На правах рукописи

Мовсисян Геворг Суренович

Супералгебры Ли и интегрируемость

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ульяновск — 2021

Работа выполнена на кафедре геометрии в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» Министерства науки и высшего образования

Научный руководитель: **Сергеев Александр Николаевич**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Стукопин Владимир Алексеевич,**
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», кафедра высшей математики, профессор кафедры

Хорошкин Сергей Михайлович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики, профессор факультета

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Защита состоится 24 декабря 2021 г. в 9 часов на заседании диссертационного совета Д 212.278.02 при ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» по адресу: г. Ульяновск, ул. Набережная реки Свияги, 106, корпус 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа – `https://ulsu.ru`, с авторефератом – на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации – `https://vak.minobrnauki.gov.ru`.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации,просим направлять по адресу: 432068, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан « ______ » ____________ 20___ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Волков Максим Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Данная диссертационная работа продолжает исследование связи между теорией представлений супералгебр Ли и теорией обобщенных квантовых интегрируемых систем Калоджеро-Мозера-Сазерленда(КМС), которое взяла начало в работах А.Н. Сергеева и А.П. Веселова. Изначально наличие связей между этими двумя разделами было открыто в работах А.Н. Сергеева[1] [2]. Данные работы дали огромный толчок в исследовании квантовых интегрируемых систем с позиции супералгебр Ли, а так же показали наличие обратной связи, то есть применению методов квантовых интегрируемых систем в теории представлений супералгебр Ли. В этих же работах было показано, что при некоторой специализации параметров супермногочлены Джека переходят в определённые сферические функции, в соответствующих симметрических суперпространствах. Тем самым выявлена тесная связь с теорией представлений супералгебр Ли. Старт данных связей был дан в работах[3] [4]. Так же в работах А.Н. Сергеева и А.П. Веселова, указанных выше, был отражён ещё один немаловажный факт, а именно, что те самые супермногочлены Джека являются собственными функциями дифференциального оператора Калоджеро-Мозера, который является оператором второго порядка. Позднее М.В. Фейгин, А.П. Веселов и О.А. Чалых рассмотрели частные случаи этих дифференциальных операторов[5]. Далее в работе В.В. Сергановой было введено понятие обобщённой системы корней [6], а уже в работе[7] была показана связь обобщён-

[1] Сергеев А. Н. Оператор Калоджеро и супералгебры Ли. / А. Н. Сергеев // Теоретическая и математическая физика. — 2002. — Т. 131, № 3. — С. 355—376.

[2] Sergeev A. N. Superanalogs of the Calogero operators and Jack polinomials. / A. N. Sergeev // J. Noliniar Math. Phys. — 2001. — Vol. 8, no. . — P. 59–64.

[3] Вершик А. М. Асимптотическая теория характеров симметрической группы. / А. М. Вершик, С. В. Керов // Функц. анализ и его прил. — 1981. — Т. 15, № 4. — С. 15—27.

[4] Вершик А. М. Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы. / А. М. Вершик, С. В. Керов // ДАН СССР. — 1981. — Т. 257, № 5. — С. 1037—1040

[5] Sergeev A. N. Deformed Macdonald - Ruijsenaars operators and super Macdonald polynomials. / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Communications in Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 288, no. 2. — P. 65–675.

[6] Serganova V. V. On generalization of root system. / V. V. Serganova // Communication in Algebra. — 1996. — Vol. 24, no. 13. — P. 4281–4299.

[7] Sergeev A. N. Deformed quantum Calogero–Moser systems and Lie superalgeras. / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Communications in Algebra. — 2004. — Vol. 245, no. 2. — P. 249–278.

ной системы корней и квантовых интегрируемых систем, а именно построение интегралов. Иной подход к построению интегралов был получен в работах [8] [9].

Актуальность проблемы обусловлена тем, что в общем случае теория представлений простых супергрупп не является полупростой и потому суперхарактеры неприводимых представлений сложно устроены. В связи с этим используется другой подход получения суперхарактеров неприводимых представлений супергрупп Ли, а именно специализацией параметров супермногочленов Якоби. Основная трудность заключается в том, что при специализации коэффициентов $(k,p,q) \to (-1,0,0)$ данные многочлены не всегда корректно определены.

