.01$ и переход к № 5 а, иначе к № 5 а.

$$5 \text{ а. } r(t_0) = \frac{a}{2} - \frac{\nu_{\text{жн}} \cos \varphi_{\text{нк}}}{(P_{12} - P_{22})} (e^{P_{12}t_0} - e^{P_{22}t_0}) - \langle r \rangle_0 \left\{ \left[\beta + \alpha \left(\frac{\nu_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{нк}}}{2}}{\nu_2 - 1} - \frac{\nu_2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi_{\text{нк}}}{2}}{\nu_2 + 1} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{P_{12}t_0} - \alpha \left(\frac{e^{\gamma t_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{нк}}}{2}}{\nu_2 - 1} + \frac{e^{-\gamma t_0} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_{\text{нк}}}{2}}{\nu_2 + 1} \right) \right\},$$

где $\beta = 0.45 \cos \varphi_{\text{HK}}$, $\alpha = 0,225 \sin \varphi_{\text{HK}}$, $t_0 = t'_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2} \right)$.

6. $r(t_0) \leq r_{\text{Гр1}}$, если да, то № 7, иначе № 10.

Область сильного поля.

$$7. F(t_{M1}) = r(t_{M1}) - r_{\text{Гр1}}, \quad r(t_{M1}) = \frac{a}{2} - \frac{v_{\text{ЖН}} \cos \varphi_{\text{HK}}}{(P_{12} - P_{22})} (e^{P_{12} t_{M1}} - e^{P_{22} t_{M1}}) - \\ - \langle r \rangle_0 \left\{ \left[\beta + \alpha \left(\frac{v_2 \text{tg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2}}{v_2 - 1} - \frac{v_2 \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2}}{v_2 + 1} \right) \right] e^{P_{12} t_{M1}} - \alpha \left(\frac{e^{\gamma t_{M1}} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2}}{v_2 - 1} + \frac{e^{-\gamma t_{M1}} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2}}{v_2 + 1} \right) \right\},$$

$$7.1. c=0, b=t_0,$$

$$7.2. t_{M1} = \frac{c+b}{2},$$

7.3. $F(t_{M1}) > 0$; если да, то $c = t_{M1}$ и к № 7.4, иначе $b = t_{M1}$ и к № 7.4.

$$7.4. \left| \frac{F(t_{M1})}{r_{\text{Гр1}}} \right| \leq 0.005, \text{ если да, то № 8, иначе № 7.2.}$$

8. $v_1 = 1$, если да, то $v_1 = 1.01$ и переход к № 8 а, иначе к № 8 а.

$$8 \text{ а. } r(t'_0 - t_{M1}) = \frac{r_{\text{Гр1}} - 0.06R}{0.94} - \left[\frac{0.06(r_{\text{Гр1}} - R)}{0.94} \right] e^{P_{11}(t'_0 - t_{M1})} - \langle r \rangle_0 \left\{ \beta e^{P_{11}(t'_0 - t_{M1})} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha v_1 e^{-\gamma t_{M1}} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2}}{v_1 + 1} \left[e^{-\gamma(t'_0 - t_{M1})} - e^{P_{11}(t'_0 - t_{M1})} \right] - \frac{\alpha v_1 e^{\gamma t_{M1}} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2}}{v_1 - 1} \left[e^{\gamma(t'_0 - t_{M1})} - e^{P_{11}(t'_0 - t_{M1})} \right] \right\} + \\ + \langle r \rangle_0 \left[\beta - \alpha \left(e^{-\gamma t_{M1}} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2} - e^{\gamma t_{M1}} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{HK}}}{2} \right) \right] e^{P_{11}(t'_0 - t_{M1})}.$$

9. $r(t'_0 - t_{M1}) \leq R$, если да, то $\varphi_{\text{НП}} = \varphi_{\text{HK}}$, $\varepsilon(d) = \sin \varphi_{\text{НП}}$, $\varphi_{\text{HK}+1} = \varphi_{\text{HK}} + \Delta\varphi$ и переход к № 5; иначе к № 15.

Область слабого поля.

$$10. r(t_{01} - t_0) = \frac{a}{2} - \left[\frac{a}{2} - r(t_0) \right] e^{P_{12} t_0} - \langle r \rangle_0 \left\{ -\beta - \frac{\alpha v_2}{v_2 + 1} [e^{-\gamma t_0} - e^{P_{12} t_0}] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha v_2}{v_2 - 1} [e^{\gamma t_0} - e^{P_{12} t_0}] \right\}.$$

11. $r(t_{01} - t_0) \leq r_{\text{Гр1}}$, если да, то к № 12 иначе к № 11 а.

$$11 \text{ а. } r(0) = r(t_{01} - t_0), \quad \langle r \rangle = \frac{r(t_{01} - t_0) + r_{\text{Гр1}}}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{\langle v_{\text{ЖН}} \rangle}{\langle r \rangle}, \quad v_{\text{К}} = \frac{P_{12}}{\gamma_0},$$

$$B_{\text{К}} = \frac{1}{\alpha \langle r \rangle} \left[\frac{f_{02}}{\alpha_{02}} + \langle r \rangle \beta - r(0) \right], \quad r_{\text{КН}} = r_{\text{Гр1}}.$$

11 б. $v_{\text{К}} = 1$, если да, то $v_{\text{К}} = 1.01$ и переход к № 17, иначе к № 17.

$$12. \quad x = (t'_{M1} - t_0), \quad F(x) = r(x) - r_{\text{Гр1}},$$

$$r(x) = \left[\frac{a}{2} - \alpha \langle r \rangle_0 \left(\frac{e^{\gamma x}}{v_2 - 1} + \frac{e^{-\gamma x}}{v_2 + 1} \right) \right] - \left[\frac{a}{2} - r(t_0) + \alpha \langle r \rangle_0 \left(\frac{v_2}{v_2 - 1} + \frac{v_2}{v_2 + 1} \right) \right] e^{P_{12} x},$$

12.1. $c=0, b=t_0,$

12.2. $x = \frac{c+b}{2},$

12.3. $F(x) > 0$; если да, то $c = x$ и к № 12.4, иначе $b = x$ и к № 12.4.

12.4. $\left| \frac{F(t_{M1})}{r_{ГР1}} \right| \leq 0.005$, если да, то № 12.5, иначе № 12. 2.

12.5. $t'_{M1} = x + t_0.$

Область сильного поля.

13. $v_1 = 1$, если да, то $v_1 = 1.01$ и переход к № 13 а, иначе к № 13 а.

13 а. $r(t_{01} - t'_{M1}) = \frac{r_{ГР1} - 0.06R}{0.94} - \left[\frac{0.06(r_{ГР1} - R)}{0.94} \right] e^{P_{11}(t_{01} - t'_{M1})} - \langle r \rangle_0 \left\{ \beta \left[e^{P_{11}(t_{01} - t'_{M1})} - 1 \right] + \frac{\alpha v_1 e^{\gamma t'_{M1}} t g \frac{\phi_H}{2}}{v_1 - 1} \left[e^{\gamma(t_{01} - t'_{M1})} - e^{P_{11}(t_{01} - t'_{M1})} \right] - \frac{\alpha v_1 e^{-\gamma t'_{M1}} t g \frac{\phi_H}{2}}{v_1 + 1} \left[e^{-\gamma(t_{01} - t'_{M1})} - e^{P_{11}(t_{01} - t'_{M1})} \right] \right\} + \langle r \rangle_0 \left[\beta + \alpha \left(e^{-\gamma t'_{M1}} t g \frac{\phi_H}{2} - e^{\gamma t'_{M1}} t g \frac{\phi_H}{2} \right) \right] e^{P_{11}(t_{01} - t'_{M1})}.$

14. $r(t_{01} - t'_{M1}) \leq R$, если да, то $\varphi_{\text{НП}} = \varphi_{\text{НК}}, \varepsilon(d) = \sin \varphi_{\text{НП}}, \varphi_{\text{НК}+1} = \varphi_{\text{НК}} + \Delta\varphi$ и переход к № 5; иначе к № 14 а.

14 а. $r(0) = r(t_{01} - t'_{M1}), \langle r \rangle = \frac{r(t_{01} - t'_{M1}) + R}{2}, \gamma_0 = \frac{\langle v_{ж} \rangle}{\langle r \rangle}, v_K = \frac{P_{11}}{\gamma_0},$

$$B_K = \frac{1}{\alpha \langle r \rangle} \left[\frac{f_{01}}{\alpha_{01}} + \langle r \rangle \beta - r(0) \right], r_{\text{КН}} = R.$$

14 б. $v_K = 1$, если да, то $v_K = 1.01$ и переход к № 17, иначе к № 17.

15. $v_1 > 1$, если да, то $\Delta t = \frac{0.005 t'_0}{\gamma}$, иначе $\Delta t = 0.005 t'_0$. (коэффициент перед t'_0 подбирается).

15.1. $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, где $t_{n=0} = t'_0, (n=0, 1, 2, \dots).$

15.2. $r(t_{n+1} - t'_0) \leq r(t_n - t'_0)$, если да, то к № 15.3, иначе к № 15.4; где

$$r(t_{n+1} - t'_0) = \frac{f_{01}}{\alpha_{01}} + \left[r(t'_0 - t_{M1}) - \frac{f_{01}}{\alpha_{01}} \right] e^{P_{1K}(t_{n+1} - t'_0)} - \langle r \rangle \alpha \left\{ \frac{v_1}{v_1 - 1} \left[e^{\gamma(t_{n+1} - t'_0)} - e^{P_{11}(t_{n+1} - t'_0)} \right] - \frac{v_1}{v_1 + 1} \left[\left[e^{-\gamma(t_{n+1} - t'_0)} - e^{P_{11}(t_{n+1} - t'_0)} \right] + e^{-\gamma(t_{n+1} - t'_0)} - e^{\gamma(t_{n+1} - t'_0)} \right] \right\}.$$

15.3. $r(t_{n+1} - t'_0) \leq R$, если да, то $\varphi_{\text{НП}} = \varphi_{\text{НК}}, \varepsilon(d) = \sin \varphi_{\text{НП}}, \varphi_{\text{НК}+1} = \varphi_{\text{НК}} + \Delta\varphi$ и пе-

переход к № 5; иначе к № 15.1.

$$15.4. \quad r(t_{01} - t'_0) = \frac{f_{01}}{\alpha_{01}} + \left[r(t'_0 - t_{m1}) - \frac{f_{01}}{\alpha_{01}} \right] e^{P_{11}t'_0} + \langle r \rangle \beta - \\ - \langle r \rangle \alpha \left\{ \frac{\nu_1}{\nu_1 - 1} \left[e^{\gamma t'_0} - e^{P_{11}t'_0} \right] - \frac{\nu_1}{\nu_1 + 1} \left[e^{-\gamma t'_0} - e^{P_{11}t'_0} \right] \right\}.$$

16. $r(t_{01} - t'_0) \leq R$, если да, то $\varphi_{\text{нп}} = \varphi_{\text{нк}}$, $\varepsilon(d) = \sin \varphi_{\text{нп}}$, $\varphi_{\text{нк}+1} = \varphi_{\text{нк}} + \Delta\varphi$ и переход к № 5, иначе: $r(t_{01} - t'_0) \leq r_{\text{гр}1}$ если да, то к № 16 а, иначе к № 11 а.

$$16 \text{ а.} \quad r(0) = r(t_{01} - t'_0), \quad \langle r \rangle = \frac{r(t_{01} - t'_0) + R}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{\langle v_{\text{ж}} \rangle}{\langle r \rangle}, \quad \nu_{\text{к}} = \frac{P_{11}}{\gamma_0},$$

$$B_{\text{к}} = \frac{1}{\alpha \cdot \langle r \rangle} \left[\frac{f_{01}}{\alpha_{01}} + \langle r \rangle \beta - r(0) \right], \quad r_{\text{кн}} = R.$$

16 б. $\nu_{\text{к}} = 1$, если да, то $\nu_{\text{к}} = 1.01$ и переход к № 17, иначе к № 17.