Одним из простейших примеров супералгебр Ли, теория представлений которых не полупроста является супергруппы Ли $\mathfrak{osp}(3|2)$ и $OSP(2|2n)$. В этом случае, как правило, задача описания неприводимых представлений в терминах более простых представлений (в частности вычисления их суперхарактеров) является глубоко нетривиальной. В общем случае для супералгебр $\mathfrak{osp}(n|2m)$ эта задача была решена В.В. Сергановой [10]. При этом используются полиномы Каждана–Люстига специального вида, а соответствующий алгоритм дает кратности неприводимых модулей в виртуальных модулях Эйлера, суперхарактеры которых известны. В работе [11] было показано, что $\lim_{(p,q)\to(0,0)} \lim_{k\to-1} J_\lambda(x,y,k,p,q)$, с точностью до знака, совпадает с суперхарактером Эйлера супергруппы Ли $OSP(2m|2n)$.

В настоящей работе используется два основных свойства супермногочленов Якоби. Первое заключается в том, что они являются собственными функциями деформированного оператора Калоджеро - Мозера-Сазерленда, а второе

[8] Sergeev A. N. Generalised discriminant, deformed quantum Calogero-Moser-Sutherland problem and super-Jack polynomials. / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Advances in Mathematics. — 2005. — Vol. 192, no. 4. — P. 341– 375.

[9] Sergeev A. N. Deformed Macdonald - Ruijsenaars operators and super Macdonald polynomials. / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Communications in Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 288, no. 2. — P. 65–675.

[10] Serganova V. V. Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras. / V. V. Serganova // Proc. Intern. Congress of Math., Berlin, Doc. Math. Extra, — 1998. — Vol. 2. — P. 583–593.

[11] Sergeev A. N. Euler characters and super Jacobi polynomials. / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Advances in Mathematics. — 2011. — Vol. 226, no. 5. — P. 4286–4315.

свойство состоит в том, что они удовлетворяют формуле Пиери. Поэтому вместо вычисления предела супермногочленов Якоби мы вычисляем предел оператора КМС и предел коэффициентов формул Пиери. Основным инструментом являются трансляционные функторы, которые в этом контексте были определены в работе [12].

Все вышесказанное обосновывает актуальность темы диссертационного исследования.

Объектом исследования является связь собственных функции дифференциального оператора Калоджеро – Мозера – Сазерленда с суперхарактерами неприводимых представлений супералгебр Ли.

Предметом исследования выступают математические модели, методы квантовых интегрируемых систем и теории представлений, которые позволяют проводить необходимые вычисления с целью изучения связей между собственными функциям дифференциального оператора Калоджеро – Мозера – Сазерленда и суперхарактерами неприводимых представлений супералгебр Ли.

Целью данной работы является исследование связей между теорией представлений супералгебр Ли и квантовыми интегрируемыми системами. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Нахождение таких условий на параметры, что при специализации получаются суперхарактеры неприводимых представлений супералгебры $\mathfrak{osp}(3|2)$.
2. Исследование связей теории представлений супергруппы $OSP(2|2n)$ и соответствующей системы КМС.
3. Использование техники трансляционных функторов для задачи специализации параметров суперполиномов Якоби.
4. Исследование комбинаторики возникающих диаграмм Юнга.
5. Построение нового семейства полиномов зависящих от одного параметра, различные специализации которого дают суперхарактеры Эйле-

[12] Sergeev A. N. Jack-Laurent symmetric functions for special values of the parameters. / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Glasgow Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 58, no. 3. — P. 599–616.

ра, суперхарактеры проективных накрытии, суперхарактеры неприводимых модулей.