17. Критериальные условия

17.1. $B_{\text{к}} \leq \frac{(\nu_{\text{к}} + 1) \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}}} - \frac{(\nu_{\text{к}} - 1) \text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}}}$, если да, то $d_{i+1} = d_i + \Delta d$ и переход к № 5, иначе к № 17.2.

17.2. $\nu_{\text{к}} > 1$, если да, то к № 17.3, иначе к № 17.4.

17.3. $B_{\text{к}} > \frac{\nu_{\text{к}} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}} - 1} - \frac{\nu_{\text{к}} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}} + 1}$, если да, то $\varphi_{\text{нп}} = \varphi_{\text{нк}}$, $\varepsilon(d) = \sin \varphi_{\text{нп}}$, $\varphi_{\text{нк}+1} = \varphi_{\text{нк}} + \Delta\varphi$ и переход к № 5, иначе к № 17.4.

$$17.4. \quad \tau_{\text{э}} = \left(\frac{\nu_{\text{к}}}{\nu_{\text{к}} - 1} \right) \ln \left[\frac{\text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{(1 - \nu_{\text{к}}) \nu_{\text{к}} \left(B_{\text{к}} - \frac{\nu_{\text{к}} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}} - 1} + \frac{\nu_{\text{к}} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}} + 1} \right)} \right].$$

17.5. $\tau_{\text{э}} \geq \frac{\nu_{\text{к}}}{2} \ln \left[3 \frac{|\nu_{\text{к}} - 1|}{(\nu_{\text{к}} + 1)} \left(\text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2} \right)^2 \right]$, если да, то к № 17.6, иначе к № 17.8.

$$17.6. \quad \lambda_{m1} = \frac{\text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{1 + \nu_{\text{к}}} e^{-\frac{\tau_{\text{э}}}{\nu_{\text{к}}}} + \frac{\text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}} - 1} e^{\frac{\tau_{\text{э}}}{\nu_{\text{к}}}} + \left(B_{\text{к}} - \frac{\nu_{\text{к}} \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}} - 1} + \frac{\nu_{\text{к}} \text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}} + 1} \right) e^{\tau_{\text{э}}}.$$

17.7. $\lambda_{m1} \geq \frac{r(0) - r_{\text{кн}}}{\alpha \cdot \langle r \rangle}$, если нет, то $d_{i+1} = d_i + \Delta d$ и переход к № 5, иначе: $\langle r \rangle > r_{\text{гр}1}$, если да, то к № 23, иначе $\varphi_{\text{нп}} = \varphi_{\text{нк}}$, $\varepsilon(d) = \sin \varphi_{\text{нп}}$, $\varphi_{\text{нк}+1} = \varphi_{\text{нк}} + \Delta\varphi$ и переход к № 5.

17.8. $B_{\text{к}} \leq \frac{(\nu_{\text{к}}^3 - 1) \text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}}^2 (\nu_{\text{к}} - 1)} - \frac{(\nu_{\text{к}}^3 + 1) \text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}}^2 (\nu_{\text{к}} + 1)}$, если да, то к № 17.9, иначе к № 17.10.

$$17.9. \quad A2 = B_{\text{к}}^* + \frac{\text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}}^3 (\nu_{\text{к}} - 1)} - \frac{\text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}}^3 (\nu_{\text{к}} + 1)}, \quad A1 = B_{\text{к}}^* + \frac{\text{ctg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}}^2 (\nu_{\text{к}} - 1)} + \frac{\text{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}}{\nu_{\text{к}}^2 (\nu_{\text{к}} + 1)},$$

$$B_K^* = B_K - \frac{v_K ctg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K - 1} + \frac{v_K tg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K + 1}, \quad A0 = B_K - \frac{(v_K + 1) ctg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K} + \frac{(v_K - 1) tg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K}.$$

$$\tau_3 = -\left| \frac{A1}{A2} \right| + \sqrt{\left| \frac{A1}{A2} \right|^2 + \frac{2A0}{|A2|}} \text{ и переход к № 17.12.}$$

17.10. $B_K \leq \frac{(v_K^4 - 1) ctg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K^3 (v_K - 1)} - \frac{(v_K^4 - 1) tg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K^3 (v_K + 1)}$, если да, то к № 17.11, иначе $d_{i+1} = d_i + \Delta d$ и переход к № 5.

17.11. $\tau_3 = \left| \frac{A1}{A2} \right| + \sqrt{\left| \frac{A1}{A2} \right|^2 + \frac{2A0}{|A2|}}$ и переход к № 17.12.

17.12. $\lambda_{m2} = \frac{tg \frac{\varphi_H}{2}}{1 + v_K} e^{-\frac{\tau_3}{v_K}} + \frac{ctg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K - 1} e^{\frac{\tau_3}{v_K}} + \left(B_K - \frac{v_K ctg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K - 1} + \frac{v_K tg \frac{\varphi_H}{2}}{v_K + 1} \right) e^{\tau_3}$.

17.13. $\lambda_{m2} \geq \frac{r^{(0)} - r_{KH}}{\alpha \cdot \langle r \rangle}$, если нет, то $d_{i+1} = d_i + \Delta d$ и переход к № 5, иначе: $\langle r \rangle > r_{Гр1}$, если да, то к № 23, иначе $\varphi_{HH} = \varphi_{HK}$, $\varepsilon(d) = \sin \varphi_{HH}$, $\varphi_{HK+1} = \varphi_{HK} + \Delta \varphi$ и переход к № 5.

Область только сильного поля.

18. $R \leq \frac{a}{2\sqrt{2}}$, если да, то $\varphi_{H1} = 45^\circ$, иначе $\varphi_{H1} = \arcsin \frac{2R}{a} + \Delta \varphi$.

$$19. r'(t_0) = \frac{a}{2} - \frac{v_{ЖН} \cos \varphi_{HK}}{(P'_{11} - P'_{21})} \left(e^{P'_{11} t_0} - e^{P'_{21} t_0} \right) - \langle r \rangle_0 \left\{ \left[\beta + \alpha \left(\frac{v_1 tg \frac{\varphi_{HK}}{2}}{v_1 - 1} - \frac{v_1 ctg \frac{\varphi_{HK}}{2}}{v_1 + 1} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{P'_{11} t_0} - \alpha \left(\frac{e^{\gamma t_0} tg \frac{\varphi_{HK}}{2}}{v_1 - 1} + \frac{e^{-\gamma t_0} ctg \frac{\varphi_{HK}}{2}}{v_1 + 1} \right) \right\},$$

где $\beta = 0.45 \cos \varphi_{HK}$, $\alpha = 0,225 \sin \varphi_{HK}$, $t_0 = t'_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \left(ctg \frac{\varphi_{HK}}{2} \right)$.

19а. $v_1 = 1$, если да, то $v_1 = 1.01$ и переход к № 20, иначе к № 20.

20. $r'(t_0) \leq R$, если да, то $\varphi_{HH} = \varphi_{HK}$, $\varepsilon(d) = \sin \varphi_{HH}$, $\varphi_{HK+1} = \varphi_{HK} + \Delta \varphi$ и переход к № 19, иначе к № 21.

21. $r'(t_{01} - t_0) = \frac{a}{2} + \left[r'(t_0) - \frac{a}{2} \right] e^{P'_{11} t_0} + \langle r \rangle \beta - \\ - \langle r \rangle \alpha \left\{ \frac{v_1}{v_1 - 1} [e^{\gamma t_0} - e^{P'_{11} t_0}] - \frac{v_1}{v_1 + 1} [e^{-\gamma t_0} - e^{P'_{11} t_0}] \right\}.$

21 а. $v_1 = 1$, если да, то $v_1 = 1.01$ и переход к № 22, иначе к № 22.

22. $r'(t_{01} - t_0) \leq R$, если да, то $\varphi_{HH} = \varphi_{HK}$, $\varepsilon(d) = \sin \varphi_{HH}$, $\varphi_{HK+1} = \varphi_{HK} + \Delta \varphi$ и переход к № 19, иначе к № 22 а.

$$22 \text{ а. } r(0) = r'(t_{01} - t_0), \langle r \rangle = \frac{r'(t_{01} - t_0) + R}{2}, \gamma_0 = \frac{\langle v_{ж} \rangle}{\langle r \rangle}, v_k = \frac{P'_{11}}{\gamma_0},$$

$$B_k = \frac{1}{\alpha \cdot \langle r \rangle} \left[\frac{a}{2} + \langle r \rangle \beta - r(0) \right], r_{кн} = R \text{ и переход к № 17.}$$

$$23. \quad r(0) = r_{гп1}, \langle r \rangle = \frac{гп1 + R}{2}, \gamma_0 = \frac{\langle v_{ж} \rangle}{\langle r \rangle}, v_k = \frac{P_{11}}{\gamma_0}, r_{кн} = R$$

$$B_k = \frac{1}{\alpha \cdot \langle r \rangle} \left[\frac{f_{01}}{\alpha_{01}} + \langle r \rangle \beta - r(0) \right] \text{ и переход к № 23 а.}$$

23 а. $v_k = 1$, если да, то $v_k = 1.01$ и переход к № 17, иначе к № 17.

Программа моделирует три типа семейств зависимостей: $\varepsilon(d)$ при разных значениях толщины слоя феррошлама $d_{шк}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), осаждаемого на поверхность магнитной системы сепаратора; $\varepsilon(d)$ при разных значениях скорости потока $v_{жн}$ ($k = 1, 2, 3$); $\varepsilon(v)$ при разных значениях толщины слоя феррошлама $d_{шк}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), где v – обобщенный параметр.

П. 5.2. Описание программы

Программа представляет собой приложение для ОС семейства Windows.

Для запуска программы нужна виртуальная машина .NET Framework. Интерфейс программы состоит из двух вкладок (см. рисунок П. 5.1): «Основные» и «Дополнительные». Вкладка «Основные» служит для задания исходных данных и пуска программы. Вкладка «Дополнительные» служит для задания параметров программы (диапазонов варьирования размером частиц d_i и критическим прицельным полярным углом $\varphi_{нк}$ вхождения частицы в магнитоактивную область сепаратора; шага изменения переменных $\Delta\varphi$ и Δd), а также настройки работы с графиками.