Научная новизна. Основные представленные в диссертационной работе результаты являются новыми. В частности, найдены определенные условия на параметры супермногочленов Якоби, при специализации которых получаются суперхарактеры неприводимых представлений суперaлгебры $\mathfrak{osp}(3|2)$ и супергруппы Ли $OSP(2|2n)$. В случае с супергруппой $OSP(2|2n)$ была использована техника трансляционных функторов для задачи специализации параметров суперполиномов Якоби. Супермногочлены Якоби нумеруются диаграммами Юнга, в связи с этим исследована комбинаторика возникающих диаграмм. Построено новое семейства полиномов зависящих от одного параметра, различные специализации которого дают суперхарактеры Эйлера, суперхарактеры проективных накрытии, суперхарактеры неприводимых модулей.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретически характер. Результаты могут быть использованы в теории представлений суперaлгебр Ли, теории квантовых интегрируемых систем, теории специальных функций, математической физике.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы теории представлений суперaлгебр Ли, теории квантовых интегрируемых систем, комбинаторики диаграмм Юнга, трансляционных функторов, теории специальных функций.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Условия на параметры супермногочленов Якоби, при специализации которых получаются суперхарактеры неприводимых представлений суперaлгебры Ли $\mathfrak{osp}(3|2)$.
2. Связь теории представлений супергруппы Ли $OSP(2|2n)$ с соответствующей системой КМС.
3. Техника трансляционных функторов для задачи специализации параметров суперполиномов Якоби.
4. Анализ комбинаторики возникающих диаграмм Юнга.

5. Конструкция нового семейства полиномов зависящих от одного параметра, различные специализации которого дают суперхарактеры Эйлера, суперхарактеры проективных накрытии, суперхарактеры неприводимых модулей.

Достоверность полученных результатов обеспечивается теоретическими выкладками, строгими доказательствами и примерами, опирающимися на методы теории представлений и квантовых интегрируемых систем. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты докладывались:
На конференциях: XIV Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»(2016. Саратов. СГУ.); VII Международная научно-практическая конференция «Presenting Academic Achievements to the World» (2016, Саратов); VI школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов».(2017. Москва. МГУ.); Научная конференция механико-математического факультета «Актуальные проблемы математики и механики»(2016, 2017, 2018, 2019). Саратов. СГУ.; VIII школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов»(2020. Москва. МГУ.)
На семинарах: механико-математического факультета при кафедре геометрии под руководством проф. А.Н. Сергеева.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертационного исследования получены соискателем самостоятельно. При этом использование техники трансляционного функтора и анализ полученных результатов осуществлялся совместно с научным руководителем А.Н. Сергеевым.

Структура диссертации. Работа состоит из введения, трёх разделов, заключения, списка литературы из 45 наименований источников (расположенных в порядке указания ссылки). Общий объем диссертационной работы составляет 105 страниц (включая 5 страниц списка литературы). Диссертация содержит 1 рисунок.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных изданиях, в том числе 2 , входящих в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук(2 – в изданиях, входящих в базы цитирования *Web of Science* и *Scopus,* из них 1 – в изданиях, рекомендуемых ВАК), 3 — в тезисах докладов.

Основное содержание работы

Во **введении** описывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, определяются цель и задачи, обосновывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость представляемой работы.

Раздел первый состоит из семи подразделов. В первом подразделе приводятся все вспомогательные сведения о супералгебрах Ли. Во втором подразделе вводятся основные понятия связанные с простыми супералгебрами Ли и системами корней. В третьем подразделе приводятся основные понятия по ортосимплектическим супералгебрам Ли. В четвёртом подразделе вводятся основные сведения о супералгебре Ли $\mathfrak{osp}(3|2)$. В пятом подразделе вводятся основные сведения о супералгебре Ли $\mathfrak{osp}(2|2n)$. В шестом подразделе приводятся все предварительные сведения о многочленах Якоби. В седьмом подразделе приводится связь интегрируемых систем с ортосимплектическими супералгебрами Ли.

Раздел второй состоит из пяти подразделов и посвящён исследованию связей между собственными функциями дифференциального оператора КМС типа $B(1{,}1)$ и супералгеброй Ли $\mathfrak{osp}(3|2)$. В первом подразделе рассматривается дифференциальный оператор $\mathcal{L}_2$ типа $B(1{,}1)$, который имеет вид:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_2 = \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + k\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - p\left(\frac{x+1}{x-1}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y+1}{y-1}y\frac{\partial}{\partial y}\right) + \\ +(k-1)\frac{y^2+1}{y^2-1}y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{y+x}{y-x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - ky\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{y+x^{-1}}{y-x^{-1}}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}\right),\end{gathered} \tag{1}$$

и путём замен $u=\frac{1}{2}(x+x^{-1}-2),\ v=\frac{1}{2}(y+y^{-1}-2)$ приводится к виду:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_2=\partial_u^2+k\partial_v^2-\frac{u+v}{u-v}(\partial_u-k\partial_v)-(1+p)(\partial_u+\partial_v)-\\-(1{+}2p)\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)+2\frac{\partial}{\partial u}\partial_u+2k\frac{\partial}{\partial v}\partial_v-\frac{4}{u-v}(\partial_u-k\partial_v).\end{gathered}\tag{2}$$

Во втором подразделе вводится естественная область действия оператора (2), которой является алгебра деформированных симметрических многочленов:

$$\mathfrak{A}_{1,1}=\{f\in\mathbb{C}[u,v]\mid(\partial_u-k\partial_v)f\in(u-v)\}.$$

Далее в Лемме 2.2 доказывается, что многочлены Джека

$$P_\Lambda=v^\lambda u^\mu-\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}v^{\lambda-1}u^{\mu+1},$$

где $\Lambda=(\lambda,\mu)-$ диаграмма Юнга-крюк, составляют базис алгебры $\mathfrak{A}_{1,1}$. Следующей идёт Лемма 2.3, в которой описывается действие оператора (2) на P_Λ:

Лемма 2.3. Оператор (2) действует на базис P_Λ по следующим формулам:

$$\mathcal{L}_2(P_\Lambda)=a(\Lambda,\Lambda)P_\Lambda+a(\Lambda-\delta,\Lambda)P_{\Lambda-\delta}+a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda)P_{\Lambda-\varepsilon},\ \text{где}$$

$$a(\Lambda,\Lambda)=\mu(\mu+1)+k\lambda(\lambda-1)-(p+1)(\lambda+\mu),\quad a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda)=\mu(2\mu-2p-1),$$
$$a(\Lambda-\delta,\Lambda)=(\lambda-1)(2k\lambda-2k-2p-1)\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{\mu+1-k(\lambda-2)}{\mu-k(\lambda-1)}$$

В частности оператор $\mathcal{L}_2$ отображает алгебру $\mathfrak{A}_{1,1}$ в себя.

В Теореме 2.1 доказывается формула Пиери для многочленов Джека , а именно:

$$P_\square P_\Lambda=P_{\Lambda+\delta}+k\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{\mu+2-k(\lambda-1)}{\mu+1-k\lambda}P_{\Lambda+\varepsilon},$$

где $P_\square=v+ku.$

В третьем подразделе вводится алгебра сдвинутых деформированных симметрических многочленов:

$$\mathfrak{B}_{1,1}=\left\{\begin{array}{c}f\in\mathbb{C}[v,u]\mid f\ \text{обладает свойствами}\\ 1)f(v,u)\ \text{многочлен от}\ (v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p+1)k^{-1})^2\ \text{и}\ (u-\frac{1}{2}p)^2\\ 2)f(v+1,u-1)=f(v,u),\ \text{если}\ u=kv\end{array}\right\}.$$

Рассматриваются многочлены вида:

$$I_\Lambda(v,u) = (v-1)\cdots(v-\lambda+1)u(u-1)\cdots(u-\mu+1)\times$$

$$\times k^{-2\mu}(v-(p+1)k^{-1})\cdots(v+\lambda-2-(p+1)k^{-1})(u+1-(p+1))\cdots(u+\mu-(p+1))\times$$
$$\times\Big[(v-k^{-1}\mu)(v+k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1})-\frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}k^{-2}(u-\mu)(u+\mu-p)\Big]$$

и в Лемме 2.4. указываются свойства, которыми обладают многочлены:

Лемма 2.4. Многочлены $I_\Lambda(v,u)$ обладают следующими свойствами:

1. $I_\Lambda(N) = I_\Lambda(\tilde\lambda,\tilde\mu) = 0$, если $N = (\tilde\lambda,\tilde\mu)$ не содержит Λ и

$$I_\Lambda(\Lambda) = k^{-2\mu}(\lambda-1)!\mu!(\lambda-(p+1)k^{-1})\cdots(2\lambda-2-(p+1)k^{-1})\times$$

$$\times(\mu-p)\cdots(2\mu-p-1)(\lambda-k^{-1}\mu)(\lambda+k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1}).$$

2. $I_\Lambda(v,u)$ является многочленом от $(v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p+1)k^{-1})^2$ и $(u-\frac{1}{2}p)^2$.
3. $I_\Lambda(v+1,u-1) = I_\Lambda(v,u)$, если $u = vk$.