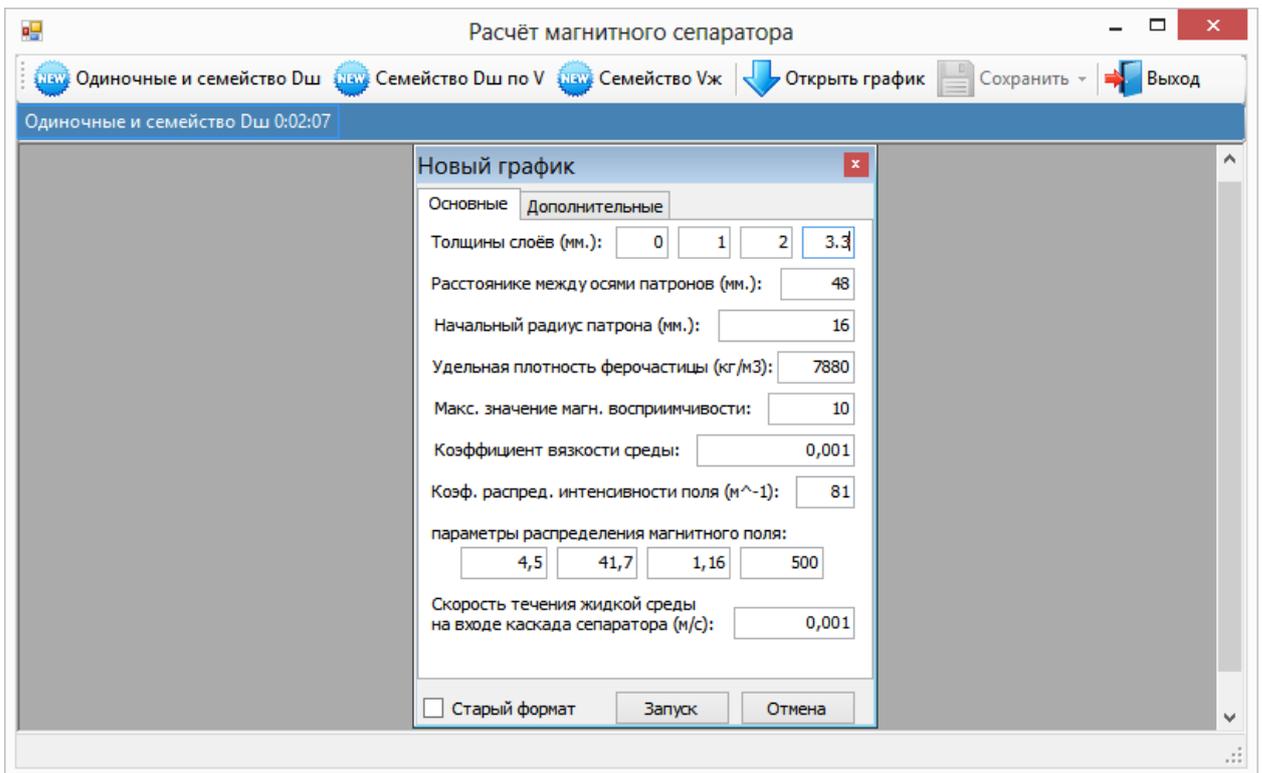


Рисунок П. 5.1 – Интерфейс программы для расчета семейства характеристик степени очистки $\varepsilon(d)$ сепаратора при различных толщинах слоя феррошлама $d_{\text{шк}}$

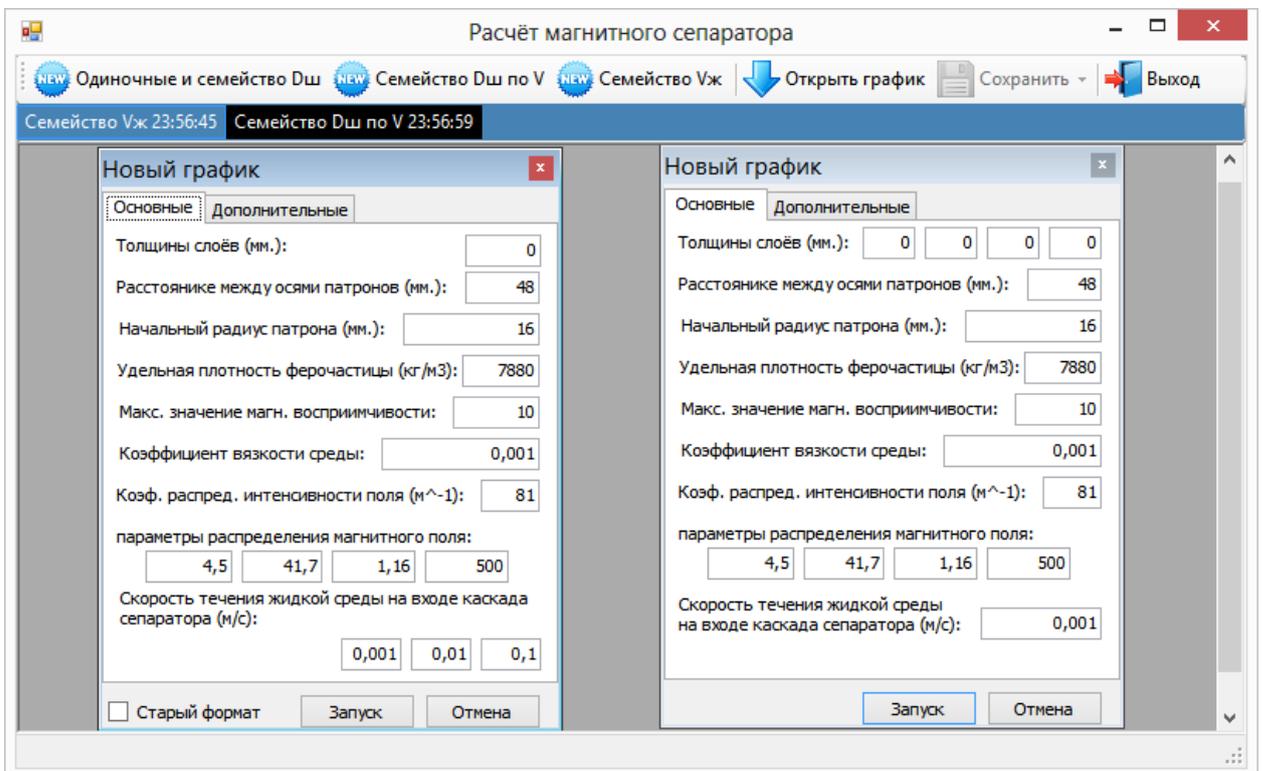


Рисунок П. 5.2 – Интерфейсы программы для расчета соответственно семейства характеристик степени очистки $\varepsilon(d)$ сепаратора при различных скоростях потока $v_{\text{жнк}}$ и семейства характеристик степени очистки $\varepsilon(v)$ от обобщенного параметра v при различных толщинах $d_{\text{шк}}$ слоя феррошлама

Ввод исходных данных

1. $d_{ш}$, мм – толщина слоя осадка феррошлама на патроне;
2. a , мм – расстояние между осями патронов;
3. R_0 , мм – радиус патрона без феррошлама;
4. ρ_{ϕ} , кг/м³ – массовая плотность феррочастицы;
5. K_m – максимальное значение магнитной восприимчивости феррочастицы;
6. η , Па·с – коэффициент динамической вязкости ВТЖ;
7. α_1 , м⁻¹ – коэффициент распределения интенсивности поля;
8. g_1 – параметр распределения магнитного поля;
9. g_2 , м⁻¹ – параметр распределения магнитного поля;
10. g_3 – параметр распределения магнитного поля;
11. g_4 , м⁻¹ – параметр распределения магнитного поля;
12. $v_{жн}$, м/с – скорость водного потока на входе сепаратора.

Результаты расчетов выводятся в графической (рисунок 4.15, для $\eta=0.001$ Па·с, $v_{жн}=0.03$ м/с) и в табличной формах.

Результаты расчета

После ввода исходных данных для начала расчета, необходимо нажать кнопку "Запуск". После окончания расчета на экране появится вкладка с результатом расчета семейства в графической форме

Результаты расчета можно сохранить кнопкой «Сохранить» с выпадающим списком меню, которое предлагает сохранить: график кнопкой «График»; массив численных значений кнопкой «Точки» в форматах XML и «Текстовым файлом».

Окна с результатами не зависят друг от друга, и каждое из них может быть закрыто, либо оставлено на экране для сравнения результатов разных этапов расчетов.

Программа написана на языке C#, предназначена для работы в ОС семейства Windows и на диске занимает объем 354 кБ.

Приложение 6. СОПОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КАЧЕСТВА ОЧИСТКИ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА

В [24 и 123] описана установка для очистки ВТЖ – Вита-С/ЭО, которая испытывалась на ОАО «Западно-Сибирский металлургический комбинат» путем встраивания в производственную систему очистки СОЖ при вальцешлифовании. Очищали 0.2%-ный водный раствор кальцинированной соды от феррочастиц с размером не более 20 мкм. Закон распределения феррочастиц по размеру близок к нормальному с параметрами $\bar{d}_и = 10$ мкм, $\sigma_и = 3.33$ мкм. Концентрация механических примесей в СОЖ, подаваемой на очистку составляет 80...210 мг/дм².

Установка для очистки ВТЖ – Вита-С/ЭО обеспечивает производительность до 10 м³/ч и представляет собой трехступенчатую систему очистки, построенную на основе ТГО (гравитационной седиментации), флотатора и однорядного патронного магнитного сепаратора. Первый контур, состоящий из флотатора и ТГО, осуществляет предварительную очистку – от масел и крупнодисперсных частиц. Второй контур, состоящий из магнитного сепаратора, предназначен для относительно тонкой очистки от феррочастиц.

Магнитный сепаратор выполнен на феррито-бариевых постоянных магнитах, которые устанавливались в патроны с диаметром 32 мм и рабочей длиной с 600 мм.

В результате опытно-промышленных испытаний получены несколько типов зависимостей средней степени очистки $\bar{\varepsilon}(v)$ от скорости v СОЖ при разных массовых исходных концентрациях феррочастиц $C_и$, которые представлены на рисунке П.6.1 из [123]. Значение скорости выбирались из ряда 0.001; 0.025; 0.05; 0.1; 0.15; 0.2; 0.25 м/с, значение $C_и$ задавались из ряда 40; 80; 120; 180; 200 мг/дм³.

Расчет по выражению (5.105) показал, что магнитная коагуляция при $v = 0.001$ м/с начинается при исходной концентрации $C_и \geq 40$ мг/дм³ ($\gamma_к = 1.2$). Из чего следует, что только для значения концентрации $C_и = 40$ мг/дм³ во всем заданном диапазоне вариации скорости СОЖ отсутствует процесс магнитной коагуляции. Для этого режима работы сепаратора проведем расчет значений $\bar{\varepsilon}_к(v_к)$ по методике, изложенной в главе 4.

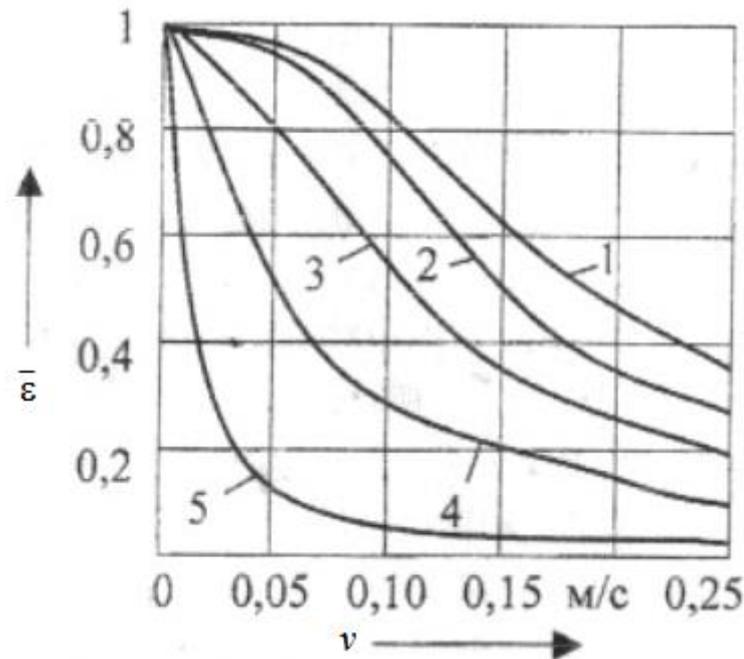


Рисунок П.6.1 – Зависимость средней степени очистки $\bar{\varepsilon}$ от скорости v потока СОЖ: 1, 2, 3, 4, 5 соответственно при $C_{и} = 200; 180; 120; 80; 40 \text{ мг/дм}^3$, (рис. 7.20 из [123])

В таблице П.6.1 представлены данные расчета распределения напряженности поля магнитного сепаратора на феррито-бариевых постоянных магнитах, параметры схемы замещения которых представлены в таблице 6.1. По этим данным определены параметры (3.65) – (3.67) аппроксимационной зависимости $\bar{H}(r)$ при $d_{ш} = 0$: $\bar{H}_m = 3.7 \cdot 10^4 \text{ В/м}$; $\alpha_1 = 81$; $q_1 = 3.6$; $q_3 = 0.9$, которые использовались для расчета семейства зависимостей степени очистки от размера феррочастиц по программе (Приложение П.5). При этом варьировалась скорость потока СОЖ: 0.001; 0.006; 0.008; 0.011; 0.014; 0.02; 0.033; 0.045 м/с. Результаты расчетов представлены на рисунках П.6.2, которые аппроксимировались следующими экспоненциальными функциями:

при $v = 0.001 \text{ м/с}$	$\varepsilon(d) = 0.99[(1 - e^{-0.8d}) - 6.5(e^{-1.1d} - e^{-1.2d})];$
при $v = 0.006 \text{ м/с}$	$\varepsilon(d) = 0.98[(1 - e^{-0.2d}) - 1.1(e^{-0.22d} - e^{-0.35d})];$
при $v = 0.008 \text{ м/с}$	$\varepsilon(d) = 0.98[(1 - e^{-0.16d}) - 0.85(e^{-0.17d} - e^{-0.3d})];$
при $v = 0.011 \text{ м/с}$	$\varepsilon(d) = 0.99[(1 - e^{-0.19d}) - 4.0(e^{-0.09d} - e^{-0.25d})];$
при $v = 0.014 \text{ м/с}$	$\varepsilon(d) = [(1 - e^{-0.085d}) - 0.85(e^{-0.25d} - e^{-0.3d})];$
при $v = 0.02 \text{ м/с}$	$\varepsilon(d) = [(1 - e^{-0.15d}) - 0.95(e^{-0.09d} - e^{-0.25d})];$
при $v = 0.033 \text{ м/с}$	$\varepsilon(d) = [(1 - e^{-0.075d}) - 1.5(e^{-0.12d} - e^{-0.18d})];$

при $v = 0.045$ м/с $\varepsilon(d) = [(1 - e^{-0.115d}) - 1.4(e^{-0.065d} - e^{-0.17d})]$;

На рисунке П.6.3 зависимости $\varepsilon(d)$, изображенные на рисунке П.6.2, представлены в формате Mathcad для сопоставления с аппроксимационными выражениями. Аппроксимационные выражения использовались для расчета значений средней степени очистки $\bar{\varepsilon}$.

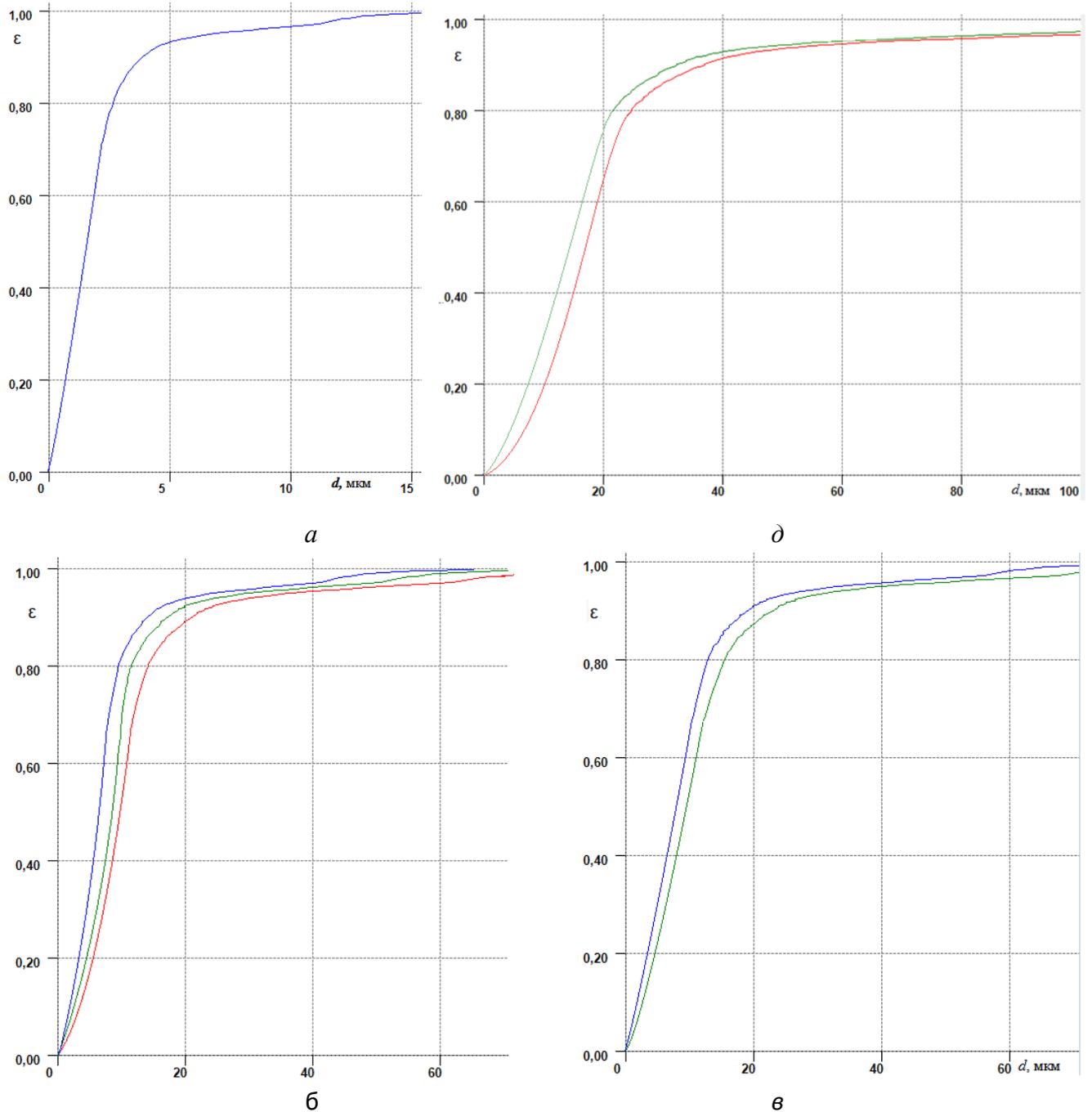


Рисунок П.6.2 – Расчетные зависимости степени очистки от размера феррочастиц $\varepsilon(d)$ для патронного магнитного сепаратора на феррито-бариевых магнитах при разных скоростях потока СОЖ : $a - 0.001$ м/с; $б - 0.006, 0.008, 0.011$ м/с; $в - 0.014, 0.02$ м/с; $д - 0.033, 0.045$ м/с

Распределение напряженности поля патронного магнитного сепаратора на феррито-бариевых
постоянных магнитах

Исходные данные:

r00 = 10,5e-3 r0 = 14,75e-3 r1 = 16e-3 r2 = 18e-3 r3 = 20e-3 r4 = 24e-3 r5 = 28e-3 r6 = 32e-3
r7 = 36e-3 r8 = 40e-3 r9 = 44e-3 r10 = 48e-3 r11 = 52e-3

l1 = 2,5e-3 l2 = 2,5e-3 l3 = 5e-3 l4 = 5e-3 l5 = 5,6e-3 l6 = 5,6e-3 l7 = 5,6e-3 l8 = 5,6e-3
l9 = 5,6e-3 l10 = 5e-3 l11 = 5e-3 l12 = 2,5e-3 l13 = 2,5e-3

mu1 = 1 mu2 = 1 mu3 = 1 mu4 = 1

Источник: Трёхполюсный

Fm = 1350 Rm = 1e7 Rdop1 = 0 Rdop2 = 0 Fo = -57 Fm2 = -1350 Rm2 = 1e7 Fo2 = -57

		l1	l2	l3	l4	l5	l6	l7/2	середина
H(z) 2	8,448298E+02	5,107980E+02	1,947390E+04	1,396375E+04	1,558879E+04	2,827730E+04	2,827730E+04	2,827730E+04	2,827730E+04
H(r) 2	2,333123E+04	2,593091E+04	2,944870E+04	6,932263E+03	1,825407E+03	1,425293E+04	5,893270E+04	8,127259E+04	8,127259E+04
H 2	2,334652E+04	2,593594E+04	3,530522E+04	1,558982E+04	1,569531E+04	3,166625E+04	6,536566E+04	8,605138E+04	8,605138E+04
Grad 2									
H(z) 3	1,234908E+03	3,325035E+03	1,046732E+04	1,046068E+04	1,115040E+04	1,232024E+04	1,232024E+04	1,232024E+04	1,232024E+04
H(r) 3	1,776396E+04	1,793807E+04	1,735920E+04	6,209478E+03	2,407459E+03	1,406345E+04	3,444429E+04	4,463471E+04	4,463471E+04
H 3	1,780684E+04	1,824363E+04	2,027083E+04	1,216484E+04	1,140733E+04	1,869676E+04	3,658138E+04	4,630384E+04	4,630384E+04
Grad 3	1,139884E+11	1,699214E+11	4,177761E+11	4,752954E+10	5,810773E+10	3,265914E+11	1,467236E+12	2,630397E+12	2,630397E+12
H(z) 4	1,374189E+03	2,861941E+03	6,007434E+03	7,013904E+03	6,987541E+03	5,041366E+03	5,041366E+03	5,041366E+03	5,041366E+03
H(r) 4	8,443315E+03	8,021537E+03	7,092276E+03	2,836072E+03	2,023677E+03	7,788784E+03	1,274397E+04	1,522157E+04	1,522157E+04
H 4	8,554412E+03	8,516793E+03	9,294603E+03	7,565590E+03	7,274682E+03	9,277959E+03	1,370490E+04	1,603470E+04	1,603470E+04
Grad 4	6,097637E+10	6,507357E+10	8,112923E+10	2,268631E+10	1,930155E+10	6,587210E+10	2,875933E+11	4,717336E+11	4,717336E+11
H(z) 5	6,993448E+02	1,375123E+03	2,602471E+03	3,126105E+03	2,869607E+03	1,501945E+03	1,501945E+03	1,501945E+03	1,501945E+03
H(r) 5	3,616472E+03	3,378559E+03	2,905665E+03	1,079223E+03	1,134274E+03	3,510223E+03	4,905902E+03	5,603742E+03	5,603742E+03
H 5	3,683471E+03	3,647687E+03	3,900737E+03	3,307152E+03	3,085648E+03	3,818050E+03	5,130664E+03	5,801531E+03	5,801531E+03
Grad 5	1,490250E+10	1,480754E+10	1,779347E+10	1,157522E+10	1,084994E+10	1,787576E+10	4,037513E+10	5,586344E+10	5,586344E+10