В Лемме 2.5 доказывается, что $I_\Lambda(v,u)$ составляют базис алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$. В Теореме 2.2 доказывается формула Пиери для $I_\Lambda(v,u)$:

$$\Big[(v-\lambda)(v+\lambda-1)-k^{-1}(p+1)(u-\mu+v-\lambda)+k^{-1}(u-\mu)(u+\mu+1)\Big]I_\Lambda(v,u) =$$

$$= I_{\Lambda+\delta}(v,u)+I_{\Lambda+\varepsilon}(v,u)k\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{\mu+2-k(\lambda-1)}{\mu+1-k\lambda}. \qquad (3)$$

В четвёртом подразделе определяются многочлены Якоби J_Λ :

$$J_\Lambda = \sum_{M\subseteq\Lambda} c(M,\Lambda)P_M, \qquad (4)$$

где

$$c(M,\Lambda) = 2^{|\Lambda|}\frac{I_M(\Lambda)}{I_M(M)}\frac{J_\Lambda(0)}{J_M(0)}, \qquad (5)$$

$$J_\Lambda(0) = -\frac{k+1}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{2p+1}{k(\lambda-1)+\mu-p-1}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{\lambda-1}\frac{2p+1-2ki}{p+1-k(\lambda+i-1)}\prod_{j=1}^{\mu}\frac{2j-2p-1}{j+\mu-p-1}. \qquad (6)$$

Теорема 2.3. *Многочлен* (4) *является собственной функцией дифференциального оператора* (2).

В пятом подразделе формулируется основной результат всей главы:

Теорема2.4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Если $\Lambda \neq (\lambda,\lambda-1)$, *то существует*

$$\lim_{\substack{p\to-1\\k\to-1}} J_\Lambda = \mathrm{sch}(V^\Lambda).$$

2) Если $\Lambda = (\lambda,\lambda-1)$, *то при условии* $p+1=\lambda(k+1)$ *существует*

$$\lim_{k\to-1} J_\Lambda = \mathrm{sch}(V^\Lambda).$$

3) Если $\Lambda = (1,0)$, *то при условии* $p+1=2(k+1)$ *существует*

$$\lim_{k\to-1} J_\Lambda = \mathrm{sch}(V^\Box).$$

Раздел третий состоит из пяти подразделов и посвящена исследованию связей между собственными функциями дифференциального оператора КМС типа $B(1,n)$ и супергруппой Ли $OSP(2|2n)$. В первом подразделе вводится дифференциальный оператор КМС типа $BC(1,n)$:

$$\mathcal{L} = \partial_x^2 + k\sum_{j=1}^n \partial_{y_j}^2 - \sum_{i<j}^n \left(\frac{y_i+y_j}{y_i-y_j}(\partial_{y_i}-\partial_{y_j}) + \frac{y_iy_j+1}{y_iy_j-1}(\partial_{y_i}+\partial_{y_j})\right) -$$

$$-\left(p\frac{x+1}{x-1}+2q\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\partial_x - k\sum_{j=1}^n\left(r\frac{y_j+1}{y_j-1}+2s\frac{y_j^2+1}{y_j^2-1}\right)\partial_{y_j} -$$

$$-\sum_j\left(\frac{x+y_j}{x-y_j}(\partial_x-k\partial_{y_j})+\frac{xy_j+1}{xy_j-1}(\partial_x+k\partial_{y_j})\right).$$

Собственными функциями дифференциального оператора выше являются многочленов Якоби. В Теореме 3.1. определяются супермноголчены Якоби, посредством того, что они удовлетворяют формуле Пиери и являются собственными функциями. Супермногочленя Якоби нумеруются диаграммой λ Юнга(толстый крюк), где $\lambda \in H(1,n)$, $H(1,n)-$ множество разбиений(диаграмм), таких что $\lambda_2 \geq n$.

Теорема 3.1. *Пусть* $1,k,h$ *линейно независимы над полем рациональных чисел.*

Тогда существует единственное семейство многочленов $J_\lambda = J_\lambda(x,y,k,p,q) \in P_{1,m},\ \ \lambda \in H(1,n)$ *таких что:*

$$J_\emptyset = 1, \quad \mathcal{L}J_\lambda = c_\lambda J_\lambda, \quad p_1 J_\lambda = \sum_{\mu \in S(\lambda)} a_{\lambda,\mu} J_\mu, \tag{7}$$

где $p_1 = x + x^{-1} + k^{-1}(y_1 + y_1^{-1} + \cdots + y_n + y_n^{-1})$, $S(\lambda)-$ это множество диаграмм μ, которые получаются из λ удалением или прибавлением одной клетки, сама диаграмма λ также в этом множестве содержится. Коэффициенты $a_{\lambda,\mu}$, при разложении по формуле Пиери определяются формулами (3.1) и (3.2) из диссертации.

Во втором подразделе вводится определение трансляционного функтора, действующего в пространстве собственных функций. С помощью трансляционного функторов в третьем подразделе построен неособый базис в пространстве соответствующих супермногочленов Якоби. Далее в Теореме 3.2. показывается корректность многочленов в точке $(-1,0,0)$ после действия трансляционного функтора.

Теореме 3.2. *Пусть* $f \in V_j,\ f = f(k,p,q)$ *и предположим, что* f *не имеет полюсов в точке* $(-1,0,0)$. *Тогда* $F_i(f)$ *также не имеет полюсов, для любого* $i \in \mathbb{Z}$.

Далее строится аналог трансляционного функтора на диаграмме $H(1,n)$ и формулируется Лемма 3.2., за счёт которой описывается комбинаторика возникающих диаграмм Юнга в Тереме 3.3.

Определение 3.2. Диаграмма $\lambda \in H(1,n)$ называется *особой,* если существует $1 \leq j \leq n$, такое что выполняется равенство $\lambda_1 - n = \lambda'_j + n - j$. В противном случае диаграмма называется *регулярной.*

Лемма 3.2. *Пусть* $\mu,\nu \in S(\lambda)$ *и* $\mu \neq \nu$. *Тогда* $\tilde{c}_\mu = \tilde{c}_\nu$, *если и только если выполняются следующие условия*

$$\mu = \lambda \cup \Box,\ \nu = \lambda \setminus \tilde{\Box}, \quad j - i + \tilde{j} - \tilde{i} = 2n - 1,$$

где $\Box = (i,j),\ \tilde{\Box} = (\tilde{i},\tilde{j})$.

Теорема 3.3.*Справедливы следующие утверждения:*

1) Пусть $\lambda_1,\mu_1 \leq n$ *и* μ *получается из* λ *удалением одной клетки, тогда*

$$F_\lambda(\mu) = \{\lambda\}.$$

2) Пусть λ *регулярная диаграмма,* $\lambda_1 > n$ *и* $\mu-$ *диаграмма, которая получается из* λ *удалением одной клетки из первой строки, тогда*

$$F_\lambda(\mu) = \{\lambda\}.$$

3) Пусть λ *особая диаграмма, то есть* $\lambda_1 - n = \lambda'_j + n - j$ *и* $\mu-$ *диаграмма, которая получается из* λ *удалением одной клетки из первой строки, тогда*

$$F_\lambda(\mu) = \begin{cases} \{\lambda\}, \text{ если } \lambda'_{j+1} = \lambda'_j \\ \{\lambda, \nu\}, \text{ если } \lambda'_{j+1} < \lambda'_j, \end{cases}$$

где ν *получается из* μ *удалением одной клетки из* $j-$*ого столбца.*

4) Пусть μ *особая диаграмма и* λ *получается из* μ *добавлением одной клетки к первой строке, тогда*

$$F_\lambda(\mu^\sharp) = \begin{cases} \emptyset, \text{ если } \lambda - \text{регулярная} \\ \{\lambda^\sharp\} \text{ если } \lambda - \text{особая.} \end{cases}$$

5) Пусть $\lambda_1 > n$, *тогда*

$$\pi_\lambda = \begin{cases} \{\lambda\} \text{ если } \lambda - \text{регулярная} \\ \{\lambda,\lambda^\sharp\} \text{ если } \lambda - \text{особая.} \end{cases}$$

Как и говорилось выше, в третьем подразделе вводится новое семейство многочленов посредством трансляционного функтора.

Определение 3.3. Пусть $\lambda \in H(1,n)$. Определим по индукции семейство многочленов $I_\lambda(x,y,k,p,q)$ следующим образом:

$$I_\lambda(x,y,k,p,q) = \begin{cases} J_\lambda(x,y,k,p,q), \text{ если } \lambda_1 \leq n \\ F_\lambda(I_\mu(x,y,k,p,q)), \text{ если } \lambda_1 > n, \end{cases} \tag{8}$$

где μ получается из λ удалением последней клетки из первой строки.