Таблица П.6.1

H(z) 6	3,186837E+02	6,184927E+02	1,141317E+03	1,355308E+03	1,172501E+03	5,050313E+02	5,050313E+02	5,050313E+02
H(r) 6	1,528472E+03	1,417398E+03	1,201050E+03	3,962485E+02	5,717260E+02	1,540670E+03	1,999789E+03	2,229349E+03
H 6	1,561341E+03	1,546464E+03	1,656842E+03	1,412045E+03	1,304465E+03	1,621333E+03	2,062574E+03	2,285838E+03
Grad 6	2,782542E+09	2,728519E+09	3,117655E+09	2,235846E+09	1,954898E+09	2,987196E+09	5,517376E+09	7,108178E+09
H(z) 7	1,409643E+02	2,723356E+02	4,974761E+02	5,809282E+02	4,803985E+02	1,770886E+02	1,770886E+02	1,770886E+02
H(r) 7	6,388255E+02	5,891258E+02	4,929069E+02	1,395357E+02	2,784492E+02	6,775545E+02	8,432063E+02	9,260323E+02
H 7	6,541934E+02	6,490269E+02	7,003140E+02	5,974510E+02	5,552627E+02	7,003146E+02	8,616016E+02	9,428129E+02
Grad 7	5,024545E+08	4,925784E+08	5,636711E+08	4,092311E+08	3,483281E+08	5,345697E+08	8,779641E+08	1,084039E+09
H(z) 8	6,144475E+01	1,183853E+02	2,147791E+02	2,465403E+02	1,953233E+02	5,876588E+01	5,876588E+01	5,876588E+01
H(r) 8	2,623083E+02	2,405120E+02	1,984319E+02	4,492059E+01	1,340442E+02	2,993757E+02	3,614772E+02	3,925279E+02
H 8	2,694088E+02	2,680692E+02	2,924129E+02	2,505992E+02	2,368945E+02	3,050889E+02	3,662228E+02	3,969025E+02
Grad 8	8,884698E+07	8,734371E+07	1,012336E+08	7,353694E+07	6,304941E+07	9,934031E+07	1,520595E+08	1,828411E+08
H(z) 9	2,657072E+01	5,105715E+01	9,197007E+01	1,033685E+02	7,722932E+01	1,440769E+01	1,440769E+01	1,440769E+01
H(r) 9	1,036266E+02	9,439422E+01	7,660030E+01	1,196663E+01	6,255723E+01	1,297402E+02	1,527750E+02	1,642925E+02
H 9	1,069789E+02	1,073178E+02	1,196917E+02	1,040588E+02	9,938700E+01	1,305377E+02	1,534529E+02	1,649230E+02
Grad 9	1,528415E+07	1,508600E+07	1,779480E+07	1,299293E+07	1,156031E+07	1,900979E+07	2,764285E+07	3,258300E+07
H(z) 10	1,179893E+01	2,258687E+01	4,026313E+01	4,374938E+01	2,924151E+01	2,045788E+00	2,045788E+00	2,045788E+00
H(r) 10	3,525839E+01	3,191482E+01	2,547730E+01	2,157243E+00	2,453416E+01	4,819066E+01	5,568780E+01	5,943637E+01
H 10	3,718022E+01	3,909888E+01	4,764674E+01	4,380253E+01	3,817055E+01	4,823406E+01	5,572537E+01	5,947157E+01
Grad 10	2,515526E+06	2,497095E+06	3,013972E+06	2,227395E+06	2,105196E+06	3,678392E+06	5,110619E+06	5,915682E+06

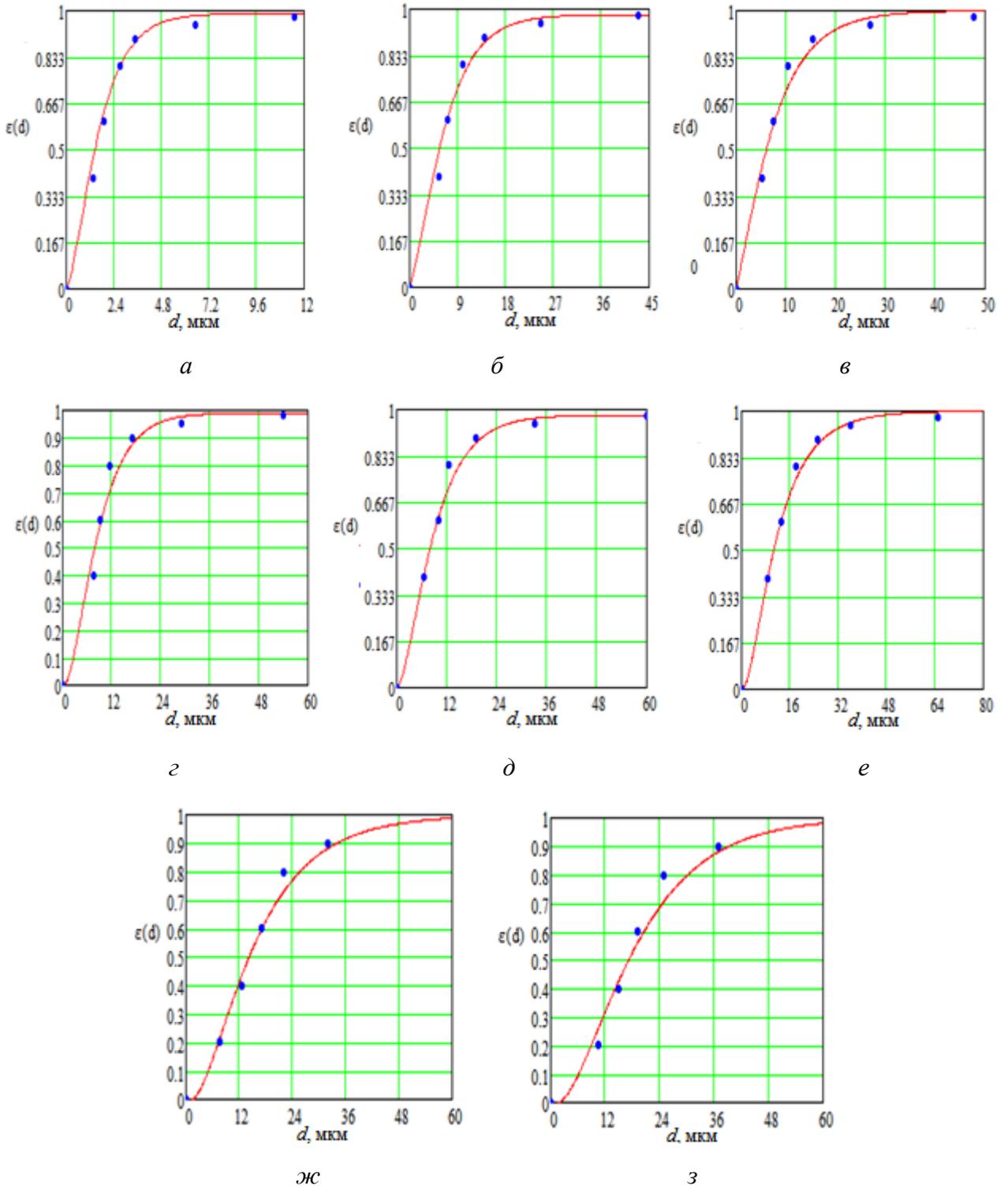


Рисунок П.6.3 – Результаты аппроксимации рассчитанных по программе для ЭВМ зависимостей степени очистки от размера феррочастиц $\varepsilon(d)$ для патронного магнитного сепаратора на феррито-барьерных магнитах при разных скоростях потока СОЖ : а – 0.001 м/с; б – 0.006 м/с; в – 0.008 м/с; г – 0.011 м/с; д – 0.014 м/с; е – 0.02 м/с; ж – 0.033 м/с; з – 0.045 м/с (----- по экспоненциальным выражениям; ... данные с рисунка П.6.2)

Среднюю степень очистки $\bar{\varepsilon}$ вычислим по выражениям (1.2), (4.107). Принимался нормально-логарифмический закон распределения дисперсного состава

исходных феррочастиц по размерам ($\bar{d}_и = 10$ мкм, $\sigma_и = 3.33$ мкм). Вычисленные значения $\bar{\varepsilon}_к(v_к)$ отмечались точками на графике на рисунке П.6.4. Сплошная линия соответствует экспериментальной зависимости (рисунок П.6.1, кривая 5).

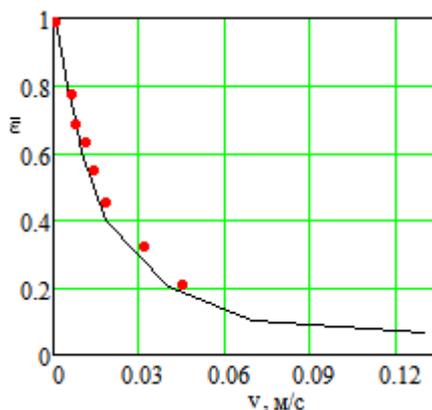


Рисунок П.6.4 – Сопоставление теоретических и экспериментальных зависимостей средней степени очистки СОЖ магнитным сепаратором на основе феррито-бариевых магнитов при $C_и = 40$ мг/дм³: (----- экспоненциальная; ... – теоретическая)

Адекватность расчетных и экспериментальных данных оценивалась по критерию Фишера [61]. По значениям графических зависимостей на рисунке П.6.4 рассчитывались соответствующие компоненты критерия Фишера, которые представлены в таблице П.6.2.

Таблица П.6.2

Оценка адекватности математической модели степени очистки по критерию Фишера

Групповая дисперсия \bar{S}	Остаточная дисперсия $\bar{S}_{ост}$	Отношение дисперсий F	Табличное значение F_T , при 1% уровне значимости
0.071	$1.55 \cdot 10^{-3}$	45.9	8.3

Из данных таблицы П.6.2 следует $F > F_T$, поэтому по критерию Фишера с уровнем риска не более 1% разработанная математическая модель степени очистки СОЖ адекватна экспериментальным данным.

Далее по разработанной математической модели оценим влияние температуры на характеристики степени очистки патронных магнитных сепараторов, выполненных на двух типах постоянных магнитов: неодим боровых и феррито-

бариевых. Температурные коэффициенты этих магнитотвердых материалов представлены в таблице П.6.3 [66, 69, 76]. Здесь также представлены относительные изменения магнитных параметров характеристик размагничивания постоянных магнитов и параметров магнитной схемы замещения при температуре $T=40\text{ }^{\circ}\text{C}$, а также изменение среднего значения максимальной напряженности магнитного поля сепаратора $\Delta\bar{H}_m = \bar{H}_m(T) - \bar{H}_m(20^{\circ}\text{C})$, обусловленного изменением температуры.

Таблица П.6.3

Температурные коэффициенты магнитотвердых материалов и параметры магнитной схемы замещения постоянных магнитов

Тип коэффициентов и параметров	Неодим боровый	Феррито-бариевый
$\alpha_{TB_r}, \%/^{\circ}\text{C}$	-0.11	-0.21
$\alpha_{TH_c}, \%/^{\circ}\text{C}$	-0.6	+0.28
$\zeta_B = \Delta B_r/B_r$	-0.022	-0.042
$\zeta_H = \Delta H_c/H_c$	-0.12	+0.056
$R_{мэ}(40^{\circ}\text{C})/R_{мэ}(20^{\circ}\text{C})$	0.924	1.05
$F_9(40^{\circ}\text{C})/F_9(20^{\circ}\text{C})$	0.945	1.012
$R_{мэ}(40^{\circ}\text{C}), \text{Гн}^{-1}$	$1.13 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^7$
$F_9(40^{\circ}\text{C}), \text{А}$	4620	1370
$\Delta\bar{H}_m, \text{А/м}$	$-1.36 \cdot 10^4$	$+0.024 \cdot 10^4$
$\alpha_1(40^{\circ}\text{C})/\alpha_1(20^{\circ}\text{C}), \text{м}^{-1}$	81/81	81/81
$q_1(40^{\circ}\text{C})/q_1(20^{\circ}\text{C})$	4.28/4.5	3.6/3.602
$q_3(40^{\circ}\text{C})$	1.104/1.16	0.9/0.9
$q_2(40^{\circ}\text{C})/q_2(20^{\circ}\text{C}), \text{м}^{-1}$	-36.56/-37.1	-33.19/-33.28

В таблице П.6.3 относительные изменения магнитных параметров характеристик размагничивания постоянных магнитов определялись на основе (3.40) – (3.41) по следующим выражениям:

$$\frac{R_{MЭ}(T)}{R_{MЭ}(20^{\circ}\text{C})} = c \sqrt{\frac{(1+\zeta_H)}{(1+\zeta_B)}} \operatorname{th}\left(\left[\frac{\gamma l}{2}\right] \sqrt{\frac{(1+\zeta_H)}{(1+\zeta_B)}}\right) / \operatorname{th}\left(\left[\frac{\gamma l}{2}\right]\right);$$

$$\frac{F_3(T)}{F_3(20^{\circ}\text{C})} = \sqrt{(1+\zeta_H)(1+\zeta_B)} \operatorname{th}\left(\left[\frac{\gamma l}{2}\right] \sqrt{\frac{(1+\zeta_H)}{(1+\zeta_B)}}\right) / \operatorname{th}\left(\left[\frac{\gamma l}{2}\right]\right).$$

Из вычислительного эксперимента следует, что при изменении температуры до 40°C интенсивность магнитного поля *неодим борových магнитов уменьшается* на 5,6%; интенсивность магнитного *поля феррито-бариевых магнитов увеличивается* на 0,7%.

По данным таблицы П.6.3 рассчитывались характеристики степени очистки однорядного магнитного сепаратора при скорости потока ВТЖ $v = 0.03$ м/с (Приложение 5). При расчете учитывалось уменьшение динамической вязкости ВТЖ: при $T=40^{\circ}\text{C}$, $\eta = 0.653 \cdot 10^{-3}$ Па·с. Результаты расчета характеристик степени очистки $\varepsilon(d)$ представлены на рисунках П.6.5–П.6.6 и в таблице П.6.4.

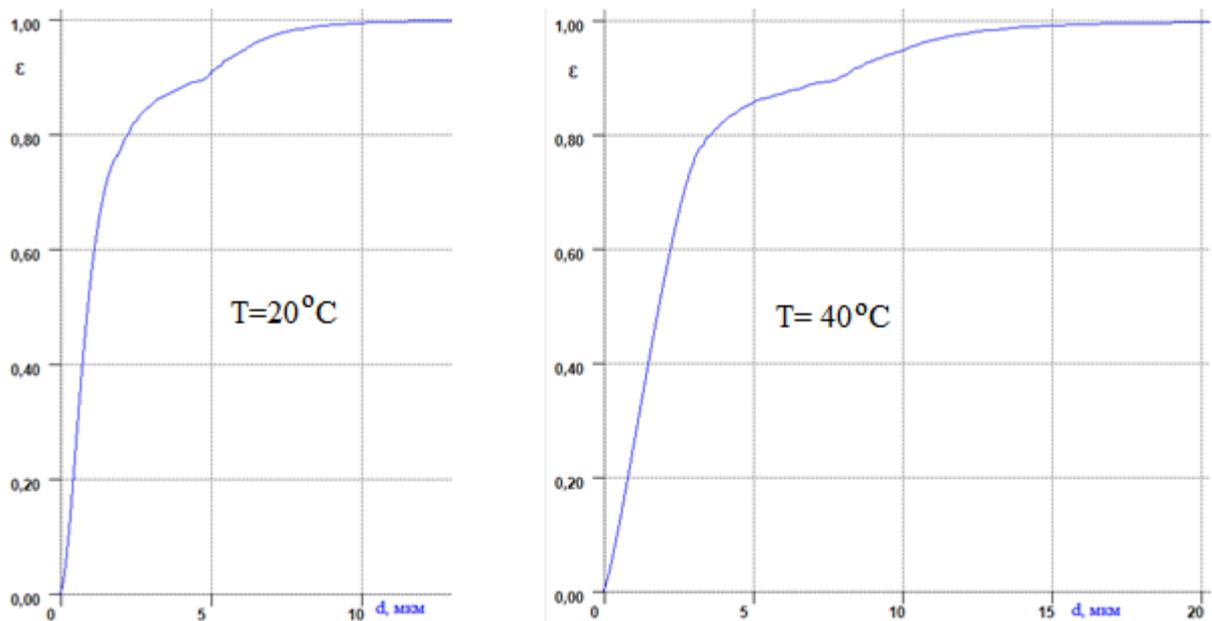


Рисунок П.6.5 – Зависимости $\varepsilon(d)$ для магнитного сепаратора на неодим борových магнитах

Аппроксимационные выражения зависимостей $\varepsilon(d)$ для однорядного патронного магнитного сепаратора на феррито-бариевых магнитах принимают следующий вид:

при $T = 20^{\circ}\text{C}$ $\varepsilon(d) = 0.5[2 - (e^{-0.25d} + e^{-0.75d})];$

при $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$ $\varepsilon(d) = 0.5[2 - (e^{-0.39d} + e^{-1.55d})]$,

а на рисунке П.6.7 представлены результаты аппроксимации $\varepsilon(d)$, где точки соответствуют значениям таблицы П.6.4.

Таблица П.6.4

Результаты расчета значений степени очистки для однорядного патронного магнитного сепаратора при двух значениях температур

Тип	T °C	ε	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	0.98
неодим	20	d , мкм	0	0.4	0.8	1.2	2.1	5	6.2	7
боровый	40	d , мкм	0	-	1.54	2.3	3.6	8	10	12.5
феррито-	20	d , мкм	0	-	10	14	20	29	52	92
бариевый	40	d , мкм	0	-	9	12	17	25.4	45	82

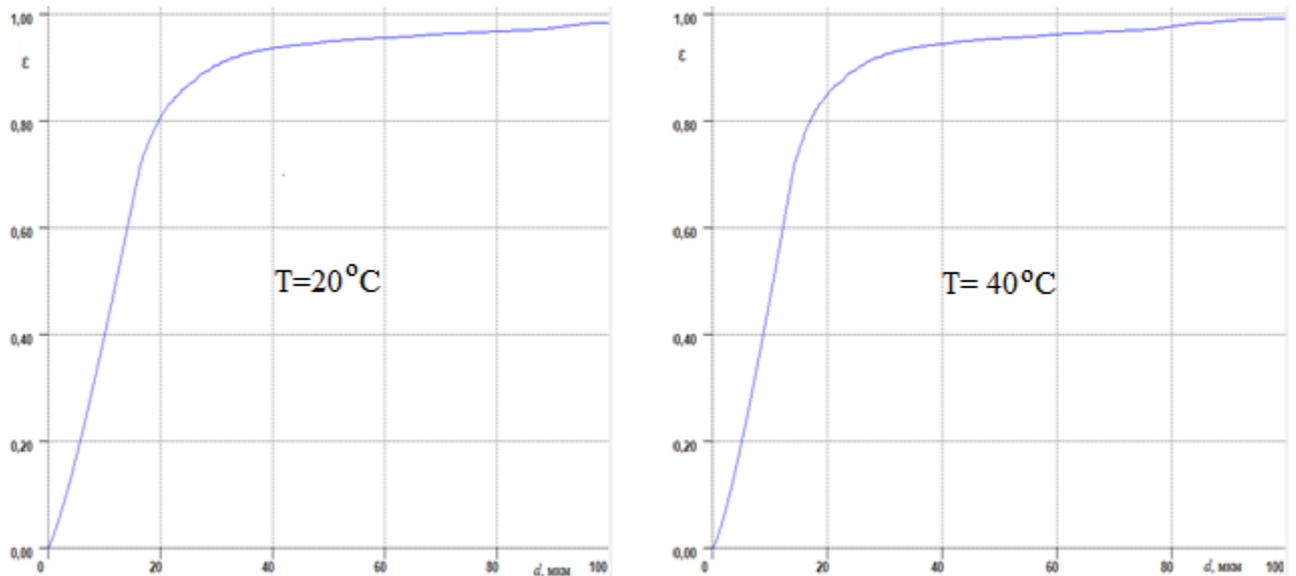


Рисунок П.6.6 – Зависимости $\varepsilon(d)$ для магнитного сепаратора на феррито-бариевых магнитах

Аппроксимационные выражения зависимостей $\varepsilon(d)$ для однорядного патронного магнитного сепаратора на феррито-бариевых магнитах принимают следующий вид:

при $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ $\varepsilon(d) = 0.99[(1 - e^{-0.09d}) - 2(e^{-0.15d} - e^{-0.2d})]$;

при $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$ $\varepsilon(d) = 0.99[(1 - e^{-0.11d}) - 2(e^{-0.18d} - e^{-0.24d})]$,

а на рисунке П.6.8 представлены результаты аппроксимации $\varepsilon(d)$, где точки соответствуют значениям таблицы П.6.4.