Основной результат этого подраздела формулируется в Теореме 3.4., в которой показывается корректность коэффициентов при разложении по формуле Пиери в точке (-1, 0, 0):

Теорема3.4. *Многочлены* $I_\lambda(x,y,k,p,q)$ *не имеют полюсов при* $k=-1$, $p=q=0$.

Лемма 3.4. Пусть $\lambda_1>n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если λ регулярная диаграмма, то

$$I_\lambda(x,y,k,p,q)=J_\lambda(x,y,k,p,q).$$

2) Если λ особая диаграмма, то есть $\lambda_1-n=\lambda'_j-n+j$, то

$$I_\lambda(x,y,k,p,q)=J_\lambda(x,y,k,p,q)+b_\lambda J_{\lambda^\sharp}(x,y,k,p,q), \tag{9}$$

где

$$b_\lambda=a_{\lambda^{(0)}\lambda^{(1)}}a_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}\ldots a_{\lambda^{(r-1)}\lambda^{(r)}},$$

$r=r(\lambda)$ и $\lambda^{(0)}-$ диаграмма, полученная из λ удалением r клеток из первой строки, $\lambda^{(s)}-$ диаграмма, полученная из $\lambda^{(s-1)}$ удалением одной клетки из λ'_j-ой строки, $s=\overline{1,r}$.

В четвёртом подразделе вводятся обозначения :

$$SI_\lambda(x,y,t):=\lim_{k\to-1}I_\lambda(x,y,k,t(k{+}1),0),\ SJ_\lambda(x,y,t):=\lim_{k\to-1}J_\lambda(x,y,k,t(k{+}1),0).$$

После чего вводятся некоторые предварительные результаты о рациональных функциях, для того, чтобы далее явно определить и вычислить многочлены $SJ_\lambda(x,y,t)$, $SI_\lambda(x,y,t)$. Рассматривается рациональная функция

$$\varphi(k,p)=\frac{\prod_{i\in I}(p-\alpha_i)}{\prod_{j\in J}(p-\beta_j)}, \tag{10}$$

где α_i,β_j линейные функции по k.

Теорема 3.5. Пусть $\varphi(k,p)$ рациональная функция вида (10) и предположим, что существует предел $\lim_{k\to-1}\varphi(k,p)=\varphi(-1,p)$. Если $\varphi(-1,0)$ хорошо определён и не равен нулю, то

$$\varphi(t)=\lim_{k\to-1}\varphi(k,t(k+1))=\varphi(-1,0)\frac{\prod_{i\in I_0}(t-d_i)}{\prod_{j\in I_0}(t-e_j)}.$$

В Лемме 3.5. и Следствии 3.2. показывается корректность коэффициентов b_λ из (9) вычисляется явный вид.

Лемма3.5. Пусть λ,μ диаграммы, такие что $\mu = \lambda \setminus (i,j)$, $1 \le j \le n$.

1) Если $\lambda_1 > n$ и $\mu_1 - n = \mu'_r + n - r$, $\lambda'_r > 1$ для любого $1 \le r \le n$, то

$$a_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} \dfrac{t-\lambda'_j+2}{t-\lambda'_j+1}, \text{if } r = j \\ \quad 1 \qquad\quad \text{если} \quad r > j. \end{cases}$$

2) Если $\lambda_1 \le n$ и $i = 1$, то

$$a_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t}, \text{ если } j = n \\ 1 \text{ if } j < n. \end{cases}$$

Следствие 3.2. Пусть λ особая диаграмма, то есть $\lambda_1 - n = \lambda'_j + n - j$, тогда

$$b_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t}, \text{ если } \lambda'_j = 1, \\ \dfrac{t-\lambda'_j+2}{t-\lambda'_j+1}, \text{ если } \lambda'_j > 1. \end{cases} \tag{11}$$

Далее, в Следствии 3.4. показывается явное разложение $SJ_\lambda(x,y,t)$, $SI_\lambda(x,y,t)$. по формуле Пиери

Следствие 3.4. Пусть λ особая диаграмма, то есть $\lambda_1 - n = \lambda'_j + n - j$, тогда