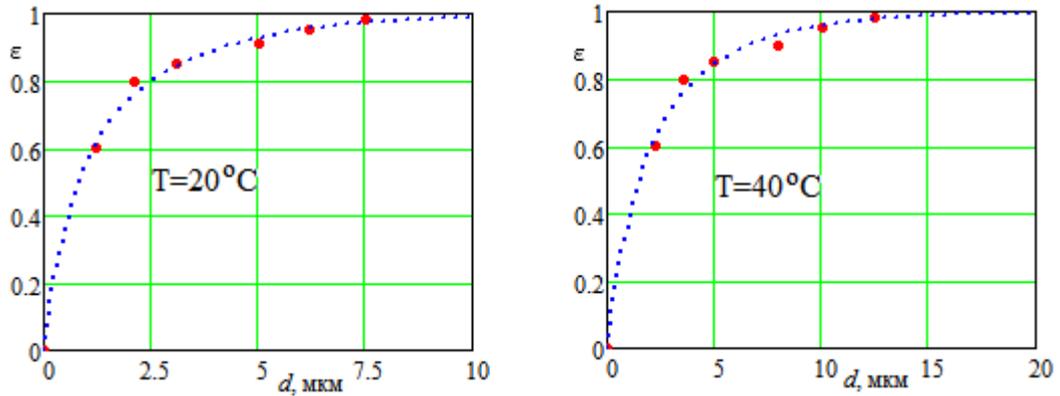


Рисунок П.6.7 – Зависимости $\varepsilon(d)$ для магнитного сепаратора на неодим боровых магнитах

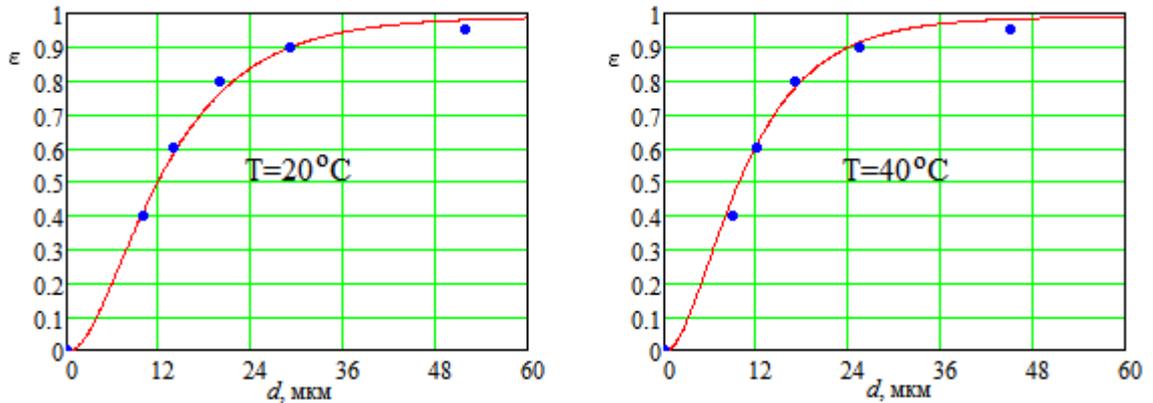


Рисунок П.6.8 – Зависимости $\varepsilon(d)$ для магнитного сепаратора на феррито-бариевых магнитах

На рисунке П.6.9 по разработанным математическим моделям сопоставлены зависимости степени очистки от размера феррочастиц $\varepsilon(d)$ при разных температурах.

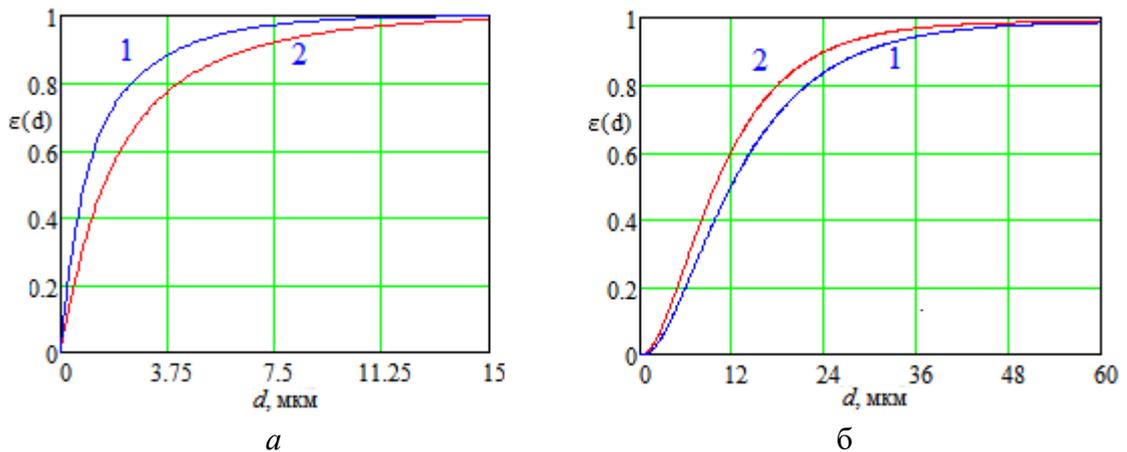


Рисунок П.6.9 – Сравнение зависимостей $\varepsilon(d)$ при разных температурах (1- $T = 20^{\circ}\text{C}$; 2- $T = 40^{\circ}\text{C}$) для патронных магнитных сепараторов на: а – неодим боровых магнитах; б – феррито-бариевых магнитах.

Вывод. При повышении температуры характеристики очистки патронных магнитных сепараторов на *неодим боровых* магнитах *ухудшаются* за счет уменьшения интенсивности поля постоянных магнитов, а – на *феррито-бариевых* магнитах *улучшаются* за счет уменьшения динамической вязкости ВТЖ.

Приложение 7. АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ

«Утверждаю»

Зам. ген. директора по развитию и
внедрению новых технологий
ЗАО "Системы водоочистки"

Лейбель И. Г.



14.11.2016г.

«Утверждаю»

Проректор по научной работе
ФГБОУ ВПО УлГТУ

Ярушкина Н. Г.



15.11.2016г.

АКТ

внедрения результатов НИР

по теме "Математическое моделирование и разработка основ теории магнитной очистки водных технологических жидкостей от ферромагнитных частиц"

21 ноября 2016 года комиссия в составе представителей ЗАО "Системы водоочистки" к.т.н. Кондратьевой Н. Н., начальника проектного управления Олешкевича В. В., ведущих конструкторов Винокурова Н. М. и Кузнецова А. С. и ФГБОУ УлГТУ доц. Меньшова Е. Н., составила настоящий акт о том, что в производстве ЗАО "Системы водоочистки" внедрена новая технология и гамма модульных установок магнитной сепарации (очистки) водных технологических жидкостей, в том числе и смазочно-охлаждающих жидкостей от механических примесей и нефтепродуктов.

В процессе внедрения выполнены следующие работы:

1. Проведен анализ разработанных в КБ ЗАО "Системы водоочистки" технологии и системы очистки ВТЖ, в том числе и СОЖ от механических примесей и нефтепродуктов.
2. Разработана новая технология очистки ВТЖ и СОЖ в магнитных сепараторах от механических примесей и нефтепродуктов.

3. Разработаны и прошли испытания образцы систем и установок магнитной сепарации ВТЖ и СОЖ, выполненные по заказам промпредприятий, приведенных в референц-листе (приложение 1).

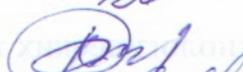
4. Технико-экономический эффект от внедрения новой техники и систем магнитной сепарации ВТЖ и СОЖ от механических примесей и нефтепродуктов составил 25,3 млн. руб.

5. Работу по внедрению считать законченной.

Представители ЗАО "Системы водоочистки":

 Кондратьева Н. Н.

 Олешкевич В. В.

 Винокуров Н. М.

 Кузнецов А. С.

Представители ФГБОУ УЛГТУ

 Меньшов Е. Н.

Референц-лист ЗАО «Системы водоочистки».
Установки, технологические линии и оборудование (с включением
в состав патронных магнитных сепараторов).
(2004 -2016 гг.)

№ п/п	Год внедрения	Наименование разработки	Город, предприятие
1	2016	Разработка рабочей документации для выполнения перевооружения и капитального ремонта станции нейтрализации ЭФКО ООО "ЧЕЛНЫВОДОКАНАЛ"	г. Набережные Челны, ООО "ЧЕЛНЫВОДОКАНАЛ"
2	2011 – 2013	Разработка и создание производства нового поколения экономически доступных системных комплексов и станций очистки и оздоровления больших объемов природных, трансграничных и оборотных вод, дождевых и промышленных стоков для предприятий и ЖКХ	Москва, Министерство образования и науки Российской Федерации, ФЦП 2.7
3	2012	Установка очистки СОЖ	Москва, ООО "Вагонмаш"
4	2011	Установка очистки СОЖ "Вита-С – 160"	Москва, "Ионообменные технологии"
5	2011	Проектирование и изготовление Пилотной станции тестирования технологии и техники водоочистки в условиях Потребителя	Москва, ООО "Вагонмаш"
6	2010	Проект централизованной системы применения СОЖ	Орск ЗАО «Орский завод компрессоров»
7	2008	Установка по доочистке дебалансных сточных вод оборотного цикла водоснабжения прокатных цехов Q = 2000 м ³ /ч (проектные работы)	Новокузнецк, ОАО «Западно-Сибирский металлургический комбинат»
8	2008	Установка обезвоживания шламов газоочисток конверторных цехов ККЦ-1 Q = 250 м ³ /ч, ККЦ-2 Q = 200 м ³ /ч (проектные работы)	Новокузнецк, ОАО «Западно-Сибирский металлургический комбинат»
9	2007	Очистные сооружения на ливневой насосной станции Q = 5000 м ³ /ч (выполнены проектные работы)	Тольятти, ОАО «АвтоВАЗ»
10	2007	Установка очистки эмульсии на 4-й клети стана 2500 ЛПЦ-5	Магнитогорск, ОАО «ММК»
11	2007	Оборудование эмульсионной системы стана «2500х/п» с отдельной системой подачи и очистки эмульсии клети № 4	Магнитогорск, ОАО «ММК»
12	2006	Двухблочный патронный кассетный магнитный сепаратор для очистки СОЖ в ЛПЦ-3 ОАО «ММК»	Магнитогорск, ОАО «ММК», Магнитогорск
13	2006	Установка очистки СОЖ «Вита-С-15» для вальцешлифовальных станков	Магнитогорск, ОАО «ММК»
14	2004	Работы для МСП: «Внедрение прогрессивной технологии очистки СОЖ на основе магнитных сепараторов»	Тольятти, ОАО «АвтоВАЗ»
15	2004	Работы для МСП: «Установка очистки СОЖ на основе магнитных сепараторов»	Тольятти, ОАО «АвтоВАЗ»
16	2004	Патронный кассетный магнитный сепаратор для очистки СОЖ на стане 2500 на ЛПЦ-5	Магнитогорск, ОАО «ММК»

Зам. Ген. директора
 ЗАО "Системы водоочистки"
 по развитию и внедрению
 новых технологий



И. Г. Лейбель

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель организации

СОГЛАСОВАНО

Ректор (проректор) вуза

заместитель
НИИ, КБ

Мишин В.А.

« 1997 г.



Макаров Н.Н.

1997 г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов научно-исследовательских, опытно-конструкторских и технологических работ в высших учебных заведениях

Заказчик АО УКБП

(наименование организации,

Макаров Н.Н.

Ф.И.О. руководителя организации)

Настоящим актом подтверждается, что результаты работы "Исследование и разработка высокочастотных магнитных электрокомпонентов для ВИП с бест-

(наименование темы, № гос. регистрации)

трансформаторным входом", № ГР 01.930.011.233

выполненной УлГТУ

(наименование вуза, НИИ, КБ)

стоимостью 6200 / шесть тысяч двести /

(цифрами и прописью)

тыс.руб.

выполняемой в 1993 - 1997 г.г.

(сроки выполнения)

внедрены в АО УКБП

(наименование предприятия, где осуществлялось внедрение)

1. Вид внедренных результатов Математическая модель и методика проектирования ферромагнетика, дроссель-трансформатора и силовой части ОХИ вы-

(эксплуатация изделия, работы, технологии)

производство (изделия, работы, технологии),

сокочастотных ВИП.

функционирование (систем)

2. Характеристика масштаба внедрения Уникальное

(уникальное, единичное, партия, массовое, серийное)

3. Форма внедрения:

Методика (метод) Методика проектирования, реализованная в программе

к ЭВМ

4. Новизна результатов научно-исследовательских работы Математическая модель
(пионерские,
магнетика принципиально новая, остальные модели и методика качественно
принципиально новые, качественно новые, модификации, модернизация
новые

старых разработок)
5. Опытно-промышленная проверка № 2 от 24.08.97 г. АО УКБП
(указать номер и дату актов испытаний)
11.08.97 г. по 22.08.97 г.
наименование предприятия, период)



6. Внедрены:
- в промышленное производство (участок, цех (цеха), процесс)
- в проектные работы АО УКБП в изделиях: модуль питания МП-20
(указать объект, предприятие)

7. Годовой экономический эффект
ожидаемый не подсчитывался тыс.руб.
(от внедрения в проект)
фактический - тыс.руб.
в том числе долевое участие тыс.руб.
(%, цифрами и прописью)

8. Удельная экономическая эффективность внедренных результатов руб/руб.

9. Объем внедрения
что составляет % от объема внедрения,
положенного в основу расчета гарантированного экономического эффекта,
расчитанного по окончании НИР (Эгар = тыс.руб.), а при поэтап-
ном внедрении Эгар при заключении договора.

10. Социальный и научно-технический эффект: В 10 раз ускоряет процесс разра-
ботки дроссель-трансформаторов ВИП и повышает надежность этих работ.
(охрана окружающей среды, недр; улучшение и оздоровление условий
труда, совершенствование структуры управления, научно-технических
направлений, специальные назначения и т.д.)

Примечание: Настоящий акт внедрения заверяется гербовой печатью со стороны Заказчика и со стороны Исполнителя.

Приложение: I. Расчет фактического (ожидаемого от внедрения в проект) годового экономического эффекта, подписанный начальником планового отдела (начальником технико-экономического отдела для НИИ), технического отдела, гл. бухгалтером (для расчетов фактического эффекта) и заверенный гербовой печатью.

✓ 2. Справка о социальном эффекте, подписанная начальником технического отдела, начальником планового отдела, заверенная гербовой печатью.

От вуза

Зам. проректора по НИР
Скворцов С.В.
Скворцов С.В.

Руководитель НИР
Меньшов Е.Н.
Меньшов Е.Н.

От предприятия

Начальник планового отдела

Гл. бухгалтер

Ответственный за внедрение
Лигачёв И.Д.
Лигачёв И.Д.

В.Н. Верещагин
25.11.97
Верещагин В.Н.

УТВЕРЖДАЮ

Директор НТИР
А/О УКБП



1999 г.

А К Т
ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ НИР

Мы, представители А/О УКБП настоящим актом подтверждаем, что результаты научных исследований доцента УлГТУ Меньшова Е.Н. были использованы на предприятии А/О УКБП в рамках выполненной им работы по контракту.

Была реализована проблемная наукоёмкая разработка - преобразователя напряжения /ПН/ для модуля питания МИП II5, работающего на повышенной частоте /200 кГц/ и имеющего высокий к.п.д. и ограниченные габаритные размеры. Регулировка и исследование макета подтвердили правомерность предложенных теоретических положений, адекватность математических моделей и методик расчёта.

Вид использованного научного материала:

1. Математическая модель ферритовых материалов.
2. Математическая модель теплового режима трансформаторов питания.
3. Методики расчётов силовой части ПН на основе ОХИ и дроссель - трансформатора ОХИ.

Выполненная работа явилась продолжением и развитием законченной в 1995 году хозяйственной тематики с А/О УКБП, в которой решалась проблема проектирования ПН ОХИ с рабочей частотой до 60 кГц.

От заказчика

Руководители подразделения,
ответственные за использова-
ние

И. Д. Лигачёв

24.11.99

В. Н. Верещагин

От исполнителя

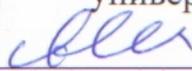
Научный руководитель г/б НИР
в УлГТУ

Е. Н. Меньшов

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе
ФГБОУ ВО «Ульяновский
государственный технический
университет»



 Наместников А.М.

« 10 » 11 2020г.

АКТ

внедрения результатов диссертационного исследования в учебном процессе

Результаты диссертационной работы Меньшова Е. Н. «Математическое моделирование разделения ферромагнитных суспензий в магнитном поле» внедрены в учебный процесс УлГТУ «Ульяновский государственный технический университет».

В частности, при обучении студентов в 2016-2020 г.г. по направлению 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», по профилю «Электроэнергетические системы, сети, их режимы, устойчивость и надежность» квалификации магистр в рамках проведения практических занятий и курирования курсовой работы по дисциплине «Моделирование и алгоритмы задач электроэнергетики».

Результаты диссертационной работы включены в электронные методические указания к курсовой работе, объемом 62 м.п.л. В них на основе материала второй и третьей глав и зарегистрированной в Федеральной службе по интеллектуальной собственности программы для ЭВМ (№ ГР 2017614326) предлагается студентам методы математического моделирования магнитного поля сложных магнитных систем и построения математических моделей семейства характеристик распределения поля на основе аппарата линейных дифференциальных уравнений.

Заведующий кафедрой
«Электроснабжение»,
д.т.н., профессор



Кузнецов А. В.

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе
ФГБОУ ВО «Ульяновский
государственный технический
университет»



 Наместников А.М.

« 10 » 11 2020г.

АКТ

внедрения результатов диссертационного исследования в учебном процессе

Результаты диссертационной работы Меньшова Е. Н. «Математическое моделирование разделения ферромагнитных суспензий в магнитном поле» внедрены в учебный процесс УлГТУ «Ульяновский государственный технический университет».

В частности:

– при обучении студентов по специальности 14021465 «Электроснабжение» квалификации инженер в 2009-2011 г.г. в рамках проведения лабораторной работы на предмет исследования магнитного поля, включенной в методические указания, в которых использована методика расчета магнитного потенциала автора:

“Исследование магнитного поля, Ч. 3 [Электронный ресурс] / Меньшов Е. Н. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 384 Кб; pdf.
[http://venec.ulstu.ru/lib/disk/2009/Menshov.pdf.](http://venec.ulstu.ru/lib/disk/2009/Menshov.pdf)”

– при обучении студентов по направлению 140400.62 «Электроэнергетика и электротехника» квалификации бакалавр в 2012-2015 г.г. в рамках проведения лабораторной работы на предмет исследования магнитной цепи катушки с ферромагнитным сердечником, в которой использовалась математическая модель магнитного сопротивления внешней среды автора, включенной в методические указания:

“Переходные и установившиеся режимы в электрических и магнитных цепях: метод. указания к лабораторным работам по теоретическим основам электротехники / сост. С. А. Курганов, Е. Н. Меньшов. – Ульяновск: УлГТУ, 2013. – 40 с.”

Заведующий кафедрой
«Электроснабжение»,
д.т.н., профессор



Кузнецов А. В.

РОССИЙСКАЯ ³⁷⁷ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017614324

Расчет характеристик степени очистки патронного магнитного сепаратора

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный технический университет» (RU)*

Автор: *Меньшов Евгений Николаевич (RU)*

Заявка № **2016663988**

Дата поступления **20 декабря 2016 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **12 апреля 2017 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивлиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017614326

**Расчет распределения магнитного поля в патронном
магнитном сепараторе**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский
государственный технический университет» (RU)*

Авторы: *Меньшов Евгений Николаевич (RU),
Меньшов Артем Евгеньевич (RU)*

Заявка № **2016663954**

Дата поступления **20 декабря 2016 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **12 апреля 2017 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 **Г.П. Ивлиев**





МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КООРДИНАЦИОННЫЙ ЦЕНТР ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
ОТРАСЛЕВОЙ ФОНД АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

СВИДЕТЕЛЬСТВО ОБ ОТРАСЛЕВОЙ РЕГИСТРАЦИИ РАЗРАБОТКИ

№ 2912

Настоящее свидетельство выдано на разработку:

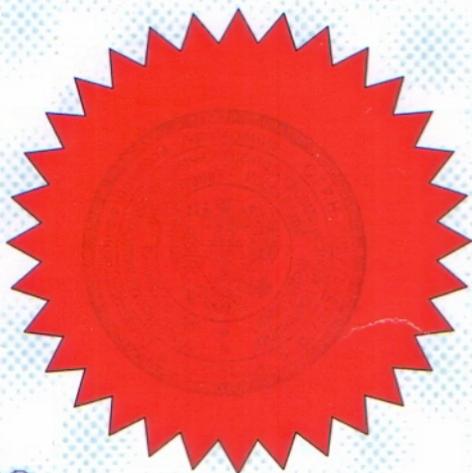
**«Статические и динамические гистерезисные циклы
ферритов и магнитодиэлектриков»**

зарегистрированную в Отраслевом фонде алгоритмов и программ.

Дата регистрации: **14 октября 2003 года**

Авторы: **Меньшов Е.Н., Приказчиков С.А., Забродин К.В.**

Организация-разработчик: **Ульяновский государственный
технический университет**



Директор  **Е.Г. Калинин**

Руководитель ОФАП  **А.И. Галкина**

Дата выдачи 21.11.2003



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КООРДИНАЦИОННЫЙ ЦЕНТР ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
ОТРАСЛЕВОЙ ФОНД АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

СВИДЕТЕЛЬСТВО ОБ ОТРАСЛЕВОЙ РЕГИСТРАЦИИ РАЗРАБОТКИ

№ 2913

Настоящее свидетельство выдано на разработку:

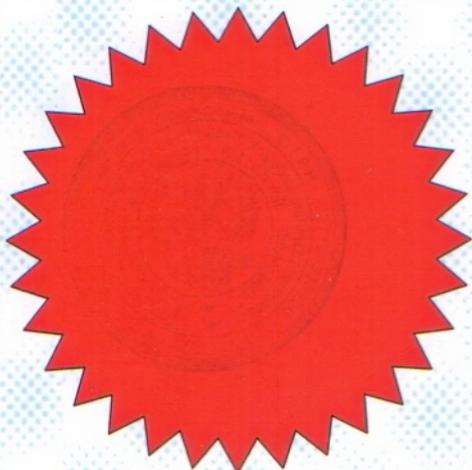
Идентификация математической модели ферромагнетика

зарегистрированную в Отраслевом фонде алгоритмов и программ.

Дата регистрации: **14 октября 2003 года**

Авторы: **Меньшов Е.Н., Левченко О.И., Забродин К.В.**

Организация-разработчик: **Ульяновский государственный
технический университет**



Директор  **Е.Г. Калинин**
Руководитель ОФАП  **А.И. Галкина**

Дата выдачи 21.11.2003