1)

$$SI_\lambda(x,y) = \begin{cases} SJ_\lambda(x,y,\infty), \text{ if } \lambda'_j = 1 \\ SJ_\lambda(x,y,\infty) + SJ_{\lambda^\sharp}(x,y,\infty), \text{ if } \lambda'_j > 1 \end{cases} \tag{12}$$

2)

$$SJ_\lambda(x,y,t) = SJ_\lambda(x,y,\infty) - \frac{1}{t-l+1} SJ_{\lambda^\sharp}(x,y,\infty) + \frac{1}{t-l+1} SJ_{\lambda^{2\sharp}}(x,y,\infty) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{l-1} \frac{1}{t-l+1} SJ_{\lambda^{(l-1)\sharp}}(x,y,\infty) + (-1)^l \frac{2}{t-l+1} SJ_{\lambda^{l\sharp}}(x,y,\infty)$$

где $l = \lambda'_j$.

В пятом подразделе связываются специализированные супермногочлены Якоби с теорией представлений супергруппы Ли $OSP(2|2n)$. Показывается, что суперхарактер Эйлера, с точностью до знака, удовлетворяет той же формуле Пиери, что и супермногочлены Якоби, так как коэффициенты при разложении одинаковые.

Теорема3.8. *Справедливо следующее равенство:*

$$SJ_\lambda(x,y,\infty) = (-1)^{s(\lambda)} \operatorname{sch} E(\lambda)(x,y).$$

Основной результат данной главы заключается в следующем:

Следствие 3.6. Пусть $\lambda \in H(1,n)$, тогда

1) Если λ регулярная диаграмма, то $SJ_\lambda(x,y,t)$ не зависит от t и

$$\operatorname{sch} L(\lambda)(x,y) = \operatorname{sch} E(\lambda)(x,y) = (-1)^{s(\lambda)} SJ_\lambda(x,y,t).$$

2) Если λ особая диаграмма, то есть $\lambda_1 - n = \lambda'_j + n - j,\ 1 \leq j \leq n$, то

$$\operatorname{sch} L(\lambda) = (-1)^{s(\lambda)} SJ_\lambda(x,y,\lambda'_j).$$

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Найдены такие условия на параметры, что при специализации получаются характеры непроходимых представлений супералгебры $\mathfrak{osp}(3|2)$;
2. Исследована связь теории представлений супергруппы $OSP(2|2n)$ и соответствующей системы КМС.
3. Использована техника трансляционных функторов для задачи специализации параметров суперполиномов Якоби;
4. Исследована комбинаторики возникающих диаграмм Юнга.;
5. Построено новое семейства полиномов зависящих от одного параметра, различные специализации которого дают характеры Эйлера, характеры проективных накрытии, характеры неприводимых модулей.

Исследования проводились, главным образом, методами теории представлений супералгебр Ли и квантовых интегрируемых систем. Результаты диссертации могут найти применение при решении аналогичных задач, то есть при решении задач, связывающих теорию представлений супералгебр Ли и квантовые интегрируемые системы.

Список работ, опубликованных автором по диссертации

1. Мовсисян Г. С., Сергеев А. Н. Операторы КМС типа $B(1,1)$ и супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 19–30. (ВАК, Web of Scince и Scopus).
2. G. S. Movsisyan, A. N. Sergeev. Supergroup $OSP(2,2n)$ and Super Jacobi polynomials.// Journal of Algebra. — 2020. — Vol. 556. P. 750–775. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.03.024 (Web of Scince и Scopus).
3. Мовсисян Г.С., Сергеев А.Н. Операторы КМС типа $B(1,1)$ и супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$ // Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённой 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина. –2016. – Вып. 8. С. 66–67.
4. Мовсисян Г.С., Сергеев А.Н. Операторы КМС типа $B(1,1)$ и супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$ // Материалы VI школы конференции «Алгебра Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». –2017. – Вып. 6. С. 52–53.
5. Мовсисян Г.С., Сергеев А.Н. Супергруппа $OSP(2,2n)$ и супермногочлены Якоби // Материалы VIII школы конференции «Алгебра Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». –2020. – Вып. 8. С. 46–47.

Мовсисян Геворг Суренович

Супералгебры Ли и интегрируемость

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук