ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СОЦИАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 512.548

**ЩУЧКИН
НИКОЛАЙ АЛЕКСЕЕВИЧ**

ПОЛУАБЕЛЕВЫ n-ГРУППЫ

по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Волгоград, 2021 г.

Содержание

Введение

В математике многие хорошо известные и широко применяемые алгебраические структуры имеют различные естественные обобщения. Так В. Дернте в 1929 году в своей статье [1] впервые обобщил определение группы и дал определение n-группы (другие названия — полиадической группы, обобщенной группы, n-арной группы), заменив бинарную операцию и ее ассоциативность и однозначную обратимость справа и слева на n-арную операцию и ее ассоциативность и обратимость на каждом месте. Так, можно считать, возникла новая область научных исследований под названием теория n-групп. К возникновению этой теории имеет отношение Э. Нетер, именно по ее инициативе В. Дернте воплотил в жизнь идею обобщения определения группы и опубликовал выше указанную статью, которая является частью его диссертации.

По-настоящему фундаментальную роль в развитии теории n-групп сыграла работа Э. Поста [2], которая вышла в 1940 году. Именно в этой работе были получены важные результаты и предложены основополагающие идеи развития теории n-групп. Интересные и важные результаты по n-группам были опубликованы в работах Сушкевича А.К. [3], Бурбаки Н. [4], Брака Р. [5], Глускина Л. М. [6], Хоссу М. [7]. Во всех выше указанных работах прослеживается тесная взаимосвязь между группами и n-группами. А значит, богатая и хорошо изученная теория групп помогает успешно изучать свойства n-групп. Среди алгебраистов значительно возрос интерес к n-группам после выхода в свет работ А.Г. Куроша [16] и В.А. Артамонова [17], в которые были включены разделы, посвященные n-группам. Большой вклад в развитие теории n-групп внесли польские алгебраисты Глазек К., Глейхгевихт Б., Дудек В. и другие. Отметим наиболее интересные работы этих ученых: [8], [9], [10]. Систематизировали и оформили теорию n-групп в единое целое в своих монографиях белорусские алгебраисты Русаков С. А. [11], [12] и Гальмак А. М. [13], [14], [15].

В настоящее время теория n-групп имеет богатое содержание, хотя значительно уступает теории групп. Это связано, по видимому, с тем, что среди многих алгебраистов бытует мнение об отсутствии существенного различия между группами и n-группами при $n \geq 3$. Однако наряду с общими свойствами для групп и n-групп имеются многочисленные факты для n-групп, которые не верны для групп. Например, n-группа разбивается на смежные классы по подгруппе (как и группа), однако среди этих смежных классов может быть более одна подгруппы. Другой пример: среди всех классов конгруэнции на n-группе может отсутствовать подгруппа.

Одной из главных задач теории n-групп при $n \geq 3$ является изучение свойств, которые не выполнены в теории групп. Так, например, в [19] установлено, что при $n \geq 6$ не все подгруппы свободной n-группы являются свободными. Однако среди основных направлений развития теории n-групп можно выделить изучение свойств n-групп ($n \geq 2$), которые при $n = 2$ являются хорошо известными в теории групп. Так, например, Э. Пост в своей работе [2] доказал n-арный аналог теоремы Силова, который устанавливает существование и сопряженность в конечной n-группе силовских подгрупп в случае, когда индекс этих подгрупп взаимно прост с $n-1$. Кроме того, в [2] изучались n-арные подстановки как последовательности $n-1$ обычных подстановок, а в [23] доказан n-арный аналог теоремы Кэли, в котором роль симметрической группы играет n-группа n-арных подстановок. В [23] также доказано представление n-группы n-арными автоморфизмами подходящей последовательности однотипных универсальных алгебр (n-арный аналог теоремы Биркгофа для групп). В работах [24], [52], [53], [54] изучались полуциклические n-группы, которые являются n-арными аналогами циклических групп. В [25] (предложение 5, стр. 31) доказано существование разложения конечно порожденной абелевой n-группы (определение абелевой n-группы смотри ниже) в прямое произведение полуциклических n-групп, а в работе [55] приведено полное описание строения конечных абелевых n-групп в виде прямого произведения примарных полуциклических n-групп с точностью до изоморфизма. Кроме того, изучено строение свободной абелевой n-группы в виде прямого произведения соответствующих полуциклических n-групп (следствие 1, [56]).

Хотелось бы еще отметить, что при переходе от группы к n-группе и построении теории n-групп возникают несколько обобщений одного и того же группового понятия. Так в самом начале изучения n-групп n-арными аналогами групповой единицы являлись нейтральная последовательность элементов n-группы, единица и идемпотент n-группы. Коммутативность (или перестановочность элементов) в теории n-групп также имеет несколько обобщений групповой коммутативности. Основным обобщением групповой коммутативности, которое предложил Э. Пост в своей работе [2], можно считать перестановочность двух элементов при действии n-арной операции, стоящих на первом и m-ном месте, где $m-1$ делит $n-1$. В этом случае n-группа называется m-полуабелевой. Если $m=2$, то n-группу называют абелевой, т.е. в этом случае переставлять можно первые два элемента. Если $m=n$, то n-группу называют полуабелевой, т.е. переставлять можно крайние элементы. При $n>2$ все эти типы n-групп будут разными, а при $n=2$ получим одно и то же определение абелевой группы.

Теория n-групп относится к многочисленным алгебраическим теориям, которые являются как классическими объектами общей алгебры, так и разделами теории универсальных алгебр. Необходимость развивать такие теории отмечал А.Г. Курош (см. [16]). Любая хорошо развитая теория имеет многочисленные научные публикации по этой теории, которые способствуют привлечению молодых и зрелых ученых к изучению данной теории. Выражаю надежду, что эта диссертация также внесет определенный научный вклад в развитие теории n-групп.

Общая характеристика работы

Связь работы с крупными научными программами и темами

Диссертация выполнена в рамках следующих государственных бюджетных тем:

"Алгебраические системы и связанные с ними структуры" кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета. Тема входила в план важнейших научно исследовательских тем в области естествознания. Эта тема утверждена решением президиума РАН (номер регистрации 01.2.00100375). Тема выполнялась с 01.01.2001 г. по 31.12.2010 г.;

"Унарные алгебры и родственные им алгебраические структуры" кафедры высшей математики и физики Волгоградского государственного социально-педагогического университета. Тема входила в план важнейших научно исследовательских тем в области естествознания. Эта тема утверждена решением президиума РАН (номер регистрации 01201068024). Тема выполняется с 01.01.2011 г. по настоящее время.

Цели и задачи исследования

Целью диссертации является изучение строения алгебр в классе полуабелевых n-групп и эндоморфизмов этих алгебр. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие задачи:

— определить полуциклическую n-группу как n-арный аналог циклической группы и разработать метод построения различных видов полуциклических n-групп с точностью до изоморфизма;

— развить теорию конечно порожденных полуабелевых n-групп и описать полностью строение конечно порожденных абелевых n-групп;

— исследовать строение свободных абелевых n-групп, свободных полуабелевых n-групп и свободных m-полуабелевых n-групп;

— построить n-группу гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу и найти (n,2)-почтикольца, изоморфные (n,2)-почтикольцам эндоморфизмов полуциклических и коциклических n-групп;

— найти n-группы, изоморфные n-группам гомоморфизмов из полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу.

Объектом исследования является класс n-групп.

Предметами исследования являются класс полуабелевых n-групп и его подклассы полуциклических, m-полуабелевых и абелевых n-групп.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации разработаны новые методы исследования полуабелевых n-групп и их различных видов: полуциклических, абелевых и m-полуабелевых n-групп. На основе эти методов установлены новые факты, закономерности и свойства, включающие в себя:

1) исследование строения полуциклических n-групп:

— описание конечных абелевых и не абелевых, бесконечных абелевых и не абелевых полуциклических n-групп, теоремы 2, 3 [52];

— определение коциклической n-группы и описание строения этой n-группы с точностью до изоморфизма, предложение 2, теорема 2 [67];

— описание строения m-полуциклических n-групп, предложение 4.1, теоремы 4.1, 4.2 [85];

2) исследование строения конечных и конечно порожденных абелевых и полуабевых n-групп:

— описание с точностью до изоморфизма всех конечных абелевых n-групп, теорема 6, [55];

— отыскание полной системы инвариантов для конечно порожденных абелевых n-групп, теоремы 86, 87;

— исследование строения конечных полуабелевых n-групп, теоремы 2, 3, 4, 5, 6, 7 [87];

— описание строения конечно порожденных полуабелевых n-групп, теоремы 2, 3, 4, [88];

3) построение свободных алгебр в классе абелевых полуциклических n-групп, теоремы 2, 4, 5 [77], в классе абелевых n-групп, теоремы 1, 2, 3 [56], в классе полуабелевых n-групп, теорема 4.3 [75], и в классе m-полуабелевых n-групп, теорема 5 [76];

4) описание (n,2)-почтиколец эндоморфизмов полуциклических n-групп, теоремы 2, 3, 4, 5 [73], и коциклических n-групп, предложения 3, 4 [67];

5) описание n-группы гомоморфизмов из полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу, теоремы 3, 4 [74], теоремы 122, 123.

Личный вклад соискателя

Все результаты диссертации и разработанные в ней методы принадлежат соискателю, получены им самостоятельно. В совместных статьях [82], [77], [78], [79], [80] участие соискателя составляет 70%, а в совместных статьях [54], [63], [69], [70], [85] участие соискателя составляет 50%.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

— на научных семинарах кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета;

— на Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию Л.А. Шеметкова: классы групп, алгебр и их приложения — Гомель, Белорусь, ГГУ им. Ф. Скорины, 2007;

— на Международной алгебраической конференции, посвященной 100 - летию А.Г. Куроша. - Москва. МГУ. 2008;

— на Международной научной конференции, посвященной 100-летию В.В. Вагнера: современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. - Саратов. СГУ. 2008;

— на VIII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. 2011;

— на X Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Волгоград. 2012;

— на XI Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. 2013;

— на XII Международной конференции, посвященной 80-летию профессора В.Н. Латышева "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Тула. 2014;

— на XIV Международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. 2016;

— на VIII Международной научно-технической конференции ”Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование” в рамках Международного научного форума ДНР, ДонНТУ, Донецк, май 2017;

— на V Международной научно-технической конференции "Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях". ДонНТУ, Донецк, ноябрь 2017;

— на всероссийской конференции ”Алгебра и теория алгоритмов”, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук. ИвГУ, Иваново, март 2018;

— на Международной алгебраической конференции, посвященной 110 - летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша. Москва, МГУ. май 2018;

— на XV международной конференции, посвященная 100-летию со дня рождения Н.М. Коробова "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения". Тула, 28-31 мая 2018 г.;

— на XVI Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула, 13-18 мая 2019 г.;

— на X Международной научно-технической конференции в рамках V Международного научного форума Донецкой Народной Республики. ДонНТУ, Донецк, 22-24 мая 2019 г.;

— на Международной научной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань, Казанский государственный университет, 24-28 июня 2019 г.;

— на XI Международной научно-технической конференции в рамках VI Международного научного форума Донецкой Народной Республики. ДонНТУ, Донецк, 27-28 мая 2020 г.

Опубликованность результатов

Основные результаты диссертации опубликованы в 1 монографии, в 38 статьях в журналах и 25 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов составляет 66,0 авторских листа, в том числе в монографии — 23,0; в статьях в научных журналах — 38,7; в тезисах докладов конференций — 4,3.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, шести глав основной части, заключения и библиографического списка в порядке цитирования в количестве 50 наименований использованных источников и 64 наименований публикаций соискателя.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Артамонову Вячеславу Александровичу за консультации и внимание, оказанное им при написании данной диссертации.

1 Основные сведения из теории n-групп

В теории n-групп многие групповые определения и конструкции имеют несколько различных обобщений. В этой главе мы вначале определим n-группу, а затем познакомимся с основными n-арными аналогами групповых единицы и обратимости. Далее, зная, что для любого элемента g из n-группы имеется ему косой элемент $\bar{g}$, мы для каждого натурального числа k обозначим через $\bar{g}^{(k)}$ косой элемент к элементу $\bar{g}^{(k-1)}$, где $\bar{g}^{(0)} = g$. Для полученного отображения $^{-\,(k)} : g \to \bar{g}^{(k)}$ мы найдем тождество, которое описывает многообразие n-групп, в которых это отображение является эндоморфизмом.

1.1 Определение n-группы

На непустом множестве G рассмотрим n-арную операцию f, где $n \geq 2$. Алгебру $\langle G, f\rangle$ назовем n-группоидом (или полиадическим группоидом) . При $n = 2$ имеем обычный группоид. При $n = 3$ n-группоид называют тернарным группоидом. При действии n-арной операции f для сокращения записи используют стандартные обозначения

$$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+s}, x_{k+s+1}, \ldots, x_n) = f(x_1^k, \overset{(s)}{x}, x_{k+s+1}^n),$$

где $x_{k+1} = \ldots = x_{k+s} = x$ (x_i^j - пустой символ при $i > j$, также $\overset{(0)}{x}$ - пустой символ).

Если в n-группоиде $\langle G, f\rangle$ выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1^n), a_{n+1}^{2n-1}) = f(a_1, f(a_2^{n+1}), a_{n+2}^{2n-1}) = \ldots = f(a_1^{n-1}, f(a_n^{2n-1})), \tag{1}$$

то его называют n-полугруппой (или полиадической полугруппой). При $n = 2$ имеем обычную полугруппу. Для $n = 3$ равенства (1) примут вид

$$f(f(a_1, a_2, a_3), a_4, a_5) = f(a_1, f(a_2, a_3, a_4), a_5) = f(a_1, a_2, f(a_3, a_4, a_5)), \tag{2}$$

а тернарный группоид $\langle G, f\rangle$ с законами (2) называют тернарной полугруппой.

Для удобства в n-полугруппе $\langle G, f\rangle$, используя закон (1), определяют новую $(k(n-1)+1)$-арную операцию $f_{(k)}$ по правилу

$$f_{(k)}(x_1^{k(n-1)+1}) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k \text{ раз}}(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}) \ldots), x_{(k-1)(n-1)+2}^{k(n-1)+1}).$$

Бинарную группу традиционно определяют как полугруппу G, в которой разрешимы и имеют единственные решения уравнения $a \cdot x = b$ и $y \cdot a = b$ для любых $a, b \in G$. Обобщая это определение, мы получим определение n-группы. Если в n-полугруппе $\langle G, f\rangle$ разрешимы и имеют единственные решения уравнения

$$f(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^n) = b \tag{3}$$

относительно переменных x_i, где $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b$ — любые элементы из G, $i = 1, \ldots, n$, то ее называют n-группой (или полиадической группой) [1]. При $n = 2$ имеем определение обычной (бинарной) группы. Нас интересуют случаи, когда $n > 2$. Для $n = 3$ уравнения (3) имеют вид

$$f(x_1, a_2, a_3) = b, f(a_1, x_2, a_3) = b, f(a_1, a_2, x_3) = b, \tag{4}$$

а тернарную полугруппу $\langle G, f\rangle$, в которой разрешимы и имеют единственные решения уравнения (4) относительно переменных x_1, x_2 и x_3 соответственно, где a_1, a_2, a_3, b — любые элементы из G, называют тернарной группой.

Имеются и другие определения n-группы, эквивалентные выше указанному определению. Например, такое:

Если в n-полугруппе $\langle G, f\rangle$ разрешимы уравнения

$$f(x, a_1^{n-1}) = b \quad \text{и} \quad f(a_1^{n-1}, y) = b \tag{5}$$

для любых $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in G$, то она называется n-группой [2].

Другие определения n-группы, эквивалентные выше указанным определениям, можно найти, например, в работах [2], [15].

В следующей теореме мы приведем еще одно определение n-группы, которое является обобщением другого определения группы, а именно: полугруппа G является группой тогда и только тогда, когда в ней существует левая единица e (т.е. такой элемент e, что $ex = x$ для любого элемента $x \in G$) и для любого элемента a из G существует в G левый ему обратный элемент a^{-1} (т.е. такой элемент a^{-1}, что $a^{-1}a = e$).

В n-группе $\langle G, f\rangle$ определим одну $(n-2)$-арную операцию t и одну $(n-1)$-арную операцию g следующим образом. Для фиксированного элемента a и произвольно выбранных элементов $a_1, \ldots, a_{n-2}$ из G решение уравнения

$$f(x, a_1^{n-2}, a) = a$$

обозначим через $t(a_1, \ldots, a_{n-2}) = e$. Для любого элемента $b \in G$ имеем

$$f(b, a_1^{n-2}, f(e, a_1^{n-2}, a)) = f(b, a_1^{n-2}, a)$$

или, используя (1), $f(f(b, a_1^{n-2}, e), a_1^{n-2}, a) = f(b, a_1^{n-2}, a)$. В силу единственности решения уравнения $f(x, a_1^{n-2}, a) = f(b, a_1^{n-2}, a)$ имеем равенство

$$f(b, a_1^{n-2}, e) = b. \tag{6}$$

Таким образом, в n-группе $\langle G, f\rangle$ имеем $(n-2)$-арную операцию t, которая удовлетворяет тождеству

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2})) = x_{n-1}. \tag{7}$$

Далее, для этих же элементов a и $a_1. \ldots, a_{n-2}$ решение уравнения

$$f(a, a_1^{n-2}, x) = a$$

обозначим через e'. Тогда для любого элемента $c \in G$ имеем

$$f(f(a, a_1^{n-2}, e'), a_1^{n-2}, c) = f(a, a_1^{n-2}, c)$$

или, используя (1), $f(a, a_1^{n-2}, f(e', a_1^{n-2}, c)) = f(a, a_1^{n-2}, c)$. В силу единственности решения уравнения $f(a, a_1^{n-2}, x) = f(a, a_1^{n-2}, c)$ имеем равенство

$$f(e', a_1^{n-2}, c) = c. \tag{8}$$

Итак, из (8) и (6) имеем $e = f(e', a_1^{n-2}, e) = e'$.

Таким образом, $t(a_1, \dots, a_{n-2}) = e'$, т.е. в n-группе $\langle G, f\rangle$ $(n-2)$-арная операция t удовлетворяет еще одному тождеству

$$f(t(x_1^{n-2}), x_1^{n-1}) = x_{n-1}. \tag{9}$$

Вновь для фиксированного элемента a n-группы $\langle G, f\rangle$ и произвольных элементов $a_1 \dots, a_{n-2}$ из G решение уравнения $f(x, a_1^{n-2}, a) = t(a_1^{n-2})$ обозначим $g(a_1, \dots, a_{n-2}, a) = b$. Тогда, по тождествам (9) и (7) верны равенства $f(t(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, a) = a$ и $f(a, a_1^{n-2}, t(a_1^{n-2})) = a$ соответственно, а значит, верно $f(a, a_1^{n-2}, f(b, a_1^{n-2}, a)) = f(t(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, a)$ или, используя (1), $f(f(a, a_1^{n-2}, b), a_1^{n-2}, a) = f(t(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, a)$. В силу единственности решения уравнения $f(x, a_1^{n-2}, a) = a$ имеем равенство $f(a, a_1^{n-2}, b) = t(a_1^{n-2})$.

Итак, в n-группе $\langle G, f\rangle$ мы имеем еще одну $(n-1)$-арную операцию g, которая удовлетворяет тождествам

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})) = t(x_1^{n-2}), \tag{10}$$

$$f(g(x_1^{n-1}), x_1^{n-1}) = t(x_1^{n-2}). \tag{11}$$

Теорема 1 *([91]-A) Любая n-полугруппа $\langle G, f\rangle$ является n-группой тогда и только тогда, когда в ней существуют $(n-2)$-арная операция t, удовлетворяющая тождеству (9), и $(n-1)$-арная операция g, удовлетворяющая тождеству (11).*

Доказательство. Необходимость доказана выше. Докажем достаточность. Вначале докажем выполнимость тождества (7). Для этого в тождество (9) вместо переменной x_{n-1} ставим левую часть тождества (7), получим

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2})) = f(t(x_1^{n-2}), x_1^{n-2}, f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2}))),$$

после этого в тождество (11) вместо переменной x_{n-1} ставим значение $g(x_1^{n-1})$, получим

$$t(x_1^{n-2}) = f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})),$$

далее, в предпоследнее равенство ставим вместо $t(x_1^{n-2})$ его выражение из последнего равенства, получим

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2})) =$$
$$= f(f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2}))).$$

В последнем равенстве сначала меняем порядок действия n-арной операции f с помощью закона (1), а затем применяем тождества (11), (9) и еще раз (11) в указанном порядке:

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2})) =$$
$$= f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, f(f(g(x_1^{n-1}), x_1^{n-1}), x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2}))) =$$
$$= f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, f(t(x_1^{n-2}), x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2}))) =$$
$$= f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2})) =$$
$$= f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, f(g(x_1^{n-1}), x_1^{n-1})).$$

Затем в последнем выражении меняем опять порядок действия n-арной операции f с помощью закона (1) и применяем тождества (11) и (9), получим

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2})) =$$

$$= f(f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-1})) =$$
$$= f(t(x_1^{n-2}), x_1^{n-1})) = x_{n-1}.$$

Итак, мы доказали выполнимость тождества (7).

Теперь докажем выполнимость тождества (10). Поступаем также, как и в доказательстве тождества (7). В тождество (9) вместо переменной x_{n-1} ставим левую часть тождества (10), получим

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})) = f(t(x_1^{n-2}), x_1^{n-2}, f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1}))),$$

после этого находим выражение $t(x_1^{n-2})$, подставляя в тождество (11) вместо переменной x_{n-1} значение $g(x_1^{n-1})$, далее, в последнее равенство ставим вместо $t(x_1^{n-2})$ его найденное выражение, в итоге получим

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})) =$$
$$= f(f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1}))).$$

В последнем равенстве сначала меняем порядок действия n-арной операции f с помощью закона (1), а затем применяем тождества (11), (9) и еще раз (11) в указанном порядке:

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})) =$$
$$= f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, f(f(g(x_1^{n-1}), x_1^{n-1}), x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1}))) =$$
$$= f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, f(t(x_1^{n-2}), x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1}))) =$$
$$= f(g(x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})), x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})) = t(x_1^{n-2}).$$

Доказано тождество (10).

Рассмотрим теперь уравнения из (5), где $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ — любые элементы из G. Решением второго уравнения будет элемент $f(g(a_2^{n-1}, a_1), a_2^{n-1}, b)$. Действительно, применяя последовательно тождества (1), (10) и (9), имеем

$$f(a_1^{n-1}, f(g(a_2^{n-1}, a_1), a_2^{n-1}, b)) =$$
$$= f(f(a_1^{n-1}, g(a_2^{n-1}, a_1)), a_2^{n-1}, b) = f(t(a_2^{n-1}), a_2^{n-1}, b) = b.$$

Решением первого уравнения из (5) будет элемент $f(b, a_1^{n-2}, g(a_1^{n-1}))$. Действительно, применяя последовательно тождества (1), (11) и (7), имеем

$$f(f(b, a_1^{n-2}, g(a_1^{n-1})), a_1^{n-1}) =$$
$$= f(b, a_1^{n-2}, f(g(a_1^{n-1}), a_1^{n-1})) = f(b, a_1^{n-2}, t(a_1^{n-2})) = b.$$

Теорема доказана.

Бинарную группу можно определить с помощью правой единицы и правого обратного элемента. Обобщая это определение, получим еще одно определение n-группы, сформулированное в следующей теореме, которая доказывается аналогично теореме 1.

Теорема 2 *([91]-А) Любая n-полугруппа $\langle G, f\rangle$ является n-группой тогда и только тогда, когда в ней существуют $(n-2)$-арная операция t, удовлетворяющая тождеству (7) и $(n-1)$-арная операция g, удовлетворяющая тождеству (10).*

Наконец, бинарную группу можно определить с помощью двусторонней единицы и двустороннего обратного элемента. Обобщая это определение, получим еще одно определение n-группы, сформулированное в следующей теореме, которая следует из теорем 1 и 2.

Теорема 3 *([91]-A) Любая n-полугруппа $\langle G, f\rangle$ является n-группой тогда и только тогда, когда в ней существуют $(n-2)$-арная операция t, удовлетворяющая тождествам*

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, t(x_1^{n-2})) = f(t(x_1^{n-2}), x_1^{n-1}) = x_{n-1}$$

и $(n-1)$-арная операция g, удовлетворяющая тождествам

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, g(x_1^{n-1})) = f(g(x_1^{n-1}), x_1^{n-1}) = t(x_1^{n-2}).$$

Результаты, аналогичные теоремам 1 – 3, можно найти в работе [26].

Рассмотрим некоторые примеры n-групп. Непосредственно на бинарной группе можно задать n-группу:

Пример 1 *[1] Пусть G — группа с бинарной операцией $\cdot$. На G определим n-арную операцию f по правилу*

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$. Очевидно, $\langle G, f\rangle$ — n-группа.

Построенную в примере 1 n-группу называют производной от группы G. Имеются и другие примеры n-групп, построенных на группах. Смотри, например, [1], [14].

Построим пример n-группы без участия группы:

Пример 2 *[27] Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ – множества одинаковой мощности ($n \geq 2$). Рассмотрим объединение $M = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i$ этих множеств. Биективное отображение α множества M в себя называют n-арной подстановкой , если действие α на каждом подмножестве M_i удовлетворяет условию: $\alpha(M_i) = M_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, n-2$ и $\alpha(M_{n-1}) = M_1$. Заметим, что для $n = 2$ мы получим обычную (бинарную) подстановку. Таким образом, n-арная подстановка является обобщением бинарной подстановки (n-арный аналог подстановки).*

Через $S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1})$ обозначим множество всех n-арных подстановок множества M. На $S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1})$ определим n-арную операцию f по правилу:

$$\text{если } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}), \text{ то } f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n,$$

где $\circ$ – композиция отображений. Очевидно, результат операции f является n-арной подстановкой и f подчиняется обобщенному закону ассоциативности (1), так как композиция отображений $\circ$ ассоциативна. Значит, $\langle S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}), f\rangle$ – n-полугруппа.

На $S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1})$ определим $(n-2)$-арную операцию t по правилу:

$$\text{если } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2} \in S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}), \text{ то } t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}) = \alpha_{n-2}^{-1} \circ \ldots \circ \alpha_1^{-1}.$$

Не сложно проверить, что результат операции t является n-арной подстановкой. Очевидно, операция t удовлетворяет тождеству (9).

На $S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1})$ определим $(n-1)$-арную операцию g по правилу:

$$\text{если } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}),$$
$$\text{то } g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = \alpha_{n-2}^{-1} \circ \ldots \circ \alpha_1^{-1} \circ \alpha_{n-1}^{-1} \circ \alpha_{n-2}^{-1} \circ \ldots \circ \alpha_1^{-1}.$$

Не сложно проверить, что результат операции g также является n-арной подстановкой. Очевидно, операция g удовлетворяет тождеству (11). Таким образом, согласно теореме 1, $\langle S(M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}), f\rangle$ – n-группа.

1.2 Аналоги групповых единицы и обратимости

Мы уже встречались с n-арными аналогами групповых единицы и обратимости в параграфе 1.1, таковым является $(n-2)$-арная операция t и $(n-1)$-арная операция g соответственно. В теории n-групп рассматривают и другие аналоги этих двух групповых понятий.

Косой элемент, его свойства. В n-группе $\langle G, f\rangle$ для любого элемента a решение уравнения $f(\overset{(n-1)}{a}, x) = a$ обозначают через $\bar{a}$ и называют косым элементом для a. Отметим свойства косого элемента, которые будут использоваться нами в дальнейшем.

Свойство 1 *[16] В n-группе $\langle G, f\rangle$ для любого индекса $i = 1, 2, \ldots, n$ и любого элемента a верно равенство $f(\overset{(i-1)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-i)}{a}) = a$.*

Свойство 2 *[16] В n-группе $\langle G, f\rangle$ для любого индекса $i = 0, 1, \ldots, n-2$ и любых элементов a, b верны равенства*

$$f(b, \overset{(i)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-i-2)}{a}) = b \quad \textit{и} \quad f(\overset{(i)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-i-2)}{a}, b) = b.$$

Определение косого элемента задает в n-группе отображение $^{-} : x \to \bar{x}$. С помощью этого отображения можно определить n-группу как алгебру $\langle G, f, ^{-}\rangle$ типа $(n, 1)$, т.е. верно

Свойство 3 *[18] Любая n-полугруппа $\langle G, f\rangle$ является n-группой тогда и только тогда, когда в ней существует унарная операция $^{-}$, для которой выполняются тождества $f(y, \overset{(n-3)}{x}, \bar{x}, x) = y$ и $f(x, \bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, y) = y$.*

Таким образом, унарная операция $x \to \bar{x}$ в n-группах определяет некоторый аналог обратимости в бинарных группах [1]. Продолжая эту аналогию, отметим еще некоторые свойства косого элемента .

Свойство 4 *(Лемма 2.3 из [13]) В n-группе верны тождества*

$$\overline{f(x_1^n)} = f_{(n^2-3n+1)}(\underbrace{\overset{(n-3)}{x_n}, \bar{x}_n, \ldots, \overset{(n-3)}{x_1}, \bar{x}_1, \ldots, \overset{(n-3)}{x_n}, \bar{x}_n, \ldots, \overset{(n-3)}{x_1}, \bar{x}_1}_{n-2 \text{ раза}}).$$

$$\bar{\bar{x}} = f_{(n-3)}(\overset{((n-2)^2)}{x}).$$

Свойство 5 *([91]-A) В n-группе верны тождества*

$$t(\overset{(n-2)}{x}) = \bar{x} \quad \textit{и} \quad t(\overset{(i)}{x}, \bar{x}, \overset{(n-i-3)}{x}) = x,$$

где t – $(n-2)$-арная операция из параграфа 1.1, $i = 0, 1, \ldots, n-3$.

[1] последовательности $\overset{(n-3)}{x}, \bar{x}$ и $\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}$ является n-арным аналогом обратного элемента для x (смотри ниже).

Доказательство. В силу верности тождества (7) при $x_1 = \ldots = x_{n-1} = x$ и однозначной разрешимости уравнения $f(\overset{(n-1)}{x}, y) = x$ имеем выполнимость первого тождества. В силу верности тождества (7) при $x_1 = \ldots = x_i = x_{i+2} = \ldots = x_{n-1} = x$, $x_{i+1} = \bar{x}$ и однозначной разрешимости уравнения $f(\overset{(i+1)}{x}, \bar{x}, \overset{(n-i-3)}{x}, y) = x$ имеем выполнимость второго тождества. Свойство доказано.

Свойство 6 *([91]-A) В n-группе верно тождество*

$$t(x_1^{n-2}) = f_{(n-3)}(\overset{(n-3)}{x_{n-2}}, \bar{x}_{n-2}, \ldots, \overset{(n-3)}{x_1}, \bar{x}_1),$$

где t – $(n-2)$-арная операция из параграфа 1.1.

Доказательство. Используя тождество $f(y, \overset{(n-2)}{x}, \bar{x}) = y$ из свойства 2, получим

$$f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, f_{(n-3)}(\overset{(n-3)}{x_{n-2}}, \bar{x}_{n-2}, \ldots, \overset{(n-3)}{x_1}, \bar{x}_1)) =$$

$$= f_{(n-2)}(x_{n-1}, x_1^{n-3}, \overset{(n-2)}{x_{n-2}}, \bar{x}_{n-2}, \overset{(n-3)}{x_{n-3}}, \bar{x}_{n-3}, \ldots, \overset{(n-3)}{x_1}, \bar{x}_1) =$$

$$= f_{(n-3)}(x_{n-1}, x_1^{n-3}, \overset{(n-3)}{x_{n-3}}, \bar{x}_{n-3}, \ldots, \overset{(n-3)}{x_1}, \bar{x}_1) = \ldots = f(x_{n-1}, \overset{(n-2)}{x_1}, \bar{x}_1) = x_{n-1}.$$

В силу однозначной разрешимости уравнения $f(x_{n-1}, x_1^{n-2}, y) = x_{n-1}$ и с учетом тождества (7) имеем требуемое равенство. Свойство доказано.

Как мы видим в перечисленных свойствах, унарная операция $x \to \bar{x}$ в n-группах имеет некоторое сходство с обратимостью в бинарных группах. Но имеются и существенные отличия между этими отображениями. Например, если обратимость в бинарных группах является биективным отображением, то отображение $x \to \bar{x}$ в n-группах не всегда является биективным. Более того, имеются n-группы, в которых выполнено тождество $\bar{x} = \bar{y}$. Например, рассмотрим 5-группу $\langle (a), f \rangle$, производную от циклической группы (a) третьего порядка с бинарной операцией $+$, т.е. операция f действует по правилу $f(s_1a, s_2a, s_3a, s_4a, s_5a) = (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5)a$ (см. пример 1). Для любого $s = 0, 1, 2$ уравнение $f(\overset{(4)}{sa}, x) = sa$ равносильно уравнению $4sa + x = sa$. Решая в группе (a) последнее уравнение, получим $x = 0$. Значит, для любого $sa \in (a)$, имеем $\overline{sa} = 0$, т.е. в 5-группе $\langle (a), f \rangle$ выполнено тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Заметим, что если в тернарной группе $\langle G, f \rangle$ выполнено тождество $\bar{x} = \bar{y}$, то она является одноэлементной. Действительно, для любых $a, b \in G$, используя свойство 2, получим

$$f(b, b, \bar{b}) = b = f(b, a, \bar{a}) = f(b, a, \bar{b}).$$

В силу однозначной разрешимости уравнения $f(b, x, \bar{b}) = b$ имеем $a = b$, т.е. $\langle G, f \rangle$ — одноэлементная тернарная группа.

Позже в предложении 10 мы укажем все n-группы, в которых выполнено тождество $\bar{x} = \bar{y}$, а здесь мы перечислим условия, равносильные выполнимости тождеству $\bar{x} = \bar{y}$:

Свойство 7 *(Теорема 2, [57]-A) В n-группе $\langle G, f \rangle$ $(n \geq 4)$ следующие условия равносильны:*

1) в $\langle G, f \rangle$ выполнено тождество $\bar{x} = \bar{y}$;

2) существует элемент $a \in G$ такой, что $f(\overset{(n-2)}{x}, a, a) = f(\overset{(n-2)}{y}, a, a)$ для любых элементов $x, y \in G$.

3) существует элемент $a \in G$ такой, что $f(a, \overset{(n-2)}{x}, a) = f(a, \overset{(n-2)}{y}, a)$ для любых элементов $x, y \in G$;

4) существует элемент $a \in G$ такой, что $f(a, a, \overset{(n-2)}{x}) = f(a, a, \overset{(n-2)}{y})$ для любых элементов $x, y \in G$;

Доказательство. (1) $\to$ (2). Выполнимость тождества $\bar{x} = \bar{y}$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ равносильно существованию такого элемента $a \in G$, что $a = \bar{x}$ для любого элемента $x \in G$. Тогда, используя свойство 2, для любых элементтов $x, y \in G$ получим

$$f(\overset{(n-2)}{x}, a, a) = f(\overset{(n-2)}{x}, \bar{x}, a) = a = f(\overset{(n-2)}{y}, \bar{y}, a) = f(\overset{(n-2)}{y}, a, a).$$

(2) $\to$ (3). Используя обобщенный закон ассоциативности (1) и определение косого элемента, для найденного элемента $a \in G$ и любых элементов $x, y \in G$ получим

$$f(a, \overset{(n-2)}{x}, a) = f(a, \overset{(n-2)}{x}, f(\overset{(n-1)}{a}, \bar{a})) = f(a, f(\overset{(n-2)}{x}, a, a), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}) =$$

$$= f(a, f(\overset{(n-2)}{y}, a, a), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}) = f(a, \overset{(n-2)}{x}, f(\overset{(n-1)}{a}, \bar{a})) = f(a, \overset{(n-2)}{y}, a).$$

(3) $\to$ (4). Используя вновь обобщенный закон ассоциативности (1) и свойство 2, для найденного элемента $a \in G$ и любых элементов $x, y \in G$ получим

$$f(a, a, \overset{(n-2)}{x}) = f(f(a, a, \overset{(n-2)}{x}), \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}) = f(a, f(a, \overset{(n-2)}{x}, a), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}) =$$

$$= f(a, f(a, \overset{(n-2)}{y}, a), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}) = f(f(a, a, \overset{(n-2)}{y}), \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}) = f(a, a, \overset{(n-2)}{y}).$$

(4) $\to$ (1). Для найденного элемента $a \in G$ покажем, что $\bar{a} = \bar{x}$ для любого элемента $x \in G$. Используя обобщенный закон ассоциативности (1) и свойства 1, 2, получим

$$f(a, \bar{x}, \overset{(n-2)}{x}) = a = f(a, \bar{a}, \overset{(n-2)}{a}) = f(a, \bar{a}, f(\bar{a}, \overset{(n-1)}{a}), \overset{(n-3)}{a}) =$$

$$= f(a, \bar{a}, \bar{a}, \overset{(n-4)}{a}, f(a, a, \overset{(n-2)}{a})) = f(a, \bar{a}, \bar{a}, \overset{(n-4)}{a}, f(a, a, \overset{(n-2)}{x}) =$$

$$= f(a, f(\bar{a}, \bar{a}, \overset{(n-2)}{a}), \overset{(n-2)}{x}) = f(a, \bar{a}, \overset{(n-2)}{x}).$$

В силу однозначной разрешимости уравнения $f(a, y, \overset{(n-2)}{x}) = a$ имеем $\bar{a} = \bar{x}$. Значит, в $\langle G, f\rangle$ выполнено тождество $\bar{x} = \bar{y}$. Свойство доказано.

Аналоги групповой единицы. В теории n-групп рассматривают еще три аналога единицы. Это единица, идемпотент и нейтральная последовательность.

Элемент e из n-группы $\langle G, f\rangle$ называется единицей, если $f(\overset{(i-1)}{e}, a, \overset{(n-i)}{e}) = a$ для любого элемента $a \in G$ и любого индекса $i = 1, 2, \ldots, n$. В отличие от единицы в группе, единица в n-группе может не существовать, а если она есть, то их может быть больше, чем одна (смотри дальше). Очевидно, в n-группе единица e (если она есть) удовлетворяет свойствам 1) $\bar{e} = e$; 2) $t(\overset{(n-2)}{e}) = e$.

Предложение 1 *[1] В n-группе $\langle G, f\rangle$ существует единица тогда и только тогда, когда она является производной от некоторой группы.*

Одним из характерных свойств единицы является ее перестановочность с любым рядом стоящим элементом при действии n-арной операции, т.е. верно

Предложение 2 *([2]) В n-группе $\langle G, f\rangle$ единица e удовлетворяет свойству: для любых элементов $a_1, \ldots, a_{n-2}, b \in G$ верны равенства*

$$f(a_1^{i-1}, e, b, a_i^{n-2}) = f(a_1^{i-1}, b, e, a_i^{n-2})$$

для всех индексов $i = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Используя определение единицы и обобщенный закон ассоциативности (1), получим

$$f(a_1^{i-1}, e, b, a_i^{n-2}) = f(a_1^{i-1}, e, f(\overset{(i-1)}{e}, b, \overset{(n-i)}{e}), a_i^{n-2}) =$$

$$= f(a_1^{i-1}, f(\overset{(i)}{e}, b, \overset{(n-i-1)}{e}), e, a_i^{n-2}) = f(a_1^{i-1}, b, e, a_i^{n-2}).$$

Предложение доказано.

Элемент a n-группы $\langle G, f\rangle$ называется идемпотентом, если $f(\overset{(n)}{a}) = a$. Очевидно, в n-группе $\langle G, f\rangle$ идемпотент a (если он есть) удовлетворяет свойствам 1) $\bar{a} = a$; 2) $f(\overset{(n-1)}{a}, b) = f(b, \overset{(n-1)}{a}) = b$ для любого элемента $b \in G$.

Кроме того, единица в n-группе будет идемпотентом. Обратное утверждение неверно. Как и единица, идемпотент в n-группе может не существовать, а если он есть, то он может быть не один.

Последовательность $e_1, \ldots, e_{k(n-1)}$ $(k \geq 1)$ элементов n-группы $\langle G, f\rangle$ называется нейтральной, если для любого элемента $b \in G$ верны равенства

$$f_{(k)}(e_1^{k(n-1)}, b) = f_{(k)}(b, e_1^{k(n-1)}) = b.$$

Очевидно, в n-группе $\langle G, f\rangle$ следующие последовательности являются нейтральными:

1) $\underbrace{a, \ldots, a}_{k(n-1)}$, где a — идемпотент в $\langle G, f\rangle$;

2) $\underbrace{a, \ldots, a}_{i}, \bar{a}, \underbrace{a, \ldots, a}_{n-i-2}$ для любого индекса $i = 0, 1, \ldots, n-2$ и любого элемента $a \in G$.

Предложение 3 *([2]) Последовательность $e_1, \ldots, e_{k(n-1)}$ $(k \geq 1)$ элементов n-группы $\langle G, f\rangle$ является нейтральной тогда и только тогда, когда существует элемент $b \in G$ такой, что $f_{(k)}(e_1^{k(n-1)}, b) = b$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть в n-группе $\langle G, f\rangle$ второе условие выполнено и a — произвольный элемент из G. Так как для фиксированных элементов $c_1, \ldots, c_{n-2} \in G$ имеем

$$f(f_{(k)}(a, e_1^{k(n-1)}), b, c_1^{n-2}) = f(a, f_{(k)}(e_1^{k(n-1)}, b), c_1^{n-2}) = f(a, b, c_1^{n-2}),$$

то, в силу однозначной разрешимости уравнения $f(x,b,c_1^{n-2}) = f(a,b,c_1^{n-2})$, получим равенство $f_{(k)}(a,e_1^{k(n-1)}) = a$. Так как

$$f(b,f_{(k)}(e_1^{k(n-1)},a),c_1^{n-2}) = f(f_{(k)}(b,e_1^{k(n-1)}),a,c_1^{n-2}) = f(b,a,c_1^{n-2}),$$

то, в силу однозначной разрешимости уравнения $f(b,x,c_1^{n-2}) = f(b,a,c_1^{n-2})$, получим равенство $f_{(k)}(e_1^{k(n-1)},a) = a$. Предложение доказано.

Аналогично доказывается

Предложение 4 *(Предложение 7, [51]-A, c. 25) Последовательность $e_1,\ldots,e_{k(n-1)}$ ($k \geq 1$) элементов n-группы $\langle G,f\rangle$ является нейтральной тогда и только тогда, когда существует элемент $b \in G$ такой, что $f_{(k)}(b,e_1^{k(n-1)}) = b$.*

Аналог групповой обратимости. Теперь мы определим n-арный аналог обратимого элемента группы. Последовательность $a_1,\ldots,a_i$ элементов n-группы $\langle G,f\rangle$ называется обратимой, если найдется последовательность $b_1,\ldots,b_{k(n-1)-i}$ ($k \geq 1$) элементов из G такая, что последовательности

$$a_1,\ldots,a_i,b_1,\ldots,b_{k(n-1)-i} \quad \text{и} \quad b_1,\ldots,b_{k(n-1)-i},a_1,\ldots,a_i$$

являются нейтральными. В этом случае последовательность $b_1,\ldots,b_{k(n-1)-i}$ называют обратной для последовательности $a_1,\ldots,a_i$. Очевидно, для любой последовательности элементов n-группы существует обратная последовательность.

В параграфе 1.1 мы уже встречались с еще одним аналогом обратимого элемента группы, это $(n-1)$-арная операция g. Отметим свойства этой операции, которые являются обобщением свойств обратимого элемента группы: $(a^{-1})^{-1}$ и $(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$.

Предложение 5 *([91]-A) В n-группе выполнены тождества*

$$g(x_1^{n-2},g(x_1^{n-1})) = x_{n-1}, \tag{12}$$

$$g(x_1^{n-2},f(x_{n-1},x_1^{n-2},x_n)) = f(g(x_1^{n-2},x_n),x_1^{n-2},g(x_1^{n-2},x_{n-1})). \tag{13}$$

Доказательство. Из (11) следует справедливость тождества

$$f(g(x_1^{n-2},g(x_1^{n-1})),x_1^{n-2},g(x_1^{n-1})) = t(x_1^{n-2}),$$

но уравнение $f(y,x_1^{n-2},g(x_1^{n-1})) = t(x_1^{n-2})$ имеет единственное решение, тогда, с учетом тождества (10), получаем справедливость тождества (12).

Используя (9) и (10), получаем

$$\begin{gathered}
f(f(x_{n-1},x_1^{n-2},x_n),x_1^{n-2},f(g(x_1^{n-2},x_n),x_1^{n-2},g(x_1^{n-2},x_{n-1}))) = \\
= f_{(2)}(x_{n-1},x_1^{n-2},f(x_n,x_1^{n-2},g(x_1^{n-2},x_n)),x_1^{n-2},g(x_1^{n-2},x_{n-1})) = \\
= f_{(2)}(x_{n-1},x_1^{n-2},t(x_1^{n-2}),x_1^{n-2},g(x_1^{n-2},x_{n-1})) = \\
= f(x_{n-1},x_1^{n-2},f(t(x_1^{n-2}),x_1^{n-2},g(x_1^{n-2},x_{n-1}))) = \\
= f(x_{n-1},x_1^{n-2},g(x_1^{n-2},x_{n-1})) = t(x_1^{n-2}).
\end{gathered}$$

С другой стороны, из (10) следует справедливость тождества

$$f(f(x_{n-1},x_1^{n-2},x_n),x_1^{n-2},g(x_1^{n-2},f(x_{n-1},x_1^{n-2},x_n))) = t(x_1^{n-2}).$$

В силу однозначной разрешимости уравнения

$$f(f(x_{n-1},x_1^{n-2},x_n),x_1^{n-2},y) = t(x_1^{n-2})$$

имеем справедливость тождества (13). Предложение доказано.

Гомоморфизм n-групп Обобщая определение гомоморфизма бинарных групп, получим определение гомоморфизма n-групп: отображение φ из n-группы $\langle G, f\rangle$ в n-группу $\langle G', f'\rangle$ называют гомоморфизмом, если φ сохраняет n-арную операцию, т.е. для любых элементов $x_1, \ldots, x_n \in G$ верно равенство

$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)).$$

Как и в теории групп, взаимно однозначный гомоморфизм n-групп называют изоморфизмом. Если существует изоморфизм из одной n-группы на другую n-группу, то эти n-группы называются изоморфными.

Отметим некоторые свойства гомоморфизма n-групп, которые непосредственно следуют из определения гомоморфизма.

Свойство 8 *Образ косого элемента к элементу a при гомоморфизме φ n-групп является косым элементом к образу элемента a, т.е.*

$$\varphi(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}.$$

Свойство 9 *При гомоморфизме n-групп образ идемпотента (если он есть) является идемпотентом.*

Свойство 10 *Гомоморфизм n-групп сохраняет $(n-2)$-арную операцию t и $(n-1)$-арную операцию g из теоремы 1.*

Доказательство. Пусть φ – гомомогфизм из n-группы $\langle G, f\rangle$ в n-группу $\langle G', f'\rangle$. Согласно теореме 1 в $\langle G, f\rangle$ существуют $(n-2)$-арная операция t, удовлетворяющая тождеству (9) и $(n-1)$-арная операция g, удовлетворяющая тождеству (11). Аналогично в $\langle G', f'\rangle$ существуют $(n-2)$-арная операция t' и $(n-1)$-арная операция g', удовлетворяющие соответственно тождествам (9) и (11). Для произвольно выбранных элементов $x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} \in G$, благодаря тождеству (9), в $\langle G', f'\rangle$ верно равенство

$$f'(t'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-2})), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-2}), \varphi(x_{n-1})) = \varphi(x_{n-1}).$$

С другой стороны,

$$f'(\varphi(t(x_1^{n-2})), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-2}), \varphi(x_{n-1})) = \varphi(f(t(x_1^{n-2}), x_1^{n-1})) = \varphi(x_{n-1}).$$

В силу однозначной разрешимости уравнения

$$f'(y, \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-2}), \varphi(x_{n-1})) = \varphi(x_{n-1})$$

имеем $\varphi(t(x_1^{n-2})) = t'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-2}))$, т.е. гомоморфизм φ сохраняет $(n-2)$-арную операцию t.

Вновь для произвольно выбранных элементов $x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} \in G$, благодаря тождеству (11), в $\langle G', f'\rangle$ верно равенство

$$f'(g'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-1})), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-1})) = t'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-2})).$$

С другой стороны,

$$f'(\varphi(g(x_1^{n-1})), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-1})) = \varphi(f(g(x_1^{n-1}), x_1^{n-1})) = \varphi(t(x_1^{n-2})).$$

Но φ сохраняет $(n-1)$-арную операцию t, значит, в силу однозначной разрешимости уравнения $f'(y, \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-1})) = \varphi(t(x_1^{n-2}))$ имеем $\varphi(g(x_1^{n-1})) = g'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-1}))$, т.е. гомоморфизм φ сохраняет $(n-1)$-арную операцию g. Свойство доказано.

Косой эндоморфизм n-группы. В параграфе 1.2 мы уже отмечали, что в n-группе $\langle G, f\rangle$ определение косого элемента задает отображение $^{-}$ множества G в себя, действующее по правилу: $^{-}(x) = \bar{x}$. Это отображение не является эндоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$ (гомоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$ в себя). В своей работе [10] В. Дудек сформулировал несколько проблем, связанных с отображением $^{-}$. Одна из этих проблем — найти n-группы, в которых отображение $^{-}$ будет эндоморфизмом, т.е. в которых верно тождество

$$\overline{f(x_1, \ldots, x_n)} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n). \tag{14}$$

Сейчас найдем класс n-групп, для которых верно это тождество.

Теорема 4 *(Теорема 2.3 из [58]-A) Отображение $^{-}$ является эндоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$ тогда и только тогда, когда в $\langle G, f\rangle$ верно тождество*

$$f_{(n-1)}(x_1, \overset{(n-2)}{x_2}, \ldots, \overset{(n-2)}{x_{n+1}}, x_{n+2}) = f(x_1, f(x_{n+1}, \overset{(n-2)}{\ldots}, x_2), x_{n+2}). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть отображение $^{-}$ является эндоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$, т.е. в $\langle G, f\rangle$ верно тождество (14). Используя нейтральность последовательности $\bar{y}, \overset{(n-2)}{y}$, где $y \in G$, для любых элементов $x_2, \ldots, x_{n+2}$ из G получим

$$f(\overline{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}, f(x_{n+1}, \overset{(n-2)}{\ldots}, x_2), x_{n+2}) = x_{n+2}.$$

Добавляем к произвольно выбранным элементам $x_2, \ldots, x_{n+2}$ еще любой элемент x_1 из G и для этих элементов, используя тождество (14) и нейтральность последовательности $\overset{(n-2)}{y}, \bar{y}$, где $y \in G$, получим

$$f_{(n-1)}(x_1, \overset{(n-2)}{x_2}, \ldots, \overset{(n-2)}{x_{n+1}}, x_{n+2}) =$$
$$= f_{(n-1)}(x_1, \overset{(n-2)}{x_2}, \ldots, \overset{(n-2)}{x_{n+1}}, f(\overline{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}, f(x_{n+1}, \overset{(n-2)}{\ldots}, x_2), x_{n+2})) =$$
$$= f_{(n-1)}(x_1, \overset{(n-2)}{x_2}, \ldots, \overset{(n-2)}{x_{n+1}}, f(f(\bar{x}_{n+1}, \ldots, \bar{x}_2), f(x_{n+1}, \overset{(n-2)}{\ldots}, x_2), x_{n+2})) =$$
$$= f(x_1, f(x_{n+1}, \overset{(n-2)}{\ldots}, x_2), x_{n+2}).$$

Обратно, пусть в n-группе $\langle G, f\rangle$ верно тождество (15). Для произвольно выбранных элементов $y_1, \ldots, y_n$ из G полагаем $x_1 = f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, $x_2 = y_n, \ldots, x_{n+1} = y_1$ и $x_{n+2} = \overline{f(y_1, \ldots, y_n)}$. Тогда

$$f_{(n-1)}(f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n), \overset{(n-2)}{y_n}, \ldots, \overset{(n-2)}{y_1}, \overline{f(y_1, \ldots, y_n)}) =$$
$$= f(f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n), f(y_1, \overset{(n-2)}{\ldots}, y_n), \overline{f(y_1, \ldots, y_n)}).$$

Вновь используя нейтральность последовательностей $\bar{y}, \overset{(n-2)}{y}$ и $\overset{(n-2)}{y}, \bar{y}$, где $y \in G$, из последнего равенства будем иметь равенство

$$\overline{f(y_1, \ldots, y_n)} = f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n).$$

Теорема доказана.

Обозначим через $\bar{x}^{(k)}$ косой элемент к элементу $\bar{x}^{(k-1)}$, где $k \geq 1$ и $\bar{x}^{(0)} = x$, т.е. $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}$, $\bar{x}^{(2)} = \bar{\bar{x}}$, и так далее. Таким образом, для каждого целого числа $k \geq 1$ мы имеем отображение ${}^{-(k)}$ множества G в себя, действующее по правилу: ${}^{-(k)}(x) = \bar{x}^{(k)}$, причем ${}^{-(1)} = {}^{-}$.

Предложение 6 *([58]-А) Если отображение ${}^{-}$ является эндоморфизмом n-группы, то для любого целого числа $k > 1$ отображение ${}^{-(k)}$ также будет эндоморфизмом этой n-группы.*

Доказательство. Применяем индукцию по k. Для $k = 1$ отображение ${}^{-(1)}$ является эндоморфизмом n-группы по условию. Предположим, что наше предложение верно для $k-1$. Докажем наше предложение для k. Используя индуктивное предположение, получим

$$\overline{f(x_1, \ldots, x_n)}^{\,(k)} = \overline{\overline{f(x_1, \ldots, x_n)}^{\,(k-1)}} =$$

$$= \overline{f(\bar{x}_1^{(k-1)}, \ldots, \bar{x}_n^{(k-1)})} = f(\overline{\bar{x}_1^{(k-1)}}, \ldots, \overline{\bar{x}_n^{(k-1)}}) = f(\bar{x}_1^{(k)}, \ldots, \bar{x}_n^{(k)}).$$

Согласно методу математической индукции наше предложение верно для любого натурального k. Предложение доказано.

Предложение 7 *([58]-А) В тернарной группе отображение ${}^{-(2)}$ является тождественным эндоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\langle G, f \rangle$ — тернарная группа и $x \in G$. По определению косого элемента верны равенства $f(x, x, \bar{x}) = x$ и $f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{\bar{x}}) = \bar{x}$. Выражение элемента $\bar{x}$ из второго равенства подставляем в первое равенство, получим $f(x, x, f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{\bar{x}})) = x$. Последовательность $x, \bar{x}$ является нейтральной в $\langle G, f \rangle$, значит, $\bar{\bar{x}} = x$. Предложение доказано.

Отметим, что утверждение, являющееся обратным к предложению 6, не верно. Например, в тернарной группе $\langle S_3, f \rangle$, которая является производной от группы подстановок S_3, отображение ${}^{-}$ не будет эндоморфизмом, так как $f((12), (13), (123))$ — тождественная подстановка, а значит, $\overline{f((12), (13), (123))}$ также является тождественной подстановкой, однако,

$$f(\overline{(12)}, \overline{(13)}, \overline{(123)}) = f((12), (13), (132)) = (123),$$

но в этой тернарной группе отображение ${}^{-(2)}$ является тождественным эндоморфизмом (согласно предложению 7).

Рассмотрим отображение ${}^{-(k)}$ в n-группе $\langle G, f \rangle$ для четных натуральных чисел k. Пусть $k = 2l$ для некоторого натурального числа l. Используя бином Ньютона, разделим $(n-2)^k$ на $n-1$ с остатком:

$$(n-2)^k = (n-2)^{2l} = ((n-3)(n-1)+1)^l =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} C_l^i (n-3)^i (n-1)^i = (\sum_{i=1}^{l} C_l^i (n-3)^i (n-1)^{i-1})(n-1) + 1,$$

где $C_l^i = \frac{l!}{(l-i)! \cdot i!}$ — биномиальный коэффициент. Обозначим

$$s_l = \sum_{i=1}^{l} C_l^i (n-3)^i (n-1)^{i-1},$$

получим $(n-2)^k = s_l(n-1) + 1$.

Нам понадобится следующая

Лемма 1 *([58]-A) В n-группе для четных натуральных чисел k верно тождество*

$$\bar{x}^{(k)} = f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^k)}{x}), \tag{16}$$

где $k = 2l$ для некоторого натурального числа l.

Доказательство. Применяем индукцию по l. Для $l = 1$ тождество (16) будет иметь вид такой же, как в свойстве 4. Предположим, что тождество (16) верно для $k = 2l$. Докажем это тождество для $k = 2(l+1)$. Используя индуктивное предположение и свойство 4, получим

$$\bar{x}^{(k+2)} = \overline{\overline{\bar{x}^{(k)}}} = \overline{\overline{f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^k)}{x})}} = f_{(n-3)}(\overset{((n-2)^2)}{f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^k)}{x})}) = f_{(s_{l+1})}(\overset{((n-2)^{k+2})}{x}).$$

Согласно методу математической индукции, тождество (16) верно для любого четного натурального числа k. Лемма доказана.

Теорема 5 *(Теорема 2.4 из [58]-A) Для четных натуральных чисел k отображение $^{-(k)}$ является эндоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$ тогда и только тогда, когда в $\langle G, f\rangle$ верно тождество*

$$f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^k)}{f(x_1, \ldots, x_n)}) = f_{(s_l n+1)}(\overset{((n-2)^k)}{x_1}, \ldots, \overset{((n-2)^k)}{x_n}), \tag{17}$$

где $k = 2l$, $l \in N$.

Доказательство. Пусть отображение $^{-(k)}$ — эндоморфизм n-группы $\langle G, f\rangle$, где $k = 2l$, $l \in N$. Это означает, что в $\langle G, f\rangle$ верно тождество

$$\overline{f(x_1, \ldots, x_n)}^{\,(k)} = f(\bar{x}_1^{(k)}, \ldots, \bar{x}_n^{(k)}). \tag{18}$$

Используя лемму 1 и тождество (18), получим

$$f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^k)}{f(x_1, \ldots, x_n)}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}^{\,(k)} = f(\bar{x}_1^{(k)}, \ldots, \bar{x}_n^{(k)}) =$$

$$= f(f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^k)}{x_1}), \ldots, f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^k)}{x_n})) = f_{(s_l n+1)}(\overset{((n-2)^k)}{x_1}, \ldots, \overset{((n-2)^k)}{x_n}).$$

Обратно, пусть теперь в n-группе $\langle G, f\rangle$ верно тождество (17). Аналогичными преобразованиями, используя вновь лемму 1 и тождество (17), доказывается тождество (18). Теорема доказана.

Теорема 6 *(Теорема 2.5 из [58]-A) Для нечетных натуральных чисел k отображение $^{-(k)}$ является эндоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$ тогда и только тогда, когда в $\langle G, f\rangle$ верно тождество*

$$\begin{aligned} &f_{(s_l(n^2-2n)+n-1)}(x_1, \overset{((n-2)^k)}{x_2}, \ldots, \overset{((n-2)^k)}{x_{n+1}}, x_{n+2}) = \\ &= f_{(s_l(n-2)+1)}(x_1, \underbrace{f(x_{n+1}, \ldots, x_2), \ldots, f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}_{(n-2)^k}, x_{n+2}), \end{aligned} \tag{19}$$

где $k = 2l+1$, $l \in N$.

Доказательство. Пусть отображение $\overline{}^{(k)}$ будет эндоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$, т.е. в $\langle G, f\rangle$ верно тождество (18). Используя нейтральность последовательности $\bar{y}, \overset{(n-2)}{y}$, где $y \in G$, для любых элементов $x_2, \ldots, x_{n+2}$ из G получим

$$f(\overline{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}^{(k)}, \overset{(n-2)}{\overline{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}^{(k-1)}}, x_{n+2}) = x_{n+2}. \tag{20}$$

Заметим, что $k-1 = 2l$ — четное число, а тогда по лемме 1 для любого элемента $y \in G$ имеем $\bar{y}^{(k)} = \overline{(\bar{y})}^{(k-1)} = f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}})$, значит, последовательность

$$\overset{((n-2)^k)}{y}, \bar{y}^{(k)} = \overset{((n-2)^k)}{y}, f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}})$$

будет нейтральной благодаря нейтральности последовательности $\overset{(n-2)}{y}, \bar{y}$.

Добавляем к произвольно выбранным элементам $x_2, \ldots, x_{n+2}$ еще любой элемент x_1 из G и для этих элементов, используя тождества (18), (20) и нейтральность последовательности $\overset{((n-2)^k)}{y}, \bar{y}^{(k)}$, получим

$$f_{(t)}(x_1, \overset{((n-2)^k)}{x_2}, \ldots, \overset{((n-2)^k)}{x_{n+1}}, x_{n+2}) = f_{(t)}(x_1, \overset{((n-2)^k)}{x_2}, \ldots, \overset{((n-2)^k)}{x_{n+1}},$$

$$f(\overline{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}^{(k)}, \overset{(n-2)}{\overline{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}^{(k-1)}}, x_{n+2})) =$$

$$= f_{(t)}(x_1, \overset{((n-2)^k)}{x_2}, \ldots, \overset{((n-2)^k)}{x_{n+1}}, f(f(\bar{x}_{n+1}^{(k)}, \ldots, \bar{x}_2^{(k)}),$$

$$\overset{(n-2)}{\overline{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}^{(k-1)}}, x_{n+2})) = f(x_1, \overset{(n-2)}{\overline{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}^{(k-1)}}, x_{n+2})) =$$

$$= f_{(s_l(n-2)+1)}(x_1, \underbrace{\overset{((n-2)^{k-1})}{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}, \ldots, \overset{((n-2)^{k-1})}{f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}}_{n-2}, x_{n+2}) =$$

$$= f_{(s_l(n-2)+1)}(x_1, \underbrace{f(x_{n+1}, \ldots, x_2), \ldots, f(x_{n+1}, \ldots, x_2)}_{(n-2)^k}, x_{n+2}),$$

здесь $t = s_l(n^2 - 2n) + n - 1$.

Обратно, пусть в n-группе $\langle G, f\rangle$ верно тождество (19). Для произвольных элементов $y_1, \ldots, y_n \in G$ пусть $x_1 = f_{(s_l n+1)}(\overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}_1}, \ldots, \overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}_n})$, $x_2 = y_n, \ldots, x_{n+1} = y_1$; $x_{n+2} = f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^{k-1})}{\overline{f(y_1^n)}})$. Тогда

$$f_{(t)}(f_{(u)}(\overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}_1}, \ldots, \overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}_n}), \overset{((n-2)^k)}{y_n}, \ldots, \overset{((n-2)^k)}{y_1}, f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^{k-1})}{\overline{f(y_1^n)}})) =$$

$$= f_{(v)}(f_{(u)}(\overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}_2}, \ldots, \overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}_{n+1}}), \overset{((n-2)^k)}{f(y_1, \ldots, y_n)}, f_{(s_l)}(\overset{((n-2)^{k-1})}{\overline{f(y_1^n)}})),$$

здесь $t = s_l(n^2 - 2n) + n - 1$, $u = s_l n + 1$, $v = s_l(n-2) + 1$. Вновь используя нейтральность последовательностей $\overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}}, \overset{((n-2)^k)}{y}$ и $\overset{((n-2)^k)}{y}, \overset{((n-2)^{k-1})}{\bar{y}}$, где y из G, будем иметь равенство (18) из последнего равенства. Теорема доказана.

1.3 Группы и n-группы вместе

Для каждой n-группы имеются сопутствующие ей бинарные группы, которые можно построить для заданной n-группы. В этой главе с такими группами мы познакомимся. Хорошо развитая и богатая содержанием теория групп активно помогает изучать n-группы.

Теорема Поста. В следующей теореме заданная n-группа определяет бинарную группу и эта n-группа изоморфно вкладывается в производную n-группу от построенной группы.

Теорема 7 *[2] (Теорема Поста) Для любой n-группы $\langle G, f\rangle$ существует такая группа G^* с бинарной операцией $\cdot$, что*

1) G порождает группу G^*;

2) для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n;$$

3) в группе G^* имеется нормальная подгруппа G_0 такая, что фактор-группа G^*/G_0 является циклической группой порядка $n-1$ с порождающим элементом G.

Следствие 1 *Любая n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфно вкладывается в производную n-группу от группы G^*, построенной в теореме 7.*

Теперь укажем еще один признак производной n-группы от бинарной группы (первый признак был указан выше — предложение 1).

Теорема 8 *([59]-A) Любая n-группа $\langle G, f\rangle$ является производной от некоторой группы тогда и только тогда, когда ее группа G^* из теоремы Поста раскладывается в прямое произведение группы G_0 и циклической группы порядка $n-1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть n-группа $\langle G, f\rangle$ является производной от некоторой группы G. Значит, в $\langle G, f\rangle$ существует n-арная единица e (предложение 1). Строим фактор-группу $G^*/G_0 = \{e \cdot G_0, e^2 \cdot G_0, \ldots, e^{n-1} \cdot G_0\}$ согласно теореме Поста. Докажем, что e^{n-1} является единицей группы G^*. Если $b \in G^*$, то $b = e^i \cdot a$, где $1 \le i \le n-1$, $a \in G_0$. Тогда $b \cdot e^{n-1} = e^i \cdot a \cdot e^{n-1} = e^i \cdot f(a, \overset{(n-1)}{e}) = e^i \cdot a = b$ (здесь мы использовали определение n-арной единицы). Аналогично доказывается равенство $e^{n-1} \cdot b = b$. Итак, e^{n-1} — единица в G^*. Причем, $n-1$ — порядок e, так как если $e^i = e^{n-1}$, $i \le n-1$, то $e^{n-1} \in e^i \cdot G_0$, значит, $i = n-1$.

Выбираем циклическую подгруппу (e) в группе G^*. Докажем равенство $(e) \cap G_0 = \{e^{n-1}\}$. Если $e^i \in G_0$, где $1 \le i \le n-1$, то из построения факторгруппы G^*/G_0 следует $i = n-1$. Докажем теперь равенство $G^* = (e) \cdot G_0$. Если $b \in G^*$, то $b = e^i \cdot a$, где $1 \le i \le n-1$, $a \in G_0$. Значит, группа G^* раскладывается в прямое произведение группы G_0 и циклической группы (e).

Достаточность. Пусть $G^* = (c) \cdot G_0$ — прямое произведение циклической группы (c) порядка $n-1$ и группы G_0. Строим фактор-группу $G^*/G_0 = \{G, G^2, \ldots, G^{n-1} = G_0\}$ согласно теореме Поста. Множества $c^i \cdot G_0$, $i = 1, \ldots, n-1$ являются различными смежными классами по подгруппе G_0, значит, найдется индекс i такой, что $c^i \in G$. Обозначим $c^i = e$. Докажем, что e — n-арная единица n-группы $\langle G, f\rangle$. Если $b \in G$, то $b = e \cdot a = a \cdot e$ для некоторого элемента $a \in G_0$ (элементы из подгрупп (c) и G_0 перестановочны). Тогда для индекса $j = 1, \ldots, n-1$ имеем

$$f(\overset{(j)}{e}, b, \overset{(n-1-j)}{e}) = e^j \cdot b \cdot e^{n-1-j} = e^j \cdot e \cdot a \cdot e^{n-1-j} = e^n \cdot a = e \cdot a = b.$$

Итак, e — n-арная единица n-группы $\langle G, f\rangle$, а значит, n-группа $\langle G, f\rangle$ является производной от некоторой группы (согласно предложению 1). Теорема доказана.

Группа A с бинарной операцией $\cdot$ называется обертывающей для n-группы $\langle G, f\rangle$ [2], если:

1) группа A порождается множеством G;

2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$.

Для любой n-группы существует обертывающая группа (см. теорему 7).

Не сложно доказывается, что если A — обертывающая группа для n-группы $\langle G, f\rangle$, то в A имеется нормальная подгруппа A_0 такая, что фактор-группа A/A_0 является циклической группой порядка, делящего $n-1$, с порождающим элементом G. Нормальную подгруппу A_0 из обертывающей группы A для n-группы $\langle G, f\rangle$ называют соответствующей группой для этой же n-группы.

Обертывающая группа A для n-группы $\langle G, f\rangle$ называется универсальной, если фактор-группа A/A_0 является циклической группой порядка $n-1$. Из теоремы 7 имеем существование универсальной обертывающей группы для любой n-группы. Универсальную обертывающую группу G^* для n-группы $\langle G, f\rangle$ из теоремы 7 называют обертывающей группой Поста.

Название универсальной обертывающей группы для n-группы раскрывается в следующем факте: Если A — обертывающая группа для n-группы $\langle G, f\rangle$ и B — универсальная обертывающая группа для этой же n-группы, то A является гомоморфным образом B. Соответствующие группы A_0 и B_0 для n-группы $\langle G, f\rangle$ изоморфны. Любые две универсалные обертывающие группы одной и той же n-группы изоморфны.

Заметим, что не для любой n-группы $\langle G, f\rangle$ найдется обертывающая группа A, фактор-группа которой по соответствующей подгруппе A_0 является циклической группой фиксированного порядка k, где $k \mid n-1$ и $k \neq n-1$. Например, обертывающей группой для производной n-группы $\langle G, f\rangle$ от бинарной группы G будет группа G, причем, соответствующая группа G_0 совпадает с G, а значит, порядок фактор-группы G/G_0 равен 1. Все n-группы, отличные от производной, не имеют обертывающих групп, фактор-группа которых по соответствующей подгруппе является группой порядка 1.

Теорема 9 *Для любого делителя k числа $n-1$ производная n-группа $\langle G, f\rangle$ от группы G имеет обертывающую группу A, фактор-группа которой по соответствующей подгруппе A_0, будет циклической группой порядка k.*

Доказательство. Пусть k делит $n-1$ и $\langle G, f\rangle$ — производная n-группа от группы G с бинарной операцией $\cdot$. Строим прямое произведение $A = (c) \times G$, где (c) — циклическая группа порядка k. Рассмотрим $C = \{(c, x) \mid x \in G\}$, на C определим бинарную операцию $(c, x) \circ (c, y) = (c, x \cdot y)$, очевидно, C — группа с этой бинарной операцией и $C \cong G$. Определим производную n-группу $\langle C, f'\rangle$ от группы C. Тогда для любых $(c, x_1), \ldots, (c, x_n)$ из C получим

$$f'((c, x_1), \ldots, (c, x_n)) = (c, x_1) \circ \ldots \circ (c, x_n) =$$

$$= (c, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = (c^n, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = (c, x_1) \cdot \ldots \cdot (c, x_n)$$

и C порождает группу A, т.е. A является обертывающей группой для n-группы $\langle C, f'\rangle$. Подгруппа $A_0 = \{e\} \times G$ из A будет соответствующей группой для n-группы $\langle C, f'\rangle$. Фактор-группа A/A_0 является циклической группой порядка k. Так как $C \cong G$, то теорема доказана.

Теорема Глускина-Хоссу. Для n-группы кроме обертывающих групп можно построить и другие бинарные группы, которые также используются при изучении n-группы.

Теорема 10 *[6],[7](Теорема Глускина-Хоссу) На всякой n-группе $\langle G, f\rangle$ можно определить бинарную операцию $\cdot$ так, что G с этой операцией будет группой. Кроме того, найдутся автоморфизм φ и элемент d этой группы такие, что выполнены условия:*

$$f(x_1^n) = x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot d, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in G; \tag{21}$$

$$\varphi(d) = d; \tag{22}$$

$$\varphi^{n-1}(x) = d \cdot x \cdot d^{-1}, \quad x \in G. \tag{23}$$

В этой теореме для произвольного элемента c на множестве G определяется бинарная операция $\cdot$ по правилу: для любых элементов $a, b \in G$

$$a \cdot b = f(a, c_1^{n-2}, b).$$

Элемент c будет единицей в группе G с бинарной операцией $\cdot$.

Автоморфизм φ задается по правилу:

$$\varphi(x) = f(c, x, c_1^{n-2}) \text{ для любого элемента } x \in G. \tag{24}$$

Элемент d из теоремы Глускина-Хоссу определяется по правилу

$$d = f(\overset{(n)}{c}). \tag{25}$$

Группу G из теоремы 10 обозначают $ret_c\langle G, f\rangle$ и называют ретрактом n-группы $\langle G, f\rangle$. Не сложно доказывается, что ретракт и соответствующая группа одной и той же n-группы изоморфны. Изоморфны также любые два ретракта одной и той же n-группы. Кроме того, у изоморфных n-групп ретракты изоморфны.

Верна и обратная теорема Глускина-Хоссу:

Теорема 11 *[6],[7] В любой группе G с бинарной операцией $\cdot$ для выбранных автоморфизма φ и элемента d, для которых выполнены равенства (22) и (23), задается n-группа $\langle G, f\rangle$, где f действует по правилу (21).*

n-Группу $\langle G, f\rangle$ из теоремы 11 обозначают $der_{\varphi,d}G$ и называют (φ, d)-определенной на группе G.

Предложение 8 *([32]; Теорема 3 из [60]-A) Для группы G с единицей c верно равенство*

$$G = ret_c der_{\varphi,d} G,$$

где автоморфизм φ и элемент d группы G удовлетворяют равенствам (22) и (23).

Доказательство. По теореме 10 на группе G с помощью выбранных автоморфизма φ и элемента d, которые удовлетворяют равенствам (22) и (23), строится n-группа $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}\langle G, \cdot\rangle$, где n-арная операция f действует по правилу (21). Для единицы c группы G выбираем в n-группе $\langle G, f\rangle$ обратную последовательность $\overset{(n-3)}{c}, \bar{c}$. Так как

$$f(\overset{(n-1)}{c}, d^{-1}) = c\cdot\varphi(c)\cdot\ldots\cdot\varphi^{n-2}(c)\cdot\varphi^{n-1}(d^{-1})\cdot d = \varphi^{n-1}(d)^{-1}\cdot d = d^{-1}\cdot d = c,$$

то $\bar{c} = d^{-1}$. Для любых элементов $a, b \in G$, используя (21), (22) и (23), получим

$$f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b) = a\cdot\varphi(c)\cdot\ldots\cdot\varphi^{n-3}(c)\cdot\varphi^{n-2}(\bar{c})\cdot\varphi^{n-1}(b)\cdot d =$$

$$= a\cdot\varphi^{n-2}(d^{-1})\cdot d\cdot b = a\cdot\varphi^{n-2}(d)^{-1}\cdot d\cdot b = a\cdot d^{-1}\cdot d\cdot b = a\cdot b.$$

Таким образом, бинарные операции в группах G и $ret_c der_{\varphi,d} G$ совпадают. Предложение доказано.

Предложение 9 *([32]; Теорема 4 из [60]-А) Для n-группы $\langle G, f\rangle$ верно равенство*

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} ret_c \langle G, f\rangle,$$

где $c \in G$, отображение φ и элемент d n-группы $\langle G, f\rangle$ найдены по правилам (24) и (25) соответственно.

Доказательство. Для элемента $c \in G$ ему обратная последовательность будет $\overset{(n-3)}{c}, \bar{c}$. По теореме 10 на n-группе $\langle G, f\rangle$ строим группу $ret_c\langle G, f\rangle$, где бинарная операция $\cdot$ действует по правилу: для любых $a, b \in G$

$$a\cdot b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b).$$

Кроме того, отображение φ, действующее по правилу (24), является автоморфизмом группы $ret_c\langle G, f\rangle$. Элемент $d = f(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм φ удовлетворяют равенствам (21), (22) и (23). Согласно теореме 11 на группе $ret_c\langle G, f\rangle$ можно построить n-группу $der_{\varphi,d} ret_c\langle G, f\rangle$, у которой n-арная операция действует по правилу (21). Значит, n-группы $der_{\varphi,d} ret_c\langle G, f\rangle$ и $\langle G, f\rangle$ совпадают. Предложение доказано.

В работе [31] указаны все n-группы, в которых выполнено тождество $\bar{x} = \bar{y}$, т.е. верно

Предложение 10 *В n-группе верно тождество $\bar{x} = \bar{y}$ тогда и только тогда, когда она является производной от группы, в которой порядок каждого элемента делит $n-2$.*

Гомоморфизмы n-групп и их ретрактов. Рассмотрим взаимосвязь между гомоморфизмами n-групп и гомоморфизмами их ретрактов.

Предложение 11 *Любой гомоморфизм ψ из n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G_2, f_2\rangle$ будет гомоморфизмом группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{\psi(c_1)}\langle G_2, f_2\rangle$.*

Доказательство. Пусть ψ — гомоморфизм n-групп $\langle G_1, f_1\rangle$ в $\langle G_2, f_2\rangle$. Строим ретракты $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{\psi(c_1)}\langle G_2, f_2\rangle$ с бинарными операциями $\cdot$ и $\circ$ соответственно, заданные по правилам

$$a_1 \cdot b_1 = f_1(a_1, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1, b_1), \quad a_2 \circ b_2 = f_2(a_2, \overset{(n-3)}{\psi(c_1)}, \overline{\psi(c_1)}, b_2).$$

Тогда, используя свойство 7, получим

$$\psi(a_1 \cdot b_1) = \psi(f_1(a_1, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1, b_1)) = f_2(\psi(a_1), \overset{(n-3)}{\psi(c_1)}, \psi(\bar{c}_1), \psi(b_1)) =$$

$$= f_2(\psi(a_1), \overset{(n-3)}{\psi(c_1)}, \overline{\psi(c_1)}, \psi(b_1)) = \psi(a_1) \circ \psi(b_1).$$

Предложение доказано.

Следующий результат можно назвать структурной теоремой о гомоморфизмах n-групп.

Теорема 12 *[30] Пусть $\langle G_1, f_1\rangle = der_{\varphi_1,d_1}G_1$, $\langle G_2, f_2\rangle = der_{\varphi_2,d_2}G_2$ — две n-группы, построенные по теореме 11. Каждое отображение $\psi : G_1 \to G_2$ является гомоморфизмом из $\langle G_1, f_1\rangle$ в $\langle G_2, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся гомоморфизм σ из группы G_1 в группу G_2 и элемент $u \in G_2$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) \circ u$ для любого элемента $x \in G_1$ (здесь $\circ$ — бинарная операция в группе G_2) и выполнены условия*

$$\sigma(d_1) = u \circ \varphi_2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ d_2, \tag{26}$$

$$\sigma(\varphi_1(x)) \circ u = u \circ \varphi_2(\sigma(x)) \quad \textit{для всех элементов} \;\; x \in G_1. \tag{27}$$

Из теоремы 12 следует критерий изоморфизма n-групп:

Следствие 2 *(Теорема 3, [32]) Пусть по теореме 11 построенны две n-группы $\langle G_1, f_1\rangle = der_{\varphi_1,d_1}G_1$ и $\langle G_2, f_2\rangle = der_{\varphi_2,d_2}G_2$. Эти n-группы изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся изоморфизм σ из группы G_1 в группу G_2 и элемент $u \in G_2$ такие, что верны равенства (26) и (27).*

Рассмотрим взаимосвязь между эндоморфизмами n-группы и ее ретракта. Из теоремы 12 имеем

Следствие 3 *Пусть $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}G$ — n-группа, построенная по теореме 11. Каждое отображение $\psi : G \to G$ будет эндоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся эндоморфизм σ группы G и элемент $u \in G$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) \cdot u$ (здесь $\cdot$ — бинарная операция в группе G) и выполнены равенства*

$$\sigma(d) = u \cdot \varphi(u) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-2}(u) \cdot d, \tag{28}$$

$$\sigma(\varphi(x)) \cdot u = u \cdot \varphi(\sigma(x)) \quad \textit{для всех элементов} \;\; x \in G. \tag{29}$$

В следующем предложении по заданному эндоморфизму n-группы строится эндоморфизм ретракта этой n-группы.

Предложение 12 *Пусть ψ — эндоморфизм n-группы $\langle G, f\rangle$. Тогда каждое отображение $\sigma(x) = f(\psi(x), \overset{(n-3)}{\psi(c)}, \overline{\psi(c)}, c)$ является эндоморфизмом группы $ret_c\langle G, f\rangle$, где c — произвольно выбранный элемент из G.*

Доказательство. В ретракте $ret_c\langle G,f\rangle$ бинарная операция $\cdot$ задана по правилу $a\cdot b = f(a,\overset{(n-3)}{c},\bar{c},b)$. Для любых элементов $a,b\in G$, используя условие эндоморфизма n-группы и нейтральность последовательности $\overset{(n-2)}{c},\bar{c}$, имеем

$$\sigma(a\cdot b) = f(\psi(a\cdot b),\overset{(n-3)}{\psi(c)},\overline{\psi(c)},c) = f(\psi(f(a,\overset{(n-3)}{c},\bar{c},b)),\overset{(n-3)}{\psi(c)},\overline{\psi(c)},c) =$$

$$= f(f(\psi(a),\overset{(n-3)}{\psi(c)},\psi(\bar{c}),\psi(b)),\overset{(n-3)}{\psi(c)},\overline{\psi(c)},c) =$$

$$= f(f(\psi(a),\overset{(n-3)}{\psi(c)},\overline{\psi(c)},c),\overset{(n-3)}{c},\bar{c},f(\psi(b),\overset{(n-3)}{\psi(c)},\overline{\psi(c)},c)) = \sigma(a)\cdot\sigma(b).$$

Предложение доказано.

Конгруэнции n-групп. Отношение эквивалентности ρ на n-группе $\langle G,f\rangle$ называется конгруэнцией, если для любых элементов $a_1^n, b_1^n \in G$ из условий $a_i\ \rho\ b_i$, $i=1,\ldots,n$, следует $f(a_1^n)\ \rho\ f(b_1^n)$. Отметим простейшие свойства конгруэнции, которые следуют непосредственно из определения конгруэнции:

Свойство 11 *Для любых элементов $a_1^{i-1}, a_{i+1}^n, b, c_1^{i-1}, c_{i+1}^n, d$ n-группы $\langle G,f\rangle$, $i=1,\ldots,n$, если $a_j\ \rho\ c_j$ для всех $j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$, и $b\ \rho\ d$, то решения a_i и c_i соответствующих уравнений $f(a_1^{i-1},x,a_{i+1}^n)=b$ и $f(c_1^{i-1},y,c_{i+1}^n)=d$ также находятся в отношении ρ, т.е. $a_i\ \rho\ c_i$.*

Свойство 12 *Фактор-множество $G/\rho = \{\rho(a)\mid a\in G\}$ с n-арной операцией f', действующей по правилу: для любых элементов $\rho(a_1),\ldots,\rho(a_n)\in G/\rho$ верно*

$$f'(\rho(a_1),\ldots,\rho(a_n)) = \rho(f(a_1^n)),$$

является n-группой.

В свойстве 12 n-группу $\langle G/\rho, f'\rangle$ называют фактор-n-группой n-группы $\langle G,f\rangle$ по конгруэнции ρ.

Свойство 13 *Для любого элемента c из n-группы $\langle G,f\rangle$ в фактор-n-группе $\langle G/\rho,f'\rangle$ верно равенство $\rho(\bar{c}) = \overline{\rho(c)}$.*

Свойство 14 *Конгруэнция n-группы сохраняет унарную операцию $^-: x\to\bar{x}$, т.е. для любых элементов $a,b\in G$ если $a\ \rho\ b$, то $\bar{a}\ \rho\ \bar{b}$.*

Свойство 15 *Конгруэнция n-группы $\langle G,f\rangle$ сохраняет $(n-2)$-арную операцию t, т.е. для любых элементов $a_1^{n-2}, b_1^{n-2}\in G$ если $a_i\ \rho\ b_i$, $i=1,\ldots,n-2$, то $t(a_1^{n-2})\ \rho\ t(b_1^{n-2})$.*

Доказательство. Пусть a_1^{n-2}, b_1^{n-2}, c — любые элементы из n-группы $\langle G,f\rangle$. Если $a_i\ \rho\ b_i$ для всех индексов $i=1,\ldots,n-2$, то решения $t(a_1^{n-2})$ и $t(b_1^{n-2})$ соответствующих уравнений $f(c,a_1^{n-2},x)=c$ и $f(c,b_1^{n-2},y)=c$ также находятся в отношении ρ, т.е. $t(a_1^{n-2})\ \rho\ t(b_1^{n-2})$ (согласно свойству 11 и тождеству (7)). Свойство доказано.

Свойство 16 *Конгруэнция n-группы сохраняет $(n-1)$-арную операцию g, т.е. для любых элементов $a_1^{n-1}, b_1^{n-1}\in G$ если $a_i\ \rho\ b_i$, $i=1,\ldots,n-1$, то $g(a_1^{n-1})\ \rho\ g(b_1^{n-1})$.*

Доказательство. Для любых элементов a_1^{n-1}, b_1^{n-1} из n-группы $\langle G, f\rangle$ если $a_i \ \rho \ b_i$ для всех индексов $i = 1, \ldots, n-1$, то решения $g(a_1^{n-1})$ и $g(b_1^{n-1})$ соответствующих уравнений $f(a_{n-1}, a_1^{n-2}, x) = t(a_1^{n-2})$ и $f(b_{n-1}, b_1^{n-2}, y) = t(b_1^{n-2})$ также находятся в отношении ρ, т.е. $g(a_1^{n-1}) \ \rho \ g(b_1^{n-1})$ (согласно свойствам 11, 15 и тождеству (10)). Свойство доказано.

Как и в теории универсальных алгебр (смотри, например, стр. 62 в [33] или стр. 72 в [34]), непосредственной проверкой доказывается

Свойство 17 *Пусть φ — гомоморфизм из n-группы $\langle G, f\rangle$ в n-группу $\langle G', f'\rangle$. Ядро этого гомоморфизма $Ker\ \varphi = \{(a, b) \mid \varphi(a) = \varphi(b),\ a, b \in G\}$ является конгруэнцией в $\langle G, f\rangle$.*

Каждая конгруэнция в группе определяется нормальной подгруппой, т.е. для любой конгруэнции ρ группы G класс этой конгруэнции, содержащий единицу группы G, является нормальной подгруппой и отношение смежности по этой подгруппе совпадает с конгруэнцией ρ. Верно и обратно, для любой нормальной подгруппы отношение смежности по этой подгруппе является конгруэнцией группы. Таким образом, в любой группе между нормальными подгруппами и конгруэнциями имеется взаимно однозначное соответствие. В n-группах при $n \geq 3$ это не так. Полуинвариантная подгруппа (n-арный аналог нормальной подгруппы) в n-группе определяет конгруэнцию (смотри ниже теорему), обратно неверно, т.е. имеются n-группы с конгруэнциями, у которых каждый класс не будет подгруппой этой n-группы (смотри ниже пример).

Однако, имеется тесная связь конгруэнций n-группы с подгруппами из сопутствующих n-группе бинарных групп. Эта связь устанавливается в ниже приведенных предложениях.

Сначала установим связь между конгруэнциями в n-группе и нормальными погруппами универсальной обертывающей группы этой n-группы, которые содержатся в соответствующей группе (два следующих предложения).

Предложение 13 *(Лемма 1, [62]-А). Если H — нормальная подгруппа в обертывающей группе Поста G^* n-группы $\langle G, f\rangle$ и H содержится в соответствующей группе G_0, то бинарное отношение ρ_H на G, заданное по правилу: для любых элементов $a, b \in G$*

$$a \ \rho_H \ b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b^{-1} \in H,$$

является конгруенцией на n-группе $\langle G, f\rangle$.

Доказательство. Нормальная подгруппа H задает конгруэнцию на группе G^*, ограничение которой на множество G обозначим ρ_H. Согласно второму пункту из теоремы 7, это отношение сохраняет n-арную операцию f. Предложение доказано.

Предложение 14 *(Лемма 2, [62]-А) . Если ρ — конгруэнция на n-группе $\langle G, f\rangle$, G^* — обертывающая группа Поста и G_0 — соответствующая группа для n-группы $\langle G, f\rangle$, то множество*

$$H = \{a \cdot b^{-1} \mid a \ \rho \ b, \quad a, b \in G\}$$

является нормальной подгруппой в группе G^* и содержится в G_0.

Доказательство. Для элемента $b \in G$ выбираем обратную последовательность $\overset{(n-3)}{b}, \bar{b}$. Если $a, b \in G$ и $a \ \rho \ b$, то $a \cdot b^{-1} \in G_0$. Значит, множество H содержится в G_0. Покажем, что H — подгруппа в G^*. Пусть $a \cdot b^{-1}, c \cdot d^{-1} \in H$. Из условий $a \ \rho \ b$, $c \ \rho \ d$ имеем

$f(a, \overset{(n-3)}{b}, \bar{b}, c)\ \rho\ f(a, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, d)$, но $f(a, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, d) = d$ (см. свойство 2), тогда $a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot d^{-1} \in H$. В силу рефлексивности отношения ρ единица $e = a \cdot a^{-1}$ $(a \in G)$ лежит в H. Если $a \cdot b^{-1} \in H$, то, в силу симметричности отношения ρ, получим $(a \cdot b^{-1})^{-1} = b \cdot a^{-1} \in H$. Итак, H — подгруппа в G^*. Осталось доказать нормальность подгруппы H. Выбираем произвольный элемент g из G^*. Если $a \cdot b^{-1} \in H$, то, с учетом условия $a\ \rho\ b$, получим

$$g \cdot a \cdot b^{-1} \cdot g^{-1} = (g \cdot a \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot b^{-1} \cdot g^{-1}) = (g \cdot a \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot b \cdot g^{-1})^{-1} \in H.$$

Предложение доказано.

Из предложений 13 и 14 следует, что в любой n-группе $\langle G, f\rangle$ между конгруэнциями и нормальными подгруппами обертывающей группы Поста G^*, которые содержатся в соответствующей группе G_0, имеется взаимно однозначное соответствие.

Имеется связь также между конгруэнциями в n-группе и нормальными погруппами из ретракта этой n-группы . Эта связь установлена в следующих двух предложениях.

Предложение 15 *(Лемма 1, [35]) . Если ρ — конгруэнция на n-группе $\langle G, f\rangle$, то ρ — конгруэнция на ретракте $ret_c\langle G, f\rangle$, при этом класс конгруэнции $\rho(c)$, содержащий элемент c, является нормальной подгруппой в $ret_c\langle G, f\rangle$, которая удовлетворяет условию*

$$f(c, \rho(c), \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) = \rho(c). \tag{30}$$

Предложение 16 *(Лемма 2, [35]) . Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа, $c \in G$, $G = ret_c\langle G, f\rangle$ — группа с бинарной операцией $a \cdot b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, ρ — конгруэнция на группе G, определяемая нормальной подгруппой H, которая удовлетворяет условию*

$$f(c, H, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) = H. \tag{31}$$

Тогда ρ — конгруэнция на n-группе $\langle G, f\rangle$.

Из предложений 15 и 16 следует, что в любой n-группе $\langle G, f\rangle$ между конгруэнциями и нормальными подгруппами ее ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$, которые удовлетворяют равенству (31), имеется взаимно однозначное соответствие.

1.4 Подгруппы в n-группе

Подмножество H из n-группы $\langle G, f\rangle$ называется n-подгруппой, если $\langle H, f\rangle$ является n-группой с той же n-арной операцией f, которая определена в $\langle G, f\rangle$. Для удобства в дальнейшем мы n-подгруппу будем называть просто подгруппой в n-группе (смотри, например, стр. 17 из [11]).

Признаки подгруппы в n-группе. Подмножество H n-группы $\langle G, f\rangle$, согласно первому определению n-группы из параграфа 1.1, является подгруппой тогда и только тогда, когда H замкнуто относительно действия n-арной операции f, т.е. для любых $h_1, \ldots, h_n \in H$ имеем $f(h_1^n) \in H$, и решение уравнения $f(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^n) = b$ относительно переменной x_i, где $a_1, \ldots, a_{i-1}$, $a_{i+1}, \ldots, a_n, b$ — любые элементы из H, $i = 1, \ldots, n$, принадлежит H.

В силу нескольких различных эквивалентных определений n-группы (смотри параграф 1.1) имеем несколько признаков подгруппы в n-группе.

Предложение 17 *[1] Подмножество H n-группы $\langle G, f\rangle$ является подгруппой в этой n-группе тогда и только тогда, когда H замкнуто относительно действий n-арной операции f и унарной операции $^{-}$, т.е для любого элемента $h \in H$ имеем $\bar{h} \in H$.*

Предложение 18 *([51], Предложение 22, с. 68) Подмножество H n-группы $\langle G, f\rangle$ является подгруппой в этой n-группе тогда и только тогда, когда H замкнуто относительно действий n-арной операции f, $(n-2)$-арной операции t и $(n-1)$-арной операции g (операции t и g взяты из параграфа 1.1).*

Доказательство. Пусть $\langle H, f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$. Согласно теореме 1, $(n-2)$-арная операция t и $(n-1)$-арная операция g удовлетворяют тождествам (9) и (11) соответственно. Если $h_1, \ldots, h_{n-2} \in H$, то $t(h_1^{n-2})$ является решением уравнения $f(x, h_1^{n-1}) = h_{n-1}$ для $h_{n-1} \in H$ (согласно тождеству (9)) и это решение принадлежит H, т.е. $t(h_1^{n-2}) \in H$. Аналогично доказывается замкнутость $(n-1)$-арной операции g, используя тождество (11).

Обратно, пусть подмножество H n-группы $\langle G, f\rangle$ замкнуто относительно действий n-арной операции f, $(n-2)$-арной операции t и $(n-1)$-арной операции g. Тождества (1), (9) и (11) выполнены в $\langle G, f\rangle$, а значит, они выполнены на подмножестве H. Тогда, согласно теореме 1, $\langle H, f\rangle$ — n-группа, т.е. $\langle H, f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$. Предложение доказано.

Предложение 19 *([51], Предложение 23, с. 68). Подмножество H n-группы $\langle G, f\rangle$ будет подгруппой в этой n-группе тогда и только тогда, когда для любых элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}$, $b_1, \ldots, b_{n-1}$ из H верно $f(g(a_1^{n-1}), b_1^{n-1}) \in H$.*

Доказательство. Если $\langle H, f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$, то, согласно предложению 18, подмножество H будет замкнуто относительно действия $(n-1)$-арной операции g, т.е. для любых элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}$ из H имеем $g(a_1^{n-1}) \in H$. Далее, согласно тому же предложению, подмножество H замкнуто относительно действия n-арной операции f, значит, для элемента $g(a_1^{n-1})$ из H и любых элементов $b_1, \ldots, b_{n-1}$ из H верно $f(g(a_1^{n-1}), b_1^{n-1}) \in H$.

Обратно, пусть для подмножества H из $\langle G, f\rangle$ верно: если $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1} \in H$, то $f(g(a_1^{n-1}), b_1^{n-1}) \in H$. Тогда для любых элементов $a_1, \ldots, a_{n-1} \in H$, по тождеству (11), верно

$$f(g(a_1^{n-1}), a_1^{n-1}) = t(a_1^{n-2}) \in H,$$

т.е. подмножество H замкнуто относительно действия $(n-2)$-арной операции t. Далее, для выбранных элементов $a_1, \ldots, a_{n-1} \in H$, по тождеству (7), верно

$$f(g(a_1^{n-1}), a_1^{n-2}, t(a_1^{n-2})) = g(a_1^{n-1}) \in H,$$

т.е. подмножество H замкнуто относительно действия $(n-1)$-арной операции g. Пусть теперь $h_1, \ldots, h_n \in H$. Согласно тождеству (12) имеем $h_1 = g(h_2^{n-1}, g(h_2^{n-1}, h_1))$. Тогда, согласно условию, получим

$$f(h_1^n) = f(g(h_2^{n-1}, g(h_2^{n-1}, h_1)), h_2^n) \in H,$$

т.е. подмножество H замкнуто относительно действия n-арной операции f. Тогда, согласно предложению 18, $\langle H, f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$. Предложение доказано.

Имеются многочисленные факты, связанные с подгруппами в n-группе, аналоги которых верны в теории групп. Отметим ниже три таких факта.

Предложение 20 *([51], Предложение 24, с. 70) Пересечение любого множества подгрупп в n-группе, если оно не пусто, является подгруппой в этой же n-группе.*

Предложение 21 *(Лемма 2.3.17, [14]) Пусть $\langle H_1, f\rangle$, $\langle H_2, f\rangle$ — подгруппы в n-группе $\langle G, f\rangle$. Если $f(\overset{(n-1)}{H_1}, H_2) = f(H_2, \overset{(n-1)}{H_1})$, то $\langle f(\overset{(n-1)}{H_1}, H_2), f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$.*

Предложение 22 *([51], Предложение 26, с. 71) Гомоморфный образ n-группы $\langle G, f\rangle$ при гомоморфизме n-группы $\langle G, f\rangle$ в n-группу $\langle G', f'\rangle$ является подгруппой в n-группе $\langle G', f'\rangle$.*

Для n-групп верна основная теорема о гомоморфизмах n-групп.

Теорема 13 *([51], Теорема 17, с. 71) Для каждого гомоморфизма φ из n-группы $\langle G, f\rangle$ в n-группу $\langle G', f'\rangle$ фактор-n-группа $\langle G/Ker\ \varphi, f''\rangle$ n-группы $\langle G, f\rangle$ по ядру $Ker\ \varphi$ гомоморфизма φ изоморфна образу $\langle Im\ \varphi, f'\rangle$ при этом гомоморфизме, т.е.*

$$\langle G/Ker\ \varphi, f''\rangle \cong \langle Im\ \varphi, f'\rangle.$$

В любой группе единица является одноэлементной подгруппой. Как уже отмечалось раньше, в n-группе единицы может и не быть. Но если множество единиц в n-группе не пусто, то, как и в группе, это множество будет подгруппой в n-группе, т.е. верно

Предложение 23 *(Теорема 9.1.1, [15]) Множество всех единиц (если оно не пусто) образует подгруппу в n-группе.*

Порождающие множества. Если $\langle G, f\rangle$ — n-группа, $M \subseteq G$, то пересечение $\langle M\rangle$ всех подгрупп из n-группы $\langle G, f\rangle$, содержащих множество M, называют подгруппой в n-группе $\langle G, f\rangle$, порожденной множеством M и обозначают $\langle\langle M\rangle, f\rangle$. Само множество M называют порождающим множеством подгруппы $\langle\langle M\rangle, f\rangle$.

Любая подгруппа в n-группе, порожденная некоторым множеством, состоит из применений операции f к элементам из этого множества и к элементам, которые являются косыми к элементам из этого множества, т.е. верна

Теорема 14 *(Теорема 2.6, [13]) Если $\langle G, f\rangle$ — n-группа ($n \geq 3$), $M \subseteq G$, $M \neq \emptyset$, то*

$$\langle M\rangle = \{f_{(k)}(a_1^{k(n-1)+1}) \mid a_i \in M \cup \overline{M}, i = 1, \ldots, k(n-1)+1, k = 0, 1, \ldots\},$$

где $\overline{M} = \{\bar{a} \mid a \in M\}$.

Следствие 4 *Если n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством M, то ее обертывающая группа Поста G^* из теоремы Поста (теорема 7) порождается множеством $M \cup \overline{M}$.*

Для доказательства следствия достаточно применить теоремы 14 и 7.

Если подгруппа в n-группе, порожденная множеством M, совпадает с самой n-группой, то говорят, что эта n-группа порождается множеством M. Зная порождающее множество ретракта n-группы, можно найти порождающее множество самой n-группы:

Теорема 15 *(Теорема 5, [63]-A) Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа. Если ретракт $ret_c\langle G, f\rangle$ порождается множеством M, то n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством $M \cup \{c\}$.*

Доказательство. Бинарная операция $\cdot$ в ретракте $ret_c\langle G, f\rangle$ определяется по правилу $a \cdot b = f(a, c_1^{n-2}, b)$, где c_1^{n-2} — обратная последовательность для элемента c. Если b — произвольный элемент из G, то

$$b = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = f_{(k-1)}(a_1, c_1^{n-2}, a_2, c_1^{n-2}, \ldots, c_1^{n-2}, a_k),$$

где $a_i \in M \cup M^{-1}, i = 1, 2, \ldots, k$. Так как в группе $ret_c\langle G, f\rangle$ обратный элемент x^{-1} для элемента $x \in G$ имеет вид $x^{-1} = f(c, \bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, c)$ (проверяется непосредственно), то элемент b совпадает с результатом применения n-арной операции f к элементам из множества $(M \cup \{c\}) \cup (\overline{M} \cup \{\bar{c}\})$. Согласно теореме 14 это означает, что b принадлежит подгруппе из n-группы $\langle G, f\rangle$, порожденной множеством $M \cup \{c\}$. А так как элемент b выбран из G произвольно, то n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством $M \cup \{c\}$. Теорема доказана.

Следствие 5 *(Следствие 2, [63]-А) Пусть группа G с единицей e порождается множеством M. Тогда n-группа $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}G$ порождается множеством $M \cup \{e\}$.*

Известно [14], что если в n-группе $\langle G, f\rangle$ зафиксировать элемент a, то соответствующую группу G_0 из теоремы Поста можно представить в виде

$$G_0 = \{u \cdot a^{n-2} \mid u \in G\},$$

где $\cdot$ — умножение в группе G^*. Очевидно, $(u \cdot a^{n-2})^{-1} = f(\bar{a}, \bar{u}, \overset{(n-3)}{u}, \bar{a}) \cdot a^{n-2}$. Зная порождающее множество соответствующей группы G_0, можно найти порождающее множество самой n-группы $\langle G, f\rangle$:

Теорема 16 *(Теорема 6, [63]-А) Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа, $a \in G$, $M \subseteq G$. Если соответствующая группа G_0 порождается множеством*

$$\{u \cdot a^{n-2} \mid u \in M\},$$

то n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством $M \cup \{a\}$.

Доказательство. Если b — любой элемент из G, то элемент $b \cdot a^{n-2}$ из G_0 может быть представлен в виде $b \cdot a^{n-2} = a_1 \cdot a^{n-2} \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a^{n-2}$, где $a_i \in M \cup \{f(\bar{a}, \bar{u}, \overset{(n-3)}{u}, \bar{a}) \mid u \in M\}, i = 1, \ldots, k$, в силу замечания перед теоремой. Тогда из $b \cdot a^{n-2} \cdot \bar{a} = a_1 \cdot a^{n-2} \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a^{n-2} \cdot \bar{a}$ следует

$$f(b, \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}) = f_{(k)}(a_1, \overset{(n-2)}{a}, \ldots, a_k, \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}),$$

т.е. $b = f_{(k-1)}(a_1, \overset{(n-2)}{a}, \ldots, a_{k-1}, \overset{(n-2)}{a}, a_k)$. Таким образом, b совпадает с результатом применения n-арной операции f к элементам из множества $(M \cup \{a\}) \cup (\overline{M} \cup \{\bar{a}\})$. Согласно теореме 14 это означает, что n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством $M \cup \{a\}$. Теорема доказана.

Из теорем 15 и 16 вытекает

Следствие 6 *(Следствие 3, [63]-А) Если группа $ret_c\langle G, f\rangle$ (группа G_0) конечно порождена, то n-группа $\langle G, f\rangle$ является конечно порожденной.*

Особый интерес вызывают n-группы, которые порождаются тем же множеством, что и их ретракты. Для n-групп, которые являются производными от групп, верно

Предложение 24 *(Предложение 1, [63]-A) Пусть G — группа с единицей e и порождающим множеством M. Если $a^n = e$ для некоторого элемента a из M, $n \geq 3$, то n-группа $\langle G, f\rangle$, производная от группы G, порождается множеством M.*

Доказательство. Каждая n-группа $\langle G, f\rangle$, производная от группы G, совпадает с n-группой $der_{\varepsilon,e}G$, где ε — тождественный автоморфизм. Тогда по теореме 15 $\langle G, f\rangle$ порождается множеством $M \cup \{e\}$. А так как $e = a^n = f(\overset{(n)}{a})$, $a \in M$, то, ввиду теоремы 14, n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством M. Предложение доказано.

Следствие 7 *(Следствие 4, [63]-A) Пусть группа G конечного периода $n \geq 3$ порождается множеством M. Тогда n-группа $\langle G, f\rangle$, производная от группы G, также порождается множеством M.*

Следствие 8 *(Следствие 5, [63]-A) Пусть конечная группа G порядка $|G| = n \geq 3$ порождается множеством M. Тогда n-группа $\langle G, f\rangle$, производная от группы G, также порождается множеством M.*

Предложение 24 обобщается следующим образом.

Теорема 17 *(Теорема 7, [63]-A) Пусть G — группа с единицей e и порождающим множеством M. Если $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{m(n-1)+1} = e$ для некоторых элементов $c_1, c_2, \ldots, c_{m(n-1)+1} \in M$, $m \geq 1$, то n-группа $\langle G, f\rangle$, производная от группы G, также порождается множеством M.*

Доказательство. Так как группа G с бинарной операцией $\cdot$ порождается множеством M, то для любого элемента $b \in G$ получим

$$b = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = f_{(k-1)}(a_1, \overset{(n-2)}{e}, a_2, \overset{(n-2)}{e}, \ldots, \overset{(n-2)}{e}, a_k) =$$

$$= f_{(k-1)}(a_1, f_{(m)}(\overset{(n-2)}{c_1^{m(n-1)+1}}), a_2, f_{(m)}(\overset{(n-2)}{c_1^{m(n-1)+1}}), \ldots, f_{(m)}(\overset{(n-2)}{c_1^{m(n-1)+1}}), a_k),$$

где, ввиду равенства $c^{-1} = f(e, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, e)$, имеем

$$a_i \in M \cup M^{-1} = M \cup \{f(e, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, e) \mid c \in M\} =$$

$$= M \cup \{f(f_{(m)}(c_1^{m(n-1)+1}), \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, f_{(m)}(c_1^{m(n-1)+1})) \mid c \in M\}.$$

Таким образом, элемент b совпадает с результатом применения n-арной операции f к элементам из множества $M \cup \overline{M}$. Ввиду теоремы 14, это означает, что n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством M. Теорема доказана.

Следствие 9 *(Следствие 6, [63]-A) Пусть G — группа с единицей e и порождающим множеством M. Если $c^{m(n-1)+1} = e$ для некоторого элемента $c \in M$, $m \geq 1$, то n-группа $\langle G, f\rangle$, производная от группы G, также порождается множеством M.*

Предложение 24 получается из следствия 9, если в последнем задать m=1, $n \geq 3$.

Следствие 10 *(Следствие 7, [63]-A) Пусть группа G конечного периода $m(n-1)+1 \geq 3$ порождается множеством M. Тогда n-группа $\langle G, f \rangle$, производная от группы G, также порождается множеством M.*

Следствие 7 получается из следствия 9 или из следствия 10 при $m = 1$, $n \geq 3$.

Следствие 11 *(Следствие 8, [63]-A) Пусть конечная группа G порядка $|G| = m(n-1)+1 \geq 3$ порождается множеством M. Тогда n-группа $\langle G, f \rangle$, производная от группы G, также порождается множеством M.*

Следствие 8 получается из следствия 9 или из следствия 11 при $m = 1$, $n \geq 3$.

Приведем несколько примеров нахождения порождающих множеств для n-групп.

Пример 1. Так как диэдральная группа D_n определяется соотношениями

$$s^n = r^2 = (sr)^2 = e \text{ (смотри, например, [36])},$$

то, применив к соотношению $s^n = e$ следствие 9 при $m = 1$, видим, что n-группа, производная от группы D_n, порождается теми же элементами s и r, что и группа D_n.

Аналогично полагая в соотношении $(sr)^2 = e$

$$c_1 = s, c_2 = r, c_3 = s, c_4 = r$$

и применяя теорему 17 при $m = 1$, видим, что 4-арная группа, производная от группы D_n, так же порождается элементами s и r.

Так как из соотношения $r^2 = e$ вытекает соотношение $r^l = e$ для любого четного l, то по следствию 9 полиадическая группа любой четной арности, производная от группы D_n, так же порождается элементами s и r.

Заметим, что для арности $2n$ последний факт вытекает из следствия 8.

Пример 2. Так как среди соотношений, определяющих симметрическую группу S_n, имеются соотношения

$$r^n = (rr_1)^{n-1} = (r_1 r^{-1} r_1 r)^3 = e \text{ (смотри, например, [36])},$$

где $r = (123 \dots n)$, $r_1 = (12)$ — порождающие элементы группы S_n, то по теореме 17 полиадические группы арностей n, $2(n-1)$ и 12, производные от группы S_n, порождаются элементами r и r_1.

Если в качестве порождающих группы S_n взять элементы

$$r_1 = (12), r_2 = (23), \dots, r_{n-1} = (n-1n),$$

то среди соотношений , определяющих S_n, имеются соотношения

$$(r_i r_{i+1})^2 = e,\ 1 \leq i \leq n-2 \text{ (смотри, например, [36])}.$$

Поэтому 4-группа, производная от группы S_n, порождается всеми элементами $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ (по теореме 17).

Если в качестве порождающих группы S_n взять элементы

$$s_1 = (1n), s_2 = (2n), \dots, s_{n-1} = (n-1n)$$

и положить $s_n = s_1$, то среди соотношений , определяющих S_n, имеются соотношения (смотри, например, [36])

$$(s_i s_{i+1})^3 = (s_i s_{i+1} s_i s_j)^2 = e;\ j = 1, 2, \ldots, n-1,\ j \neq i, i+1.$$

Поэтому полиадические группы арности 6 и 8, производные от группы S_n, порождаются элементами $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ (по теореме 17).

Ввиду следствия 8, $n!$-группа, производная от S_n, порождается любым из выше указанных наборов элементов.

Пример 3. Знакопеременная группа A_n порождается элементами

$$t_i = (12)(i+1 i+2),\ i = 1, 2, \ldots, n-2$$

и среди соотношений, определяющих A_n (смотри, например, [36]), имеются соотношения

$$t_1^3 = (t_{j-1} t_j)^3 = e,\ 1 \leq j \leq n-2,$$

$$(t_i t_j)^2 = e,\ 1 \leq i < j-1,\ j \leq n-2.$$

Поэтому по теореме 17 полиадические группы арностей 3, 4 и 6, производные от группы A_n, порождаются множеством $\{t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}\}$.

Если в качестве порождающих группы A_n взять элементы

$$\nu_i = (in-1n),\ i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

то среди соотношений , определяющих A_n (смотри, например, [36]), имеются соотношения $\nu_1^3 = \ldots = \nu_{n-2}^3 = (\nu_i \nu_j)^2 = e;\ 1 \leq i < j \leq n-2$. Поэтому по теореме 17 тернарная группа и 4-группа, производные от группы A_n, порождаются множеством $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-2}\}$.

При нечетном $n \geq 4$ группа A_n порождается элементами $u = (34\ldots n),\ v = (123)$, а при четном $n \geq 4$ — элементами $w = (12)(34\ldots n),\ v = (123)$, причем имеются соответствующие соотношения $u^{n-2} = v^3 = (uv)^n = e$, $w^{n-2} = v^3 = (wv)^{n-1} = e$. Поэтому по теореме 17 при нечетном $n \geq 4$ полиадические группы арностей 3, $n-2$ и $2n$, производные от группы A_n, порождаются элементами u и v, а при четном $n \geq 4$ полиадические группы арностей 3, $n-2$ и $2(n-1)$, производные от группы A_n, порождаются элементами w и v.

Ввиду следствия 8, $(n!/2)$-группа, производная от группы A_n, порождается любым из указанных выше порождающих множеств.

Пример 4. Унимодулярная группа M_2 всех целочисленных матриц второго порядка с определителем ± 1 порождается элементами

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и среди соотношений, определяющих M_2 (смотри, например, [36]), имеются соотношения $R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = e$, тогда по следствию 9 полиадическая группа любой четной арности, производная от группы M_2, порождается элементами R_1, R_2, и R_3.

Замечание. В приведенных примерах для конкретных n могут существовать полиадические группы, производные от соответствующих бинарных групп, арность которых отлична от указанных арностей в примерах. Например, в примере 2 для конкретных n могут существовать полиадические группы, производные от группы S_n, порождаемые r и r_1, арность которых отлична от $n, 2(n-1), 4, 8$. Для $n = 17$ имеем

$$17 = 1(17-1)+1 = 2(9-1)+1 = 4(5-1)+1 = 8(3-1)+1.$$

Поэтому по следствию 9 полиадические группы арностей 3, 5, 9 и 17, производные от группы S_{17}, порождаются элементами r и r_1.

До сих пор мы находили порождающие множества n-групп, зная порождающие множества сопутствующих им бинарных групп. Рассмотрим далее обратный случай. Будем искать порождающие множества бинарных групп, которые получаются из n-группы с известным порождающим множеством по одному из описанных выше способов. Очевидно,любая обертывающая группа для n-группы с заданным порождающим множеством порождается этим же множеством (следует из определения обертывающей группы). Рассмотрим другие ситуации.

Предложение 25 *(Предложение 4, [63]-А) Если n-группа $\langle G, f\rangle$, производная от группы G, порождается множеством M, то группа G также порождается множеством M.*

Доказательство. Так как n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством M, то

$$b = f_{(m)}(a_1^{m(n-1)+1}) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{m(n-1)+1}$$

для любого элемента $b \in G$, где $a_i \in M \cup \overline{M}$ (здесь $\cdot$ — бинарная операция в группе G). Если $a_i \in \overline{M}$, т.е. $a_i = \bar{c}$ для некоторого $c \in M$, то из

$$f(\bar{c}, \underbrace{c, \ldots, c}_{n-1}) = \bar{c} \cdot \underbrace{c \cdot \ldots \cdot c}_{n-2} \cdot c = c$$

получаем $\bar{c} = \underbrace{c^{-1} \cdot \ldots \cdot c^{-1}}_{n-2}$. Таким образом, элемент b совпадает с результатом применения операции $\cdot$ к элементам из множества $M \cup M^{-1}$. Это означает, что группа G порождается множеством M. Предложение доказано.

Предложение 25 можно обобщить, доказав предварительно лемму.

Лемма 2 *(Лемма 1, [63]-А) Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа, $a, c \in G$,*

$$\varphi(x) = f(c, x, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}), \ d = f(\overset{(n)}{c})$$

— автоморфизм и элемент группы $ret_c\langle G, f\rangle$ из теоремы Глускина-Хоссу. Тогда

1) $d^{-1} = \bar{c}$;

2) $\overline{\varphi(a)} = f(c, \bar{a}, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c})$;

3) $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}) = f(c, c, \bar{a}, \overset{(n-3)}{a})$;

4) $(\varphi^k(a))^{-1} = \varphi^k(a^{-1})$;

5) $\bar{a} = d^{-1} \cdot (\varphi^{n-2}(a))^{-1} \cdot \ldots \cdot (\varphi(a))^{-1} = d^{-1} \cdot \varphi^{n-2}(a^{-1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(a^{-1})$.

Доказательство. 1) Равенство $d^{-1} = \bar{c}$ доказывается в ходе доказательства теоремы Глускина-Хоссу.

2) Так как (используем нейтральность последовательности $\bar{c}, \overset{(n-2)}{c}$)

$$f(\overset{(n-1)}{\varphi(a)}, f(c, \bar{a}, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c})) = f(f(\overset{(n-1)}{c, a, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}}), f(c, \bar{a}, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c})) =$$

$$= f_{(2)}(c, \overset{(n-1)}{a}, \bar{a}, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}) = f(c, a, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}) = \varphi(a),$$

то верно второе равенство (по определению косого элемента).

3) Для любого элемента b из группы $ret_c\langle G, f\rangle$ обратный ему элемент находится по правилу $b^{-1} = f(c, \bar{b}, \overset{(n-3)}{b}, c)$ (следует из определения операции $\cdot$ в группе $ret_c\langle G, f\rangle$). Тогда, используя нейтральность последовательности $\bar{c}, \overset{(n-2)}{c}$, получим

$$\varphi(a)^{-1} = f(c, \overline{\varphi(a)}, \overset{(n-3)}{\varphi(a)}, c) =$$

$$= f(c, f(c, \bar{a}, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}), \overset{(n-3)}{f(c, a, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c})}, c) = f(c, c, \bar{a}, \overset{(n-3)}{a}),$$

т.е. верно третье равенство.

4) Так как φ — автоморфизм группы $ret_c\langle G, f\rangle$, то верно четвертое равенство.

5) Так как $f(\bar{a}, \overset{(n-1)}{a}) = a$, то, применяя теорему Глускина-Хоссу и 4), получаем $\bar{a} \cdot \varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-2}(a) \cdot d \cdot a = a$, откуда $\bar{a} = (\varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-2}(a) \cdot d)^{-1} = d^{-1} \cdot (\varphi^{n-2}(a))^{-1} \cdot \ldots \cdot (\varphi(a))^{-1} = d^{-1} \cdot \varphi^{n-2}(a^{-1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(a^{-1})$. Таким образом, верно пятое равенство. Лемма доказана.

Теорема 18 *(Теорема 8, [63]-А) Пусть n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством M, φ — тот же автоморфизм, что и в лемме 2,*

$$\varphi(M) = \{f(c, M, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c})\} \subseteq M \tag{32}$$

для некоторого элемента $c \in G$. Тогда группа $G = ret_c\langle G, f\rangle$ порождается множеством $M \cup \{d = f(\overset{(n)}{c})\}$.

Доказательство. В группе $G = ret_c\langle G, f\rangle$ бинарная операция $\cdot$ задается по правилу $a \cdot b = f(a, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, b)$. Если b — любой элемент из G, то по теореме 14 $b = f(a_1^{m(n-1)+1})$, где $a_i \in M \cup \overline{M}$. Тогда по теореме Глускина-Хоссу

$$b = a_1 \cdot \varphi(a_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(a_n) \cdot d \cdot \varphi(a_{n+1}) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(a_{2(n-1)+1}) \cdot d \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \varphi(a_{(m-1)(n-1)+2}) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(a_{m(n-1)+1}) \cdot d. \tag{33}$$

Если $a_i \in M$, то ввиду (32), $\varphi^k(a_i) \in \varphi^k(M) \subseteq M$. Если же $a_i \in \overline{M}$, т.е. $a_i = \bar{c}_i$ для некоторого элемента $c_i \in M$, то ввиду 5) леммы 2,

$$\bar{c}_i = d^{-1} \cdot (\varphi^{n-2}(c_i))^{-1} \cdot \ldots \cdot (\varphi(c_i))^{-1},$$

откуда, с учетом (32), следует $\bar{c}_i \in d^{-1} \cdot \underbrace{M^{-1} \cdot \ldots \cdot M^{-1}}_{n-2}$. Тогда, учитывая 4) леммы 2, а также то, что φ — автоморфизм группы G и $\varphi(d) = d$, получаем

$$\varphi^k(a_i) = \varphi^k(\bar{c}_i) \in \varphi^k(d^{-1} \cdot \underbrace{M^{-1} \cdot \ldots \cdot M^{-1}}_{n-2}) =$$

$$= \varphi^k(d^{-1}) \cdot \underbrace{\varphi^k(M^{-1}) \cdot \ldots \cdot \varphi^k(M^{-1})}_{n-2} =$$

$$= (\varphi^k(d))^{-1} \cdot \underbrace{(\varphi^k(M))^{-1} \cdot \ldots \cdot (\varphi^k(M))^{-1}}_{n-2} \subseteq d^{-1} \cdot \underbrace{M^{-1} \cdot \ldots \cdot M^{-1}}_{n-2}.$$

Таким образом, установлено, что в равенстве (33) либо $\varphi^k(a_i) \in M$, либо

$$\varphi^k(a_i) \in d^{-1} \cdot \underbrace{M^{-1} \cdot \ldots \cdot M^{-1}}_{n-2}.$$

Это означает, что элемент b совпадает с результатом применения операции $\cdot$ к элементам из множества $(M \cup \{d\}) \cup (M^{-1} \cup \{d\})$. Следовательно, группа G порождается множеством $M \cup \{d = f(\overset{(n)}{c})\}$. Теорема доказана.

Если c — идемпотент n-группы $\langle G, f\rangle$, то элемент d из последней теоремы совпадает с этим идемпотентом. Так как c — единица группы G, где бинарная операция $\cdot$ задана по правилу $a \cdot b = f(a, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, b)$, то из теоремы 18 вытекают два следствия.

Следствие 12 *(Следствие 13, [63]-А) Пусть n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством M, удовлетворяющим (32) для некоторого идемпотента $c \in G$. Тогда группа $G = ret_c\langle G, f\rangle$ порождается множеством M, где бинарная операция $\cdot$ задана по правилу $a \cdot b = f(a, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, b)$.*

Следствие 13 *(Следствие 14, [63]-А) Пусть n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством M, удовлетворяющим (32) для некоторого $c \in M$. Тогда:*

1) группа $G = ret_c\langle G, f\rangle$ порождается множеством $(M \diagdown \{c\}) \cup \{d\}$;

2) если c — идемпотент в $\langle G, f\rangle$, то группа $G = ret_c\langle G, f\rangle$ порождается множеством $M \diagdown \{c\}$, где бинарная операция $\cdot$ в обоих случаях задана по правилу $a \cdot b = f(a, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, b)$.

Замечание. Если n-группа $\langle G, f\rangle$ является производной от группы G, то единица e группы G является единицей и в n-группе $\langle G, f\rangle$. Поэтому выполняется условие (32), откуда и из следствия 13 вытекает предложение 25.

Из следствия 12 и пункта 2) следствия 13 вытекает

Следствие 14 *(Следствие 15, [63]-А) Если n-группа $\langle G, f\rangle$, производная от группы G, порождается множеством M, содержащим единицу e группы G, то группа G порождается множеством $M \diagdown \{e\}$.*

Разложение n-группы по подгруппе. Пусть $\langle H, f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$ и $h_1, \ldots, h_{n-2} \in H$. На множестве G вводим бинарное отношение

$$a \sim b \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ f(a, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, b)) \in H,$$

где g — $(n-1)$-арная операция из теоремы 1.

Докажем, что это отношение является эквивалентностью. Действительно, $a \sim a$ для любого элемента $a \in G$, так как $f(a, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)) = t(h_1^{n-2}) \in H$ (использовали тождество (10) и предложение 18). Если $a \sim b$ для некоторых элементов $a, b \in G$, т.е. $f(a, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, b)) \in H$, то

$$g(h_1^{n-2}, f(a, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, b))) = f(g(h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, b)), h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)) =$$
$$= f(b, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)) \in H,$$

т.е. $b \sim a$ (использовали тождества (12), (13) и предложение 18). Если $a \sim b$ и $b \sim c$ для некоторых элементов $a, b, c \in G$, т.е. $f(a, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, b)) \in H$ и $f(b, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, c)) \in H$, то

$$f(a, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, c)) = f(a, h_1^{n-2}, f(t(h_1^{n-2}), h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, c))) =$$

$$= f(a, h_1^{n-2}, f(f(g(h_1^{n-2}, b), h_1^{n-2}, b), h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, c))) =$$
$$= f(f(a, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, b)), h_1^{n-2}, f(b, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, c))) \in H,$$

т.е. $a \sim c$ (использовали тождества (9), (11), (1) и и предложение 18).

Таким образом, установленное на множестве G отношение эквивалентности разбивает это множество на классы эквивалентности. Каждый из полученных классов называется правым смежным классом n-группы $\langle G, f\rangle$ по подгруппе $\langle H, f\rangle$.

Обозначим $H^{n-1}a = \{f(h_1^{n-1}, a) \mid h_1, \ldots, h_{n-1} \in H\}$.

Предложение 26 *([51], Предложение 30, с. 87) Если A — некоторый правый смежный класс n-группы $\langle G, f\rangle$ по подгруппе $\langle H, f\rangle$ и $a \in A$, то $A = H^{n-1}a$. Верно и обратно, всякое множество $H^{n-1}b$ есть правый смежный класс n-группы $\langle G, f\rangle$ по подгруппе $\langle H, f\rangle$.*

Доказательство. Пусть $x \in A$, тогда $f(x, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)) \in H$, т.е. для некоторого элемента $h \in H$ верно $f(x, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)) = h$. Тогда

$$f(f(x, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)), h_1^{n-2}, a) = f(h, h_1^{n-2}, a) \in H^{n-1}a.$$

Используя тождества (1), (11) и (7), получим

$$f(f(x, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)), h_1^{n-2}, a) = f(x, h_1^{n-2}, f(g(h_1^{n-2}, a), h_1^{n-2}, a)) =$$
$$= f(x, h_1^{n-2}, t(h_1^{n-2})) = x.$$

Значит, $x \in H^{n-1}a$, т.е. $A \subseteq H^{n-1}a$. Если $y \in H^{n-1}a$, то $y = f({h'}_1^{n-1}, a)$ для некоторых элементов $h'_1, \ldots, h'_{n-1} \in H$. Тогда, используя тождества (1), (10) и предложение 18, получим

$$f(y, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)) = f(f({h'}_1^{n-1}, a), h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a)) =$$
$$= f({h'}_1^{n-1}, f(a, h_1^{n-2}, g(h_1^{n-2}, a))) = f({h'}_1^{n-1}, t(h_1^{n-2})) \in H.$$

Значит, $H^{n-1}a \subseteq A$. Мы доказали $A = H^{n-1}a$.

Обратно, элемент b принадлежит одному из правых смежных классов, например B, следовательно, по только что доказанному $B = H^{n-1}b$. Предложение доказано.

Как и в группах, наряду с введенным выше отношением эквивалентности можно ввести другое отношение эквивалентности, вполне аналогичное, считая, что

$$a \sim b \text{ тогда и только тогда, когда } f(g(h_1^{n-2}, a), h_1^{n-2}, b) \in H.$$

Полученные таким образом классы эквивалентности называются левыми смежными классами по подгруппе $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$. Точно также, как и в предложении 25, доказывается, что каждый левый смежный класс представим в форме

$$aH^{n-1} = \{f(a, h_1^{n-1}) \mid h_1, \ldots, h_{n-1} \in H\}$$

и, обратно, каждое подмножество вида bH^{n-1} является левым смежным классом по подгруппе $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$.

Так как для любого элемента $h \in H$ верно $hH^{n-1} = H = H^{n-1}h$ (проверяется непосредственно), то сама подгруппа $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ является одним из левых (правых) смежных классов.

Предложение 27 *([51], Предложение 31, с. 88) Мощность каждого правого (левого) смежного класса по подгруппе $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ равна мощности подгруппы $\langle H, f\rangle$.*

Доказательство. Зададим отображение τ из H в $H^{n-1}a$ по правилу

$$\tau(h) = f(h, h_1^{n-2}, a),$$

где $h_1, \ldots, h_{n-2}$ – фиксированные элементы из H, с помощью которых определяется отношение правой смежности по подгруппе $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$. Очевидно, τ — сюръективное отображение. В силу однозначной разрешимости уравнения $f(x, h_1^{n-2}, a) = b$ имеем инъективность τ. Для левого смежного класса доказывается аналогично. Предложение доказано.

Из этого предложения, как и в группах, имеем

Следствие 15 *[2](Теорема Лагранжа для n-групп) Если $\langle G, f\rangle$ — конечная n-группа порядка m, а ее подгруппа $\langle H, f\rangle$ имеет порядок k, то m делится на k и $\frac{m}{k}$ — число правых (левых) смежных классов.*

Число смежных классов (левых или правых) в разложении n-группы $\langle G, f\rangle$ по подгруппе $\langle H, f\rangle$ (в бесконечном случае мощность множества этих классов) называется индексом подгруппы $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$.

Мы замечаем, что разложение n-группы на смежные классы по ее подгруппе похоже на аналогичное разложение бинарной группы по подгруппе. Но в этих разложениях имеются и различия. Например, если среди смежных классов в группе имеется только один класс, который будет подгруппой, то в n-группе может случиться так, что каждый смежный класс является подгруппой в n-группе. Покажем это в примере.

Пример 1. ([14], стр. 73) Пусть $\langle S_n, f\rangle$ – тернарная группа, производная от симметрической группы S_n. Тернарная подгруппа $\langle A_n, f\rangle$ четных подстановок разбивает S_n на два смежных класса: A_n и T_n — все нечетные подстановки. Очевидно, $\langle T_n, f\rangle$ – также тернарная подгруппа.

Между подгруппами n-группы и подгруппами ретракта этой n-группы имеется тесная взаимосвязь, которая будет описана ниже.

Предложение 28 *([13], [59]-A) Если $\langle H, f\rangle$ — подгруппа n-группы $\langle G, f\rangle$, то cH^{n-1} и $H^{n-1}c$ — изоморфные подгруппы в группе $G = ret_c\langle G, f\rangle$ и отношения правой(левой) смежности по подгруппе $\langle H, f\rangle$ n-группы $\langle G, f\rangle$ и по подгруппе $H^{n-1}c$ (cH^{n-1}) группы G совпадают.*

Доказательство. В группе $G = ret_c\langle G, f\rangle$ бинарную операцию $\cdot$ зададим по правилу $a \cdot b = f(a, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, b)$. Если $f(c, h_1^{n-1}), f(c, h'^{n-1}_1) \in cH^{n-1}$, то, используя нейтральность последовательности $\bar{c}, \overset{(n-2)}{c}$, получим

$$f(c, h_1^{n-1}) \cdot f(c, h'^{n-1}_1) = f(f(c, h_1^{n-1}), \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, f(c, h'^{n-1}_1)) =$$

$$= f_{(2)}(c, h_1^{n-1}, h'^{n-1}_1) \in cH^{n-1}.$$

Замкнутость множества cH^{n-1} относительно действия бинарной операции $\cdot$ доказана. Аналогично доказывается замкнутость множества $H^{n-1}c$ относительно действия той же операции.

Единица c группы G принадлежит cH^{n-1} и $H^{n-1}c$, так как для элемента $h \in H$ верно $c = f(c, \bar{h}, \overset{(n-2)}{h}) = f(\bar{h}, \overset{(n-2)}{h}, c)$ благодаря нейтральности последовательности $\bar{h}, \overset{(n-2)}{h}$.

Отметим, что в группе G для любого элемента a обратный элемент $a^{-1} = f(c, \bar{a}, \overset{(n-3)}{a}, c)$ (проверяется непосредственно). Тогда, если $f(c, h_1^{n-1}) \in cH^{n-1}$, то, используя свойство 4 косого элемента, получим

$$f(c, h_1^{n-1})^{-1} = f(c, \overline{f(c, h_1^{n-1})}, \overset{(n-3)}{f(c, h_1^{n-1})}, c) = f(c, f_{(n^2-3n+1)}$$

$$(\underbrace{\overset{(n-3)}{h_{n-1}}, \bar{h}_{n-1}, \ldots, \overset{(n-3)}{h_1}, \bar{h}_1, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, \ldots, \overset{(n-3)}{h_{n-1}}, \bar{h}_{n-1}, \ldots, \overset{(n-3)}{h_1}, \bar{h}_1, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}}_{n-2 \text{ раза}}),$$

$$\overset{(n-3)}{f(c, h_1^{n-1})}, c) = f_{(n-1)}(c, \overset{(n-3)}{h_{n-1}}, \bar{h}_{n-1}, \ldots, \overset{(n-3)}{h_1}, \bar{h}_1, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, c) =$$

$$= f_{(n-2)}(c, \overset{(n-3)}{h_{n-1}}, \bar{h}_{n-1}, \ldots, \overset{(n-3)}{h_1}, \bar{h}_1) \in cH^{n-1}$$

(здесь использовали нейтральность последовательностей $\overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, c$ и $\overset{(n-3)}{h_j}, \bar{h}_j, h_j$ для $j = 1, \ldots, n-1$). Замкнутость множества cH^{n-1} относительно действия унарной операции $^{-1}$ доказана. Аналогично доказывается замкнутость множества $H^{n-1}c$ относительно действия той же операции. Итак, cH^{n-1} и $H^{n-1}c$ — подгруппы в группе G.

Задаем отображение $\tau : cH^{n-1} \to H^{n-1}c$ по правилу: для $h_1^{n-1} \in H$

$$\tau(f(c, h_1^{n-1})) = f(h_1^{n-1}, c).$$

Если $\tau(f(c, h_1^{n-1})) = \tau(f(c, {h'}_1^{n-1}))$, т.е. $f(h_1^{n-1}, c) = f({h'}_1^{n-1}, c)$, то, используя нейтральность последовательности $\overset{(n-2)}{c}, \bar{c}$, получим

$$f(c, h_1^{n-1}) = f(f(c, h_1^{n-1}), \overset{(n-2)}{c}, \bar{c}) = f(c, f(h_1^{n-1}, c), \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) =$$

$$= f(c, f({h'}_1^{n-1}, c), \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) = f(f(c, {h'}_1^{n-1}), \overset{(n-2)}{c}, \bar{c}) = f(c, {h'}_1^{n-1}).$$

Мы доказали, что τ – инъективное отображение. Сюръективность отображения τ очевидна. Значит, τ — биективное отображение.

Если $f(c, h_1^{n-1}), f(c, {h'}_1^{n-1}) \in cH^{n-1}$, то, используя нейтральность последовательностей $\bar{c}, \overset{(n-2)}{c}$ и $c, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}$, получим

$$\tau(f(c, h_1^{n-1}) \cdot f(c, {h'}_1^{n-1})) = \tau(f(f(c, h_1^{n-1}), \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, f(c, {h'}_1^{n-1}))) =$$

$$= \tau(f(c, f(h_1^{n-1}, {h'}_1), {h'}_2^{n-1})) = f(f(h_1^{n-1}, {h'}_1), {h'}_2^{n-1}, c) =$$

$$= f(f(h_1^{n-1}, c), \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, f({h'}_1^{n-1}, c)) = f(h_1^{n-1}, c) \cdot f({h'}_1^{n-1}, c) =$$

$$= \tau(f(c, h_1^{n-1})) \cdot \tau(f(c, {h'}_1^{n-1})).$$

Итак, τ – изоморфизм групп cH^{n-1} и $H^{n-1}c$.

Так как для любого элемента $b \in G$, используя вновь нейтральность последовательностей $c, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}$ и $\bar{c}, \overset{(n-2)}{c}$, имеем

$$H^{n-1}b = H^{n-1}f(c, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, b) = f((H^{n-1}c), \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}, b) = (H^{n-1}c) \cdot b,$$

$$(bH^{n-1} = f(b, \bar{c}, \overset{(n-2)}{c})H^{n-1} = f(b, \bar{c}, \overset{(n-3)}{c}(cH^{n-1})) = b \cdot (cH^{n-1}),)$$

то отношения правой(левой) смежности по подгруппе $\langle H, f\rangle$ n-группы $\langle G, f\rangle$ и по подгруппе $H^{n-1}c$ (cH^{n-1}) группы G совпадают. Предложение доказано.

В теории групп известен способ получения порождающего множества подгруппы H группы G с порождающим множеством X, использующий элементы множества X и элементы множества всех представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H (см., например, стр. 132, [37]). Аналогичный способ имеется и для n-групп. При этом тернарный и n-арный при $n > 3$ случаи существенно отличаются друг от друга и поэтому рассматриваются отдельно.

Пусть $\langle H, f\rangle$ — подгруппа n-группы $\langle G, f\rangle$. На $\langle G, f\rangle$ определим по аналогии с группами функцию выбора $g \to \{g\}$, которая всем элементам одного и того же правого смежного класса по подгруппе $\langle H, f\rangle$ ставит в соответствие один и тот же выбранный представитель этого класса. Такую функцию, как и в группах, назовем выбирающей функцией.

Отметим важные свойства выбирающей функции:

1) Для любых элементов $x_1, \ldots, x_n \in G$ верно

$$\{f(\{x_1\}, x_2, \ldots, x_n)\} = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}. \tag{34}$$

Действительно, $f(\overset{(n-1)}{H}, f(\{x_1\}, x_2, \ldots, x_n)) = f(f(\overset{(n-1)}{H}, \{x_1\}), x_2, \ldots, x_n) =$
$= f(f(\overset{(n-1)}{H}, x_1), x_2, \ldots, x_n) = f(\overset{(n-1)}{H}, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, откуда следует (34).

2) Для любого элемента $x \in G$ верно

$$\{\{x\}\} = \{x\}. \tag{35}$$

Действительно, так как $f(\overset{(n-1)}{H}, \{x\}) = f(\overset{(n-1)}{H}, x)$, то верно (35).

Выбирающая функция позволяет по порождающим элементам n-группы строить порождающие элементы ее подгруппы. Покажем это вначале для тернарных групп.

Теорема 19 *(Теорема 1, [64]-A) Пусть X — порождающее множество тернарной группы $\langle G, f\rangle$, $\langle H, f\rangle$ — ее подгруппа, $g \to \{g\}$ — выбирающая функция по этой подгруппе, S — множество всех выбранных представителей правых смежных классов по $\langle H, f\rangle$, a — фиксированный элемент из H,*

$$R = \{r = f(f(s, \bar{a}, x), \overline{\{f(s, \bar{a}, x)\}}, a) \mid s \in S, x \in X \cup \overline{X}\},$$

$$T = \{t = f(\bar{a}, f(s, x, a), \overline{\{f(s, x, a)\}}) \mid s \in S, x \in X \cup \overline{X}\}.$$

Тогда:

1) $R \cup T \subseteq H$;

2) $\overline{R} = T, \overline{T} = R$;

3) если $a \in S$, то $\langle H, f\rangle$ порождается любым из множеств R или T.

Доказательство. 1) Покажем, что элементы r из R лежат в H. Действительно, так как $f(H,H,f(s,\bar{a},x)) = f(H,H,\{f(s,\bar{a},x)\})$, то для некоторых h_1,h_2,h_3,h_4 из H верно $f(h_1,h_2,f(s,\bar{a},x)) = f(h_3,h_4,\{f(s,\bar{a},x)\})$, откуда

$$f(f(h_1,h_2,a),\bar{a},f(s,\bar{a},x)) = f(f(h_3,h_4,a),\bar{a},\{f(s,\bar{a},x)\}),$$

если в последнем равенстве положить $h = f(h_1,h_2,a)$, $h' = f(h_3,h_4,a)$, то получим

$$f(h,\bar{a},f(s,\bar{a},x)) = f(h',\bar{a},\{f(s,\bar{a},x)\}),$$

из этого равенства находим $h' = f(h,\bar{a},f(f(s,\bar{a},x),\overline{\{f(s,\bar{a},x)\}},a))$, откуда

$$f(f(s,\bar{a},x),\overline{\{f(s,\bar{a},x)\}},a) = f(a,\bar{h},h') \in H,$$

т.е. $r \in H$. Тогда $R \subseteq H$.

Покажем, что элементы t из T лежат в H. Действительно, так как $f(H,H,f(s,x,a)) = f(H,H,\{f(s,x,a)\})$, то верно

$$f(h_1,h_2,f(s,x,a)) = f(h_3,h_4,\{f(s,x,a)\})$$

для h_1,h_2,h_3,h_4 из H, откуда, используя равенства (2) и свойство 2 косого элемента, получим $f(a,f(\bar{a},h_1,h_2),f(s,x,a)) = f(a,f(\bar{a},h_3,h_4),\{f(s,x,a)\})$, если в последнем равенстве положить $h = f(\bar{a},h_1,h_2)$, $h' = f(\bar{a},h_3,h_4)$, то имеем $f(a,h,f(s,x,a)) = f(a,h',\{f(s,x,a)\})$, из этого равенства находим

$$h' = f(\bar{a},f(a,h,f(s,x,a)),\overline{\{f(s,x,a)\}}) = f(h,a,f(\bar{a},f(s,x,a),\overline{\{f(s,x,a)\}})),$$

откуда $f(\bar{a},f(s,x,a),\overline{\{f(s,x,a)\}}) = f(\bar{a},\bar{h},h') \in H$, т.е. $t \in H$. Тогда $T \subseteq H$.

2) Найдем косой элемент для r. Для этого положим $s' = \{f(s,\bar{a},x)\} \in S$. Тогда, используя нейтральность последовательности $\bar{a},x,\bar{x},a$, а также равенство (34), получим

$$s = \{s\} = \{f(f(s,\bar{a},x),\bar{x},a)\} = \{f(\{f(s,\bar{a},x)\},\bar{x},a)\} = \{f(s',\bar{x},a)\},$$

откуда имеем

$$\bar{s} = \overline{\{f(s',\bar{x},a)\}}. \tag{36}$$

Теперь, используя свойство 4 косого элемента при $n = 3$, определение элемента s', нейтральность последовательности $\bar{a},x,\bar{x},a$, а также равенство (36), получим

$$\bar{r} = \overline{f(f(s,\bar{a},x),\overline{\{f(s,\bar{a},x)\}},a)} = f(\bar{a},\overline{\overline{\{f(s,\bar{a},x)\}}},\overline{f(s,\bar{a},x)}) =$$

$$= f(\bar{a},\{f(s,\bar{a},x)\},f(\bar{x},a,\bar{s})) = f(\bar{a},s',f(\bar{x},a,\bar{s})) =$$
$$= f(\bar{a},f(s',\bar{x},a),\overline{\{f(s',\bar{x},a)\}}) \in T, \quad \text{т.е. } \overline{R} \subseteq T.$$

Найдем далее косой элемент для t. Для этого пусть $s'' = \{f(s,x,a)\} \in S$. Тогда, используя нейтральность последовательности $x,a,\bar{a},\bar{x}$, а также равенство (34), получим

$$s = \{s\} = \{f(f(s,x,a),\bar{a},\bar{x})\} = \{f(\{f(s,x,a)\},\bar{a},\bar{x})\} = \{f(s'',\bar{a},\bar{x})\},$$

откуда имеем

$$\bar{s} = \overline{\{f(s'',\bar{a},\bar{x})\}}. \tag{37}$$

Теперь, используя свойство 4 косого элемента при $n = 3$, определение элемента s'', нейтральность последовательности $x, a, \bar{a}, \bar{x}$, а также равенство (37), получим

$$\bar{t} = \overline{f(\bar{a}, f(s,x,a), \overline{\{f(s,x,a)\}})} = f(\overline{\overline{\{f(s,x,a)\}}}, \overline{f(s,x,a)}, \bar{\bar{a}}) =$$

$$= f(\{f(s,x,a)\}, f(\bar{a},\bar{x},\bar{s}), a) = f(s'', f(\bar{a},\bar{x},\bar{s}), a) =$$
$$= f(f(s'',\bar{a},\bar{x}), \overline{\{f(s'',\bar{a},\bar{x})\}}, a) \in R, \quad \text{т.е. } \overline{T} \subseteq R.$$

Из включений $\overline{R} \subseteq T$ и $\overline{T} \subseteq R$ следуют включения $\overline{\overline{R}} \subseteq \overline{T}$ и $\overline{\overline{T}} \subseteq \overline{R}$, откуда, ввиду выполняющегося в тернарной группе $\langle G, f\rangle$ тождества $\bar{\bar{x}} = x$, получаются включения $R \subseteq \overline{T}$ и $T \subseteq \overline{R}$, а значит, и равенства $\overline{R} = T, \overline{T} = R$.

3) Пусть w — произвольный элемент из H. Так как $w \in G$ и $\langle G, f\rangle$ порождается множеством X, то, согласно теореме 14, этот элемент может быть представлен в виде $w = f_{(m)}(y_1^{2m+1})$, где $y_i \in X \cup \overline{X}$. Используя тот факт, что для любых элементов $b, c \in G$ последовательности $(b, \bar{b})$, $(\bar{b}, b)$, $(b, \bar{c}, c, \bar{b})$ являются нейтральными, получим

$$w = f_{(m)}(f(f(a,\bar{a},y_1), \overline{\{f(a,\bar{a},y_1)\}}, \{y_1\}),$$

$$f(y_2, a, f(\overline{\{f(y_1,y_2,a)\}}, \{f(y_1,y_2,a)\}, \bar{a})),$$
$$f(y_3, \overline{\{f(f(y_1,y_2,a),\bar{a},y_3)\}}, \{f(y_1,y_2,y_3)\}),$$
$$f(y_4, a, f(\overline{\{f(f(y_1,y_2,y_3),y_4,a)\}}, \{f(f(y_1,y_2,y_3),y_4,a)\}, \bar{a})), \ldots$$
$$\ldots, f(y_{2m}, a, f(\overline{\{f_{(m)}(y_1^{2m},a)\}}, \{f_{(m)}(y_1^{2m},a)\}, \bar{a})),$$
$$f(y_{2m+1}, \overline{\{f(f_{(m)}(y_1^{2m},a),\bar{a},y_{2m+1})\}}, \{f_{(m)}(y_1^{2m+1})\})).$$

Последнее равенство, используя равенства $\{w\} = \{a\} = a$ и равенство (34), а также полагая $u_1 = a$, $u_{2i} = f_{(i-1)}(y_1^{2i-1})$, $u_{2i+1} = f_{(i)}(y_1^{2i}, a)$ для $i = 1, 2, \ldots, 2m+1$, перепишем в виде

$$w = f_{(m)}(f(f(\{u_1\},\bar{a},y_1), \overline{\{f(\{u_1\},\bar{a},y_1)\}}, a),$$
$$f(\bar{a}, f(\{u_2\},y_2,a), \overline{\{f(\{u_2\},y_2,a)\}}),$$
$$f(f(\{u_3\},\bar{a},y_3), \overline{\{f(\{u_3\},\bar{a},y_3)\}}, a),$$
$$f(\bar{a}, f(\{u_4\},y_4,a), \overline{\{f(\{u_4\},y_4,a)\}}), \ldots$$
$$\ldots, f(\bar{a}, f(\{u_{2m}\},y_{2m},a), \overline{\{f(\{u_{2m}\},y_{2m},a)\}}),$$
$$f(f(\{u_{2m+1}\},\bar{a},y_{2m+1}), \overline{\{f(\{u_{2m+1}\},\bar{a},y_{2m+1})\}}, a)).$$

Введя обозначения $s_i = \{u_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 2m+1$, последнее равенство можно переписать следующим образом

$$w = f_{(m)}(\underbrace{f(f(s_1,\bar{a},y_1), \overline{\{f(s_1,\bar{a},y_1)\}}, a)}_{r_1 \in R}, \underbrace{f(\bar{a}, f(s_2,y_2,a), \overline{\{f(s_2,y_2,a)\}})}_{t_1 \in T},$$

$$\underbrace{f(f(s_3,\bar{a},y_3), \overline{\{f(s_3,\bar{a},y_3)\}}, a)}_{r_2 \in R}, \underbrace{f(\bar{a}, f(s_4,y_4,a), \overline{\{f(s_4,y_4,a)\}})}_{t_2 \in T}, \ldots$$

$$\ldots, \underbrace{f(\bar{a}, f(s_{2m},y_{2m},a), \overline{\{f(s_{2m},y_{2m},a)\}})}_{t_m \in T},$$

$$\underbrace{f(f(s_{2m+1},\bar{a},y_{2m+1}),\overline{\{f(s_{2m+1},\bar{a},y_{2m+1})\}},a)}_{r_{m+1}\in R}).$$

А так как, по пункту 2) этой теоремы, $t_1,\ldots,t_m \in \overline{R}$, $r_1,\ldots,r_{m+1} \in \overline{T}$, то, ввиду теоремы 14, $w \in \langle R\rangle$, $w \in \langle T\rangle$, откуда, в силу произвольного выбора элемента $w \in H$, следуют включения $H \subseteq \langle R\rangle$, $H \subseteq \langle T\rangle$. Обратные включения $\langle R\rangle \subseteq H$, $\langle T\rangle \subseteq H$ следуют из доказанных в пункте 1) включений $R \subseteq H$, $T \subseteq H$. Таким образом, $H = \langle R\rangle$, $H = \langle T\rangle$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь n-группы при $n \geq 4$. Нам понадобится

Лемма 3 *([51]-A, Лемма 3, с. 95) Пусть $\langle G,f\rangle$ — n-группа, $\langle H,f\rangle$ — ее подгруппа, $g \to \{g\}$ — выбирающая функция по этой подгруппе. Тогда $f(c,b,\overset{(n-3)}{\{b\}},\overline{\{b\}}) \in H$ для любых элементов $c \in H$, $b \in G$.*

Доказательство. Так как $f(\overset{(n-1)}{H},b) = f(\overset{(n-1)}{H},\{b\})$ и $c \in H$, то для некоторых элементов $h_1,\ldots,h_{2n-3}$ из H имеем равенство

$$f(h_1,\ldots,h_{n-2},c,b) = f(h_{n-1},\ldots,h_{2n-3},\{b\}),$$

откуда $f(f(h_1,\ldots,h_{n-2},c,b),\overset{(n-3)}{\{b\}},\overline{\{b\}},c) = f(h_{n-1},\ldots,h_{2n-3},f(\overset{(n-2)}{\{b\}},\overline{\{b\}},c))$, или, в силу нейтральности последовательности $(\overset{(n-2)}{\{b\}},\overline{\{b\}})$,

$$f(h_1,\ldots,h_{n-2},f(c,b,\overset{(n-3)}{\{b\}},\overline{\{b\}}),c) = f(h_{n-1},\ldots,h_{2n-3},c) \in H.$$

Но $\langle H,f\rangle$ — подгруппа $\langle G,f\rangle$, то решение $f(c,b,\overset{(n-3)}{\{b\}},\overline{\{b\}})$ уравнения $f(h_1,\ldots,h_{n-2},z,c) = f(h_{n-1},\ldots,h_{2n-3},c)$ лежит в H, т.е. $f(c,b,\overset{(n-3)}{\{b\}},\overline{\{b\}}) \in H$. Лемма доказана.

Покажем теперь, как выбирающая функция помогает строить порождающие элементы подгруппы в n-группе при $n \geq 4$, используя порождающие элементы n-группы.

Теорема 20 *(Теорема 2, [64]-A) Пусть n-группа $\langle G,f\rangle$ порождается множеством X, $\langle H,f\rangle$ — подгруппа в $\langle G,f\rangle$, $g \to \{g\}$ — выбирающая функция по этой подгруппе, S — множество всех выбранных представителей правых смежных классов по $\langle H,f\rangle$, a — фиксированный элемент из H,*

$$T = \{t_0(s,y),t_1(s,y),\ldots,t_{n-2}(s,y),\ \mid s \in S, y \in X \cup \overline{X}\},$$

где $$t_0(s,y) = f(\bar{a},f(s,y,\overset{(n-2)}{a}),\overset{(n-3)}{\{f(s,y,\overset{(n-2)}{a})\}},\overline{\{f(s,y,\overset{(n-2)}{a})\}}),$$

$$t_i(s,y) = f(\bar{a},f(s,\overset{(i-1)}{a},\bar{a},y,\overset{(n-2-i)}{a}),\overset{(n-3)}{\{f(s,\overset{(i-1)}{a},\bar{a},y,\overset{(n-2-i)}{a})\}},$$
$$\overline{\{f(s,\overset{(i-1)}{a},\bar{a},y,\overset{(n-2-i)}{a})\}}),$$

для $i = 1,2,\ldots,n-2$. Тогда $T \subseteq H$, если же $a \in S$, то $\langle H,f\rangle$ порождается множеством $T \cup \{a\}$.

Доказательство. Включение $T \subseteq H$ следует из леммы 3, если в ней положить $c = \bar{a}, b = f(s, y, \overset{(n-2)}{a})$ или $b = f(s, \overset{(i-1)}{a}, \bar{a}, y, \overset{(n-2-i)}{a})$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Пусть u — произвольный элемент из H. Так как $u \in H$ и $\langle G, f\rangle$ порождается множеством X, то, согласно теореме 14, этот элемент может быть представлен в виде $u = f_{(m)}(y_1^{m(n-1)+1})$, $y_j \in X \cup \overline{X}$, $j = 1, 2, \ldots, m(n-1)+1$. Полагая $u_0 = a, u_{k(n-1)+1} = f_{(k)}(y_1^{k(n-1)+1}), u_{k(n-1)+l} = f_{(k+1)}(y_1^{k(n-1)+l}, \overset{(n-l)}{a})$, где при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ всякий раз $l = 2, 3, \ldots, n-1$, и, используя свойства 1, 2 выбирающей функции, будем иметь

$$\{f(\{u_0\}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, y_1)\} = \{u_1\}, \quad \{f(\{u_{k(n-1)+1}\}, y_{k(n-1)+2}, \overset{(n-2)}{a})\} = \{u_{k(n-1)+2}\},$$

$$\{f(\{u_{k(n-1)+i+1}\}, \overset{(i-1)}{a}, \bar{a}, y_{k(n-1)+i+2}, \overset{(n-i-2)}{a})\} = \{u_{k(n-1)+i+2}\},$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-2$ и $u_{m(n-1)+1} = u$.

Теперь легко устанавливается нейтральность последовательностей:

$$\overset{(n-3)}{\{f(\{u_0\}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, y_1)\}}, \overline{\{f(\{u_0\}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, y_1)\}}, \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}, \{u_1\};$$

$$\overset{(n-3)}{\{f(\{u_{k(n-1)+1}\}, y_{k(n-1)+2}, \overset{(n-2)}{a})\}}, \overline{\{f(\{u_{k(n-1)+1}\}, y_{k(n-1)+2}, \overset{(n-2)}{a})\}},$$
$$\overset{(n-2)}{a}, \bar{a}, \{u_{k(n-1)+2}\};$$

$$\overset{(n-3)}{\{f(\{u_{k(n-1)+i+1}\}, \overset{(i-1)}{a}, \bar{a}, y_{k(n-1)+i+2}, \overset{(n-i-2)}{a})\}},$$
$$\overline{\{f(\{u_{k(n-1)+i+1}\}, \overset{(i-1)}{a}, \bar{a}, y_{k(n-1)+i+2}, \overset{(n-i-2)}{a})\}}, \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}, \{u_{k(n-1)+i+2}\},$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

По условию $\{a\} = a$, а так как элементы $u, a \in H$, то

$$\{u\} = \{f_{(m)}(y_1^{m(n-1)+1})\} = a.$$

Поэтому, используя нейтральность указанных последовательностей, будем иметь

$$u = f_{(m)}(y_1^{m(n-1)+1}) = f_{(m(n-1)+2)}(\overset{(n-2)}{a},$$

$$\underbrace{f(\bar{a}, f(\{u_0\}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, y_1), \overset{(n-3)}{\{f(\{u_0\}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, y_1)\}}, \overline{\{f(\{u_0\}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, y_1)\}})}_{v_1}, \overset{(n-2)}{a},$$

$$\underbrace{f(\bar{a}, f(\{u_1\}, y_2, \overset{(n-2)}{a}), \overset{(n-3)}{\{f(\{u_1\}, y_2, \overset{(n-2)}{a})\}}, \overline{\{f(\{u_1\}, y_2, \overset{(n-2)}{a})\}})}_{v_2}, \overset{(n-2)}{a},$$

$$\underbrace{f(\bar{a}, f(\{u_2\}, \bar{a}, y_3, \overset{(n-3)}{a}), \overset{(n-3)}{\{f(\{u_2\}, \bar{a}, y_3, \overset{(n-3)}{a})\}}, \overline{\{f(\{u_2\}, \bar{a}, y_3, \overset{(n-3)}{a})\}})}_{v_3}, \overset{(n-2)}{a},$$

$$\ldots, \overset{(n-2)}{a}, v_{m(n-1)+1}, \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}, \{u_{m(n-1)+1}\}) =$$

$$= f_{(m(n-1)+1)}(\overset{(n-2)}{a}, v_1, \overset{(n-2)}{a}, v_2, \ldots, \overset{(n-2)}{a}, v_{m(n-1)+1}, \{f_{(m)}(y_1^{m(n-1)+1})\}) =$$

$$= f_{(m(n-1)+1)}(\overset{(n-2)}{a}, v_1, \overset{(n-2)}{a}, v_2, \ldots, \overset{(n-2)}{a}, v_{m(n-1)+1}, a),$$

где

$$v_{m(n-1)+1} = f(\bar{a}, f(\{u_{m(n-1)}\}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, y_{m(n-1)+1}),$$

$$\{f(\{u_{m(n-1)}\}, \overset{(n-3)}{\overset{(n-3)}{a}}, \bar{a}, y_{m(n-1)+1})\}, \overline{\{f(\{u_{m(n-1)}\}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, y_{m(n-1)+1})\}}).$$

Таким образом, доказано равенство

$$u = f_{(m(n-1)+1)}(\overset{(n-2)}{a}, v_1, \overset{(n-2)}{a}, v_2, \ldots, \overset{(n-2)}{a}, v_{m(n-1)+1}, a).$$

Так как все $v_1, v_2, \ldots, v_{m(n-1)+1}$ принадлежат T и элемент u выбран в H произвольно, то по теореме 14 имеем включение $H \subseteq \langle T \cup \{a\}\rangle$. Обратное включение $\langle T \cup \{a\}\rangle \subseteq H$ следует из доказанного ранее включения $T \subseteq H$. Таким образом, $H = \langle T \cup \{a\}\rangle$. Теорема доказана.

Следствие 16 *(Следствие, [64]-A) Подгруппа конечного индекса в конечно порожденной n-группе конечно порождена.*

Степень элемента в n-группе. Результат применения k раз ($k \geq 1$) операции f к $k(n-1)+1$ одинаковым элементам, которые равны элементу a, называется неотрицательной k-той n-арной степенью элемента a и обозначается $a^{\langle k\rangle}$. Полагают $a^{\langle 0\rangle} = a$. Отрицательную k-тую n-арную степень элемента a определяют как решение уравнения $f_{(-k)}(\overset{(-k(n-1))}{a}, x) = a$. Таким образом, при $k \geq 0$ верно равенство $a^{\langle k\rangle} = f_{(k)}(\overset{(k(n-1)+1)}{a})$, а при $k < 0$ верно равенство $f_{(-k)}(\overset{(-k(n-1))}{a}, a^{\langle k\rangle}) = a$. Отметим основные свойства n-арной степени (их можно найти в работах [2], [11], [14], [65]-A).

Предложение 29 *В n-группе $\langle G, f\rangle$ для любого элемента a из G и любых целых чисел $k_1, \ldots, k_n$ верны равенства*

1) $f(a^{\langle k_1\rangle}, \ldots, a^{\langle k_n\rangle}) = a^{\langle k_1+\ldots+k_n+1\rangle} = f(a^{\langle k_{\sigma(1)}\rangle}, \ldots, a^{\langle k_{\sigma(n)}\rangle})$, где σ — любая перестановка из S_n;

2) $(a^{\langle k_1\rangle})^{\langle k_2\rangle} = a^{\langle k_1k_2(n-1)+k_1+k_2\rangle}$.

Отметим свойства n-арных степеней при выборе косого элемента.

Предложение 30 *В n-группе $\langle G, f\rangle$ для любого целого числа k и любого элемента a из G верны равенства*

1) $\bar{a} = a^{\langle -1\rangle}$;

2) $\bar{a}^{\langle k\rangle} = a^{\langle -k(n-2)-1\rangle} = \overline{a^{\langle k\rangle}}$.

По аналогии с группами, верно

Предложение 31 *Для любого элемента a n-группы $a^{\langle k\rangle} = a^{\langle l\rangle}$ тогда и только тогда, когда $a^{\langle k-l\rangle} = a$.*

Продолжая аналогию теории групп, верно

Предложение 32 *Для элемента a из n-группы множество $\langle a\rangle$ всех n-арных степеней этого элемента является подгруппой в этой n-группе.*

Подгруппа $\langle a\rangle$ из предложения 32 называется циклической подгруппой n-группы, порожденной элементом a.

Если все n-арные степени элемента a являются различными элементами n-группы, то a называется элементом бесконечного n-арного порядка. Если же среди n-арных степеней элемента a имеются равные, например, $a^{\langle k\rangle} = a^{\langle l\rangle}$ при $k > l$, то, согласно предложению 31, $a^{\langle k-l\rangle} = a$, т.е. существуют положительные n-арные степени элемента a, равные этому элементу. Пусть k — наименьшая положительная n-арная степень элемента a, равная этому элементу, т.е.

1) $a^{\langle k\rangle} = a$, $k > 0$,

2) если $a^{\langle l\rangle} = a$, $l > 0$, то $l \geq k$.

В этом случае говорят, что a есть элемент конечного порядка, а именно порядка k. Пишут $Ord_n a = k$.

Из [14] (лемма 2.5.13) имеем

Предложение 33 *Для любого элемента c из n-группы $\langle G, f\rangle$ и любого натурального числа s верно равенство $c^{\langle s\rangle} = d^s$, где $d = f(\overset{(n)}{c})$ и d^s — бинарная степень в группе $ret_c\langle G, f\rangle$.*

Следствие 17 *В n-группе $\langle G, f\rangle$ для любого элемента c его n-арный порядок равен порядку элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ в группе $ret_c\langle G, f\rangle$.*

Следствие 18 *В n-группе для любого элемента c конечного n-арного порядка равенство $c^{\langle s\rangle} = c$ верно тогда и только тогда, когда s кратно n-арному порядку элемента c.*

Следствие 19 *В n-группе для любого элемента c конечного n-арного порядка равенство $c^{\langle s\rangle} = c^{\langle t\rangle}$ верно тогда и только тогда, когда $s - t$ кратно n-арному порядку элемента c.*

Как и в группах, верно

Предложение 34 *(Предложение 3.7, [11]) Если элемент a из n-группы имеет конечный n-арный порядок k, то все элементы*

$$a, a^{\langle 1\rangle}, \ldots, a^{\langle k-1\rangle} \tag{38}$$

будут различными и всякая другая n-арная степень элемента a равна одному из элементов последовательности (38).

Следствие 20 *Если элемент a из n-группы имеет конечный n-арный порядок k, то порядок циклической подгруппы этой n-группы, порожденной элементом a, равен k и эта подгруппа состоит из элементов последовательности (38).*

Отметим, что идемпотент n-группы имеет n-арный порядок 1 и циклическая подгруппа этой n-группы, порожденная идемпотентом, будет одноэлементной.

Предложение 35 *[2] Если элемент a из n-группы имеет конечный n-арный порядок k, взаимно простой с $n-1$, то в циклической подгруппе этой n-группы, порожденной элементом a, существует единственный идемпотент.*

Е. Пост доказал (см. [2]), что если $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ — конечная циклическая подгруппа в n-группе, то

$$Ord_n a^{\langle s\rangle} = \frac{Ord_n a}{\text{НОД}(s(n-1)+1, Ord_n a)}, \tag{39}$$

где $1 \le s \le Ord_n a - 1$.

Следствие 21 *(Лемма из [38]) Если элемент a из n-группы $\langle G, f\rangle$ имеет конечный n-арный порядок, то*

$$Ord_n \bar{a} = \frac{Ord_n a}{\textit{НОД}(n-2, Ord_n a)}. \tag{40}$$

Как и в группах, назовем n-группу периодической, если n-арные порядки всех ее элементов конечны, n-группой без кручения, если все ее элементы имеют бесконечный n-арный порядок, смешанной, если она содержит элементы как конечного, так и бесконечного n-арного порядка. Очевидно

Предложение 36 *(Теорема 1, [66]-A) Если соответствующая группа G_0 n-группы $\langle G, f\rangle$ является периодической, то $\langle G, f\rangle$ будет также периодической.*

Так как ретракт и соответствующая группа одной и той же n-группы изоморфны, то о периодичности n-группы можно также судить по периодичности ее ретракта, т.е. верно

Следствие 22 *Если ретракт n-группы $\langle G, f\rangle$ является периодической группой, то $\langle G, f\rangle$ также будет периодической.*

Инвариантные и полуинвариантные подгруппы. Инвариантность подгрупп в группе обобщается на n-арный случай двумя вариантами.

Подгруппа $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ называется инвариантной, если

$$f(x, \overset{(n-1)}{H}) = f(\overset{(i-1)}{H}, x, \overset{(n-i)}{H})$$

для любого элемента $x \in G$ и всех $i = 2, 3, \ldots, n$.

Подгруппа $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ называется полуинвариантной, если

$$f(x, \overset{(n-1)}{H}) = f(\overset{(n-1)}{H}, x)$$

для любого элемента $x \in G$.

Отметим, что каждый идемпотент из n-группы (если он есть) является одноэлементной полуинвариантной подгруппой в этой n-группе, а каждая единица из n-группы (если она есть) является одноэлементной инвариантной подгруппой в этой n-группе.

Известны несколько признаков инвариантности подгруппы в n-группе (смотри, например, [11], [14]), собранные в одной теореме.

Теорема 21 . *Для подгруппы $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\langle H, f\rangle$ инвариантна в $\langle G, f\rangle$;

2) $f(x, \overset{(n-1)}{H}) = f(H, x, \overset{(n-2)}{H}) = f(\overset{(n-1)}{H}, x)$ для любого элемента $x \in G$;

3) $f(x, H, \overset{(n-3)}{x}, \bar{x}) = H$ для любого элемента $x \in G$;

4) $f(\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, H, x) = H$ для любого элемента $x \in G$.

Для подгрупп в n-группе также имеется признак полуинвариантности, который непосредственно следует из определения полуинвариантной подгруппы. Этот признак формулируется следующим образом: подгруппа в n-группе является полуинвариантной тогда и только тогда, когда левые и правые смежные классы по этой подгруппе в n-группе совпадают.

Как и в группах, пересечение любого множества инвариантных подгрупп в n-группе, если оно не пусто, является инвариантной подгруппой в этой же n-группе.

Рассмотрим n-группу $\langle G, f\rangle$ и ее полуинвариантную подгруппу $\langle H, f\rangle$. Обозначим через G/H множество всех смежных классов n-группы $\langle G, f\rangle$ по ее подгруппе $\langle H, f\rangle$ (здесь нет нужды говорить о левых или правых смежных классах, так как они совпадают благодаря полуинвариантности подгруппы $\langle H, f\rangle$). На G/H определим n-арную операцию f' по правилу:

$$f'(f(x_1, \overset{(n-1)}{H}), \ldots, f(x_n, \overset{(n-1)}{H})) = f(f(x_1^n), \overset{(n-1)}{H}). \tag{41}$$

Теорема 22 *[3] Множество G/H всех смежных классов n-группы $\langle G, f\rangle$ по ее полуинвариантной подгруппе $\langle H, f\rangle$ относительно n-арной операции f', заданной по правилу (41), образует n-группу $\langle G/H, f'\rangle$.*

Построенную n-группу $\langle G/H, f'\rangle$ в теореме 22 называют фактор-n-группой n-группы $\langle G, f\rangle$ по ее полуинвариантной подгруппе $\langle H, f\rangle$.

Заметим, что полуинвариантная подгруппа $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ является смежных классом при разложении n-группы $\langle G, f\rangle$ по подгруппе $\langle H, f\rangle$. В группах нормальная подгруппа H также является смежным классом при разложении группы G по этой подгруппе, причем подгруппа H является единицей в фактор-группе G/H. Какую роль играет полуинвариантная подгруппа $\langle H, f\rangle$ из n-группы $\langle G, f\rangle$ в фактор-n-группе $\langle G/H, f'\rangle$? На этот вопрос нам ответит следующая

Теорема 23 *(Предложение 5.9, [11]) . Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа. Тогда*

1) если $\langle H, f\rangle$ — полуинвариантная подгруппа в $\langle G, f\rangle$, то элемент H из фактор-n-группы $\langle G/H, f'\rangle$ является идемпотентом;

2) если $\langle H, f\rangle$ — инвариантная подгруппа в $\langle G, f\rangle$, то элемент H из фактор-n-группы $\langle G/H, f'\rangle$ является единицей.

Декартово произведение n-групп. Пусть дано k произвольных n-групп

$$\langle A_1, f_1\rangle, \langle A_2, f_2\rangle, \ldots, \langle A_k, f_k\rangle, \tag{42}$$

среди которых могут быть и изоморфные. Обозначим через A совокупность всевозможных систем вида

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k), \tag{43}$$

составленных из элементов, взятых по одному в каждой из групп (42). Множество A будет n-группой, если действие n-арной операции f над системами вида (43) определить по правилу:

$$f((a_{11}^{1k}),(a_{21}^{2k}),\ldots,(a_{n1}^{nk}))=(f_1(a_{11}^{n1}),f_2(a_{12}^{n2}),\ldots,f_k(a_{1k}^{nk})). \qquad (44)$$

Действительно, обобщенный закон ассоциативности (1) вытекает из справедливости этого тождества в каждой из заданных n-групп (42); разрешимость и единственность решения каждого уравнения

$$f((a_{11}^{1k}),\ldots,(a_{i-11}^{i-1k}),(x_{i1}^{ik}),(a_{i+11}^{i+1k}),\ldots,(a_{n1}^{nk}))=(b_1^k)$$

следует из разрешимости и единственности решения уравнений

$$f(a_{1j}^{i-1j},x_{ij},a_{i+1j}^{nj})=b_j$$

в каждой из заданных n-групп (42).

Построенная n-группа $\langle A,f\rangle$ называется декартовым произведением n-групп (42) и записывается

$$\langle A,f\rangle=\langle A_1,f_1\rangle\times\langle A_2,f_2\rangle\times\ldots\times\langle A_k,f_k\rangle.$$

Мы видим, что определение декартова произведения конечного количества n-групп является обобщением аналогичного определения в группах. Отметим, что в декартовом произведении конечного числа групп каждый из декартовых множителей изоморфен некоторой подгруппе этого произведения. Для n-групп это не так. Например, на циклической группе (b) порядка 4 определим (согласно теореме 11) две тернарные группы $der_{\varphi,e}(b)$ и $der_{\varphi,b^2}(b)$, где e — единица группы (b) и автоморфизм φ группы (b) определяется по правилу: $\varphi(b^s)=b^{3s}$. В тернарной группе $der_{\varphi,e}(b)$ каждый элемент является идемпотентом (проверяется непосредственно), а в декартовом произведении $der_{\varphi,e}(b)\times der_{\varphi,b^2}(b)$ нет идемпотентов, так как их нет в тернарной группе $der_{\varphi,b^2}(b)$ (проверяется непосредственно). Значит, нет изоморфного вложения тернарной группы $der_{\varphi,e}(b)$ в декартого произведение $der_{\varphi,e}(b)\times der_{\varphi,b^2}(b)$, так как гомоморфный образ идемпотента должен быть идемпотентом (свойство 9). Однако, второй декартов множитель $der_{\varphi,b^2}(b)$ имеет изоморфную копию $der_{1_{\{e\}},1}\{e\}\times der_{\varphi,b^2}(b)$ в декартовом произведении $der_{\varphi,e}(b)\times der_{\varphi,b^2}(b)$ (отображение $\psi(b^s)=(e,b^s)$ является изоморфным вложением тернарной группы $der_{\varphi,b^2}(b)$ в декартово произведение $der_{\varphi,e}(b)\times der_{\varphi,b^2}(b)$).

Последнее замечание наводит на мысль: для того, чтобы множитель декартова произведения конечного числа n-групп имел изоморфную копию в этом произведении, надо накладывать некоторые условия. Эти условия найдены в следующей теореме.

Теорема 24 *(Теорема 5, [60]-A). В декартовом произведении k n-групп*

$$\langle A_1,f_1\rangle\times\ldots\times\langle A_k,f_k\rangle \qquad (45)$$

имеется подгруппа, изоморфная n-группе $\langle A_i,f_i\rangle$ $(1\le i\le k)$, тогда и только тогда, когда найдется некоторый гомоморфизм из n-группы $\langle A_i,f_i\rangle$ в декартово произведение $k-1$ n-групп

$$\langle A_1,f_1\rangle\times\ldots\times\langle A_{i-1},f_{i-1}\rangle\times\langle A_{i+1},f_{i+1}\rangle\times\ldots\times\langle A_k,f_k\rangle. \qquad (46)$$

Доказательство. Пусть ψ — изоморфное вложение n-группы $\langle A_i, f_i\rangle$ в декартово произведение (45). Проекция ψ_B, где $B = \prod_{j=1}^{k} A_j (j \neq i)$, изоморфизма ψ на декартово произведение (46) будет гомоморфизмом n-групп. Действительно, для любых элементов $a_{1i}^{ni} \in A_i$, если $\psi(a_{ji}) = (b_{j1}^{jk})$, $j = 1, \ldots, n$, то

$$\psi(f_i(a_{1i}^{ni})) = f(\psi(a_{1i}), \ldots, \psi(a_{ni})) = f((b_{11}^{1k}), \ldots, (b_{n1}^{nk})) = (f_1(b_{11}^{n1}), \ldots, f_k(b_{1k}^{nk})),$$

где f — n-арная операция в декартовом произведении (45). Тогда

$$\psi_B(f_i(a_{1i}^{ni})) = (f_1(b_{11}^{n1}), \ldots, f_{i-1}(b_{1i-1}^{ni-1}), f_{i+1}(b_{1i+1}^{ni+1}), \ldots, f_k(b_{1k}^{nk})) =$$

$$= f'((b_{11}^{1i-1}, b_{1i+1}^{1k}), \ldots, (b_{n1}^{ni-1}, b_{ni+1}^{nk})) = f'(\psi_B(a_{1i}), \ldots, \psi_B(a_{ni})),$$

где f' — n-арная операция в декартовом произведении (46).

Обратно, для найденного гомоморфизма φ из n-группы $\langle A_i, f_i\rangle$ в декартово произведение (46) зададим отображение $\psi : A_i \to \prod_{j=1}^{k} A_j$ по правилу: для любого элемента $a \in A_i$, если $\varphi(a) = (b_1^{i-1}, b_{i+1}^{k})$, то $\psi(a) = (b_1^{i-1}, a, b_{i+1}^{k})$. Для различных элементов a_1, a_2 из A_i имеем $\psi(a_1) \neq \psi(a_2)$, т.е. отображение ψ будет инъективным. Кроме того, для любых элементов $a_{1i}^{ni} \in A_i$, если $\varphi(a_{ji}) = (b_{j1}^{ji-1}, b_{ji+1}^{jk})$, $j = 1, \ldots, n$, и

$$\varphi(f_i(a_{1i}^{ni})) = f'(\varphi(a_{1i}), \ldots, \varphi(a_{ni})) = f'((b_{11}^{1i-1}, b_{1i+1}^{1k}), \ldots, (b_{n1}^{ni-1}, b_{ni+1}^{nk})) =$$

$$= (f_1(b_{11}^{n1}), \ldots, f_{i-1}(b_{1i-1}^{ni-1}), f_{i+1}(b_{1i+1}^{ni+1}), \ldots, f_k(b_{1k}^{nk})),$$

то $\psi(f_i(a_{1i}^{ni})) = (f_1(b_{11}^{n1}), \ldots, f_{i-1}(b_{1i-1}^{ni-1}), f_i(a_{1i}^{ni}), f_{i+1}(b_{1i+1}^{ni+1}), \ldots, f_k(b_{1k}^{nk})) =$

$$= f((b_{1i}^{1i-1}, a_{1i}, b_{1i+1}^{1k}), \ldots, (b_{ni}^{ni-1}, a_{ni}, b_{ni+1}^{nk})) = f(\psi(a_{1i}), \ldots, \psi(a_{ni})).$$

Значит, ψ — изоморфное вложение n-группы $\langle A_i, f_i\rangle$ в декартово произведение (45). Теорема доказана.

Аналогичная теорема для двух абелевых n-групп имеется в [25].

Теперь найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы в декартовом произведении конечного числа n-групп каждый из декартовых множителей имел изоморфную копию в этом произведении и пересечение этих копий одноэлементно (как в группах).

Теорема 25 *(Теорема 6, [60]-A). Каждая n-группа $\langle A_i, f_i\rangle$ $(i = 1, \ldots, k)$ изоморфна некоторой подгруппе декартова произведения n-групп (45) и пересечение этих подгрупп одноэлементно тогда и только тогда, когда в каждой n-группе $\langle A_i, f_i\rangle$ имеется идемпотент.*

Доказательство. Пусть пересечение изоморфных копий n-групп $\langle A_i, f_i\rangle$ $(i = 1, \ldots, k)$ в декартовом произведении (45) равно $\{e\}$. Тогда, согласно предложению 20, одноэлементное множество $\{e\}$ будет подгруппой в n-группе (45), а значит, e — идемпотент. Если ψ_i — изоморфное вложение n-группы $\langle A_i, f_i\rangle$ в декартово произведение n-групп (45), то $\psi_i^{-1}(e)$ будет идемпотентом в n-группе $\langle A_i, f_i\rangle$ (гомоморфный образ идемпотента является идемпотентом (свойство 9)).

Обратно, пусть в каждой n-группе $\langle A_i, f_i\rangle$ имеется идемпотент e_i, $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, упорядоченный набор элементов (e_1^{i-1}, e_{i+1}^{k}) будет идемпотентом в декартовом произведении n-групп (46). Тогда для каждого индекса i имеем тривиальный гомоморфизм φ_i из n-группы $\langle A_i, f_i\rangle$ в декартово произведение n-групп (46), т.е. для каждого элемента $x \in A_i$

имеем $\varphi_i(x) = (e_1^{i-1}, e_{i+1}^k)$. Согласно теореме 24, каждая n-группа $\langle A_i, f_i\rangle$, $i = 1, \ldots, k$, изоморфна некоторой подгруппе

$$\langle\{e_1\}, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\{e_{i-1}\}, f_{i-1}\rangle \times \langle A_i, f_i\rangle \times \langle\{e_{i+1}\}, f_{i+1}\rangle \times \ldots \times \langle\{e_k\}, f_k\rangle$$

декартова произведения n-групп (45), причем

$$\bigcap_{i=1}^{k}\langle\{e_1\}, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\{e_{i-1}\}, f_{i-1}\rangle \times \langle A_i, f_i\rangle \times \langle\{e_{i+1}\}, f_{i+1}\rangle \times \ldots \times \langle\{e_k\}, f_k\rangle = (e_1^k).$$

Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеется в [11] и для двух абелевых n-групп в [25].

Определение декартова произведения конечного числа n-групп можно расширить до случая произвольного семейства n-групп. Пусть $\langle A_i, f_i\rangle$ $(i \in I)$ — конечный или бесконечный набор n-групп. На декартовом произведении множеств

$$A = \prod_{i\in I} A_i = \{a : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid a(i) \in A_i\}$$

определим n-арную операцию f по правилу: для любых элементов $a_1^n \in A$

$$f(a_1^n)(i) = f_i(a_1(i), \ldots, a_n(i)), \quad i \in I.$$

Аналогично, как для конечного числа n-групп, доказывается, что n-группоид $\langle A, f\rangle$ будет n-группой, которую называют декартовым произведением n-групп $\langle A_i, f_i\rangle$ и обозначают $\langle A, f\rangle = \prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$.

Теорема 26 . *Декартово произведение производных n-групп от бинарных групп является также производной n-группой от декартова произведения указанных бинарных групп.*

Доказательство. Пусть $\langle A_i, f_i\rangle$ $(i \in I)$ — n-группы, производные от групп A_i. Обозначим $A = \prod_{i\in I} A_i$ — декартово произведение групп A_i. Для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ получим

$$f(a_1^n)(i) = f_i(a_1(i), \ldots, a_n(i)) = a_1(i) \cdot_i \ldots \cdot_i a_n(i) = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)(i),$$

где $\cdot_i$ — умножение в группе A_i, а $\cdot$ — умножение в группе A. Значит, в декартовом произведении n-групп $\langle A, f\rangle = \prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ n-арная операция действует по правилу $f(a_1^n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Теорема доказана.

В следующей теореме отметим некоторые свойства, выполнимые в декартовом произведении n-групп.

Теорема 27 . *В декартовом произведении n-групп $\langle A, f\rangle = \prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ верны свойства*

1) $\bar{a}(i) = \overline{a(i)}$ для любого элемента $a \in A$ и любого индекса $i \in I$ (теорема 6.3 из [25]);

2) элемент e является идемпотентом в n-группе $\langle A, f\rangle$ тогда и только тогда, когда для каждого индекса $i \in I$ элемент $e(i)$ является идемпотентом в n-группе $\langle A_i, f_i\rangle$ (предложение 5.2 из [11]);

3) для элемента $c \in A$ последовательность элементов c_1^{n-2} из A будет обратной тогда и только тогда, когда для любого индекса $i \in I$ последовательность элементов $c_1(i), \ldots, c_{n-2}(i)$ из A_i является обратной для элемента $c(i)$ из A_i (лемма 2.7.2 из [14]).

Рассмотрим в следующей теореме связь между ретрактом декартова произведения n-групп и ретрактами множителей этого произведения.

Теорема 28 *([43]). Ретракт декартова произведения n-групп равен декартову произведению ретрактов этих n-групп. Более подробно,*

$$ret_c \prod_{i \in I} \langle A_i, f_i \rangle = \prod_{i \in I} ret_{c(i)} \langle A_i, f_i \rangle.$$

Следствие 23 *([14]) Соответствующая группа декартова произведения n-групп изоморфна декартову произведению соответствующих групп этих n-групп.*

Теперь рассмотрим связь между n-группой, (φ, d)-определенной на декартовом произведении групп и n-группами, которые (φ_i, d_i)-определены на множителях этого произведения.

Теорема 29 *(Теорема 9, [60]-A) . Пусть $\prod_{i \in I} A_i$ — декартово произведение групп и φ_i, d_i — автоморфизм и элемент в группе A_i с условиями (22) и (23) из теоремы 10 для любого индекса $i \in I$. Тогда*

$$der_{\varphi,d} \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} der_{\varphi_i, d_i} A_i,$$

где φ — автоморфизм декартова произведения групп $\prod_{i \in I} A_i$, заданный покомпонентно по правилу:для любого элемента $a \in \prod_{i \in I} A_i$, $\varphi(a)(i) = \varphi_i(a(i))$, и $d(i) = d_i$ для любого индекса $i \in I$.

Доказательство. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$ — декартово произведение групп A_i и $\langle A, f \rangle = \prod_{i \in I} der_{\varphi_i, d_i} A_i$.

Покажем, что автоморфизм φ и элемент d из условия теоремы удовлетворяют условиям (22) и (23) в теореме 10. Так как для любого индекса $i \in I$ автоморфизм φ_i и элемент d_i в группе A_i удовлетворяют условиями (22) и (23) из теоремы 10, то для любого индекса $i \in I$ имеем

$$\varphi(d)(i) = \varphi_i(d(i)) = \varphi_i(d_i) = d_i = d(i),$$

т.е. $\varphi(d) = d$. Кроме того, для любого элемента $x \in \prod_{i \in I} A_i$ имеем

$$\varphi^{n-1}(x)(i) = \varphi_i^{n-1}(x(i)) = d_i \cdot_i x(i) \cdot_i d_i^{-1} = d(i) \cdot_i x(i) \cdot_i d(i)^{-1} = (d \cdot x \cdot d^{-1})(i)$$

(здесь $\cdot_i$ — умножение в группе A_i) для любого индекса $i \in I$, т.е. $\varphi^{n-1}(x) = d \cdot x \cdot d^{-1}$. Доказали, что автоморфизм φ и элемент d удовлетворяют условиями (22) и (23).

Согласно теореме 11 n-арная операция f' в n-группе

$$\langle A, f' \rangle = der_{\varphi,d} \prod_{i \in I} A_i$$

действует по правилу: для любых элементов $x_1, \ldots, x_n \in \prod_{i \in I} A_i$

$$f'(x_1^n) = x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot d,$$

где $\cdot$ — умножение в группе A. Значит, для любого индекса $i \in I$ получим

$$f'(x_1^n)(i) = (x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot d)(i) =$$

$$= x_1(i) \cdot_i \varphi(x_2)(i) \cdot_i \ldots \cdot_i \varphi^{n-1}(x_n)(i) \cdot_i d(i).$$

С другой стороны, в каждой n-группе $der_{\varphi_i,d_i}A_i$ n-арная операция f_i (согласно теореме 11) действует по правилу

$$f_i(x_{1i},\ldots,x_{ni}) = x_{1i} \cdot_i \varphi_i(x_{2i}) \cdot_i \ldots \cdot_i \varphi_i^{n-1}(x_{ni}) \cdot_i d_i$$

для любых элементов $x_{1i},\ldots,x_{ni} \in A_i$. Тогда

$$f(x_1^n)(i) = f_i(x_1(i),\ldots,x_n(i)) = x_1(i) \cdot_i \varphi_i(x_2(i)) \cdot_i \ldots \cdot_i \varphi_i^{n-1}(x_n(i)) \cdot_i d_i =$$

$$= x_1(i) \cdot_i \varphi(x_2)(i) \cdot_i \ldots \cdot_i \varphi^{n-1}(x_n)(i) \cdot_i d(i).$$

Мы показали, что действия n-арных операций f и f' на декартовом произведении множеств $\prod_{i\in I} A_i$ совпадают. Теорема доказана.

Отметим, что последняя теорема имеется в работе *Dudek W.A., Michalski J., On a generalization of Hosszú theorem*, Demonstratio Math., **15** (1982), *P.*783 – 805.

Коммутант и полукоммутант. Одним из инструментов измерения отклонения n-группы от коммутативности (как и в группах) служит коммутант n-группы: чем меньше коммутант n-группы, тем "ближе"она к абелевым n-группам, т.е. к n-группам, в которых верны тождества $f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma \in S_n$ (смотри следующую теорему).

Изучение коммутанта n-группы будем вести на языке конгруэнций. В работе [92]-А коммутант G' n-группы $\langle G, f\rangle$ определяется как конгруэнция, порожденная отношением вида

$$\{(f(a,b,\overset{(n-3)}{a},\bar{a}),b) \mid a,b \in G\}. \tag{47}$$

Другими словами, коммутантом G' n-группы $\langle G, f\rangle$ называют наименьшую конгруэнцию среди всех конгруэнций, содержащих множество пар вида (47). Таким образом, коммутант G' совпадает с пересечением всех конгруэнций, содержащих множество пар вида (47).

Предложение 37 *([51]-А, Предложение 63, с. 193) . Коммутант n-группы является единичной конгруэнцией тогда и только тогда, когда эта n-группа является абелевой.*

Доказательство. Если коммутант G' n-группы $\langle G, f\rangle$ является единичной конгруэнцией, то для любых элементов $a,b \in G$ имеем $f(a,b,\overset{(n-3)}{a},\bar{a}) = b$ (следует из (47)). Тогда для любых элементов $x_1^n \in G$, используя обобщенный закон ассоциативности (1) и нейтральность последовательности $\overset{(n-3)}{x_2},\bar{x}_2,x_2$, получим

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = f(f(x_2,x_1,\overset{(n-3)}{x_2},\bar{x}_2),x_2,x_3,\ldots,x_n) =$$

$$= f(x_2,f(x_1,\overset{(n-3)}{x_2},\bar{x}_2,x_2),x_3,\ldots,x_n) = f(x_2,x_1,x_3,\ldots,x_n),$$

а тогда, согласно теореме 32 (смотри ниже), n-группа $\langle G, f\rangle$ является абелевой.

Обратно, если n-группа $\langle G, f\rangle$ является абелевой, то для любых элементов $a,b \in G$ имеем

$$f(a,b,\overset{(n-3)}{a},\bar{a}) = f(b,a,\overset{(n-3)}{a},\bar{a}) = b$$

(использовали абелевость n-группы $\langle G, f\rangle$ и нейтральность последовательности $a, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}$), а тогда коммутант G' порождается всеми парами вида (b, b), где $b \in G$, т.е. G' является единичной конгруэнцией. Предложение доказано.

Более полную информацию о роли коммутанта в n-группе несет следующая

Теорема 30 *(Следствие 1, [69]-A) Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа. Тогда:*

1) фактор-n-группа $\langle G/G', f\rangle$ является абелевой;

2) если для некоторой конгруэнции σ в n-группе $\langle G, f\rangle$ фактор-n-группа $\langle G/\sigma, f'\rangle$ является абелевой, то $G' \subseteq \sigma$;

3) если $G' \subseteq \sigma$ для некоторой конгруэнции σ в n-группе $\langle G, f\rangle$, то фактор-n-группа $\langle G/\sigma, f\rangle$ является абелевой.

Доказательство. 1) Пусть $\delta = G'$ и пусть $\delta(a), \delta(b)$ и $\delta(c_i)$, $i = 1, \ldots, n-2$ — любые элементы из G/δ. Так как последовательность $\overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-2)}{c_1}, \bar{c}_1, a$ является нейтральной и $\delta(f(f(a, b, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}), \overset{(n-2)}{c_1}, \bar{c}_1)) = \delta(b)$, то

$$f(\delta(a), \delta(b), \delta(c_1), \ldots, \delta(c_{n-2})) = \delta(f(a, b, c_1^{n-2})) =$$

$$= \delta(f(a, f_{(2)}(b, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-2)}{c_1}, \bar{c}_1, a), c_1^{n-2})) =$$

$$= \delta(f(f_{(2)}(a, b, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-2)}{c_1}, \bar{c}_1), a, c_1^{n-2})) =$$

$$= f(\delta(f_{(2)}(a, b, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-2)}{c_1}, \bar{c}_1)), \delta(a), \delta(c_1), \ldots, \delta(c_{n-2})) =$$

$$= f(\delta(b), \delta(a), \delta(c_1), \ldots, \delta(c_{n-2})),$$

откуда следует абелевость фактор-n-группы $\langle G/G', f\rangle$ (по теореме 32).

2) Из абелевости фактор-n-группы $\langle G/\sigma, f\rangle$ вытекает

$$f(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c_1), \ldots, \sigma(c_{n-2})) = f(\sigma(b), \sigma(a), \sigma(c_1), \ldots, \sigma(c_{n-2}))$$

для любых элементов $a, b, c_1^{n-2} \in G$ (использовали теорему 32), откуда

$$\sigma(f(a, b, c_1^{n-2})) = \sigma(f(b, a, c_1^{n-2})), (f(a, b, c_1^{n-2}), f(b, a, c_1^{n-2})) \in \sigma.$$

Обозначим c' — обратный элемент для последовательности элементов c_1^{n-2}. Из последнего соотношения, учитывая $(a, a) \in \sigma, (\bar{a}, \bar{a}) \in \sigma, (c', c') \in \sigma$, получаем

$$(f(f(a, b, c_1^{n-2}), c', \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}), f(f(b, a, c_1^{n-2}), c', \overset{(n-3)}{a}, \bar{a})) \in \sigma,$$

по нейтральности последовательностей $c_1^{n-2}, c', \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}$ получаем $(f(a, b, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}), b) \in \sigma$. Следовательно, $G' \subseteq \sigma$.

3) По второй теореме об изоморфизмах n-групп (теорема 9.19, [13]) отношение σ/G' будет конгруэнцией n-группы $\langle G/G', f'\rangle$. При этом n-группы $\langle G/\sigma, f'\rangle$ и $\langle (G/G')/(\sigma/G'), f''\rangle$ изоморфны. А так как абелевость n-группы переносится на ее фактор-n-группу (предложение 40), то из абелевости фактор-n-группы $\langle G/G', f'\rangle$ (первый пункт теоремы) следует абелевость фактор-n-группы $\langle (G/G')/(\sigma/G'), f''\rangle$, а из указанного изоморфизма следует абелевость фактор-n-группы $\langle G/\sigma, f'\rangle$. Теорема доказана.

Другим инструментов измерения отклонения n-группы от коммутативности служит полукоммутант n-группы: чем меньше полукоммутант n-группы, тем "ближе"она к полуабелевым n-группам, т.е. к n-группам, в которых верно тождество $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1)$ (это видно в следующей теореме).

Изучение полукоммутанта n-группы, как и коммутанта n-группы, будем вести на языке конгруэнций. В работе [69]-А полукоммутант $G^{(\ ',n)}$ n-группы $\langle G, f\rangle$ определяется как конгруэнция, порожденная отношением вида

$$\{(f(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c}), b) \mid a, b, c \in G\}. \tag{48}$$

Для фиксированного элемента c из n-группы $\langle G, f\rangle$ определим конгруэнцию $G^{(\ ',n,c)}$, порожденную отношением

$$\{(f(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c}), b) \mid a, b \in G\}. \tag{49}$$

Так как отношение (167) включает в себя отношение (168), то

$$G^{(\ ',n,c)} \subseteq G^{(\ ',n)}. \tag{50}$$

Покажем, что верно и обратное включение, т.е. имеет место

Предложение 38 *(Предложение 1, [70]-А). Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа, $c \in G$. Тогда*

$$G^{(\ ',n,c)} = G^{(\ ',n)}. \tag{51}$$

Доказательство. Пусть $\sigma = G^{(\ ',n,c)}$. Так как

$$(f(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c}), b) \in \sigma$$

для любых элементов $a, b \in G$, то, используя нейтральность последовательностей $\bar{c}$, $\overset{(n-2)}{c}$ и $\overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, a$, будем иметь

$$(f(f(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c}), \overset{(n-2)}{c}, a), f(b, \overset{(n-2)}{c}, a)) \in \sigma,$$

$$(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), f(b, \overset{(n-2)}{c}, a)) \in \sigma,$$

$$\sigma(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b)) = \sigma(f(b, \overset{(n-2)}{c}, a)),$$

$$f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \sigma(b)) = f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \sigma(a)). \tag{52}$$

Таким образом, в фактор-n-группе $\langle G/\sigma, f\rangle$ для любых элементов $\sigma(a), \sigma(b)$ и фиксированного элемента $\sigma(c)$ верно равенство (52). Покажем, что в фактор-n-группе $\langle G/\sigma, f\rangle$ верно равенство

$$f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \sigma(b)) = f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \sigma(a)) \tag{53}$$

для любых элементов $\sigma(a), \sigma(b), \sigma(d)$. Действительно, используя нейтральность последовательностей $\overline{\sigma(c)}, \overset{(n-2)}{\sigma(c)}$ и $\overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \overline{\sigma(c)}$, равенство (52) и обобщенный закон ассоциативности (1), получим

$$f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \sigma(b)) = f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, f(\overline{\sigma(c)}, \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \sigma(b))) =$$

$$= f(f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \overline{\sigma(c)}), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \sigma(b)) = f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \overline{\sigma(c)})) =$$

$$= f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, f(f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \overline{\sigma(c)}), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \overline{\sigma(c)})) =$$

$$= f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, f(\overline{\sigma(c)}, \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \overline{\sigma(c)}))) =$$

$$= f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, f(f(\overline{\sigma(c)}, \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \overline{\sigma(c)}), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \sigma(a))) =$$

$$= f(f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \overline{\sigma(c)}), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, f(\overline{\sigma(c)}, \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \sigma(a))) =$$

$$= f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(d)}, \sigma(a)).$$

Из равенства (53) для любых элементов $a, b, d \in G$, используя нейтральность последовательностей $\bar{d}, \overset{(n-2)}{d}$ и $\overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, a$, будем иметь

$$\sigma(f(a, \overset{(n-2)}{d}, b)) = \sigma(f(b, \overset{(n-2)}{d}, a)),$$

$$(f(a, \overset{(n-2)}{d}, b), f(b, \overset{(n-2)}{d}, a)) \in \sigma,$$

$$(f_{(3)}(a, \overset{(n-2)}{d}, b, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{d}, \overset{(n-2)}{d}, a), f(b, \overset{(n-2)}{d}, a)) \in \sigma,$$

$$(f_{(2)}(a, \overset{(n-2)}{d}, b, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{d}), b) \in \sigma.$$

Так как последнее соотношение верно для любых элементов $a, b, d \in G$, то конгруэнция $G^{(\ ',n,c)}$ включает в себя отношение (167). Поэтому верно отношение $G^{(\ ',n)} \subseteq G^{(\ ',n,c)}$, откуда в силу верности отношения (50) следует верность равенства (51). Предложение доказано.

Более полную информацию о роли полукоммутанта в n-группе несет следующая

Теорема 31 *(Следствие 2, [69]-А) Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа. Тогда:*

1) фактор-n-группа $\langle G/G^{(\ ',n)}, f\rangle$ является полуабелевой;

2) если для некоторой конгруэнции σ в n-группе $\langle G, f\rangle$ фактор-n-группа $\langle G/\sigma, f\rangle$ является полуабелевой, то $G^{(\ ',n)} \subseteq \sigma$;

3) если $G^{(\ ',n)} \subseteq \sigma$ для некоторой конгруэнции σ в n-группе $\langle G, f\rangle$, то фактор-n-группа $\langle G/\sigma, f\rangle$ является полуабелевой.

Доказательство. 1) Пусть $\delta = G^{(\ ',n)}$ и $\delta(a), \delta(b)$ и $\delta(c)$ — элементы из G/δ. Так как последовательность $\overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c}, \overset{(n-2)}{c}, a$ будет нейтральной и $\delta(f(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c})) = \delta(b)$, то

$$f(\delta(a), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(b)) = \delta(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b)) = \delta(f_{(3)}(a, \overset{(n-2)}{c}, b, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c}, \overset{(n-2)}{c}, a)) =$$

$$= f(\delta(f(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c})), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(a)) = f(\delta(b), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(a)),$$

откуда

$$f(\delta(a), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(b)) = f(\delta(b), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(a)). \tag{54}$$

Для любых элементов $\delta(x_i) \in G/\delta$, $i = 1, \dots, n$, используя нейтральность последовательностей $\overline{\delta(c)}, \overset{(n-2)}{\delta(c)}$ и $\overset{(n-2)}{\delta(c)}, \overline{\delta(c)}$, равенство (54) и обобщенный закон ассоциативности (1), получим

$$f(\delta(x_1), \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \delta(x_n)) =$$

$$= f(f(\delta(x_1), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \overline{\delta(c)}), \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \delta(x_n)) =$$

$$= f(\delta(x_1), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, f(\overline{\delta(c)}, \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \delta(x_n))) =$$

$$= f(f(\overline{\delta(c)}, \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \delta(x_n)), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(x_1)) =$$

$$= f(f(\overline{\delta(c)}, \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), f(\overline{\delta(c)}, \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(x_n))), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(x_1)) =$$

$$= f(f(f(\overline{\delta(c)}, \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \overline{\delta(c)}), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(x_n)), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(x_1)) =$$

$$= f(f(\delta(x_n), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, f(\overline{\delta(c)}, \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \overline{\delta(c)})), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(x_1)) =$$

$$= f(f(\delta(x_n), \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \overline{\delta(c)}), \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), f(\overline{\delta(c)}, \overset{(n-2)}{\delta(c)}, \delta(x_1))) =$$

$$= f(\delta(x_n), \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \delta(x_1)).$$

Итак, в фактор-n-агруппе $\langle G/\delta, f\rangle$ верно тождество

$$f(\delta(x_1), \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \delta(x_n)) = f(\delta(x_n), \delta(x_2), \dots, \delta(x_{n-1}), \delta(x_1)),$$

значит, согласно определению, $\langle G/\delta, f\rangle$ является полуабелевой n-группой.

2) Из полуабелевости фактор-n-агруппы $\langle G/\sigma, f\rangle$ вытекает

$$f(\sigma(a), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \sigma(b)) = f(\sigma(b), \overset{(n-2)}{\sigma(c)}, \sigma(a)),$$

для любых элементов $a, b, c \in G$, откуда

$$\sigma(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b)) = \sigma(f(b, \overset{(n-2)}{c}, a)), (f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), f(b, \overset{(n-2)}{c}, a)) \in \sigma.$$

Из последнего соотношения, учитывая $(a, a) \in \sigma$, $(\bar{a}, \bar{a}) \in \sigma$, $(\bar{c}, \bar{c}) \in \sigma$, получаем

$$(f(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c}), f(f(b, \overset{(n-2)}{c}, a), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c})) \in \sigma,$$

$$(f(f(a, \overset{(n-2)}{c}, b), \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, \bar{c}), b) \in \sigma.$$

Следовательно, $G^{(\ ',n)} \subseteq \sigma$.

3) По второй теореме об изоморфизмах n-групп (теорема **??**) отношение $\sigma/G^{(\ ',n)}$ является конгруэнцией n-группы $\langle G/G^{(\ ',n)}, f\rangle$. При этом n-группы $\langle (G/G^{(\ ',n)})/(\sigma/G^{(\ ',n)}), f\rangle$ и $\langle G/\sigma, f\rangle$ изоморфны. А так как полуабелевость n-группы переносится на ее фактор-n-группу (предложение 42), то из указанного изоморфизма следует полуабелевость фактор-n-группы $\langle G/\sigma, f\rangle$. Теорема доказана.

2 Абелевы и полуабелевы n-группы

Обобщениями (n-арными аналогами) абелевой группы являются абелева и полуабелева n-группы.

2.1 Абелевы n-группы

Если в n-группе верны тождества

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то ее называют абелевой. Примером абелевой n-группы служит любая производная n-группа от абелевой группы.

Имеются несколько признаков абелевой n-группы. Приведем их в следующих четырех теоремах.

Теорема 32 *[11]. Любая n-группа является абелевой тогда и только тогда, когда в ней верно тождество*

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n). \tag{55}$$

Теорема 33 *([51]-A, Теорема 36, с. 122) . Любая n-группа является абелевой тогда и только тогда, когда в ней верно тождество*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, \ldots, x_n, x_1). \tag{56}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть в n-группе верно тождество (56). Выбираем нейтральную последовательность $\bar{a}, \overset{(n-2)}{a}$. Из (56) имеем

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, \ldots, x_n, x_1) = f(f(x_2, \ldots, x_n, x_1), \bar{a}, \overset{(n-2)}{a}) =$$

$$= f(x_2, f(x_3, \ldots, x_n, x_1, \bar{a}), \overset{(n-2)}{a}).$$

Применяя к выражению $f(x_3, \ldots, x_n, x_1, \bar{a})$ тождество (56) $n-2$ раза, получим

$$f(x_3, \ldots, x_n, x_1, \bar{a}) = f(x_1, \bar{a}, x_3, \ldots, x_n).$$

Продолжая рассуждения и по нейтральности последовательности $a, \bar{a}, \overset{(n-3)}{a}$ имеем

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, f(x_1, \bar{a}, x_3, \ldots, x_n), \overset{(n-2)}{a}) =$$

$$= f(x_2, x_1, f(\bar{a}, x_3, \ldots, x_n, a), \overset{(n-3)}{a}) = f(x_2, x_1, f(x_3, \ldots, x_n, a, \bar{a}), \overset{(n-3)}{a},) =$$

$$= f(f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n), a, \bar{a}, \overset{(n-3)}{a}) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n).$$

Итак, мы доказали выполнимость тождества (55). Осталось применить теорему 32. Теорема доказана.

Теорема 34 *(Теорема 2.6.4, [14]) . Любая n-группа является абелевой тогда и только тогда, когда ее обертывающая группа Поста является абелевой.*

Следствие 24 *Соответствующая группа абелевой n-группы является абелевой.*

Так как соответствующая группа и ретракт одной и той же n-группы изоморфны, то верно

Следствие 25 *Ретракт абелевой n-группы является абелевой группой.*

Теорема 35 *[25]. n-Арная группа $\langle G, f\rangle$ является абелевой тогда и только тогда, когда ретракт $ret_c\langle G, f\rangle$ является абелевой группой и в этой группе автоморфизм φ из теоремы Глускина-Хоссу (теорема 10) является тождественным.*

В абелевой n-группе любой идемпотент, если он есть, превращается в единицу, т.е. верно

Предложение 39 *[25] Идемпотент в абелевой n-группе является единицей.*

В следующей теореме найдены все производные абелевы n-группы от абелевых групп.

Теорема 36 *[2] Любая абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ является производной от абелевой группы тогда и только тогда, когда в ней найдется элемент конечного n-арного порядка и этот порядок взаимно прост с $n-1$.*

Очевидно

Предложение 40 *Фактор-n-группа абелевой n-группы является абелевой.*

Зная гомоморфизм абелевых n-групп, можно найти гомоморфизм их ретрактов, т.е. верна

Теорема 37 *([51]-A, Теорема 40, с. 126). Пусть абелевы n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ имеют ретракты $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ с бинарными операциями $\cdot$ и $\circ$ соответственно, где $a_1 \cdot b_1 = f_1(a_1, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1, b_1)$, $a_2 \circ b_2 = f_2(a_2, \overset{(n-3)}{c_2}, \bar{c}_2, b_2)$, и ψ — гомоморфизм $\langle G_1, f_1\rangle$ в $\langle G_2, f_2\rangle$. Тогда отображение $\sigma : G_1 \to G_2$, определяемое правилом $\sigma(x) = \psi(x) \circ \psi(c_1)^{-1}$ для любого $x \in G_1$, является гомоморфизмом группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$.*

Доказательство. Пусть $a_1, b_1 \in G_1$ и $d_1 = f_1(\overset{(n)}{c_1})$, $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c_2})$. Тогда, используя условие теоремы, свойство 8 косого элемента, условие (21) из теоремы 10, абелевость ретракта $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ и нейтральность последовательности $\overset{(n-2)}{\psi(c_1)}, \overline{\psi(c_1)}$, получим

$$\sigma(a_1 \cdot b_1) = \psi(f_1(a_1, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1, b_1)) \circ \psi(c_1)^{-1} =$$

$$= f_2(\psi(a_1), \overset{(n-3)}{\psi(c_1)}, \overline{\psi(c_1)}, \psi(b_1)) \cdot \psi(c_1)^{-1} =$$
$$= \psi(a_1) \circ \psi(c_1)^{n-3} \circ \overline{\psi(c_1)} \circ \psi(b_1) \circ d_2 \circ \psi(c_1)^{-1} =$$
$$= (\psi(a_1) \circ \psi(c_1)^{-1}) \circ (\psi(b_1) \circ \psi(c_1)^{-1}) \circ \psi(c_1)^{n-2} \circ \overline{\psi(c_1)} \circ d_2 =$$
$$= f_2(\sigma(a_1) \circ \sigma(b_1), \overset{(n-2)}{\psi(c_1)}, \overline{\psi(c_1)}) = \sigma(a_1) \circ \sigma(b_1).$$

Теорема доказана.

Следствие 26 *Пусть $ret_c\langle G, f\rangle$ — ретракт абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ с бинарной операцией $\cdot$, где $a\cdot b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, и ψ — эндоморфизм $\langle G, f\rangle$. Тогда отображение $\sigma : G \to G$, определяемое правилом $\sigma(x) = \psi(x)\cdot\psi(c)^{-1}$ для любого элемента $x \in G$, является эндоморфизмом группы $ret_c\langle G, f\rangle$.*

А теперь рассмотрим обратную ситуацию, т.е. зная гомоморфизм ретрактов абелевых n-групп, будем искать в следующей теореме гомоморфизм этих абелевых n-групп.

Теорема 38 *([51]-A, Теорема 41, с. 127) Пусть абелевы n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ имеют свои ретракты $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ с бинарными операциями $\cdot$ и $\circ$ соответственно. Если имеются гомоморфизм φ группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ и элемент $u \in G_2$ такие, что $\varphi(d_1) = u^{n-1}\circ d_2$, где $d_1 = f_1(\overset{(n)}{c_1})$, $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c_2})$, то отображение $\psi(x) = \varphi(x)\circ u$ является гомоморфизмом n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G_2, f_2\rangle$. Других гомоморфизмов n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G_2, f_2\rangle$ нет.*

Доказательство. В ретрактах $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ определяем бинарные операции $\cdot$ и $\circ$ соответственно по правилам

$$a_1\cdot b_1 = f_1(a_1, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1, b_1), \quad a_2\circ b_2 = f_2(a_2, \overset{(n-3)}{c_2}, \bar{c}_2, b_2).$$

Для любых элементов $x_1^n \in G_1$, используя условие теоремы, условие (21) из теоремы 10 и абелевость ретракта $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$, получим

$$\psi(f_1(x_1^n)) = \varphi(f_1(x_1^n))\circ u = \varphi(x_1\cdot\ldots\cdot x_n\cdot d_1)\circ u =$$
$$= \varphi(x_1)\circ\ldots\circ\varphi(x_n)\circ\varphi(d_1)\circ u = \varphi(x_1)\circ\ldots\circ\varphi(x_n)\circ u^{n-1}\circ d_2\circ u =$$
$$= \psi(x_1)\circ\ldots\circ\psi(x_n)\circ d_2 = f_2(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)).$$

Пусть теперь τ — любой гомоморфизм n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G_2, f_2\rangle$. Тогда, по теореме 37, отображение $\sigma : G_1 \to G_2$, определяемое правилом $\sigma(x) = \tau(x)\circ u^{-1}$, где $u = \tau(c_1)$, является гомоморфизмом группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$. Кроме того,

$$\sigma(d_1) = \tau(d_1)\circ u^{-1} = \tau(f_1(\overset{(n)}{c_1}))\circ u^{-1} = f_2(\overset{(n)}{\tau(c_1)})\circ u^{-1} =$$
$$= f_2(\overset{(n)}{u})\circ u^{-1} = u^n\circ d_2\circ u^{-1} = u^{n-1}\circ d_2.$$

Значит, τ — один из гомоморфизмов $\langle G_1, f_1\rangle$ в $\langle G_2, f_2\rangle$, построенных выше с помощью гомоморфизмов группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ и элементов u из G_2 с заданным условием. Теорема доказана.

Следствие 27 *([51]-A, Следствие 28, с. 128) Пусть $\langle G, f\rangle$ — абелева n-группа. Эндоморфизм φ ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$ с бинарными операциями $\cdot$ и элемент u из G с условием $\varphi(d) = u^{n-1}\cdot d$, где $d = f(\overset{(n)}{c})$, определяют эндоморфизм ψ n-группы $\langle G, f\rangle$ по правилу $\psi(x) = \varphi(x)\cdot u$. Других эндоморфизмов на n-группе $\langle G, f\rangle$ нет.*

Из теорем 37 и 38 следует критерий изоморфизма абелевых n-групп:

Следствие 28 *([51]-A, Следствие 29, с. 128) Абелевы n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся изоморфизм σ из ретракта $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в ретракт $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ и элемент $u \in G_2$ такие, что верно равенство $\sigma(d_1) = u^{n-1}\circ d_2$, где $d_1 = f_1(\overset{(n)}{c_1})$, $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c_2})$ и $\circ$ — бинарная операция в группе $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$.*

Отметим, что связь гомоморфизмов абелевых n-групп и их ретрактов в своих работах изучал польский математик Михальски в 80-х годах прошлого века.

2.2 Полуабелевы n-группы

Если в n-группе верно тождество

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1), \tag{57}$$

то ее называют полуабелевой. Очевидно абелева n-группа будет полуабелевой.

Признаком полуабелевости для n-групп служит следующая

Теорема 39 *[9], [46] . Любая n-группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда в ней верно тождество*

$$f(f(x_{11}^{1n}), \ldots, f(x_{n1}^{nn})) = f(f(x_{11}^{n1}), \ldots, f(x_{1n}^{nn})). \tag{58}$$

Известен еще один признак полуабелевости для n-групп.

Теорема 40 *(смотри, например, теорема 2.6.11, [14]). Любая n-группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда ее ретракт является абелевой группой.*

Теорема 40 также доказана Дудеком В. в своей работе *Dudek W.A.*, *Remarks on n-groups*, Demonstratio Math., **13**(1980), *P*.165 − 181.

Так как ретракт и соответствующая группа одной и той же n-группы изоморфны, то верно

Следствие 29 *Любая n-группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда ее соответствующая группа абелева.*

Заметим, что множество всех единиц (если оно не пусто) образует подгруппу в любой (не обязательно полуабелевой) n-группе (см. предложение 23). А вот множество всех идемпотентов (если оно не пусто) может и не быть подгруппой в n-группе, которая не является полуабелевой. Например, в тернарной группе $\langle S_3, f\rangle$, производной от группы подстановок S_3, имеется всего четыре идемпотента — тождественная подстановка и все три транспозиции, но произведение тождественной подстановки и двух различных транспозиций не будет идемпотентом, т.е. множество всех идемпотентов в тернарной группе $\langle S_3, f\rangle$ не является подгруппой. Однако для полуабелевых n-групп верно

Предложение 41 *([51]-A, Предложение 45, с. 144). В полуабелевой n-группе множество всех идемпотентов (если оно не пусто) образует подгруппу.*

Доказательство. Пусть I — множество всех идемпотентов полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ и это множество не пусто. Докажем замкнутость множества I относительно действия n-арной операции f. Пусть элементы $a_1, \ldots, a_n \in I$. Используя тождество (58), получим $f(f(\overset{(n)}{a_1^n})) = f(f(\overset{(n)}{a_1}), \ldots, f(\overset{(n)}{a_n}) = f(a_1^n)$, т.е. $f(a_1^n) \in I$.

Докажем теперь замкнутость множества I относительно действия унарной операции $^-$. Если элемент a выбран из I, то $\bar{a} = a$, т.е. $\bar{a} \in I$.

Итак, подмножество I n-группы $\langle G, f\rangle$ замкнуто относительно действий n-арной операции f и унарной операции $^-$. Тогда, согласно предложению 17, $\langle I, f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$. Предложение доказано.

В следующем предложении докажем сохранение полуабелевости при переходе от n-группы к ее фактор-n-группе.

Предложение 42 *([51]-А, Предложение 46, с. 145) Фактор-n-группа полуабелевой n-группы является полуабелевой.*

Доказательство. Пусть в полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ имеем конгруэнцию ρ. Тогда в фактор-n-группе $\langle G/\rho, f'\rangle$ имеем

$$f'(\rho(x_1), \rho(x_2), \ldots, \rho(x_{n-1}), \rho(x_n)) = \rho(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)) =$$
$$= \rho(f(x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1)) = f'(\rho(x_n), \rho(x_2), \ldots, \rho(x_{n-1}), \rho(x_1))$$

Предложение доказано.

Зная гомоморфизм полуабелевых n-групп, можно найти гомоморфизм их ретрактов, т.е. верна

Теорема 41 *([51]-А, Теорема 55, с. 145) Пусть полуабелевы n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ имеют ретракты $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ с бинарными операциями $\cdot$ и $\circ$ соответственно и ψ — гомоморфизм $\langle G_1, f_1\rangle$ в $\langle G_2, f_2\rangle$, удовлетворяющий условию*

$$\psi(\varphi_1(x)) = \varphi_2(\psi(x)) \quad \text{для любого элемента } x \in G_1, \tag{59}$$

где φ_1, φ_2 — автоморфизмы ретрактов $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ соответственно, построенные по правилу (24). Тогда отображение $\sigma : G_1 \to G_2$, определяемое правилом $\sigma(x) = \psi(x) \circ \psi(c_1)^{-1}$ для любого элемента x из G_1, является гомоморфизмом группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$.

Доказательство. Пусть операции $\cdot$ и $\circ$ в группах $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ определяются по правилам

$$a_1 \cdot b_1 = f_1(a_1, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1, b_1) \quad \text{и} \quad a_2 \circ b_2 = f_2(a_2, \overset{(n-3)}{c_2}, \bar{c}_2, b_2)$$

соответственно. Находим $d_1 = f_1(\overset{(n)}{c_1})$, $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c_2})$. Заметим, что $\bar{c}_1 = d_1^{-1}$ (проверяется непосредственно), а так как для элемента d_1 верно равенство $\varphi_1(d_1) = d_1$ (смотри равенство (22)), то $\varphi_1(\bar{c}_1) = \bar{c}_1$.

Выбираем произвольные элементы $a_1, b_1 \in G_1$. Используя условие теоремы, условия (21) из теоремы 10, абелевость ретракта $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$, свойство 8 косого элемента и нейтральность последовательности $\overset{(n-2)}{\psi(c_1)}, \overline{\psi(c_1)}$, получим

$$\sigma(a_1 \cdot b_1) = \psi(f_1(a_1, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1, b_1)) \circ \psi(c_1)^{-1} =$$
$$= f_2(\psi(a_1), \overset{(n-3)}{\psi(c_1)}, \psi(\bar{c}_1), \psi(b_1)) \cdot \psi(c_1)^{-1} =$$
$$= \psi(a_1) \circ \varphi_2(\psi(c_1)) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-3}(\psi(c_1)) \circ \varphi_2^{n-2}(\psi(\bar{c}_1)) \circ \psi(b_1) \circ d_2 \circ \psi(c_1)^{-1} =$$
$$= \psi(a_1) \circ \psi(\varphi_1(c_1)) \circ \ldots \circ \psi(\varphi_1^{n-3}(c_1)) \circ \psi(\varphi_1^{n-2}(\bar{c}_1)) \circ \psi(b_1) \circ d_2 \circ \psi(c_1)^{-1} =$$
$$= \psi(a_1) \circ \psi(c_1)^{n-3} \circ \psi(\bar{c}_1) \circ \psi(b_1) \circ d_2 \circ \psi(c_1)^{-1} =$$
$$= (\psi(a_1) \circ \psi(c_1)^{-1}) \circ (\psi(b_1) \circ \psi(c_1)^{-1}) \circ \psi(c_1)^{n-2} \circ \overline{\psi(c_1)} \circ d_2 =$$
$$= (\psi(a_1) \circ \psi(c_1)^{-1}) \circ (\psi(b_1) \circ \psi(c_1)^{-1}) \circ \psi(\varphi_1(c_1)) \circ \ldots \circ \psi(\varphi_1^{n-2}(c_1)) \circ \overline{\psi(c_1)} \circ d_2 =$$
$$= (\psi(a_1) \circ \psi(c_1)^{-1}) \circ (\psi(b_1) \circ \psi(c_1)^{-1}) \circ \varphi_2(\psi(c_1)) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(\psi(c_1)) \circ \overline{\psi(c_1)} \circ d_2 =$$
$$= f_2(\sigma(a_1) \circ \sigma(b_1), \overset{(n-2)}{\psi(c_1)}, \overline{\psi(c_1)}) = \sigma(a_1) \circ \sigma(b_1).$$

Теорема доказана.

Следствие 30 *Пусть $ret_c\langle G, f\rangle$ — ретракт полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ с бинарной операцией $\cdot$ и ψ — эндоморфизм $\langle G, f\rangle$, удовлетворяющий условию*

$$\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x)) \quad \textit{для любого элемента } x \in G,$$

где φ — автоморфизм ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$, построенный по правилу (24). Тогда отображение $\sigma : G \to G$, определяемое правилом $\sigma(x) = \psi(x)\cdot\psi(c)^{-1}$ для любого элемента $x \in G$, является эндоморфизмом группы $ret_c\langle G, f\rangle$.

Рассмотрим теперь обратную ситуацию, т.е. по заданному гомоморфизму ретрактов полуабелевых n-групп, будем искать в следующей теореме гомоморфизм этих полуабелевых n-групп.

Теорема 42 *([51]-A, Теорема 56, с. 147) Пусть полуабелевы n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ имеют свои ретракты $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ с бинарными операциями $\cdot$ и $\circ$ соответственно. Если имеются гомоморфизм σ группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ и элемент $u \in G_2$ такие, что*

$$\sigma(d_1) = u \circ \varphi_2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ d_2, \tag{60}$$

$$\sigma(\varphi_1(x)) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \textit{для любого элемента } x \in G_1, \tag{61}$$

где $d_1 = f_1(\overset{(n)}{c_1})$, $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c_2})$ и φ_1, φ_2 — автоморфизмы групп $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ соответственно, построенные по правилу (24), то отображение $\psi(x) = \sigma(x)\circ u$ является гомоморфизмом n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G_2, f_2\rangle$. Других гомоморфизмов n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G_2, f_2\rangle$ нет.

Доказательство. В ретрактах $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ определяем бинарные операции $\cdot$ и $\circ$ соответственно по правилам

$$a_1 \cdot b_1 = f_1(a_1, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1, b_1), \quad a_2 \circ b_2 = f_2(a_2, \overset{(n-3)}{c_2}, \bar{c}_2, b_2).$$

Для любых элементов $x_1^n \in G_1$, используя условие теоремы, условия (21) из теоремы 10, а также абелевость ретракта $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$, получим

$$\psi(f_1(x_1^n)) = \sigma(f_1(x_1^n)) \circ u = \sigma(x_1 \cdot \varphi_1(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_1^{n-2}(x_{n-1}) \cdot x_n \cdot d_1) \circ u =$$

$$= \sigma(x_1) \circ \sigma(\varphi_1(x_2)) \circ \ldots \circ \sigma(\varphi_1^{n-2}(x_{n-1})) \circ \sigma(x_n) \circ \sigma(d_1) \circ u =$$

$$= \sigma(x_1) \circ \varphi_2(\sigma(x_2)) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(\sigma(x_{n-1})) \circ \sigma(x_n) \circ u \circ \varphi_2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ d_2 \circ u =$$

$$= \sigma(x_1) \circ u \circ \varphi_2(\sigma(x_2) \circ u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(\sigma(x_{n-1}) \circ u) \circ \sigma(x_n) \circ u \circ d_2 =$$

$$= \psi(x_1) \circ \varphi_2(\psi(x_2)) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(\psi(x_{n-1})) \circ \psi(x_n) \circ d_2 = f_2(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)).$$

Пусть теперь τ — любой гомоморфизм n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G_2, f_2\rangle$. Тогда, по теореме 41, отображение $\sigma : G_1 \to G_2$, определяемое правилом $\sigma(x) = \tau(x)\circ u^{-1}$, где $u = \tau(c_1)$, является гомоморфизмом группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$. Кроме того,

$$\sigma(d_1) = \tau(d_1) \circ u^{-1} = \tau(f_1(\overset{(n)}{c_1})) \circ u^{-1} = f_2(\overset{(n)}{\tau(c_1)}) \circ u^{-1} =$$

$$= f_2(\overset{(n)}{u}) \circ u^{-1} = u \circ \varphi_2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ u \circ d_2 \circ u^{-1} = u \circ \varphi_2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ d_2$$

и для любого элемента $x \in G_1$, используя правило (24), свойство 8 косого элемента, условия (21) из теоремы 10, а также абелевость ретракта $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$, получим

$$\sigma(\varphi_1(x)) = \tau(\varphi_1(x)) \circ u^{-1} = \tau(f_1(c_1, x, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1)) \circ u^{-1} =$$

$$= f_2(\tau(c_1), \tau(x), \overset{(n-3)}{\tau(c_1)}, \tau(\bar{c}_1)) \circ u^{-1} =$$
$$= \tau(c_1) \circ \varphi_2(\tau(x)) \circ \varphi_2^2(\tau(c_1)) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(\tau(c_1)) \circ \overline{\tau(c_1)} \circ d_2 \circ u^{-1} =$$
$$= u \circ \varphi_2(\tau(x)) \circ \varphi_2^2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ \bar{u} \circ d_2 \circ u^{-1} =$$
$$= \varphi_2(\tau(x)) \circ \varphi_2^2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ \bar{u} \circ d_2,$$

но $\varphi_2^2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ \bar{u} \circ d_2 = \varphi_2(u^{-1})$ (это следует из $f_2(\overset{(n-1)}{u}, \bar{u}) = u$ при раскрытии этого равенства с помощью условий (21) из теоремы 10), тогда

$$\sigma(\varphi_1(x)) = \varphi_2(\tau(x)) \circ \varphi_2(u^{-1}) = \varphi_2(\tau(x) \circ u^{-1}) = \varphi_2(\sigma(x)).$$

Значит, τ — один из гомоморфизмов n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G_2, f_2\rangle$, построенных выше с помощью гомоморфизмов группы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в группу $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ и элементов u из G_2 с заданными условиями (60) и (61). Теорема доказана.

Следствие 31 *([51]-A, Следствие 36, с. 148) Пусть $\langle G, f\rangle$ — полуабелева n-группа. Эндоморфизм σ ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$ с бинарной операцией $\cdot$ и элемент u из G, которые удовлетворяют условиям*

$$\sigma(d) = u \cdot \varphi(u) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-2}(u) \cdot d,$$

$$\sigma(\varphi(x)) = \varphi(\sigma(x)) \quad \textit{для любого элемента } x \in G,$$

где $d = f(\overset{(n)}{c})$ и φ — автоморфизм ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$, построенный по правилу (24), определяют эндоморфизм ψ n-группы $\langle G, f\rangle$ по правилу $\psi(x) = \varphi(x) \cdot u$. Других эндоморфизмов на n-группе $\langle G, f\rangle$ нет.

Из теорем 41 и 42 следует критерий изоморфизма полуабелевых n-групп:

Следствие 32 *([51]-A, Следствие 37, с. 149) Полуабелевы n-группы $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся изоморфизм σ ретракта $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ в ретракт $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ и элемент $u \in G_2$ такие, что*

$$\sigma(d_1) = u \circ \varphi_2(u) \circ \ldots \circ \varphi_2^{n-2}(u) \circ d_2,$$

$$\sigma(\varphi_1(x)) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \textit{для любого элемента } x \in G_1,$$

где $d_1 = f_1(\overset{(n)}{c_1})$, $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c_2})$, $\circ$ — бинарная операция в группе $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ и φ_1, φ_2 — автоморфизмы групп $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ соответственно, построенные по правилу (24).

2.3 m-Полуабелевы n-группы

Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа, F_G — свободная полугруппа над алфавитом G, θ_G — отношение эквивалентности Поста [2], определенное на F_G по правилу: $(\alpha, \beta) \in \theta_G$ тогда и только тогда, когда найдутся последовательности γ, δ из F_G такие, что $f_{(k)}(\gamma, \alpha, \delta) = f_{(l)}(\gamma, \beta, \delta)$, где $k(n-1)+1$, $l(n-1)+1$ — длины последовательностей γ, α, δ, γ, β, δ соответственно. Очевидно, θ_G — конгруэнция на полугруппе F_G и фактор-полугруппа $G^* = F_G/\theta_G$ является группой.

Для любого индекса $i = 1, \ldots, n-1$ определим множество

$$G^{(i)} = \{\theta_G(\alpha) \mid \theta_G(\alpha) \in G^*, l(\alpha) = i\},$$

где $\theta_G(\alpha)$ — класс конгруэнции θ_G, содержащий последовательность α; $l(\alpha)$ — длина последовательности α. В частности

$$G' = \{\theta_G(a) \mid a \in G\},\ G'' = \{\theta_G(ab) \mid a, b \in G\}.$$

Для сокращения записей множество $G^{(n-1)}$ будем обозначать распостраненным в литературе по n-группам символом G_0, то есть $G_0 = G^{(n-1)}$.

Легко проверяется (см., например, предложение 1.3.7 из [14]), что $G^{(i)} \cap G^{(j)} = \emptyset$ для любых индексов $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \neq j$.

Замечание 1 *Если $n = k(m-1)+1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то легко проверяется, что множество $G^{(m-1)}$ являентся $(k+1)$-группой относительно $(k+1)$-арной операциии*

$$g(\theta_G(\alpha_1), \ldots, \theta_G(\alpha_{k+1})) = \theta_G(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}),\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in G^{(m-1)}.$$

Если $m = 2$, то $k = n-1$ и получаем n-арную операцию

$$g(\theta_G(a_1), \ldots, \theta_G(a_n)) = \theta_G(a_1a_2\ldots a_n) = \theta_G(f(a_1, \ldots, a_n)),\ a_1, \ldots, a_n \in G.$$

При этом, как не сложно установить, отображение $\varphi : a \to \theta_G(a)$ является изоморфизмом n-группы $\langle G, f\rangle$ на n-группу $\langle G', g\rangle$.

Если $m = n$, то $k = 1$ и получаем бинарную операцию

$$\theta_G(a_1\ldots a_{n-1}) \cdot \theta_G(b_1\ldots b_{n-1}) = \theta_G(a_1\ldots a_{n-1}b_1\ldots b_{n-1}) =$$
$$= \theta_G(f(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1)b_2\ldots b_{n-1}),\ a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1} \in G.$$

При этом группа $\langle G^{(n-1)} = G_0, \cdot\rangle$ будет соответствующей для n-группы $\langle G, f\rangle$ и для сокращения записей обозначают одним символом G_0.

Замечание 2 *Для n-группы $\langle G, f\rangle$ обозначим символом $[\ ]_n$ n-арную операцию, производную от операции в A^*:*

$$[\theta_G(\alpha_1), \ldots, \theta_G(\alpha_n)]_n = \theta_G(\alpha_1\ldots\alpha_n),\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in G^*.$$

Легко проверяется, что для любого индекса $i = 1, \ldots, n-1$ множество $G^{(i)}$ замкнуто относительно этой n-арной операции, а универсальная алгебра $\langle G^{(i)}, [\ ]_n\rangle$ является подгруппой n-группы $\langle G^*, [\ ]_n\rangle$. Ясно, что на множестве G' n-арная операция $[\ ]_n$ совпадает с n-арной операцией из замечания 1.

Если $m-1$ делит $n-1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то положим

$${}^{m}G = \{\theta_G(\alpha) \in G^* \mid l(\alpha) \text{ кратно } m-1\}.$$

При $m = 2$ множество ${}^{m}G$ совпадает с универсальной обертывающей группой G^*, а при $m = n$ множество ${}^{m}G$ совпадает с соответствующей группой G_0:

$${}^{2}G = G^*,\ {}^{n}G = G_0.$$

Обобщение теоремы Поста о смежных классах. Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Поста о смежных классах (т.е. теоремы 7).

Теорема 43 *(Теорема 1, [85]-А) Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа, $n = k(m-1)+1$. Тогда:*

1) $G_0 \subseteq {}^mG \subseteq G^*$;

2) ${}^mG = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))}$;

3) ${}^mG$ — инвариантная подгруппа группы G^*;

4) группа ${}^mG$ порождается множеством $G^{(m-1)}$;

5) ${}^mG/G_0 = \{G^{(m-1)}, G^{(2(m-1))}, \ldots, G^{(k(m-1))} = G_0\}$ — циклическая группа порядка k, порожденная элементом $G^{(m-1)}$;

6) $G^*/{}^mG$ — циклическая группа порядка $m-1$.

Доказательство. 1) Так как $F_G/\theta_G = G^*$, то из определения множества ${}^mG$ вытекает включение ${}^mG \subseteq G^*$. А так как $n = k(m-1)+1$, то $n-1$ кратно $m-1$. Следовательно, $G_0 = G^{(n-1)} \subseteq {}^mG$.

2) Включение $\bigcup\limits_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))} \subseteq {}^mG$ очевидно. Пусть $\theta_G(\alpha) = \theta_G(a_1 \ldots a_{t(m-1)})$ — произвольный элемент из ${}^mG$. Если $1 \le t \le k$, то

$$\theta_G(\alpha) \in G^{(t(m-1))} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))}.$$

Если же $t > k$, то $t = sk + r$, где $s \ge 1$, $1 \le r \le k$. Тогда

$$\theta_G(\alpha) = \theta_G(a_1 \ldots a_{t(m-1)}) = \theta_G(a_1 \ldots a_{(sk+r)(m-1)}) =$$
$$= \theta_G(a_1 \ldots a_{sk(m-1)+r(m-1)}) = \theta_G(a_1 \ldots a_{s(n-1)+r(m-1)}) =$$
$$= \theta_G(f_{(s)}(a_1, \ldots, a_{s(n-1)+1})a_{s(n-1)+2} \ldots a_{s(n-1)+r(m-1)}) =$$
$$= \theta_G(b_1 b_2 \ldots b_{r(m-1)}) \in G^{(r(m-1))} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))},$$

где $b_1 = f_{(s)}(a_1, \ldots, a_{s(n-1)+1}), b_2 = a_{s(n-1)+2}, \ldots, b_{r(m-1)} = a_{s(n-1)+r(m-1)}$.

Таким образом, доказано включение ${}^mG \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))}$. Из доказанных включений следует требуемое равенство.

3) Если $\theta_G(\alpha), \theta_G(\beta)$ — произвольные элементы из ${}^mG$, то длины $l(\alpha)$ и $l(\beta)$ кратны $m-1$. Тогда $l(\alpha\beta) = l(\alpha) + l(\beta)$ также кратно $m-1$. Следовательно,

$$\theta_G(\alpha)\theta_G(\beta) = \theta_G(\alpha\beta) \in {}^mG,$$

то есть множество ${}^mG$ замкнуто относительно операции в группе G^*.

Так как $G_0 \subseteq {}^mG$, то в ${}^mG$ имеется нейтральный элемент E, совпадающий с классом конгруэнции θ_G, содержащим все нейтральные последовательности n-группы $\langle G, f\rangle$.

Пусть $\theta_G(\alpha)$ — произвольный элемент из ${}^mG$ и $\theta_G^{-1}(\alpha) = \theta_G(\beta)$ — обратный к нему элемент в G^*. Так как $E = \theta_G(\alpha)\theta_G^{-1}(\alpha) = \theta_G(\alpha)\theta_G(\beta) = \theta_G(\alpha\beta)$, то $\alpha\beta$ — нейтральная последовательность n-группы $\langle G, f\rangle$, длина $l(\alpha\beta)$ которой, как известно, кратна $n-1$. А так как $n = k(m-1)+1$, то число $l(\alpha\beta)$ кратно $m-1$. Так как числа $l(\alpha)$ и $l(\alpha\beta)$ кратны $m-1$, то из равенства $l(\alpha\beta) = l(\alpha) + l(\beta)$ следует, что длина $l(\beta)$ последовательности β также кратна $m-1$.

Таким образом, множество ${}^mG$ содержит нейтральный элемент E группы G^* и все свои обратные. Следовательно, ${}^mG$ — подгруппа группы G^*.

Так как $\theta_G(\beta)G^{(j)}\theta_G^{-1}(\beta) = G^{(j)}$ для любого элемента $\theta_G(\beta) \in G^*$ и любого индекса $j = 1, \ldots, n-1$, то

$$\theta_G(\beta){}^mG\theta_G^{-1}(\beta) = \theta_G(\beta)(\bigcup_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))})\theta_G^{-1}(\beta) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k}(\theta_G(\beta)G^{(i(m-1))}\theta_G^{-1}(\beta)) = \bigcup_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))} = {}^mG.$$

Следовательно, подгруппа ${}^mG$ инвариантна в группе G^*.

4) Пусть $\theta_G(\alpha)$ — любой элемент из ${}^mG$. Согласно 2), $\theta_G(\alpha) \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))}$, т.е. для некоторого индекса $i \in \{1, \ldots, k\}$ и некоторых элементов $a_1, \ldots, a_{i(m-1)}$ из G имеем

$$\theta_G(\alpha) = \theta_G(a_1 \ldots a_{i(m-1)}) =$$

$$= \theta_G(a_1 \ldots a_{m-1})\theta_G(a_m \ldots a_{2(m-1)}) \ldots \theta_G(a_{(i-1)(m-1)+1} \ldots a_{i(m-1)}),$$

где $\theta_G(a_1 \ldots a_{m-1}), \theta_G(a_m \ldots a_{2(m-1)}), \ldots, \theta_G(a_{(i-1)(m-1)+1} \ldots a_{i(m-1)}) \in G^{(m-1)}$.

Таким образом, произвольный элемент группы ${}^mG$ представим в виде произведения элементов из $G^{(m-1)}$. Это значит, что группа ${}^mG$ порождается множеством $G^{(m-1)}$.

5) Инвариантность G_0 в ${}^mG$ следует из инвариантности G_0 в G^*. Так как, согласно 4) теоремы 1.4.2 [14], $\theta_G(\beta)G_0 = G_0\theta_G(\beta) = G^{(i(m-1))}$ для любого элемента $\theta_G(\beta) \in G^{(i(m-1))}$, то ${}^mG/G_0 = \{G^{(m-1)}, G^{(2(m-1))}, \ldots, G^{(k(m-1))}\}$. Из легко проверяемого равенства $\underbrace{G^{(m-1)} \ldots G^{(m-1)}}_{i} = G^{(i(m-1))}$ следует, что ${}^mG/G_0$ — циклическая группа, порожденная элементом $G^{(m-1)}$.

6) Так как G^*/G_0 — циклическая группа порядка $n-1$, то, учитывая изоморфизм $(G^*/G_0)/({}^mG/G_0) \cong G^*/{}^mG$ и порядок $|{}^mG/G_0| = k$, видим, что $G^*/{}^mG$ —циклическая группа порядка $|G^*/{}^mG| = (n-1)/k = k(m-1)/k = m-1$. Теорема доказана.

Так как $G^{(i(m-1))} \cap G^{(j(m-1))} = \emptyset$ при $i \neq j$, то из 2) предыдущей теоремы вытекает

Следствие 33 *(Следствие 1, [85]-A) Если $n = k(m-1)+1$, $\langle G, f\rangle$ — конечная n-группа порядка γ, то порядок группы ${}^mG$ равен $k\gamma$.*

Замечание 3 *Если в теореме 43 положить $m = 2$, то тогда $k = n-1$, ${}^mG = G^*$, а утверждения 1) — 6) примут следующий вид:*

1) $G_0 \subseteq G^*$;

2) $G^* = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} G^{(i)}$;

3) G^* — инвариантная подгруппа группы G^*;

4) группа G^* порождается множеством G';

5) $G^*/G_0 = \{G', G'', \ldots, G^{(n-1)} = G_0\}$ — циклическая группа порядка $n-1$, порожденная элементом G';

6) G^*/G^* — циклическая группа порядка 1.

Утверждения 3 и 6 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах ([2], теорема 1.4.2 из [14]).

Замечание 4 *Если в теореме 43 положить $m = n$, то тогда $k = 1$, ${}^mG = G_0$, а утверждения 1) — 6) примут следующий вид:*

1) $G_0 \subseteq G^*$;
2) $G_0 = G_0$;
3) G_0 — инвариантная подгруппа группы G^*;
4) группа G_0 порождается множеством G_0;
5) G_0/G_0 — циклическая группа порядка 1;
6) G^*/G_0 — циклическая группа порядка $n-1$.

Утверждения 2, 4 и 5 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах.

Таким образом, теорема 43 является обобщением теоремы Поста о смежных классах. При этом утверждение последней о том, что G^*/G_0 — циклическая группа порядка $n-1$, может быть получено из теоремы 43 двояко: из утверждения 5) при $m = 2$; из утверждения 6) при $m = n$. Вообще говоря, указанное обобщение является формальным, так как утверждения теоремы 43 могут быть извлечены из теоремы Поста о смежных классах. Например, цикличность группы ${}^mG/G_0$ вытекает из того, что ${}^mG/G_0$ — подгруппа циклической группы G^*/G_0; а цикличность группы $G^*/{}^mG$, как видно из доказательства утверждения 6), вытекает из цикличности группы G^*/G_0 и изоморфизма $(G^*/G_0)/({}^mG/G_0) \cong G^*/{}^mG$.

Используя утверждения 3) и 4) предложения 1.3.7 [14] несложно получить разложения групп G^* и ${}^mG$ на непересекающиеся смежные классы по подгруппам ${}^mG$ и G_0 соответственно.

Предложение 43 *(Предложение 1, [85]-A) Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа, $n = k(m-1)+1$, $b \in G$. Тогда:*

$$\begin{aligned} 1)\quad G^* &= {}^mG + \theta_G(b){}^mG + \theta_G^2(b){}^mG + \ldots + \theta_G^{m-2}(b){}^mG = \\ &= {}^mG + {}^mG\theta_G(b) + {}^mG\theta_G^2(b) + \ldots + {}^mG\theta_G^{m-2}(b); \\ 2)\quad {}^mG &= G_0 + \theta_G(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})G_0 + \theta_G^2(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})G_0 + \ldots + \theta_G^{k-1}(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})G_0 = \\ &= G_0 + G_0\theta_G(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}) + G_0\theta_G^2(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}) + \ldots + G_0\theta_G^{k-1}(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}). \end{aligned}$$

Известное разложение Поста ([2], предложение 1.4.6 из [14])

$$G^* = G_0 + \theta_G(b)G_0 + \theta_G^2(b)G_0 + \ldots + \theta_G^{n-2}(b)G_0 =$$

$$= G_0 + G_0\theta_G(b) + G_0\theta_G^2(b) + \ldots + G_0\theta_G^{n-2}(b)$$

может быть получено либо из 1) предыдущего предложения при $m = n$, либо из 2) этого же предложения при $m = 2$.

Замечание 5 *Из утверждения 4) теоремы 43 и определения $(k+1)$-арной операции g (смотри замечание 1) следует, что группа ${}^mG$ является обертывающей для $(k+1)$-группы $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$. Более того, группа ${}^mG$ изоморфна универсальной обертывающей группе Поста $(G^{(m-1)})^*$ для $(k+1)$-группы $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$.*

Группа G^* из теоремы Поста (теорема 7) и ее подгруппа G_0 используются при изучении n-групп. Яркими примерами эффективного использования этих групп являются описание В.А. Артамоновым свободных n-групп [19] и шрайеровых многообразий n-групп [20]. В следующем разделе будет показано, что при изучении n-групп с успехом может быть использована и группа ${}^mG$, частным случаем которой, как отмечалось выше, являются как сама группа G^*, так и ее подгруппа G_0.

Критерий m-полуабелевости n-группы. Э. Пост объединил абелевость и полуабелевость общим понятием, назвав [2] n-группу $\langle G, f\rangle$ m-полуабелевой, если $m-1$ делит $n-1$ и $(aa_1\ldots a_{m-2}b, ba_1\ldots a_{m-2}a) \in \theta_G$ для любых элементов $a, a_1, \ldots, a_{m-2}, b \in G$. Сформулируем и докажем с помощью группы ${}^mG$ критерий m-полуабелевости n-группы.

Лемма 4 *(Лемма 1, [85]-А) Для всех элементов $a, a_1, \ldots, a_{i(m-1)-1}, b \in G$ m-полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ при любом индексе $i \geq 1$ верно $(aa_1\ldots a_{i(m-1)-1}b, ba_1\ldots a_{i(m-1)-1}a) \in \theta_G$.*

Доказательство. Для сокращения записей положим

$$\alpha_1 = a_1\ldots a_{m-2},\ c_1 = a_{m-1}, \alpha_2 = a_m\ldots a_{2(m-1)-1},\ c_2 = a_{2(m-1)}, \ldots,$$

$$\alpha_{i-1} = a_{(i-2)(m-1)+1}\ldots a_{(i-1)(m-1)-1},\ c_{i-1} = a_{(i-1)(m-1)},$$

$$\alpha_i = a_{(i-1)(m-1)+1}\ldots a_{i(m-1)-1}.$$

Тогда, используя m-полуабелевость n-группы $\langle G, f\rangle$, будем иметь

$$\theta_G(aa_1\ldots a_{i(m-1)-1}b) = \theta_G(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2\ldots\alpha_{i-1}c_{i-1}\alpha_ib) =$$

$$= \theta_G(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2\ldots\alpha_{i-1})\theta_G(c_{i-1}\alpha_ib) = \theta_G(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2\ldots\alpha_{i-1})\theta_G(b\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_G(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2\ldots\alpha_{i-2}c_{i-2}\alpha_{i-1}b)\theta_G(\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_G(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2\ldots\alpha_{i-2})\theta_G(c_{i-2}\alpha_{i-1}b)\theta_G(\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_G(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2\ldots\alpha_{i-2})\theta_G(b\alpha_{i-1}c_{i-2})\theta_G(\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_G(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2\ldots\alpha_{i-2}b)\theta_G(\alpha_{i-1}c_{i-2}\alpha_ic_{i-1}) = \ldots$$

$$\ldots = \theta_G(a\alpha_1b)\theta_G(\alpha_2c_1\ldots\alpha_ic_{i-1}) = \theta_G(b\alpha_1a)\theta_G(\alpha_2c_1\ldots\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_G(b\alpha_1)\theta_G(a\alpha_2c_1)\theta_G(\alpha_3c_2\ldots\alpha_ic_{i-1}) = \theta_G(b\alpha_1)\theta_G(c_1\alpha_2a)\theta_G(\alpha_3c_2\ldots\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_G(b\alpha_1c_1\alpha_2)\theta_G(a\alpha_3c_2\ldots\alpha_ic_{i-1}) = \ldots = \theta_G(b\alpha_1c_1\alpha_2\ldots\alpha_{i-2}c_{i-2}\alpha_{i-1})$$

$$\theta_G(a\alpha_ic_{i-1}) = \theta_G(b\alpha_1c_1\ldots\alpha_{i-2}c_{i-2}\alpha_{i-1})\theta_G(c_{i-1}\alpha_ia) =$$

$$= \theta_G(b\alpha_1c_1\ldots\alpha_{i-1}c_{i-1}\alpha_ia) = \theta_G(ba_1\ldots a_{i(m-1)-1}a),$$

то есть $\theta_G(aa_1\ldots a_{i(m-1)-1}b) = \theta_G(ba_1\ldots a_{i(m-1)-1}a)$. Лемма доказана.

Лемма 5 *(Лемма 2, [85]-А) n-Группа $\langle G, f\rangle$ является m-полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых элементов $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_{m-1} \in G$ верна принадлежность*

$$(a_1\ldots a_{m-1}b_1\ldots b_{m-1}, b_1\ldots b_{m-1}a_1\ldots a_{m-1}) \in \theta_G. \tag{62}$$

Доказательство. Зафиксировав $c_1, \ldots, c_{m-2} \in G$, получим

$$\theta_G(a_1 \ldots a_{m-1}) = \theta_G(ac_1 \ldots c_{m-2}), \quad \theta_G(b_1 \ldots b_{m-1}) = \theta_G(bc_1 \ldots c_{m-2})$$

для некоторых элементов $a, b \in G$.

Необходимость. Так как $\langle G, f\rangle$ m-полуабелева n-группа, то

$$\theta_G(a_1 \ldots a_{m-1}b_1 \ldots b_{m-1}) = \theta_G(ac_1 \ldots c_{m-2}bc_1 \ldots c_{m-2}) =$$

$$= \theta_G(ac_1 \ldots c_{m-2}b)\theta_G(c_1 \ldots c_{m-2}) = \theta_G(bc_1 \ldots c_{m-2}a)\theta_G(c_1 \ldots c_{m-2}) =$$

$$= \theta_G(bc_1 \ldots c_{m-2})\theta_G(ac_1 \ldots c_{m-2}) = \theta_G(b_1 \ldots b_{m-1}a_1 \ldots a_{m-1}),$$

то есть верна принадлежность (62).

Достаточность. Из (62) следует

$$\theta_G(a_1 \ldots a_{m-1}b_1 \ldots b_{m-1}) = \theta_G(b_1 \ldots b_{m-1}a_1 \ldots a_{m-1}),$$

откуда $\quad \theta_G(ac_1 \ldots c_{m-2}bc_1 \ldots c_{m-2}) = \theta_G(bc_1 \ldots c_{m-2}ac_1 \ldots c_{m-2}),$

$$\theta_G(ac_1 \ldots c_{m-2}b)\theta_G(c_1 \ldots c_{m-2}) = \theta_G(bc_1 \ldots c_{m-2}a)\theta_G(c_1 \ldots c_{m-2}),$$

$$\theta_G(ac_1 \ldots c_{m-2}b) = \theta_G(bc_1 \ldots c_{m-2}a),$$

то есть последовательности $ac_1 \ldots c_{m-2}b$ и $bc_1 \ldots c_{m-2}a$ эквивалентны. По теореме 2.6.6 [14] n-группа $\langle G, f\rangle$ будет m-полуабелевой. Лемма доказана.

Замечание 6 *Если $n = k(m-1)+1$, то непосредственным следствием леммы 5 является равносильность m-полуабелевости n-группы $\langle G, f\rangle$ и абелевости $(k+1)$-группы $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$ из замечания 1.*

Замечание 7 *При $n = k(m-1)+1$ еще одним непосредственным следствием леммы 5 является равносильность m-полуабелевости n-группы $\langle G, f\rangle$ и абелевости n-группы $\langle G^{(m-1)}, [\ ]_n\rangle$ из замечания 2.*

Теорема 44 *(Теорема 2, [85]-А) n-Группа $\langle G, f\rangle$ является m-полуабелевой тогда и только тогда, когда группа ${}^mG$ абелева.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$u = \theta_G(a_1 \ldots a_{i(m-1)}), \ v = \theta_G(b_1 \ldots b_{j(m-1)}),$$

где $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $n = k(m-1)+1$, произвольные элементы из ${}^mG$. Если зафиксировать $c \in G$, то u и v можно представить в виде

$$u = \theta_G(a\underbrace{c \ldots c}_{i(m-1)-1}), \ v = \theta_G(b\underbrace{c \ldots c}_{j(m-1)-1})$$

для некоторых элементов $a, b \in G$. Пусть для определенности $i < j$. Тогда, дважды применяя лемму 4, получим

$$uv = \theta_G(a\underbrace{c \ldots c}_{i(m-1)-1})\theta_G(b\underbrace{c \ldots c}_{j(m-1)-1}) = \theta_G(a\underbrace{c \ldots c}_{i(m-1)-1}b)\theta_G(\underbrace{c \ldots c}_{j(m-1)-1}) =$$

$$= \theta_G(b\underbrace{c\ \dots\ c}_{i(m-1)-1}a)\theta_G(\underbrace{c\ \dots\ c}_{j(m-1)-1}) = \theta_G(b\underbrace{c\ \dots\ c}_{i(m-1)-1})\theta_G(a\quad\underbrace{c\dots\ c}_{(j-i)(m-1)-1}\quad c)\theta_G(\underbrace{c\ \dots\ c}_{i(m-1)-1}) =$$

$$= \theta_G(b\underbrace{c\ \dots\ c}_{i(m-1)-1})\theta_G(c\quad\underbrace{c\ \dots\ c}_{(j-i)(m-1)-1}\quad a)\theta_G(\underbrace{c\ \dots\ c}_{i(m-1)-1}) =$$

$$= \theta_G(b\underbrace{c\ \dots\ c}_{j(m-1)-1})\theta_G(a\underbrace{c\ \dots\ c}_{i(m-1)-1}) = vu,$$

то есть группа ${}^mG$ абелева.

Если $i = j$, то проводятся те же самые рассуждения, но лемма 4 применяется один раз.

Достаточность. Если $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{m-1}$ — произвольные элементы из G, то из абелевости группы ${}^mG$ следует

$$\theta_G(a_1 \dots a_{m-1})\theta_G(b_1 \dots b_{m-1}) = \theta_G(b_1 \dots b_{m-1})\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}),$$

откуда $\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}b_1 \dots b_{m-1}) = \theta_G(b_1 \dots b_{m-1}a_1 \dots a_{m-1})$, то есть обе последовательности $a_1 \dots a_{m-1}b_1 \dots b_{m-1}$ и $b_1 \dots b_{m-1}a_1 \dots a_{m-1}$ эквивалентны. Тогда по лемме 5 n-группа $\langle G, f\rangle$ m-полуабелева. Теорема доказана.

Полагая в теореме 44 $m = 2$, получим

Следствие 34 *[2] n-Группа $\langle G, f\rangle$ является абелевой тогда и только тогда, когда ее универсальная обертывающая группа G^* абелева.*

Полагая в теореме 44 $m = n$, получим

Следствие 35 *[2] n-Группа $\langle G, f\rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда ее соответствующая группа G_0 абелева.*

Для полноты изложения приведем еще один критерий m-полуабелевости n-группы [14], в формулировке которого присутствует $(k+1)$-группа, изоморфная $(k+1)$-группе из замечания 1. Предварительно зафиксируем в n-группе $\langle G, f\rangle$, где $n = k(m-1)+1$, элементы $c_1, \dots, c_{m-2}$ и определим на G $(k+1)$-арную операцию $[\ ]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}}$ следующим образом:

$$[a_1, \dots, a_{k+1}]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}} = f(a_1, c_1, \dots, c_{m-2}, \dots, a_k, c_1, \dots, c_{m-2}, a_{k+1}).$$

Проведя соответствующие вычисления (см., например, [14]), можно убедиться в том, что $\langle G, [\ ]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}}\rangle$ — $(k+1)$-группа. Этот результат может быть получен и как следствие изоморфизма из следующей леммы.

Лемма 6 *(Лемма 3, [85]-А) Пусть $n = k(m-1)+1$, $\langle G, f\rangle$ — n-группа, $c_1, \dots, c_{m-2} \in G$. Тогда $(k+1)$-агруппы $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$ и $\langle G, [\ ]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}}\rangle$ изоморфны.*

Доказательство. Определим отображение $\tau : G^{(m-1)} \to G$ по правилу:

$$\tau : \theta_G(ac_1 \dots c_{m-2}) \to a.$$

Ясно, что τ — биекция $G^{(m-1)}$ на G. Для любых элементов

$$\theta_G(a_1c_1 \dots c_{m-2}), \dots, \theta_G(a_{k+1}c_1 \dots c_{m-2}) \in G^{(m-1)}$$

имеем $\tau(g(\theta_G(a_1c_1\dots c_{m-2}),\dots,\theta_G(a_{k+1}c_1\dots c_{m-2}))) =$

$$= \tau([\theta_G(f(a_1,c_1,\dots,c_{m-2},\dots,a_k,c_1,\dots,c_{m-2},a_{k+1})c_1\dots c_{m-2})) =$$

$$= f(a_1,c_1,\dots,c_{m-2},\dots,a_k,c_1,\dots,c_{m-2},a_{k+1}) = [a_1,\dots,a_{k+1}]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}} =$$
$$= [\tau(\theta_G(a_1c_1\dots c_{m-2})),\dots,\tau(\theta_G(a_{k+1}c_1\dots c_{m-2}))]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}},$$

то есть $\tau(g(\theta_G(a_1c_1\dots c_{m-2})\dots\theta_G(a_{k+1}c_1\dots c_{m-2}))) =$

$$= [\tau(\theta_G(a_1c_1\dots c_{m-2}))\tau(\theta_G(a_2c_1\dots c_{m-2}))\dots\tau(\theta_G(a_{k+1}c_1\dots c_{m-2}))]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}}.$$

Лемма доказана.

Замечание 6 и лемма 6 позволяют получить критерий m-полуабелевости n-группы.

Предложение 44 *([14], предложение 2.6.14) Пусть $n = k(m-1)+1$, $\langle G,f\rangle$ — n-группа. Тогда:*

1) если $\langle G,f\rangle$ — m-полуабелева, то для любых элементов $c_1,\dots,c_{m-2}\in G$ $(k+1)$-группа $\langle G,[\ ]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}}\rangle$ — абелева;

2) если для элементов $c_1,\dots,c_{m-2}\in G$ имеем абелеву $(k+1)$-группу $\langle G,[\ ]_{k+1,c_1\dots c_{m-2}}\rangle$, то $\langle G,f\rangle$ будет m-полуабелевой.

2.4 Периодичность в полуабелевых n-группах

В абелевых группах верно тождество $a^k\cdot b^k = (a\cdot b)^k$ для любого целого числа k. Обобщением этого тождества на n-арный случай служит следующая

Теорема 45 *(Теорема 2 из [66]-A) В полуабелевой n-группе $\langle G,f\rangle$ для любых элементов $a_1,\dots,a_n\in G$ верно равенство*

$$f(a_1^n)^{\langle k\rangle} = f(a_1^{\langle k\rangle},\dots,a_n^{\langle k\rangle}), \tag{63}$$

где k — любое целое число.

Доказательство. Для $k=0$ левая и правая части равенства (63) одинаковые (смотри определение n-арной степени).

Используем индукцию для натурального числа k. Для $k=1$, используя тождество (58) и определение n-арной степени, получим

$$f(a_1^n)^{\langle 1\rangle} = f(f(\overset{(n)}{a_1^n})) = f(f(\overset{(n)}{a_1}),\dots,f(\overset{(n)}{a_n})) = f(a_1^{\langle 1\rangle},\dots,a_n^{\langle 1\rangle}).$$

Если равенство (63) верно для $k-1$, то, используя определение n-арной степени, индуктивное предположение и тождество (58), получим

$$f(a_1^n)^{\langle k\rangle} = f(f(a_1^n)^{\langle k-1\rangle},\overset{(n-1)}{f(a_1^n)}) = f(f(a_1^{\langle k-1\rangle},\dots,a_n^{\langle k-1\rangle}),\overset{(n-1)}{f(a_1^n)}) =$$

$$= f(f(a_1^{\langle k-1\rangle},\overset{(n-1)}{a_1}),\dots,f(a_n^{\langle k-1\rangle},\overset{(n-1)}{a_n})) = f(a_1^{\langle k\rangle},\dots,a_n^{\langle k\rangle}).$$

Согласно методу математической индукции, равенство (63) верно для любого натурального числа k.

Для отрицательных целых чисел k элемент $f(a_1^n)^{\langle k\rangle}$ является решением уравнения $f_{(-k)}(x, \overset{(-k(n-1))}{f(a_1^n)}) = f(a_1^n)$, но, используя $-k$ раз тождество (58), получим

$$f_{(-k)}(f(a_1^{\langle k\rangle}, \ldots, a_n^{\langle k\rangle}), \overset{-k(n-1)}{f(a_1^n)}) =$$

$$= f_{(-k-1)}(f(f(a_1^{\langle k\rangle}, \ldots, a_n^{\langle k\rangle}), \overset{(n-1)}{f(a_1^n)}), \overset{((-k-1)(n-1))}{f(a_1^n)}) =$$

$$= f_{(-k-1)}(f(f(a_1^{\langle k\rangle}, \overset{(n-1)}{a_1}), \ldots, f(a_n^{\langle k\rangle}, \overset{(n-1)}{a_n})), \overset{((-k-1)(n-1))}{f(a_1^n)}) =$$

$$= f_{(-k-2)}(f(f(f(a_1^{\langle k\rangle}, \overset{(n-1)}{a_1}), \ldots, f(a_n^{\langle k\rangle}, \overset{(n-1)}{a_n})), \overset{(n-1)}{f(a_1^n)}), \overset{((-k-2)(n-1))}{f(a_1^n)}) =$$

$$= f_{(-k-2)}(f(f_{(2)}(a_1^{\langle k\rangle}, \overset{(2(n-1))}{a_1}), \ldots, f_{(2)}(a_n^{\langle k\rangle}, \overset{(2(n-1))}{a_n})), \overset{((-k-2)(n-1))}{f(a_1^n)}) = \ldots$$

$$\ldots = f(f_{(-k)}(a_1^{\langle k\rangle}, \overset{(-k(n-1))}{a_1}), \ldots, f_{(-k)}(a_n^{\langle k\rangle}, \overset{(-k(n-1))}{a_n})) = f(a_1^n),$$

значит, равенство (63) верно и для отрицательных показателей. Теорема доказана.

Известно, что в абелевой группе множество всех элементов конечного порядка является подгруппой, ее называют периодической частью группы. Обобщением этого результата на n-арный случай служит следующая

Теорема 46 *(Теорема 3 из [66]-A) В полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ множество P всех ее элементов конечного n-арного порядка (периодическая часть n-группы) будет подгруппой.*

Доказательство. Для элементов a_i из P $(i = 1, \ldots, n)$, имеющих n-арные порядки k_i, получим (с учетом равенства (63) и следствия 18)

$$f(a_1^n)^{\langle k_1 \cdot \ldots \cdot k_n\rangle} = f(a_1^{\langle k_1 \cdot \ldots \cdot k_n\rangle}, \ldots, a_n^{\langle k_1 \cdot \ldots \cdot k_n\rangle}) = f(a_1^n).$$

Значит, $f(a_1^n) \in P$. Кроме того, для любого элемента $a \in P$ имеем $\bar{a} \in P$ (смотри следствие 21). Значит, P — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$ (согласно предложению 17). Теорема доказана.

Так как каждая абелева n-группа является полуабелевой, то верно

Следствие 36 *(Следствие 1 из [66]-A) В абелевой n-группе множество всех ее элементов конечного n-арного порядка будет подгруппой.*

Каждая подгрупа в полуабелевой n-группе является полуинвариантной. Значит, для периодической части P полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ можно построить фактор-n-группу $\langle G/P, f'\rangle$, элементами которой будут множества $f(x, \overset{(n-1)}{P})$, а n-арная операция f' действует по правилу (смотри теорему 22)

$$f'(f(x_1, \overset{(n-1)}{P}), \ldots, f(x_n, \overset{(n-1)}{P})) = f(f(x_1^n), \overset{(n-1)}{P}).$$

Фактор-группа любой абелевой группы по своей периодической части не имеет кручений, кроме нуля. Для полуабелевых n-групп ситуация почти аналогичная, т.е. верна

Теорема 47 *(Теорема 4, [66]-А) Фактор-n-группа $\langle G/P, f'\rangle$ полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ по своей периодической части $\langle P, f\rangle$ имеет один идемпотент P, а остальные элементы имеют бесконечный n-арный порядок.*

Доказательство. По теореме 23 элемент P является идемпотентом в фактор-n-группе $\langle G/P, f'\rangle$. Покажем, что любой элемент конечного порядка из $\langle G/P, f'\rangle$ совпадает с P. Тем самым будет доказана теорема.

Если некоторый элемент $f(a, \overset{(n-1)}{P})$ из $\langle G/P, f'\rangle$ имеет n-арный порядок $k < \infty$, то, используя определение n-арной степени и полуинвариантность подгруппы $\langle P, f\rangle$, получим

$$f(a, \overset{(n-1)}{P})^{\langle k\rangle} = f'_{(k)}(\overset{(k(n-1)+1)}{f(a, \overset{(n-1)}{P})}) = f(f_{(k)}(\overset{(k(n-1)+1)}{a}), \overset{(n-1)}{P}) =$$

$$= f_{(k)}(f(a, \overset{(n-1)}{P}), \overset{k(n-1)}{a}) = f(a, \overset{(n-1)}{P}),$$

т.е. для некоторых элементов h_i, g_i (i=1,…,n-1) из P верно равенство

$$f_{(k+1)}(a, h_1^{n-1}, \overset{k(n-1)}{a}) = f(a, g_1^{n-1}).$$

Для произвольно выбранного элемента $h \in P$, используя нейстральность последовательности $\overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, a$ и последнее равенство, получим

$$f_{(k+1)}(h, h_1^{n-1}, \overset{k(n-1)}{a}) = f_{(k+2)}(h, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, a, h_1^{n-1}, \overset{k(n-1)}{a}) =$$

$$= f(h, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, f_{(k+1)}(a, h_1^{n-1}, \overset{k(n-1)}{a})) = f(h, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, f(a, g_1^{n-1})) =$$

$$= f(f(h, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, a), g_1^{n-1}) = f(h, g_1^{n-1}) \in P,$$

т.е. $f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)}{a}) \in P$, где $g = f(h, h_1^{n-1})$. Пусть элементы g и $f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)}{a})$ имеют n-арные порядки s и t соответственно. Тогда, с одной стороны, используя равенство (63), определение n-арной степени и следствие 18, получим

$$f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)}{a})^{\langle st\rangle} = f_{(k)}(g^{\langle st\rangle}, \overset{k(n-1)}{a^{\langle st\rangle}}) = f_{(k(st(n-1)+1))}(g, \overset{(k(n-1)(st(n-1)+1))}{a}),$$

с другой стороны, используя следствие 18, получим

$$f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)}{a})^{\langle st\rangle} = f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)}{a}).$$

Значит,

$$f_{(k(st(n-1)+1))}(g, \overset{k(n-1)(st(n-1)+1)}{a}) = f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)}{a}),$$

или

$$f_{(k(st(n-1)+1))}(g, \overset{k(n-1)-1}{a}, \overset{(stk(n-1)^2+1)}{a}) = f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)-1}{a}, a).$$

В силу единственности решения уравнения

$$f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)-1}{a}, x) = f_{(k)}(g, \overset{k(n-1)-1}{a}, a),$$

получим $f_{(stk(n-1))}(\overset{(stk(n-1)^2+1)}{a}) = a$, или, что тоже самое, $a^{\langle stk(n-1)\rangle} = a$ (в силу определения n-арной степени),а значит, $a \in P$, тогда $f(a, \overset{(n-1)}{P}) = P$. Теорема доказана.

Для абелевых n-групп, как и для абелевых групп, верно

Следствие 37 *(Следствие 2 из [66]-А) Фактор-n-группа $\langle G/P, f'\rangle$ абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ по своей периодической части P имеет одну единицу P, а остальные элементы имеют бесконечный порядок.*

Доказательство. По теореме 23 элемент P является единицей в фактор-n-группе $\langle G/P, f'\rangle$. Остальное следует из теоремы 47, так как каждая абелева n-группа является полуабелевой. Следствие доказано.

Для абелевых n-групп верен и другой факт:

Следствие 38 *(Следствие 3 из [66]-А) Фактор-n-группа абелевой n-группы по своей периодической части является производной от абелевой группы без кручения.*

Доказательство. Фактор-n-группа $\langle G/P, f'\rangle$ абелевой n-группы по своей периодической части, согласно следствию 37, имеет единицу, тогда, согласно предложению 1, она будет производной от некоторой группы $A = G/P$, причем эта группа будет абелевой. Все элементы данной фактор-n-группы, кроме указанной единицы, имеют бесконечные n-арные порядки (следствию 37), а тогда и в абелевой группе A все элементы, отличные от единицы имеют бесконечный порядок. Следствие доказано.

Для абелевых n-групп найден признак периодичности:

Теорема 48 *(Теорема 2, [68]-А) Любая абелева n-группа является периодической тогда и только тогда, когда ее ретракт будет периодической группой.*

Доказательство. Пусть абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ является периодической. Строим абелеву группу $ret_c\langle G, f\rangle$ с умножением $a \cdot b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$. Согласно следствию 17, n-арный порядок элемента c совпадает с порядком элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ в группе $ret_c\langle G, f\rangle$. Пусть этот порядок будет равен k. Выбираем произвольный элемент $a \in G$, у которого n-арный порядок равен s. Тогда, используя определение n-арной степени и условие (21) из теоремы 10 с учетом, что автоморфизм φ из этой теоремы является тождественным (теорема 35), получим

$$a = a^{\langle s\rangle} = f_{(s)}(\overset{(s(n-1)+1)}{a}) = a^{s(n-1)+1} \cdot d^s.$$

А значит, $a^{k(s(n-1)+1)} \cdot d^{ks} = a^k$, откуда $a^{k(s(n-1)+1)} = a^k$, или $a^{ks(n-1)} = c$. Тогда, абелева группа $ret_c\langle G, f\rangle$ является периодической.

Обратно. Пусть абелева группа $ret_c\langle G, f\rangle$ будет периодической, тогда, согласно следствию 22, n-группа $\langle G, f\rangle$ является периодической. Теорема доказана.

Так как ретракт и соответствующая группа одной и той же n-группы изоморфны, то для абелевых n-групп можно указать другой признак периодичности, т.е. верно

Следствие 39 *Любая абелева n-группа является периодической тогда и только тогда, когда ее соответствующая группа будет периодической.*

Как и для абелевых групп, верна

Теорема 49 *В периодической полуабелевой n-группе множество элементов, n-арные порядки которых есть степени фиксированного простого числа p, образуют подгруппу.*

Доказательство. Пусть G_p — множество элементов периодической полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, n-арные порядки которых есть степени фиксированного простого числа p. Выбираем элементы $a_1, \ldots, a_n \in G_p$ с n-арными порядками $p^{s_1}, \ldots, p^{s_n}$ соответственно. Полагаем $m = max\{s_1, \ldots, s_n\}$. Согласно следствию 18, для любого индекса $i = 1, \ldots, n$ имеем $a_i^{\langle p^m\rangle} = a_i$. Тогда, используя (63), получим

$$f(a_1^n)^{\langle p^m\rangle} = f(a_1^{\langle p^m\rangle}, \ldots, a_n^{\langle p^m\rangle}) = f(a_1^n).$$

Согласно следствию 18, p^m делится на n-арный порядок элемента $f(a_1^n)$, а значит, n-арный порядок элемента $f(a_1^n)$ равен некоторой степени простого числа p, т.е. $f(a_1^n) \in G_p$.

Если элемент a из G_p имеет n-арный порядок p^s, то, согласно формуле (40) из следствия 21, получим $Ord_n\bar{a} = \frac{p^s}{\text{НОД}(n-2,p^s)}$, т.е. $\bar{a} \in G_p$.

Итак, подмножество G_p n-группы $\langle G, f\rangle$ замкнуто относительно действий n-арной операции f и унарной операции $^{-}$. Тогда, согласно предложению 17, $\langle G_p, f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle G, f\rangle$. Теорема доказана.

Так как каждая абелева n-группа является полуабелевой, то верно

Следствие 40 *(Теорема 3, [68]-А) В периодической абелевой n-группе множество элементов, n-арные порядки которых есть степени фиксированного простого числа p, образуют подгруппу.*

К числу периодических n-групп относятся, в частности, полуабелевы n-группы, n-арные порядки всех элементов которых являются степенями фиксированного простого числа p. Эти полуабелевы n-группы называются примарными по простому числу p. Верна

Теорема 50 *Если абелева группа G является примарной по простому числу p, то полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}G$ будет примарной по этому же простому числу p.*

Доказательство. Пусть G — абелева примарная группа по простому числу p с бинарной операцией $\cdot$. По обратной теореме Глускина-Хоссу (теорема 11) строим полуабелеву n-группу $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}G$ для выбранных автоморфизма φ и элемента d группы G. Пусть элемент d имеет порядок p^k. Выбираем произвольный элемент $a \in G$ и пусть его порядок равен p^s. Тогда порядок элемента $\varphi(a)$ также будет равен p^s. Обозначим $t = max\{k, s\}$. Тогда $a^{p^t} = e$, $(\varphi^i(a))^{p^t} = e$ для всех $i = 1, \ldots, n-2$, $d^{p^t} = e$, где e — единица группы G. А значит, $(a \cdot \varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-2}(a))^{p^t} \cdot a \cdot d^{p^t} = a$. Используя условие (21) из теоремы 10, получим $f_{p^t}(\overset{(p^t(n-1)+1)}{a}) = a$, откуда, по определению n-арной степени, $a^{\langle p^t\rangle} = a$. Так как p^t делится на n-арный порядок элемента a (смотри следствие 18), то n-арный порядок элемента a равен степени простого числа p. Теорема доказана.

Так как каждая абелева n-группа является полуабелевой, то верно

Следствие 41 *(Теорема 4, [68]) Если абелева группа G является примарной по простому числу p, то примарной по этому же простому числу p будет абелева n-группа $\langle G, f\rangle = der_{1_G,d}G$.*

Обратная теорема к теореме 50 не верна, т.е. из примарности полуабелевой n-группы по простому числу p не всегда следует примарность по этому же простому числу p ее ретракта. Приведем

Пример 3 *Пусть* (a), (b) *— циклические группы порядков* 3 *и* 2 *соответственно и* $G = (a)\times(b)$ *— прямое произведение этих групп. Определим абелеву тернарную группу* $\langle G, f\rangle = der_{1_G,(a,e)}G$ *(*e *— единица в группе* (b)*). Непосредственные вычисления показывают, что элементы* (e,e), (a^2,e), (e,b), (a^2,b) *имеют тернарные порядки, равные* 3, *а элементы* $(a,e),(a,b)$ *будут идемпотентами. Значит, абелева тернарная группа* $\langle G, f\rangle$ *является примарной по простому числу* 3, *однако абелева группа* G, *которая является ретрактом тернарной группы* $\langle G, f\rangle$ *(так как* $G = ret_{(e,e)}\langle G, f\rangle$ *согласно предложению 8), не является примарной по этому же простому числу* 3.

Как и в группах, верна

Теорема 51 *(Теорема 6 из [68]-А) Периодическая часть конечно порожденной абелевой* n*-группы является конечной подгруппой.*

Доказательство. Пусть P — множество всех элементов конечного n-арного порядка (периодическая часть) конечно порожденной абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$. Множество P будет подгруппой в n-группе $\langle G, f\rangle$ (см. следствие 36). Выбираем элемент e из P и на n-группе $\langle G, f\rangle$ строим абелеву группу $ret_e\langle G, f\rangle$ по теореме Глускина-Хоссу (по теореме 10).

Докажем, что каждый элемент из множества P в группе $ret_e\langle G, f\rangle$ имеет конечный порядок. Отметим вначале, что $\langle G, f\rangle = der_{1_G,d}ret_e\langle G, f\rangle$ (смотри предложение 9). Согласно следствию 17, n-арный порядок элемента e в n-группе $\langle G, f\rangle$ равен порядку (бинарному) элемента $d = f(\overset{(n)}{e})$ в группе $ret_e\langle G, f\rangle$. Пусть этот порядок будет равен k. Выбираем любой элемент a из множества P n-арного порядка l. Полагаем $m = \text{НОК}(k,l)$ и $m = km_1$, $m = lm_2$ для некоторых натуральных чисел m_1, m_2. С одной стороны, по определению n-арной степени, используя следствие 18, будем иметь

$$a^{<m>} = f_{(m)}(\overset{(lm_2(n-1)+1)}{a}) = a,$$

с другой стороны, согласно условию (21) из теоремы 10 с учетом, что автоморфизм φ из этой теоремы является тождественным (теорема 35), получим $a^{<m>} = a^{m(n-1)+1}\cdot d^m$. Значит, $a^{m(n-1)}\cdot d^m = e$. Но $d^m = (d^k)^{m_1} = e$. Тогда $a^{m(n-1)} = e$. Значит, элемент a имеет конечный порядок в группе $ret_e\langle G, f\rangle$.

Докажем теперь, что из конечной порожденности n-группы $\langle G, f\rangle$ следует конечная порожденность группы $ret_e\langle G, f\rangle$. Пусть $\langle G, f\rangle$ порождается конечным множеством M. Тогда, согласно следствию 4, ее обертывающая группа Поста G^* из теоремы Поста (теорема 7) порождается конечным множеством $M\cup\overline{M}$. Соответствующая группа G_0 в группе G^* имеем конечный индекс $n-1$, тогда G_0 будет порождаться конечным множеством, как подгруппа конечного индекса в конечно порожденной группе (смотри, например, [37], стр. 132). Но соответствующая группа G_0 и группа $ret_e\langle G, f\rangle$ изоморфны, значит, $ret_e\langle G, f\rangle$ также будет конечно порожденной группой.

Итак, абелева группа $ret_e\langle G, f\rangle$ конечно порождена, а значит, множество всех элементов конечного порядка этой группы конечно (смотри, например, [37], упр. 8.1.5). Раньше мы показали, что это множество содержит P. Теорема доказана.

Следствие 42 *(Следствие 3 из [68]-А) Любая периодическая конечно порожденная абелева* n*-группа конечна.*

В теории абелевых групп известна разложимость периодической абелевой группы в прямую сумму примарных групп, относящихся к различным простым числам (см., например, [44], стр. 123). Аналогом этого результата является следующая

Теорема 52 *(Теорема 6 из [66]-А) Всякая полуабелева n-группа, ретракт которой является периодической группой, изоморфна декартову произведению примарных полуабелевых n-групп, относящихся к различным простым числам.*

Доказательство. В полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ определим абелеву группу $ret_c\langle G, f\rangle$ с бинарной операцией $\cdot$, эта группа будет периодической (согласно условию). На группе $ret_c\langle G, f\rangle$ имеем автоморфизм φ, заданный по правилу $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ для любого элемента $x \in G$, и элемент $d = f(\overset{(n)}{c})$ (смотри доказательство теоремы 10).

Как сказано перед теоремой, периодическая абелева группа $ret_c\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ примарных подгрупп G_α, относящихся к различным простым числам p_α, причем эти подгруппы будут характеристическими. Полагаем $d = d_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot d_{\beta_r}$, где для каждого индекса $i = 1, \ldots, r$ имеем $d_{\beta_i} \in G_{\beta_i}$ для некоторого индекса $\beta_i \in I$. Пусть σ — изоморфизм из $ret_c\langle G, f\rangle$ в $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$, действующий по правилу: если элемент $g = g_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_{\alpha_k}$, где для каждого индекса $i = 1, \ldots, k$ имеем $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ для некоторого индекса $\alpha_i \in I$, то $\sigma(g) = \tau_g : I \to \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$, где

$$\tau_g(\alpha) = \begin{cases} g_{\alpha_i}, & \text{если } \alpha = \alpha_i \text{ для некоторого индекса } i = 1, \ldots, k; \\ c, & \text{если } \alpha \neq \alpha_i \text{ для любого индекса } i = 1, \ldots, k. \end{cases} \tag{64}$$

На каждой примарной группе G_α по простому числу p_α строим $(\varphi_{G_\alpha}, d_\alpha)$-определенную полуабелеву n-группу $\langle G_\alpha, f_\alpha\rangle$ (φ_{G_α} — ограничение автоморфизма φ на подгруппу G_α), причем для всех индексов α из I, отличных от $\beta_1, \ldots, \beta_r$, полагаем d_α — единица в группе G_α. Согласно предложению 8, ретрактом каждой n-группы $\langle G_\alpha, f_\alpha\rangle$ будет группа G_α, а тогда, по теореме 50, все так построенные n-группы $\langle G_\alpha, f_\alpha\rangle$ будут примарными по тому же простому числу p_α. Докажем, что σ есть изоморфизм из n-группы $\langle G, f\rangle$ в декартово произведение n-групп $\prod_{\alpha\in I}\langle G_\alpha, f_\alpha\rangle$. Заметим, что n-арная операция f' в n-группе $\prod_{\alpha\in I}\langle G_\alpha, f_\alpha\rangle$ действует по правилу

$$f'(\tau_1, \ldots, \tau_n)(\alpha) = f_\alpha(\tau_1(\alpha), \ldots, \tau_n(\alpha)).$$

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in G$ и $a_i = b_{\alpha_{i1}} \cdot \ldots \cdot b_{\alpha_{ik_i}}$, где $b_{\alpha_{ij}} \in G_{\alpha_{ij}}$ для некоторого индекса $\alpha_{ij} \in I$. Для удобства в разложении элемента d поменяем индексы компонентов этого элемента, полагая $\beta_1 = \alpha_{n+11}, \ldots, \beta_r = \alpha_{n+1k_{n+1}}$ (здесь $k_{n+1} = r$). Через J обозначим набор различных индексов среди индексом вида α_{ij}, где $j = 1, \ldots, k_i$ всякий раз, когда $i = 1, \ldots, n+1$. Тогда, используя равенство (21), получим

$$\sigma(f(a_1^n)) = \sigma(a_1 \cdot \varphi(a_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-2}(a_{n-1}) \cdot a_n \cdot d) =$$

$$= \sigma(\prod_{j=1}^{k_1} b_{\alpha_{1j}} \cdot \varphi(\prod_{j=1}^{k_2} b_{\alpha_{2j}}) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-2}(\prod_{j=1}^{k_{n-1}} b_{\alpha_{n-1j}}) \cdot \prod_{j=1}^{k_n} b_{\alpha_{nj}} \cdot \prod_{j=1}^{k_{n+1}} d_{\alpha_{n+1j}}) =$$

$$= \sigma(\prod_{j=1}^{k_1} b_{\alpha_{1j}} \cdot \prod_{j=1}^{k_2} \varphi(b_{\alpha_{2j}}) \cdot \ldots \cdot \prod_{j=1}^{k_{n-1}} \varphi^{n-2}(b_{\alpha_{n-1j}}) \cdot \prod_{j=1}^{k_n} b_{\alpha_{nj}} \cdot \prod_{j=1}^{k_{n+1}} d_{\alpha_{n+1j}}) =$$

$$= \sigma(\prod_{\beta\in J}(c_{1\beta}\cdot\varphi(c_{2\beta})\cdot\ldots\cdot\varphi^{n-2}(c_{n-1\beta})\cdot c_{n\beta}\cdot c_{n+1\beta})) =$$

$$= \sigma(\prod_{\beta\in J} f_\beta(c_{1\beta}, c_{2\beta}, \ldots, c_{n-1\beta}, c_{n\beta})) = \tau_{\prod_{\beta\in J} f_\beta(c_{1\beta}, c_{2\beta}, \ldots, c_{n-1\beta}, c_{n\beta})}$$

где для $i = 1, \ldots, n$ имеем

$$c_{i\beta} = \begin{cases} b_{\alpha_{ij}}, & \text{если } \beta = \alpha_{ij} \text{ для некоторого индекса } j = 1, \ldots, k_i; \\ 0, & \text{если } \beta \neq \alpha_{ij} \text{ для любого индекса } j = 1, \ldots, k_i. \end{cases}$$

и

$$c_{n+1\beta} = \begin{cases} d_{\alpha_{n+1j}}, & \text{если } \beta = \alpha_{n+1j} \text{ для некоторого индекса } j = 1, \ldots, k_{n+1}; \\ 0, & \text{если } \beta \neq \alpha_{n+1j} \text{ для любого индекса } j = 1, \ldots, k_{n+1}. \end{cases}$$

Согласно правилу 64 имеем

$$\tau_{\prod_{\beta\in J} f_\beta(c_{1\beta}, c_{2\beta}, \ldots, c_{n-1\beta}, c_{n\beta})}(\alpha) =$$

$$= \begin{cases} f_\beta(c_{1\beta}, c_{2\beta}, \ldots, c_{n-1\beta}, c_{n\beta}), & \text{если } \alpha = \beta \text{ для некоторого } \beta \in J; \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \text{ для любого } \beta \in J. \end{cases} \quad (65)$$

С другой стороны,

$$f'(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))(\alpha) = f'(\tau_{a_1}, \ldots, \tau_{a_n})(\alpha) = f_\alpha(\tau_{a_1}(\alpha), \ldots, \tau_{a_n}(\alpha)) =$$

$$= \begin{cases} f_\beta(\tau_{a_1}(\beta), \ldots, \tau_{a_n}(\beta)), & \text{если } \alpha = \beta \text{ для некоторого } \beta \in J; \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \text{ для любого } \beta \in J. \end{cases} \quad (66)$$

Но для всех индексов $i = 1, \ldots, n$ имеем

$$\tau_{a_i}(\beta) = \begin{cases} b_{\alpha_{ij}}, & \text{если } \beta = \alpha_{ij} \text{ для некоторого индекса } j = 1, \ldots, k_i; \\ 0, & \text{если } \beta \neq \alpha_{ij} \text{ для любого индекса } j = 1, \ldots, k_i, \end{cases}$$

т.е. $\tau_{a_i}(\beta) = c_{i\beta}$ для всех индексов $i = 1, \ldots, n$. Значит, отображения (65) и (66) совпадают, тем самым мы доказали, что σ сохраняет n-арную операцию. Теорема доказана.

Как и в группах, верна

Теорема 53 *(Теорема 5 из [68]-А) Всякая периодическая абелева n-группа изоморфна декартову произведению примарных абелевых n-групп, относящихся к различным простым числам.*

Доказательство. В периодической абелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ определим абелеву группу $G = ret_e\langle G, f\rangle$ с бинарной операцией $\cdot$ и эта группа будет периодической (согласно теореме 48).

Из теории групп известно, что периодическая абелева группа G изоморфна прямому произведению $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ примарных подгрупп G_α, относящихся к различным простым числам p_α. Пусть σ — изоморфизм из G в $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$, действующий по правилу: если $g = g_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot g_{\alpha_k}$, где для каждого индекса $i = 1, \ldots, k$ имеем $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ для некоторого индекса $\alpha_i \in I$, то $\sigma(g) = \tau_g : I \to \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$, где

$$\tau_g(\alpha) = \begin{cases} g_{\alpha_i}, & \text{если } \alpha = \alpha_i \text{ для некоторого индекса } i = 1, \ldots, k; \\ e, & \text{если } \alpha \neq \alpha_i \text{ для любого индекса } i = 1, \ldots, k. \end{cases} \quad (67)$$

Для элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ полагаем $d = d_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot d_{\alpha_r}$. На каждой абелевой группе G_α (примарной по простому числу p_α) строим абелеву n-группу $\langle G_\alpha, f_\alpha \rangle = der_{1_{G_\alpha} d_\alpha} G_\alpha$, причем $d_\alpha = d_{\alpha_j}$ для некоторого индекса $j = 1, \ldots, r$ и для всех индексов α из I, отличных от $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, полагаем d_α — единица в группе G_α. По следствию 41 все так построенные n-группы $\langle G_\alpha, f_\alpha \rangle$ будут примарными по простым числам p_α. Докажем, что σ является изоморфизмом из n-группы $\langle G, f \rangle$ в декартово произведение n-групп $\prod_{\alpha \in I} \langle G_\alpha, f_\alpha \rangle$. Заметим, что n-арная операция f' в n-группе $\prod_{\alpha \in I} \langle G_\alpha, f_\alpha \rangle$ действует по правилу $f'(\tau_1, \ldots, \tau_n)(\alpha) = f_\alpha(\tau_1(\alpha), \ldots, \tau_n(\alpha))$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in G$ и $a_i = b_{\alpha_{i1}} \cdot \ldots \cdot b_{\alpha_{ik_i}}$, где $b_{\alpha_{ij}} \in G_{\alpha_{ij}}$ для некоторого $\alpha_{ij} \in I$. Для удобства полагаем $d = b_{\alpha_{n+11}} \cdot \ldots \cdot b_{\alpha_{n+1k_{n+1}}}$. Через J обозначим набор различных индексов среди индексом вида α_{ij}, где $i = 1, \ldots, n+1$ и $j = 1, \ldots, k_i$ для фиксированного i. Тогда

$$\sigma(f(a_1^n)) = \sigma(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot d) = \sigma(\prod_{j=1}^{k_1} b_{\alpha_{1j}} \cdot \ldots \cdot \prod_{j=1}^{k_n} b_{\alpha_{nj}} \cdot \prod_{j=1}^{k_{n+1}} b_{\alpha_{n+1j}}) =$$

$$= \sigma(\prod_{\beta \in J} (c_{1\beta} \cdot \ldots \cdot c_{n\beta} \cdot c_{n+1\beta})) = \sigma(\prod_{\beta \in J} f_\beta(c_{1\beta}, \ldots, c_{n\beta})) = \tau_{\prod_{\beta \in J} f_\beta(c_{1\beta}, \ldots, c_{n\beta})}$$

где

$$c_{j\beta} = \begin{cases} b_{\alpha_{js}}, & \text{если } \beta = \alpha_{js} \text{ для некоторого индекса } s = 1, \ldots, k_j; \\ e, & \text{если } \beta \neq \alpha_{js} \text{ для любого индекса } s = 1, \ldots, k_j. \end{cases} \tag{68}$$

Согласно правилу (67), имеем $\tau_{\prod_{\beta \in J} f_\beta(c_{1\beta}, \ldots, c_{n\beta})}(\alpha) =$

$$= \begin{cases} f_\beta(c_{1\beta}, \ldots, c_{n\beta}), & \text{если } \alpha = \beta \text{ для некоторого индекса } \beta \in J; \\ e, & \text{если } \alpha \neq \beta \text{ для любого индекса } \beta \in J. \end{cases} \tag{69}$$

Далее,

$$f'(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))(\alpha) = f'(\tau_{a_1}, \ldots, \tau_{a_n})(\alpha) = f_\alpha(\tau_{a_1}(\alpha), \ldots, \tau_{a_n}(\alpha)) =$$

$$= \begin{cases} f_\beta(\tau_{a_1}(\beta), \ldots, \tau_{a_n}(\beta)), & \text{если } \alpha = \beta \text{ для некоторого } \beta \in J; \\ e, & \text{если } \alpha \neq \beta \text{ для любого } \beta \in J. \end{cases} \tag{70}$$

Но для всех $i = 1, \ldots, n$ имеем

$$\tau_{a_i}(\beta) = \begin{cases} b_{\alpha_{is}}, & \text{если } \beta = \alpha_{is} \text{ для некоторого индекса } s = 1, \ldots, k_i; \\ e, & \text{если } \beta \neq \alpha_{js} \text{ для любого индекса } s = 1, \ldots, k_i, \end{cases}$$

т.е. $\tau_{a_i}(\beta) = c_{i\beta}$. Значит, отображения (69) и (70) совпадают, тем самым мы доказали, что σ сохраняет n-арную операцию. Теорема доказана.

3 Полуциклические n-группы

Полиадическим аналогом циклической группы является полуциклическая n-группа, т.е. у этой n-группы ретракт является циклической группой (смотри [14] стр. 128). Среди полуциклических n-групп имеются циклические n-группы, т.е. эти n-группы, как и циклические группы, порождаются одним элементом (смотри [2], [11]). В этой главе мы рассмотрим строение полуциклических n-групп, изучим их подгруппы. Начнем с циклических n-групп.

3.1 Циклические n-группы

Если n-группа $\langle G, f\rangle$ совпадает с одной из своих циклических подгрупп $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ для некоторого элемента $a \in G$, то ее называют циклической с порождающим элементом a. Очевидно любая циклическая n-группа является абелевой.

Примером бесконечной циклической n-группы есть n-группа $\langle Z, f\rangle = der_{1_Z,1}Z$, $(1_Z, 1)$-определенная на аддитивной группе целых чисел Z, где 1_Z — тождественный автоморфизм группы Z. Всякое целое число k является k-той n-арной степенью числа 0, т.е. это число служит порождающим элементом рассматриваемой n-группы.

Примером конечной циклической n-группы порядка k есть n-группа $\langle Z_k, f\rangle = der_{1_{Z_k},1}Z_k$, $(1_{Z_k}, 1)$-определенная на аддитивной группе Z_k кольца классов вычетов по модулю k, где 1_{Z_k} — тождественный автоморфизм группы Z_k. Всякое число s из Z_k является s-той n-арной степенью числа 0, т.е. это число служит порождающим элементом рассматриваемой n-группы.

Следующая теорема показывает, что этими примерами исчерпываются, по существу, все циклические n-группы.

Теорема 54 *[2], [11]. Любые две циклические n-группы, бесконечные или конечные одного и того же порядка, изоморфны.*

Как и в группах, не сложно доказывается

Теорема 55 *. Гомоморфный образ циклической n-группы с порождающим элементом a является циклической n-группой, которая порождается образом элемента a.*

Известен признак цикличности для n-групп.

Теорема 56 *(Теорема 2.5.24 из [14]). Любая n-группа $\langle G, f\rangle$ является циклической с порождающим элементом a тогда и только тогда, когда ретракт $ret_a\langle G, f\rangle$ является циклической группой, порожденной элементом $d = f(\overset{(n)}{a})$.*

Сформулируем и докажем другой признак цикличности для n-групп.

Для этого нам понадобится следующая

Лемма 7 *(Лемма 3.1, [54]-А) Пусть $n = k(m-1)+1$, $\langle G, f\rangle$ — n-группа, у которой группа ${}^mG$ является циклической с порождающим элементом $\theta_G(a_1 \ldots a_{m-1})$, где $a_1, \ldots, a_{m-1} \in G$ (смотри параграф 3.3). Тогда для любого индекса $i = 1, \ldots, k$ верно:*

1) если $\langle G, f\rangle$ — конечная порядка γ, то

$$G^{(i(m-1))} = \{\theta_G^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \ldots, \gamma - 1\} \quad (G^{(i(m-1))} \textit{из параграфа 3.3});$$

2) если $\langle G, f\rangle$ — бесконечная, то

$$G^{(i(m-1))} = \{\theta_G^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid r - \textit{целое число}\}.$$

Доказательство. 1) Положим $V_i = \{\theta_G^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \dots, \gamma - 1\}$. Ясно, что $\bigcup_{i=1}^k V_i = \bigcup_{i=1}^k \{\theta_G^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \dots, \gamma - 1\} =$

$$= \{\theta_G^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid i = 1, \dots, k,\ r = 0, 1, \dots, \gamma - 1\} =$$

$$= \{\theta_G^{s}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid s = 1, \dots, k\gamma\},$$

то есть $\bigcup_{i=1}^k V_i = \{\theta_G^{s}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid s = 1, \dots, k\gamma\}$.

А так как циклическая группа ${}^mG$ порождается элементом $\theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$ и имеет порядок $k\gamma$, то из последнего равенства следует, что $\bigcup_{i=1}^k V_i =^m G$, откуда и из утверждения 2) теоремы 43 следует

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = \bigcup_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))}, \tag{71}$$

где для любых индексов $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$ верно

$$G^{(i(m-1))} \cap G^{(j(m-1))} = \emptyset. \tag{72}$$

Так как $\theta_G^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) = \theta_G \underbrace{a_1 \dots a_{m-1} \dots a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+i \text{ раз}}$, а длина $\underbrace{a_1 \dots a_{m-1} \dots a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+i \text{ раз}}$ равна $(rk+i)(m-1) = rk(m-1) + i(m-1) = r(n-1) + i(m-1)$, то

$$V_i \subseteq G^{(i(m-1))}. \tag{73}$$

Предположим, что $V_i \neq G^{(i(m-1))}$, то есть существует элемент $u \in G^{(i(m-1))}$ такой, что $u \notin V_i$. Тогда $u \in \bigcup_{i=1}^k G^{(i(m-1))}$, а из (72) и (73) вытекает $u \notin \bigcup_{i=1}^k V_i$, что противоречит (71). Таким образом, $V_i = G^{(i(m-1))}$, то есть верно равенство из 1).

2) Доказательство проводится аналогично с заменой условия $r = 0, 1, \dots, \gamma - 1$ условием r — целое число. Лемма доказана.

Теперь можно сформулировать критерий цикличности для n-групп.

Теорема 57 *(Теорема 3.1, [54]-A). Пусть $\langle G, f \rangle$ — n-группа. Тогда:*

1) если $\langle G, f \rangle$ — циклическая, порожденная элементом a, то для любого натурального числа m такого, что $n = k(m-1) + 1$, группа ${}^mG$ является циклической, порожденной элементом $\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$;

2) если для некоторого натурального числа m такого, что $n = k(m-1) + 1$, группа ${}^mG$ является циклической, порожденной элементом $\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$, то $\langle G, f \rangle$ — циклическая n-группа, порожденная элементом a.

Доказательство. Сразу же отметим, что n-группа $\langle G, f \rangle$ и группа ${}^mG$ конечны или бесконечны одновременно.

1) Так как $G = \{a^{\langle r \rangle} \mid r \in Z\}$, то, по предложению 1.3.7 из [14],

$$G^{(i(m-1))} = \{\theta_G(a^{\langle r \rangle} \underbrace{a \dots a}_{i(m-1)-1}) \mid r \in Z\} = \{\theta_G(a^{\langle r \rangle})\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{i(m-1)-1}) \mid r \in Z\},$$

откуда, учитывая равенство $\theta_G(a^{\langle r \rangle}) = (\theta_G(a))^{r(n-1)+1}$ (смотри, например, [14]) и равенство $n = k(m-1) + 1$, имеем

$$G^{(i(m-1))} = \{(\theta_G(a))^{r(n-1)+1}(\theta_G(a))^{i(n-1)-1} \mid r \in Z\} =$$

$$= \{(\theta_G(a))^{rk(m-1)+1}(\theta_G(a))^{i(n-1)-1} \mid r \in Z\} =$$
$$= \{(\theta_G(a))^{(rk+i)(m-1)} \mid r \in Z\} = \{((\theta_G(a))^{m-1})^{rk+i} \mid r \in Z\} =$$
$$= \{(\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z\},$$

то есть $G^{(i(m-1))} = \{(\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z\}$. Тогда по теореме 43

$$^mG = \bigcup_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))} = \bigcup_{i=1}^{k} \{(\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z\} =$$

$$= \{(\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid i = 1, \dots, k, r \in Z\} = \{(\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{s} \mid s \in Z\},$$

то есть $^mG = \{(\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{s} \mid s \in Z\}$. Следовательно, ^mG — циклическая группа, порожденная элементом $\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$.

2) По лемме 7 $G^{(m-1)} = \{\theta_G^{rk+1}(\underbrace{a \dots a}_{m-1}) \mid r -$ целое число$\}$. Тогда, используя равенство $G' = G^{(m-1)}\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{n-(m-1)})$, которое несложно доказывается, получим

$$G' = G^{(m-1)}\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{n-(m-1)}) = \{\theta_G^{rk+1}(\underbrace{a \dots a}_{m-1})\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{n-(m-1)}) \mid r - \text{целое число}\} =$$

$$= \{(\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+1}\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{(k-1)(m-1)+1}) \mid r - \text{целое число}\} =$$

$$= \{(\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+1}(\theta_G(a))^{(k-1)(m-1)+1} \mid r - \text{целое число}\} =$$

$$= \{(\theta_G(a))^{(rk+1)(m-1)}(\theta_G(a))^{(k-1)(m-1)+1} \mid r - \text{целое число}\} =$$
$$= \{(\theta_G(a))^{(r+1)k(m-1)+1} \mid r - \text{целое число}\} =$$
$$= \{(\theta_G(a))^{(r+1)(n-1)+1} \mid r - \text{целое число}\} = \{\theta_G(a^{\langle r+1\rangle}) \mid r - \text{целое число}\}.$$

Итак, $G' = \{\theta_G(a^{\langle s\rangle}) \mid s -$ целое число$\}$. А так как $G' = \{\theta_G(b) \mid b \in G\}$, то $G = \{a^{\langle s\rangle} \mid s -$ целое число$\}$. Следовательно, $\langle G, f\rangle$ — циклическая n-группа, порожденная элементом a. Теорема доказана.

Полагая в теореме 57 $m = 2$, получим

Следствие 43 *([2],Следствие 3.1 из [54]-A). n-Группа $\langle G, f\rangle$ является циклической с порождающим элементом a тогда и только тогда, когда ее универсальная группа Поста G^* является циклической с порождающим элементом $\theta_G(a)$.*

Полагая в теореме 57 $m = n$, получим

Следствие 44 *(Теорема 2.5.23 из [14],Следствие 3.2 из [54]-A). n-Группа $\langle G, f\rangle$ является циклической с порождающим элементом a тогда и только тогда, когда ее соответствующая группа G_0 является циклической с порождающим элементом $\theta_G(\underbrace{a \dots a}_{n-1})$.*

Известно, что в бинарном случае ($n = 2$) каждая подгруппа бесконечной циклической группы является циклической. В n-арном случае при $n > 2$ ситуация иная. Изучим все основные положения о подгруппах в бесконечной циклической n-группе.

Так как любая бесконечная циклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f\rangle = der_{1_Z,1}Z$ (согласно теореме 54), то изучать погруппы будем в этой n-группе, которую назовем циклической n-группой целых чисел. Порождающим элементом n-группы $\langle Z, f\rangle$ будет 0, а n-арная операция f действует по правилу $f(k_1, \ldots, k_n) = k_1 + \ldots + k_n + 1$, кроме того, каждое целое число k является k-той n-арной степенью нуля, т.е. $k = 0^{\langle k\rangle}$.

Искать подгруппы в циклической n-группе целых чисел $\langle Z, f\rangle$ будем среди классов смежности по каждой подгруппе (m) в аддитивной группе целых чисел Z, так как $Z = ret_0\langle Z, f\rangle$ (согласно предложению 8) и если $\langle H, f\rangle$ — подгруппа в n-группе $\langle Z, f\rangle$, то в группе Z найдется подгруппа (m) такая, что отношения смежности (неважно правой или левой) по подгруппе $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle Z, f\rangle$ и по подгруппе (m) в группе Z совпадают (согласно предложению 28). В этом заключается основная идея при доказательстве следующих трех теорем.

Теорема 58 *(Теорема 7 из [53]-А). Пусть (m) — подгруппа в аддитивной группе целых чисел Z. Класс смежности $r+(m)$ по подгруппе (m), где $0 \le r < m$, является подгруппой в циклической n-группе целых чисел $\langle Z, f\rangle$ тогда и только тогда, когда*

$$r(n-1) + 1 \equiv 0 \pmod m. \tag{74}$$

Кроме того,

1) если m и $n-1$ взаимно просты, то среди всех классов смежности по подгруппе (m) есть только одна подгруппа в n-группе $\langle Z, f\rangle$;

2) если m и $n-1$ не взаимно просты, то среди всех классов смежности по подгруппе (m) нет подгрупп в n-группе $\langle Z, f\rangle$.

Доказательство. Если $r + (m)$ — подгруппа в n-группе $\langle Z, f\rangle$ ($0 \le r < m$), то для элементов $s_v \in r + (m)$, $v = 1, \ldots, n$, имеем

$$f(s_1, \ldots, s_n) = s_1 + \ldots + s_n + 1 \in r + (m),$$

а значит, $s_1 + \ldots + s_n + 1 \equiv r \pmod m$. Но для каждого $v = 1, \ldots, n$ имеем $s_v \equiv r \pmod m$, тогда $nr + 1 \equiv r \pmod m$. Откуда $r(n-1) + 1 \equiv 0 \pmod m$.

Обратно, из верности сравнения (74) имеем $nr + 1 \equiv r \pmod m$. Кроме того, если $s_v \in r + (m)$ для $v = 1, \ldots, n$, то $s_v \equiv r \pmod m$, откуда $s_1 + \ldots + s_n + 1 \equiv nr + 1 \pmod m$, а значит, $s_1 + \ldots + s_n + 1 \equiv r \pmod m$, тогда

$$f(s_1, \ldots, s_n) = s_1 + \ldots + s_n + 1 \in r + (m).$$

Таким образом, класс смежности $r+(m)$ замкнут относительно действия n-арной операции f. Далее, если $s \in r + (m)$, т.е. $s \equiv r \pmod m$, то

$$\bar{s} = \overline{0^{\langle s\rangle}} = 0^{\langle -s(n-2)-1\rangle} = -s(n-2) - 1,$$

использовали пункт 2 из предложения 30. Кроме того, из верности сравнения (74) имеем $r \equiv -r(n-2) - 1 \pmod m$, а значит, $r \equiv -s(n-2) - 1 \pmod m$. Тогда $\bar{s} \in r + (m)$. Таким образом, класс смежности $r + (m)$ замкнут относительно действия унарной операции $\bar{}$. Значит, $r + (m)$ — подгруппа в n-группе $\langle Z, f\rangle$ (свойство 3 косого элемента).

Переходим к доказательству второй части теоремы.

1) Если m и $n-1$ взаимно просты, то найдутся целые числа u и v такие, что $mu+(n-1)v = 1$. Отсюда имеем сравнение $-v(n-1)+1 \equiv 0 \pmod m$. Среди остатков при делении на m выбираем r такой, что $r \equiv -v \pmod m$. Тогда верно сравнение (74). А значит, класс смежности $r + (m)$ является подгруппой в n-группе $\langle Z, f\rangle$. Из (74) имеем разрешимость линейного сравнения первой степени $x(n-1) \equiv -1 \pmod m$, которое имеет единственное решение, так как $n-1$ и m взаимно просты. Значит, среди всех классов смежности по подгруппе (m) есть только одна подгруппа в n-группе $\langle Z, f\rangle$.

2) Если m и $n-1$ не взаимно просты, то пусть НОД$(m, n-1) = d > 1$. Тогда линейное сравнение первой степени $x(n-1) \equiv -1 \pmod m$ не разрешимо, так как -1 не делится на d. Значит, среди всех остатков при делении на m нет чисел r, удовлетворяющих сравнению (74), т.е. среди всех классов смежности по подгруппе (m) нет подгрупп в n-группе $\langle Z, f\rangle$. Теорема доказана.

В отличие от групп, в бесконечной циклической n-группе не всякая подгруппа является циклической. Укажем признак цикличности подгруппы в циклической n-группе целых чисел $\langle Z, f\rangle$.

Теорема 59 . *Пусть класс смежности $r + (m)$ $(0 \le r < m)$ по подгруппе (m) из аддитивной группы целых чисел Z является подгруппой в циклической n-группе целых чисел $\langle Z, f\rangle$ и $r(n-1)+1 = mq$ для некоторого целого числа q. Класс $r + (m)$ является циклической подгруппой в n-группе $\langle Z, f\rangle$ тогда и только тогда, когда $q = 1$ или $q = n-2$. Причем,*

1) если $q = 1$, то $r + (m)$ порождается числом r;

2) если $q = n-2$, то $r + (m)$ порождается числом $r - m$.

Доказательство. Необходимость. Пусть циклическая подгруппа $r + (m)$ в n-группе $\langle Z, f\rangle$ порождается числом $r+mv$, где v — некоторое целое число. Тогда любое число $r+mw$ из $r+(m)$ является некоторой s-той n-арной степенью числа $r+mv$, т.е. $r+mw = (r+mv)^{\langle s\rangle}$. Но $r + mw = 0^{\langle r+mw\rangle}$ и по пункту 2 из предложения 29 получим

$$(r+mv)^{\langle s\rangle} = (0^{\langle r+mv\rangle})^{\langle s\rangle} = 0^{\langle (r+mv)s(n-1)+r+mv+s\rangle}.$$

Тогда

$$0^{\langle r+mw\rangle} = 0^{\langle (r+mv)s(n-1)+r+mv+s\rangle}.$$

В силу бесконечности циклической n-группы $\langle Z, f\rangle$ имеем равенство

$$r + mw = (r+mv)s(n-1) + r + mv + s = rs(n-1) + mvs(n-1) + r + mv + s =$$

$$= s(r(n-1)+1) + mvs(n-1) + mv + r = smq + mvs(n-1) + mv + r.$$

Тогда $w = sq + vs(n-1) + v$ или $w - v = s(q + v(n-1))$. Так как $r + mw$ — любое число из $r + (m)$, то последнее равенство верно для любого целого числа w, а это возможно только тогда, когда $q + v(n-1) = \pm 1$.

Из условия $0 \le r < m$ имеем

$$1 \le r(n-1) + 1 \le m(n-1) \quad \text{или} \quad 1 \le mq \le m(n-1).$$

Тогда $1 \le q \le n-1$. Если $q + v(n-1) = 1$, то $q = 1$, тогда $v = 0$ и подгруппа $r + (m)$ в n-группе $\langle Z, f\rangle$ порождается числом r; если $q + v(n-1) = -1$, то $q = n-2$, тогда $v = -1$ и подгруппа $r + (m)$ в n-группе $\langle Z, f\rangle$ порождается числом $r - m$.

Достаточность. Если $q = 1$, то для любого $r + mw$ из $r + (m)$ имеем (по пункту 2 из предложения 29)

$$r^{\langle w\rangle} = (0^{\langle r\rangle})^{\langle w\rangle} = 0^{\langle rw(n-1)+w+r\rangle} = 0^{\langle w(r(n-1)+1)+r\rangle} = 0^{\langle wm+r\rangle} = r + mw,$$

значит, класс $r + (m)$ является циклической подгруппой в n-группе $\langle Z, f\rangle$ и порождается числом r.

Если $q = n-2$, то для любого $r + mw$ из $r + (m)$ имеем (по пункту 2 из предложения 29)

$$(r-m)^{\langle -(w+1)\rangle} = (0^{\langle r-m\rangle})^{\langle -(w+1)\rangle} = 0^{\langle -(r-m)(w+1)(n-1)-(w+1)+r-m\rangle} =$$

$$= 0^{\langle -(w+1)(r(n-1)+1)+m(w+1)(n-1)+r-m\rangle} = 0^{\langle -(w+1)m(n-2)+m(w+1)(n-1)+r-m\rangle} =$$

$$= 0^{\langle m(w+1)+r-m\rangle} = 0^{\langle r+mw\rangle} = r + mw,$$

значит, класс $r + (m)$ является циклической подгруппой в n-группе $\langle Z, f\rangle$ и порождается числом $r - m$. Теорема доказана.

Теперь будем изучать строение подгруппы в циклической n-группе целых чисел $\langle Z, f\rangle$.

Теорема 60 . *Каждая подгруппа $\langle H, f\rangle$ в циклической n-группе целых чисел $\langle Z, f\rangle$ является классом смежности по некоторой подгруппе (m) из аддитивной группы целых чисел Z, где m с $n-1$ взаимно просты. Причем, если $m = (n-1)k + r_0$, $k \in N$, $0 \le r_0 < n-1$, то*

1) при $r_0 = 1$ имеем $H = k+(m)$ и подгруппа $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle Z, f\rangle$ будет циклической с порождающим элементом k;

2) при $r_0 = n-2$ имеем $H = (n-2)k + n - 3 + (m)$ и подгруппа $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle Z, f\rangle$ будет циклической с порождающим элементом $-k-1$;

3) при $r_0 \ne 1$ и $r_0 \ne n-2$ имеем $H = x_0k + y_0 + (m)$, где x_0 — решение сравнения $r_0x \equiv 1 \pmod{n-1}$ и $0 \le x_0 < n-1$, y_0 — частное от деления $r_0x_0 - 1$ на $n-1$, и $\langle H, f\rangle$ не является циклической подгруппой в n-группе $\langle Z, f\rangle$.

Доказательство. Известно (см. предложение 28), что любая подгруппа в n-группе $der_{\varphi,d}G$ является смежным классом по некоторой подгруппе группы G. Поэтому искать подгруппы в циклической n-группе целых чисел$\langle Z, f\rangle$ надо только среди классов смежности по некоторой подгруппе (m) $(m \in N)$ аддитивной группы целых чисел Z.

Пусть (m) — подгруппа в аддитивной группе целых чисел Z. Если m и $n-1$ не взаимно просты, то среди всех классов смежности по подгруппе (m) при таких m нет подгрупп в n-группе $\langle Z, f\rangle$ (согласно теореме 58). Значит, искать подгруппы в n-группе $\langle Z, f\rangle$ надо среди классов смежности по подгруппе (m) из аддитивной группы целых чисел Z для остальных m. Отметим, что все эти остальные m взаимно просты с $n-1$, а значит, среди всех классов смежности по подгруппе (m) есть только одна подгруппа $\langle H, f\rangle$ в n-группе $\langle Z, f\rangle$ (согласно теореме 58). Изучим строение этих подгрупп.

1) Пусть $m = (n-1)k+1$, $k \in N$. Из взаимной простоты чисел m и $n-1$ имеем равенство $(n-1)v + mu = 1$ для некоторых целых чисел v и u. Выбираем $v = -k$ и $u = 1$. Тогда $r = k$ удовлетворяет сравнению (74). По теореме 58 класс смежности $k + (m)$ по подгруппе (m) является подгруппой в n-группе $\langle Z, f\rangle$. Частное q от деления числа $k(n-1)+1$ на m равно

1, по теореме 59 эта подгруппа в n-группе $\langle Z, f\rangle$ является циклической с порождающим числом k.

2) Пусть $m = (n-1)k + n - 2$, $k \in N$. Как и в предыдущем случае, имеем равенство $(n-1)v + mu = 1$ для некоторых целых v и u. Выбираем $v = -(n-2)k-(n-3)$ и $u = n-2$, которые удовлетворяют указанному равенству. Действительно,

$$(n-1)v + mu = (n-1)(-(n-2)k - (n-3)) + ((n-1)k + n - 2)(n-2) =$$

$$= -(n-1)(n-2)k - (n-1)(n-3) + (n-1)k(n-2) + (n-2)^2 =$$
$$= -(n-1)(n-3) + (n-2)^2 = 1.$$

Тогда $r = (n-2)k+(n-3)$ удовлетворяет сравнению (74). По теореме 58 класс смежности $((n-2)k+(n-3))+(m)$ по подгруппе (m) является подгруппой в n-группе $\langle Z, f\rangle$. Частное q от деления числа $((n-2)k + (n-3))(n-1) + 1$ на $m = (n-1)k + n - 2$ равно $n - 2$ и

$$r - m = (n-2)k + (n-3) - (n-1)k - (n-2) = -k - 1,$$

тогда по теореме 59 эта подгруппа в n-группе $\langle Z, f\rangle$ является циклической с порождающим числом $-k-1$.

3) Пусть $m = (n-1)k + r_0$, $k \in N$ и $r_0 \neq 1$, $r_0 \neq n-2$. Вновь имеем равенство $(n-1)v + mu = 1$ для некоторых целых v и u. Выбираем $v = -(x_0k + y_0)$ и $u = x_0$, где x_0 – решение сравнения $r_0x \equiv 1 \pmod{n-1}$ и $0 \leq x_0 < n-1$, y_0 – частное от деления $r_0x_0 - 1$ на $n-1$. Тогда $r = x_0k+y_0$ удовлетворяет сравнению (74). По теореме 58 класс смежности $(x_0k + y_0) + (m)$ по подгруппе (m) является подгруппой в n-группе $\langle Z, f\rangle$. Частное q от деления числа $(x_0k+y_0)(n-1)+1$ на m равно x_0. Так как $r_0 \neq 1$ и $r_0 \neq n-2$, то $x_0 \neq 1$ и $x_0 \neq n-2$, т.е. $q \neq 1$ и $q \neq n-2$. По теореме 59 эта подгруппа в n-группе $\langle Z, f\rangle$ не является циклической. Теорема доказана.

Следствие 45 *Только при $n = 3, 4, 5, 7$ любая подгруппа в бесконечной циклической n-группе является циклической.*

Заметим, что в [19] изучались подгруппы свободной n-группы. В частности, было доказано, что любая подгруппа в свободной однопорожденной (т.е. в бесконечной циклической) n-группе будет свободной только для $n = 3, 4, 5, 7$. Следствие 45 повторяет этот результат.

В отличие от бесконечных циклических n-групп, в конечных циклических n-группах каждая подгруппа будет циклической, т.е. верна следующая

Теорема 61 *[2]. В конечной циклической n-группе $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ любая подгруппа является циклической. Кроме того, эта подгруппа является классом смежности по подгруппе в ретракте $ret_a\langle\langle a\rangle, f\rangle$ и ее индекс взаимно прост с числом $n-1$.*

Перейдем теперь к изучению свойств унарной операции $x \to \bar{x}$ в циклических n-группах. В конце параграфа 1.2 отмечались некоторые сходство и различие унарной операции $x \to \bar{x}$ в n-группах и обратимости в бинарных группах. В предложении 10 указаны все n-группы, в которых выполнено тождество $\bar{x} = \bar{y}$. Из этого предложения для конечных циклических групп имеем

Следствие 46 *В циклической n-группе верно тождество $\bar{x} = \bar{y}$ тогда и только тогда, когда она является конечной порядка, делящего $n-2$.*

Опишем теперь все конечные циклические n-группы, в которых отображение $x \to \bar{x}$, как и обратимость в бинарных группах, является биективным.

Теорема 62 *(теорема 3, [57]-А). В конечной циклической n-группе порядка k отображение $x \to \bar{x}$ является биективным тогда и только тогда, когда k и $n-2$ взаимно просты.*

Доказательство. Пусть конечная циклическая n-группа $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ имеет порядок k, который взаимно прост с $n-2$. Если $\overline{a^{\langle s\rangle}} = \overline{a^{\langle t\rangle}}$ для некоторых $a^{\langle s\rangle}, a^{\langle t\rangle} \in \langle a\rangle$, где $0 \le s \le t < k$, то, согласно предложению 30, имеем $(a^{\langle s\rangle})^{\langle -1\rangle} = (a^{\langle s\rangle})^{\langle -1\rangle}$, откуда $a^{\langle -s(n-1)+s-1\rangle} = a^{\langle -t(n-1)+t-1\rangle}$ (согласно предложению 29) или $a^{\langle -s(n-2)-1\rangle} = a^{\langle -t(n-2)-1\rangle}$. Используя следствие 19, получим $k \mid (n-2)(t-s)$. В силу взаимной простоты k и $n-2$ имеем $k \mid (t-s)$. Значит, $t = s$, т.е. отображение $x \to \bar{x}$ является биективным.

Обратно, пусть в конечной циклической n-группе $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ порядка k отображение $x \to \bar{x}$ является биективным. Обозначим НОД$(n-2, k) = d$, тогда $k = dv$, $n-2 = dw$ для некоторых целых чисел v и w. Докажем равенство $\bar{a} = \overline{a^{\langle v\rangle}}$. Используя определение натуральной n-арной степени и следствие 18, получим

$$f(\overset{(n-1)}{a^{\langle v\rangle}}, \bar{a}) = f(a^{\langle v\rangle}, \overset{(n-2)}{a^{\langle v\rangle}}, \bar{a}) = f(a^{\langle v\rangle}, \overset{(n-2)}{\overset{(v(n-1)+1)}{a}}, \bar{a}) =$$

$$= f(a^{\langle v\rangle}, \overset{(v(n-1)(n-2))}{a}, \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}) = f(a^{\langle v\rangle}, \overset{(v(n-1)dw)}{a}, \overset{(n-2)}{a}, \bar{a}) =$$

$$= f(a^{\langle v\rangle}, \overset{(kw(n-1)+1)}{a}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}) = f(a^{\langle v\rangle}, a^{\langle kw\rangle}, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}) = f(a^{\langle v\rangle}, a, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}) = a^{\langle v\rangle}.$$

Из определения косого элемента следует $\bar{a} = \overline{a^{\langle v\rangle}}$. Тогда, в силу биективности отображения $x \to \bar{x}$, получим $a = a^{\langle v\rangle}$, откуда $v = k$ либо $v = 1$. Если $v = 1$, то $k \mid (n-2)$, а тогда, согласно следствию 45, в циклической n-группе $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ верно тождество $\bar{x} = \bar{y}$, но это возможно только тогда, когда n-группа $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ одноэлементна, т.е. целые числа k и $n-2$ взаимно просты. Если $v = k$, то $d = 1$, т.е. и в этом случае целые числа k и $n-2$ взаимно просты. Теорема доказана.

В бесконечных циклических n-группах отображение $x \to \bar{x}$ удовлетворяет следующим свойствам:

Теорема 63 *(теорема 50, [51]-А). Отображение $x \to \bar{x}$ в бесконечной циклической n-группе является инъективным. Только в бесконечной циклической тернарной группе отображение $x \to \bar{x}$ будет биективным.*

Доказательство. Пусть $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ — бесконечная циклическая n-группа. Отображение $x \to \bar{x}$ в n-группе $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ действует по правилу: для любого элемента $a^{\langle k\rangle} \in \langle a\rangle$ имеем $a^{\langle k\rangle} \to \overline{a^{\langle k\rangle}} = a^{\langle -k(n-2)-1\rangle}$ (согласно пункту 2 предложения 30). Если для некоторых элементов $a^{\langle k_1\rangle}, a^{\langle k_2\rangle} \in \langle a\rangle$ имеем равенство $\overline{a^{\langle k_1\rangle}} = \overline{a^{\langle k_2\rangle}}$, т.е. $a^{\langle -k_1(n-2)-1\rangle} = a^{\langle -k_2(n-2)-1\rangle}$, то, по предложению 31, имеем $a^{\langle (k_2-k_1)(n-2)\rangle} = a$. В силу бесконечности n-группы $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ получим $(k_2-k_1)(n-2) = 0$, откуда $k_1 = k_2$ (так как $n \ge 3$). Инъективность отображения $x \to \bar{x}$ доказана.

Далее, пусть элемент $a^{\langle k\rangle} \in \langle a\rangle$. Если существует элемент $a^{\langle l\rangle} \in \langle a\rangle$ такой, что верно равенство $\overline{a^{\langle l\rangle}} = a^{\langle k\rangle}$, то, согласно пункту 2 предложения 30, имеем равенство $a^{\langle -l(n-2)-1\rangle} = a^{\langle k\rangle}$ и, в силу бесконечности n-группы $\langle\langle a\rangle, f\rangle$, получим $-l(n-2)-1 = k$. Если $n = 3$, то уравнение $-x(n-2) = k+1$ разрешимо в целых числах для любого k. Если же $n > 3$, то это уравнение разрешимо не для всех целых чисел k. Таким образом, сюръективность отображения $x \to \bar{x}$ выполнена только для $n = 3$. Теорема доказана.

Для периодических n-групп верна

Теорема 64 *(теорема 4, [57]-А). Отображение $x \to \bar{x}$ в периодической n-группе является биективным тогда и только тогда, когда n-арный порядок каждого элемента этой n-группы взаимно прост с $n-2$.*

Доказательство. Пусть отображение $x \to \bar{x}$ в периодической n-группе $\langle G, f\rangle$ будет биективным. Выбираем произвольно элемент $a \in G$. Ограничение отображения $x \to \bar{x}$ на циклическую n-подгруппу $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ является биективным отображением, а значит, согласно теореме 62, n-арный порядок элемента a взаимно прост с $n-2$.

Обратно, пусть n-арный порядок каждого элемента n-группы $\langle G, f\rangle$ взаимно прост с $n-2$ и верно равенство $\bar{a} = \bar{b}$ для некоторых элементов $a, b \in G$. Пусть $Ord_n a = k$. Так как целое число k взаимно просто с $n-2$, то, согласно равенству (40) из следствия 21, $Ord_n\bar{a} = k$, а значит, циклическая подгруппа $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ порождается элементом $\bar{a}$. Из равенства $a^{\langle k\rangle} = a$ следует равенство $f_{(k)}(\overset{(k(n-1)+1)}{a}) = a$ (по определению натуральной n-арной степени) или $f_{(k)}(\overset{(n-1)}{a}, \overset{((k-1)(n-1)+1)}{a}) = a$. Из определения косого элемента следует равенство $\bar{a} = a^{\langle k-1\rangle}$. Если $a = \bar{a}^{\langle s\rangle}$ для некоторого натурального числа s, то $a = (a^{\langle k-1\rangle})^{\langle s\rangle}$ или $a = a^{\langle (k-1)s(n-1)+s+k-1\rangle}$ (согласно пункту 2 предложения 29). Из последнего равенства, согласно следствию 18, получим делимость $k \mid (k-1)s(n-1)+s+k-1$ или, что то же самое, $k \mid s(n-2)+1$. Таким образом, натуральное число s является решением сравнения

$$x(n-2) \equiv -1 \pmod{k}. \tag{75}$$

Далее, так как $\bar{a} = \bar{b}$ и $Ord_n\bar{a} = k$, то $Ord_n\bar{b} = k$. Пусть $Ord_n b = m$ и натуральное число m взаимно просто с $n-2$. Согласно равенству (40) из следствия 21, получим равенство $Ord_n\bar{b} = m$, а значит, $m = k$. Аналогично как и для элемента a, если $b = \bar{b}^{\langle t\rangle}$ для некоторого натурального числа t, то это число t является решением сравнения (75). В силу однозначной разрешимости сравнения (75) (это следует из взаимной простоты целых чисел k и $n-2$) получим равенство $s = t$. Тогда $a = \bar{a}^{\langle s\rangle} = \bar{b}^{\langle s\rangle} = b$. Инъективность отображения $x \to \bar{x}$ доказана. Осталось показать сюръективность отображения $x \to \bar{x}$. Пусть элемент $a \in G$. Ограничение отображения $x \to \bar{x}$ на циклическую подгруппу $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ в n-группе $\langle G, f\rangle$ будет биекцией (в силу конечности этой подгруппы и теоремы 62), а значит, найдется элемент $b \in \langle a\rangle \subseteq G$ такой, что $b = \bar{a}$. Теорема доказана.

Следствие 47 *(следствие 6, [57]-А) В конечной n-группе, порядок которой взаимно прост с $n-2$, отображение $x \to \bar{x}$ является биективным.*

О периодичности n-группы можно судить по периодичности ее соответствующей группы, т.е. верна

Теорема 65 *(теорема 1, [66]-А). Если соответствующая группа G_0 n-группы $\langle G, f\rangle$ является периодической, то n-группа $\langle G, f\rangle$ также будет периодической.*

Доказательство. Очевидно, каждый элемент a из n-группы $\langle G, f\rangle$, у которой соответствующая группа G_0 является периодической, имеет конечный n-арный порядок. Теорема доказана.

Так как ретракт и соответствующая группа одной и той же n-группы изоморфны, то о периодичности n-группы можно также судить по периодичности ее ретракта, т.е. верно

Следствие 48 *Если ретракт n-группы $\langle G, f\rangle$ является периодической группой, то n-группа $\langle G, f\rangle$ также будет периодической.*

3.2 Признаки полуцикличности n-групп

Напомним, что если ретракт n-группы является циклической группой, то эту n-группу называют полуциклической [14]. Из теоремы 56 следует, что любая циклическая n-группа будет полуциклической. Кроме того, все полуциклические n-группы являются полуабелевыми (теорема 40).

Отметим, что в теории абелевых групп признаком цикличности группы является следующий факт: группа G является циклической тогда и только тогда, когда найдется элемент $a \in G$ такой, что всякий гомоморфизм σ из группы B в G, где $a \in Im\ \sigma$, является эпиморфизмом (см., например, [40], стр.25). Аналогом этого признака является признак полуцикличности для абелевых n-групп, сформулированный в следующем предложении.

Предложение 45 *(Предложение 1, [67]-A) Абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ является полуциклической тогда и только тогда, когда найдется элемент $a \in G$ такой, что всякий гомоморфизм ψ из абелевой n-группы $\langle B, f_1\rangle$ в $\langle G, f\rangle$, где $a \cdot \psi(c_1) \in Im\ \psi$ ($\cdot$ есть умножение в ретракте n-группы $\langle G, f\rangle$ и c_1 — единица ретракта n-группы $\langle B, f_1\rangle$), является эпиморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\langle G, f\rangle$ — абелева полуциклическая n-группа, тогда ее ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$ является циклической группой, порожденной некоторым элементом a. Выбираем ψ — гомоморфизм из абелевой n-группы $\langle B, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G, f\rangle$. Полагаем $B = ret_{c_1}\langle B, f_1\rangle$. По теореме 37 найдется групповой гомоморфизм $\sigma : B \to G$ такой, что $\psi(x) = \sigma(x) \cdot \psi(c_1)$ для любого элемента $x \in B$. Из условия $a \cdot \psi(c_1) \in Im\ \psi$ следует $a \in Im\ \sigma$. Откуда σ — эпиморфизм (согласно признаку цикличности группы), тогда и ψ — эпиморфизм.

Обратно, пусть $\psi : \langle B, f_1\rangle \to \langle G, f\rangle$ — гомоморфизм абелевых n-групп с условием $a \cdot \psi(c_1) \in Im\ \psi$, где элемент a из условия достаточности. Тогда ψ — эпиморфизм. По теореме 37 найдется групповой гомоморфизм $\sigma : B \to G$ такой, что $\psi(x) = \sigma(x) \cdot \psi(c_1)$ для любого элемента $x \in B$. Откуда $Im\ \psi = Im\ \sigma \cdot \psi(c_1)$. Так как $a \cdot \psi(c_1) \in Im\ \psi$, то $a \in Im\ \sigma$. Кроме того, $Im\ \psi = G$, тогда $Im\ \sigma \cdot \psi(c_1) = G$, т.е. смежный класс $Im\ \sigma \cdot \psi(c_1)$ по подгруппе $Im\ \sigma$ совпадает с G, это возможно только в том случае, когда $Im\ \sigma = G$. Значит, σ — эпиморфизм и, согласно признаку цикличности группы, G — циклическая группа. Тогда $\langle G, f\rangle$ — абелева полуциклическая n-группа. Предложение доказано.

Докажем теперь в следующем предложении признак полуцикличности для полуабелевых n-групп, который является также аналогом признака цикличности для абелевых групп.

Предложение 46 *([51]-A, Предложение 48, с. 150) Полубелева n-группа $\langle G, f\rangle$ является полуциклической тогда и только тогда, когда найдется элемент $a \in G$ такой, что всякий гомоморфизм ψ из полуабелевой n-группы $\langle B, f_1\rangle$ в $\langle G, f\rangle$, удовлетворяющий условию (59), где φ_1, φ_2 — автоморфизмы ретрактов $ret_{c_1}\langle B, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G, f\rangle$ соответственно, построенные по правилу (24), и выполнено условие $a \cdot \psi(c_1) \in Im\ \psi$ ($\cdot$ есть умножение в группе $ret_{c_2}\langle G, f\rangle$), является эпиморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\langle G, f\rangle$ — полуциклическая n-группа, тогда ретракт $ret_{c_2}\langle G, f\rangle$ является циклической группой, порожденной некоторым элементом a. Выбираем ψ — гомоморфизм из полуабелевой n-группы $\langle B, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G, f\rangle$, удовлетворяющий условию (59), где φ_1, φ_2 — автоморфизмы ретрактов $ret_{c_1}\langle B, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G, f\rangle$ соответственно, построенные по правилу (24). По теореме 41 найдется групповой гомоморфизм σ : $ret_{c_1}\langle B, f_1\rangle \to ret_{c_2}\langle G, f\rangle$ такой, что $\psi(x) = \sigma(x) \cdot \psi(c_1)$ для любого элемента $x \in B$. Из условия $a \cdot \psi(c_1) \in Im\ \psi$ следует $a \in Im\ \sigma$. Откуда σ — эпиморфизм (согласно признаку цикличности группы), тогда и ψ — эпиморфизм.

Обратно, пусть $\psi : \langle B, f_1\rangle \to \langle G, f\rangle$ — гомоморфизм полуабелевых n-групп с условием $a \cdot \psi(c_1) \in Im\ \psi$ для некоторого элемента $a \in G$, причем гомоморфизм ψ удовлетворяет условию (59), где φ_1, φ_2 — автоморфизмы ретрактов $ret_{c_1}\langle B, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle G, f\rangle$ соответственно, построенные по правилу (24). По условию достаточности ψ — эпиморфизм. Из теоремы 41 следует существование группового гомоморфизма $\sigma : ret_{c_1}\langle B, f_1\rangle \to ret_{c_2}\langle G, f\rangle$ такой, что $\psi(x) = \sigma(x) \cdot \psi(c_1)$ для любого элемента $x \in B$. Из последнего равенства имеем равенство $Im\ \psi = Im\ \sigma \cdot \psi(c_1)$, а так как $a \cdot \psi(c_1) \in Im\ \psi$, то $a \in Im\ \sigma$. Кроме того, как и в доказательстве достаточности предыдущего предложения, $Im\ \psi = G$, тогда $Im\ \sigma \cdot \psi(c_1) = G$, т.е. смежный класс $Im\ \sigma \cdot \psi(c_1)$ по подгруппе $Im\ \sigma$ совпадает с G, это возможно только в том случае, когда $Im\ \sigma = G$. Значит, σ — эпиморфизм и, согласно признаку цикличности группы, $ret_{c_2}\langle G, f\rangle$ — циклическая группа. Тогда $\langle G, f\rangle$ — полуциклическая n-группа. Предложение доказано.

Докажем в следующей теореме замкнутость класса полуциклических n-групп относительно фактор-n-групп.

Теорема 66 . *Фактор-n-группа полуциклической n-группы является полуциклической n-группой.*

Доказательство. Пусть $\langle G, f\rangle$ — полуциклическая n-группа и ρ — конгруэнция на $\langle G, f\rangle$. Рассмотрим фактор-n-группу $\langle G/\rho, f'\rangle$, где n-арная операция f' действует по правилу: для любых элементов $\rho(a_1), \ldots, \rho(a_n) \in G/\rho$ верно

$$f'(\rho(a_1), \ldots, \rho(a_n)) = \rho(f(a_1^n)).$$

Строим ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$ с умножением $\cdot$, где $a \cdot b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$ для любых элементов $a, b \in G$. Согласно предложению 15, ρ — конгруэнция на ретракте G, при этом класс конгруэнции $\rho(c)$, содержащий элемент c, является нормальной подгруппой в G. Фактор-группа G/ρ является циклической группой, так как, согласно определению полуциклической n-групп, группа G является циклической. Докажем, что G/ρ является ретрактом фактор-n-группы $\langle G/\rho, f'\rangle$. Действительно, для любых элементов $\rho(a), \rho(b) \in G/\rho$, используя свойство 13, получим

$$\rho(a) \cdot \rho(b) = \rho(a \cdot b) = \rho(f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)) =$$

$$= f'(\rho(a), \overset{(n-3)}{\rho(c)}, \rho(\bar{c}), \rho(b)) = f'(\rho(a), \overset{(n-3)}{\rho(c)}, \overline{\rho(c)}, \rho(b)).$$

Значит, $G/\rho = ret_{\rho(c)}\langle G/\rho, f'\rangle$. Теорема доказана.

Следствие 49 *Гомоморфный образ полуциклической n-группы также является полуциклической n-группой.*

Доказательство. Пусть φ — гомоморфизм из полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ в n-группу $\langle G', f'\rangle$. Так как ядро $Ker\ \varphi$ гомоморфизма φ является конгруэнцией (смотри свойство 17), то фактор-n-группа $\langle G/Ker\ \varphi, f''\rangle$ является полуциклической n-группой (по теореме 66). Но фактор-n-группа $\langle G/Ker\ \varphi, f''\rangle$ изоморфна образу $\langle Im\ \varphi, f'\rangle$ при этом гомоморфизме (смотри теорему 13). Значит, образу $\langle Im\ \varphi, f'\rangle$ является полуциклической n-группой. Следствие доказано.

3.3 Конечные полуциклические n-группы

Строение конечных полуциклических n-групп. Рассмотрим конечную циклическую группу (a) порядка k с бинарной операцией $\cdot$. Выберем тождественный автоморфизм $1_{(a)}$ группы (a) и элемент $d = a^l$, где $0 \le l < k$. Обратная теорема Глускина-Хоссу (теорема 11) определяет полуциклическую n-группу $\langle (a), f\rangle = der_{1_{(a)},a^l}(a)$ с n-арной операцией

$$f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) = a^{s_1+\ldots+s_n+l}. \tag{76}$$

Выберем теперь на конечной циклической группе (a) порядка k любой автоморфизм φ, отличный от тождественного автоморфизма $1_{(a)}$, т.е. $\varphi(a) = a^m$, где $1 < m < k$ и m взаимно прост с k. Понятно, что $k > 2$, иначе для $k = 1, 2$ автоморфизм группы (a) только один — тождественный. Пусть $d = a^l$ — элемент группы (a), для которого $lm \equiv l \pmod k$ (согласно условию (22)). Чтобы выполнялось равенство (23) для любого элемента $x = a^s$, $s = 0, 1, \ldots, k-1$, надо для натурального числа m потребовать условие: показатель m по модулю k делит $n-1$, т.к. из равенства $a^{m^{n-1}s} = a^s$ следует $s \equiv m^{n-1}s \pmod k$, а это сравнение верно для всех $s = 0, 1, \ldots, k-1$, если $m^{n-1} \equiv 1 \pmod k$. Таким образом, для любого элемента x из группы (a) имеем $\varphi^{n-1}(x) = x$. При выполнении перечисленных требований, накладываемых на m и l, на циклической группе (a) по обратной теореме Глускина-Хоссу (теорема 11) определяется полуциклическая n-группа $\langle (a), f\rangle = der_{\varphi,a^l}(a)$ с n-арной операцией

$$f(a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, \ldots, a^{s_{n-1}}, a^{s_n}) = a^{s_1+ms_2+m^2s_3+\ldots+m^{n-2}s_{n-1}+s_n+l}. \tag{77}$$

Итак, доказана следующая

Теорема 67 *(Предложение 1, [52]-А) . На циклической группе (a) порядка k определяется полуциклическая n-группа $\langle (a), f\rangle$ с n-арной операцией (76), где $0 \le l < k$, либо с n-арной операцией (77) при $k > 2$, где $0 \le m, l < k$, $m \ne 1$, m взаимно прост с k, $lm \equiv l \pmod k$ и показатель m по модулю k делит $n-1$.*

Назовем n-группу, построенную на конечной циклической группе одним из двух выше описанных способов, полуциклической типа (k, m, l) ($m = 1$ в первом случае и $m \ne 1$ во втором случае). Идею такой классификации полуциклических n-групп предложил А. Гальмак. Заметим, что при $m = 1$ мы будем иметь абелеву полуциклическую n-группу, а при $m \ne 1$ полуциклическая n-группа не будет абелевой.

Аналогичное построение n-групп на аддитивной группе кольца классов вычетов по модулю k имеется в работе [24].

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 8 *Пусть* $k, b \in N$ *и* l_1, l_2, m *— такие неотрицательные целые числа, что* $0 \le l_1, l_2, m < k$ *и НОД* $(m, k) = 1$. *Тогда сравнение*

$$wl_1 \equiv vb + l_2 \pmod k \tag{78}$$

справедливо для некоторых целых чисел w *и* v *с условием НОД* $(w, k) = 1$ *тогда и только тогда, когда НОД* $(l_1, b, k) =$ *НОД* (l_2, b, k).

Доказательство. Необходимость. Полагаем $d_1 =$ НОД (l_1, b, k), $d_2 =$ НОД (l_2, b, k). Из верности сравнения (78) следует равенство $wl_1 - vb - kz = l_2$ для некоторого целого числа z. Так как d_1 делит wl_1, vb и kz, то $d_1 \mid l_2$, откуда $d_1 \mid d_2$.

Из условия НОД $(w, k) = 1$ имеем сравнение $ww' \equiv 1 \pmod k$ для некоторого целого числа w'. Домножаем обе части сравнения (78) на целое число w', получаем сравнение $ww'l_1 \equiv w'vb + w'l_2 \pmod k$, откуда $l_1 = w'vb + w'l_2 + kq$ для некоторого целого числа q. Но d_2 делит $w'vb$, $w'l_2$ и kq, значит, $d_2 \mid l_1$, откуда $d_2 \mid d_1$. Итак, $d_1 = d_2$.

Достаточность. Пусть $d =$ НОД (b, k) и $d' =$ НОД $(l_1, d) =$ НОД (l_2, d). Тогда $l_1 = l_1'd'$, $l_2 = l_2'd'$ и $d = d''d'$ для некоторых целых чисел l_1', l_2' и d'', кроме того, НОД $(l_1', d'') =$ НОД $(l_2', d'') = 1$. Поэтому сравнение

$$xl_1' \equiv l_2' \pmod{d''} \tag{79}$$

разрешимо и для решения x_0 этого сравнения верно НОД $(x_0, d'') = 1$.

Обозначим $Q = \{p \mid p$ — простое число и $p \mid k, p \nmid x_0\}$ и пусть

$$\mu = \begin{cases} 1, & \text{если } Q = \emptyset, \\ \prod_{p \in Q} p, & \text{если } Q \neq \emptyset. \end{cases}$$

Полагаем $w = x_0 + \mu d''$. Покажем, что НОД $(w, k) = 1$. Действительно, если НОД $(w, k) > 1$, то в каноническом разложении НОД (w, k) выбираем простое число q. Если $q \nmid x_0$, то $q \mid \mu$ (так как $q \mid k$), а тогда $q \nmid w$ — противоречие. Если $q \mid x_0$, то $q \nmid \mu$, а тогда с учетом $q \nmid d''$ (ведь НОД $(x_0, d'') = 1$) вновь имеем $q \nmid w$ — противоречие. Значит, НОД $(w, k) = 1$.

Так как $w \equiv x_0 \pmod{d''}$, то w является решением сравнения (79). Умножаем обе части и модуль сравнения $wl_1' \equiv l_2' \pmod{d''}$ на d', получаем сравнение

$$wl_1 \equiv l_2 \pmod d. \tag{80}$$

Так как $d =$ НОД (b, k), то для некоторых целых чисел s и t имеем равенство $d = sb + kt$. Из сравнения (80) имеем $wl_1 = l_2 + dg = l_2 + gsb + gkt$ для некоторого целого числа g. Полагаем $v = gs$ и имеем сравнение (78). Лемма доказана.

Среди полуциклических n-групп типа (k, m, l) могут быть изоморфные между собой n-группы. Следующая теорема является критерием изоморфизма полуциклических n-групп типа $(k, 1, l)$.

Теорема 68 *(Лемма 1, [24]) Две полуциклические* n*-группы типов* $(k, 1, l_1)$ *и* $(k, 1, l_2)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$\text{НОД } (l_1, n-1, k) = \text{НОД } (l_2, n-1, k). \tag{81}$$

Следующая теорема является критерием изоморфизма полуциклических n-групп типа (k, m, l) для $m \neq 1$.

Теорема 69 *(Предложение 3, [52]-А) Две полуциклические n-группы $\langle(a), f_1\rangle$, $\langle(a), f_2\rangle$ типов (k, m_1, l_1), (k, m_2, l_2) соответственно, где $m_1 \neq 1$, $m_2 \neq 1$, изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$m_1 = m_2 \quad \text{и} \quad \text{НОД}\ (l_1, \frac{m_1^{n-1}-1}{m_1-1}, k) = \text{НОД}\ (l_2, \frac{m_2^{n-1}-1}{m_2-1}, k).$$

Доказательство. По следствию 32 две полуциклические n-группы $\langle(a), f_1\rangle$ и $\langle(a), f_2\rangle$ типов (k, m_1, l_1) и (k, m_2, l_2) соответственно, где $m_1 \neq 1$ и $m_2 \neq 1$, изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся элемент $a^v \in (a)$ и автоморфизм σ на группе (a) такие, что

$$\sigma(a^{l_1}) = a^v \cdot (a^v)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (a^v)^{m_2^{n-2}} \cdot a^{l_2} = a^{v(1+m_2+\ldots+m_2^{n-2})+l_2} = a^{v\frac{m_2^{n-1}-1}{m_2-1}+l_2},$$

т.е.

$$\sigma(a^{l_1}) = a^{v\frac{m_2^{n-1}-1}{m_2-1}+l_2} \tag{82}$$

и $\sigma(a^{m_1}) = \sigma(a)^{m_2}$. Пусть автоморфизм σ группы (a) определяется некоторым целым числом w с условиями $1 \leq w < k$ и НОД $(w, k) = 1$. Тогда равенство (82) равносильно сравнению (78), если полагать $b = \frac{m_2^{n-1}-1}{m_2-1}$, и из равенства $\sigma(a^{m_1}) = \sigma(a)^{m_2}$ получим сравнение $m_1 w \equiv w m_2 \pmod{k}$, из которого вытекает равенство $m_1 = m_2$. Таким образом, благодаря лемме 8 и следствию 32, данная теорема доказана.

Докажем, что все полуциклические n-группы типа (k, m, l) исчерпывают класс всех конечных полуциклических n-групп.

Теорема 70 *(Теорема 2, [52]-А) Любая конечная полуциклическая n-группа порядка k изоморфна полуциклической n-группе типа $(k, 1, l)$, где*

$$l \mid \text{НОД}\ (n-1, k),$$

либо полуциклической n-группе типа (k, m, l) при $m \neq 1$, где

$$l \mid \text{НОД}\ (\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k).$$

Доказательство. На полуциклической n-группе $\langle G, f\rangle$ порядка k строим циклическую группу $(b) = ret_c\langle G, f\rangle$ (смотри теорему 10) с порождающим элементом b. Причем, элемент d из теоремы 10 имеет вид $d = f(\overset{(n)}{c}) = b^{l_1}$ для некоторого целого числа l_1, где $0 \leq l_1 < k$. Пусть автоморфизм φ из теоремы 10, заданный по правилу (24), определяется некоторым натуральным числом m, где $1 \leq m < k$ и НОД $(m, k) = 1$. Тогда (по предложению 9)

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} ret_c \langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}(b)$$

и n-группа $\langle G, f\rangle$ будет полуциклической типа (k, m, l_1).

Если $m = 1$, то делим l_1 на $d =$ НОД $(n-1, k)$ с остатком: $l_1 = dq + r$, где $0 \leq r < d$. Тогда НОД $(l_1, d) =$ НОД $(r, d) = l$, откуда $l \mid d$ и НОД $(l, d) =$ НОД (l_1, d). Согласно теореме 68, полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна полуциклической n-группе типа $(k, 1, l)$, где $l \mid d$.

Если $m \neq 1$, то делим l_1 на $d' =$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$ с остатком: $l_1 = d'q' + r'$, где $0 \leq r' < d'$. Тогда НОД $(l_1, d') =$ НОД $(r', d') = l$, откуда $l \mid d'$ и НОД $(l, d') =$ НОД (l_1, d'). Согласно теореме 69, полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна полуциклической n-агруппе типа (k, m, l), где $l \mid d'$. Теорема доказана.

Разложение конечных полуциклических n-групп. Известно, что не каждая конгруэнция группы G является конгруэнцией n-группы $\langle G, f\rangle$, которая (φ, d)-определена на этой группе с помощью обратной теоремы Глускина-Хоссу (теорема 11). Для того, чтобы конгруэнция группы G была и конгруэнцией n-групп $\langle G, f\rangle$, (φ, d)-определенной на этой группе, требуется выполнимость условия (31) из предложения 16 для нормальной подгруппы H группы G, которая определяет эту конгруэнцию. Оказывается, для полуциклической n-группы $\langle (a), f\rangle$ типа (k, m, l) все конгруэнции исчерпываются конгруэнциями циклической группы (a). Покажем это в следующем предложении.

Предложение 47 *(Предложение 11, [52]-А) Любая конгруэнция циклической группы* (a) *является конгруэнцией в полуциклической n-группе $\langle (a), f\rangle$ типа* (k, m, l).

Доказательство. Согласно предложению 8, $(a) = ret_e\langle (a), f\rangle$, где e — единица группы (a). Бинарная операция $\cdot$ в группе (a) действует по правилу

$$a^s \cdot a^t = f(a^s, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e}, a^t),$$

где n-арная операция f действует по правилу (76) или (77), все зависит от типа полуциклической n-группы $\langle (a), f\rangle$. В обоих случаях из определения косого элемента получаем $\bar{e} = a^{-l}$.

Выбираем подгруппу $H = (a^d)$ из группы (a). Так как полуциклическая n-группа типа $(k, 1, l)$ является абелевой, то в ней верно равенство

$$f(e, H, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e}) = H. \tag{83}$$

Докажем это равенство для полуциклической n-группы типа (k, m, l), где $m \neq 1$. Если элемент $b \in f(e, H, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e})$, то для некоторого элемента $h \in H$ верно равенство $b = f(e, h, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e})$, кроме того, полагаем $h = a^{ds}$ для некоторого натурального числа s. По правилу (77) получаем

$$b = a^{0+mds+m^2 0+\ldots+m^{n-2}0-l+l} = a^{mds} \in H.$$

Доказали $f(e, H, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e}) \subseteq H$. Если элемент $b \in H$, то $b = a^{ds}$ для некоторого натурального числа s. Пусть t — решение сравнения $mx \equiv ds \pmod k$, тогда верно равенство $a^{ds} = a^{mt}$, откуда $a^t = a^{-mds} \in H$ и

$$b = a^{mt} = a^{0+mt+m^2 0+\ldots+m^{n-2}0-l+l} = f(e, a^t, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e}) \in f(e, H, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e}).$$

Доказали $H \subseteq f(e, H, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e})$. Итак, для полуциклической n-группы типа (k, m, l), где $m \neq 1$, доказали равенство (83).

Согласно предложению 16, конгруэнция группы (a), определяемая нормальной подгруппой H, является конгруэнцией в n-группе $\langle (a), f\rangle$. Предложение доказано.

Из выше сказанных рассуждений в это параграфе можно сделать вывод, что полуциклическая n-группа являются, в некотором роде, аналогом циклической группы. Многие факты для циклических групп являются верными и для полуциклических n-групп. Например, для каждого натурального делителя t порядка k конечной циклической группы (a) существует фактор группа, которая будет циклической группой $(a(a^t))$ порядка t (смотри, например, теорему 1.58 из [42]). Аналогичный факт верен и для полуциклических n-групп. Докажем это в следующем предложении.

Предложение 48 *(Предложение 12, [52]-А) Для каждого натурального делителя t порядка k полуциклической n-группы типа (k, m, l) существует фактор-n-группа, которая является одноэлементной n-группой при $t = 1$ либо полуциклической n-группой типа (t, m_1, l_1), где m_1 и l_1 — остатки от деления m и l на t соответственно, при $t > 1$.*

Доказательство. Пусть $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-группа типа (k, m, l) и t — натуральный делитель k, т.е. $k = ts$ для некоторого натурального числа s. В циклической группе (a) имеем единственную подгруппу (a^t) порядка s, которая определяет конгруэнцию на n-группе $\langle (a), f\rangle$ в силу предложения 51. При $t = 1$ имеем одноэлементную фактор-n-группу $\langle (a)/(a), f'\rangle$. При $t > 1$ имеем фактор-n-группу $\langle (a)/(a^t), f'\rangle$, где (предварительно делим m и l на t с остатком: $m = tq_1 + m_1$, $l = tq_2 + l_1$, где $0 \le m_1, l_1 < t$)

$$f'(a^{s_1}(a^t), \ldots, a^{s_n}(a^t)) = f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n})(a^t) =$$

$$= a^{s_1+ms_2+\ldots+m^{n-2}s_{n-1}+s_n+l}(a^t) =$$

$$= a^{s_1}(a^t) \cdot a^{ms_2}(a^t) \cdot \ldots \cdot a^{m^{n-2}s_{n-1}}(a^t) \cdot a^{s_n}(a^t) \cdot a^l(a^t) =$$

$$= a^{s_1}(a^t) \cdot a^{(tq_1+m_1)s_2}(a^t) \cdot \ldots \cdot a^{(tq_1+m_1)^{n-2}s_{n-1}}(a^t) \cdot a^{s_n}(a^t) \cdot a^{tq_2+l_1}(a^t) =$$

$$= a^{s_1}(a^t) \cdot a^{m_1s_2}(a^t) \cdot \ldots \cdot a^{m_1^{n-2}s_{n-1}}(a^t) \cdot a^{s_n}(a^t) \cdot a^{l_1}(a^t) =$$

$$= (a(a^t))^{s_1} \cdot (a(a^t))^{m_1s_2} \cdot \ldots \cdot (a(a^t))^{m_1^{n-2}s_{n-1}} \cdot (a(a^t))^{s_n} \cdot (a(a^t))^{l_1} =$$

$$= (a(a^t))^{s_1+m_1s_2+\ldots+m_1^{n-2}s_{n-1}+s_n+l_1}.$$

Если $m = 1$, то $m_1 = 1$ и $\langle (a)/(a^t), f'\rangle$ — полуциклическая n-группа типа $(t, 1, l_1)$ (теорема 67). Если $m \neq 1$, то m_1 взаимно прост с t (следует из взаимной простоты m и k), $l_1m_1 \equiv l_1 \pmod t$ (следует из верности сравнения $lm \equiv l \pmod k$) и показатель m_1 по модулю t делит $n - 1$ (следует из верности сравнения $m^{n-1} \equiv l \pmod k$). Значит, $\langle (a)/(a^t), f'\rangle$ — полуциклическая n-группа типа (t, m_1, l_1) (теорема 67). Предложение доказано.

При сходстве аналогичных фактов для циклических групп и полуциклических n-групп имеются и различия таких фактов для этих алгебр. Например, в конечной циклической группе порядка k для каждого натурального делителя t числа k существует единственная подгруппа порядка t (смотри, например, следствие из теоремы 1.24 в [42]). Однако для полуциклических n-групп это не так. Покажем это на примере.

Пример 4 *(Пример на стр. 68 из [61]-А) В циклической группе (a) 8-го порядка выбираем подгруппу (a^2). Фактор-группа $(a)/(a^2)$ будет циклической группой 2-го порядка. Согласно теореме Поста (теорема 7), множество $G = \{a, a^3, a^5, a^7\}$ с тернарной операцией $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, где $\cdot$ — умножение в группе (a), является тернарной группой. Причем, $(a^3)^{\langle 1\rangle} = a$, $(a^3)^{\langle 2\rangle} = a^7$, $(a^3)^{\langle 3\rangle} = a^5$, т.е. $\langle G, f\rangle$ является циклической n-руппой с порождающим элементом a^3. В этой тернарной группе порядка 4 нет подгрупп второго порядка (нарушена замкнутость тернарной операции f на любом двух элементном подмножестве множества G, проверяется непосредственно).*

Как и в теории групп, конечную n-группу, порядок которой есть степень простого числа, называют примарной. Докажем неразложимость конечной примарной полуциклической n-группы.

Предложение 49 *(Предложение 13, [52]-А) Конечная примарная полуциклическая n-группа не может быть изоморфна прямому произведению каких-нибудь нескольких n-групп.*

Доказательство. От противного. Допустим, что некоторая конечная примарная полуциклическая n-группа изоморфна прямому произведению каких-нибудь нескольких n-групп. Тогда ее ретракт, будучи циклической примарной группой, раскладывается в прямое произведение нескольких групп (согласно теореме 28), что противоречит неразложимости циклической примарной группы. Предложение доказано.

Если же конечная полуциклическая n-группа не является примарной, то ситуация похожа на разложение конечной циклической группы в прямое произведение примарных циклических подгрупп.

Предложение 50 *(Предложение 14, [52]-А) Всякая конечная полуциклическая n-группа изоморфна декартову произведению примарных полуциклических n-групп. Более точно, если $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-группа порядка $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$, p_i — различные простые числа, то*

$$\langle (a), f\rangle \cong \langle (a_1), f_1\rangle \times \langle (a_2), f_2\rangle \times \dots \times \langle (a_t), f_t\rangle, \tag{84}$$

где $\langle (a_i), f_i\rangle$ — полуциклические n-группы порядков $p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, t$.

Доказательство. Циклическая группа (a) раскладывается в прямое произведение своих циклических подгрупп, т.е. $(a) = (a_1)\cdot(a_2)\cdot\ldots\cdot(a_t)$ и $|(a_i)| = p_i^{\alpha_i}$ для $i = 1, 2, \dots, t$. Пусть $a = a_1^{v_1}\cdot a_2^{v_2}\cdot\ldots\cdot a_t^{v_t}$, откуда $a^l = a_1^{lv_1}\cdot a_2^{lv_2}\cdot\ldots\cdot a_t^{lv_t}$ или $a^l = a_1^{l_1}\cdot a_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot a_t^{l_t}$, где l_i — остаток от деления lv_i на $p_i^{\alpha_i}$ для $i = 1, 2, \dots, t$. Полагаем также m_i — остаток от деления m на $p_i^{\alpha_i}$ для $i = 1, 2, \dots, t$. Очевидно, все эти остатки m_i взаимно просты с $p_i^{\alpha_i}$. Докажем верность сравнения $l_i m_i \equiv l_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ для $i = 1, 2, \dots, t$. Так как $lm \equiv l \pmod{k}$, то $lm \equiv l \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, а значит, $lmv_i \equiv lv_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Но из верного сравнения $lv_i \equiv l_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ получаем $lmv_i \equiv ml_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Тогда, по транзитивности сравнения по модулю, будем иметь $lv_i \equiv ml_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Далее, из верного сравнения $m \equiv m_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ получаем $ml_i \equiv l_i m_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Тогда, вновь по транзитивности сравнения по модулю, будем иметь $lv_i \equiv l_i m_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Но $lv_i \equiv l_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, значит, $l_i m_i \equiv l_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ (опять использовали транзитивность сравнения по модулю). Докажем теперь, что показатель числа m_i по модулю $p_i^{\alpha_i}$ делит $n-1$ для $i = 1, 2, \dots, t$. Так как показатель числа m по модулю k делит $n-1$, то верно сравнение $m^{n-1} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Из верного сравнения $m \equiv m_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ получаем $m^{n-1} \equiv m_i^{n-1} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Тогда, по транзитивности сравнения по модулю, будем иметь $m_i^{n-1} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Итак, согласно теореме 67, для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, t$ на циклической группе (a_i) порядка $p_i^{\alpha_i}$ определяется полуциклическая n-группа $\langle (a_i), f_i\rangle$ типа $(p_i^{\alpha_i}, m_i, l_i)$.

Заметим, что ретрактом декартова произведения (84) будет внешнее прямое произведение циклических групп $(a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_t)$ (согласно теореме 28), которое изоморфно циклической группе (a), являющейся ретрактом полуциклической n-группы $\langle (a), f\rangle$. Имеем групповой изоморфизм $\sigma : (a) \to (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_t)$, действующий по правилу $\sigma(a^s) = \sigma(a_1^{sv_1} \cdot a_2^{sv_2} \cdot \ldots \cdot a_t^{sv_t}) = (a_1^{sv_1}, a_2^{sv_2}, \dots, a_t^{sv_t})$. Докажем, что изоморфизм σ и единица 1 группы (a) удовлетворяют условиям следствия 32. Так как $a^l = a_1^{lv_1} \cdot a_2^{lv_2} \cdot \ldots \cdot a_t^{lv_t}$ и $lv_i \equiv l_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ для $i = 1, 2, \dots, t$, то $\sigma(a^l) = (a_1^{l_1}, a_2^{l_2}, \dots, a_t^{l_t})$, т.е. первое условие следствия 32 выполнено. Далее, так как $msv_i \equiv m_i sv_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ для $i = 1, 2, \dots, t$, где $0 \le s < k$, то

$$\sigma(a^{ms}) = \sigma(a_1^{msv_1} \cdot a_2^{msv_2} \cdot \ldots \cdot a_t^{msv_t}) = (a_1^{m_1 sv_1}, a_2^{m_2 sv_2}, \dots, a_t^{m_t sv_t}),$$

т.е. второе условие следствия 32 выполнено. Итак, изоморфизм σ и единица группы (a) удовлетворяют условиям следствия 32, а значит, по этому следствию σ будет изоморфизмом из полуциклической n-группы $\langle(a), f\rangle$ в декартово произведение (84). Предложение доказано.

Среди полуциклических n-групп типа (k, m, l) фиксированного порядка k имеется одна циклическая, а именно полуциклическая n-группа типа $(k, 1, 1)$. А значит, имеем разложение циклической n-группы:

Следствие 50 *(Следствие 4, [52]-A) Всякая конечная циклическая n-группа изоморфна прямому произведению примарных неразложимых циклических n-групп. Более точно, если $\langle(a), f\rangle$ - циклическая n-группа порядка k (полуциклическая типа $(k, 1, 1)$), где $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$, p_i — различные простые числа, то*

$$\langle(a), f\rangle \;\cong\; \langle(a_1), f_1\rangle \times \langle(a_2), f_2\rangle \times \ldots \times \langle(a_t), f_t\rangle, \tag{85}$$

где $\langle(a_i), f_i\rangle$ — циклическая n-группа порядка $p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Доказательство. Согласно доказательству предложения 50, каждый множитель $\langle(a_i), f_i\rangle$ из правой части изоморфизма (85) будет полуциклической n-группой типа $(p_i^{\alpha_i}, 1, v_i)$, где $a = a_1^{v_1} \cdot a_2^{v_2} \cdot \ldots \cdot a_t^{v_t}$. Причем, $a_i = a^{\frac{k}{p_i^{\alpha_i}}}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Докажем, что $a_i^{v_i}$ порождает циклическую подгруппу (a_i). Действительно, если $a_i^s \in (a_i)$, то $a_i^s = (a^{\frac{k}{p_i^{\alpha_i}}})^s = (a_1^{v_1} \cdot a_2^{v_2} \cdot \ldots \cdot a_t^{v_t})^{s\frac{k}{p_i^{\alpha_i}}} = (a_i^{v_i})^{s\frac{k}{p_i^{\alpha_i}}}$. Значит, целое число v_i взаимно просто с $p_i^{\alpha_i}$. Откуда НОД $(v_i, n-1, p_i^{\alpha_i}) = 1$, а тогда, согласно предложению 52, n-группа $\langle(a_i), f_i\rangle$ будет циклической. И так для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, t$. Следствие доказано.

Докажем теперь единственность декартова произведения примарных полуциклических n-групп в изоморфизме (84).

Теорема 71 *Если полуциклическая n-группа $\langle(a), f\rangle$ типа (k, m, l), где $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$, p_i — различные простые числа, изоморфна двум декартовым произведениям: (84) и*

$$\langle(a), f\rangle \cong \langle(b_1, f_1'\rangle \times \langle(b_2, f_2'\rangle \times \ldots \times \langle(b_t, f_t\rangle, \tag{86}$$

где $\langle(a_i), f_i\rangle$ и $\langle(b_i), f_i'\rangle$ — полуциклические n-группы соответственно типов $(p_i^{\alpha_i}, m_i, l_i)$ и $(p_i^{\alpha_i}, m_i', l_i')$, $i = 1, 2, \ldots, t$, то $\langle(a_i), f_i\rangle \cong \langle(b_i), f_i'\rangle$ для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, t$.

Доказательство. Ретрактами декартовых произведений из (84) и (86) будут внешние прямые произведения циклических групп $(a_1) \times (a_2) \times \ldots \times (a_t)$ и $(b_1) \times (b_2) \times \ldots \times (b_t)$ соответственно (согласно теореме 28). В силу изморфизма этих декартовых произведений, согласно следствию 32, найдутся изоморфизм σ из $(a_1)\times(a_2)\times\ldots\times(a_t)$ в $(b_1)\times(b_2)\times\ldots\times(b_t)$ и элемент $(b_1^{u_1}, b_2^{u_2}, \ldots, b_t^{u_t})$ из $(b_1) \times (b_2) \times \ldots \times (b_t)$ такие, что верно условие

$$\sigma((a_1^{l_1}, a_2^{l_2}, \ldots, a_t^{l_t})) = (b_1^{\sum_{i=0}^{n-2}(m_1')^i u_1 + l_1'}, b_2^{\sum_{i=0}^{n-2}(m_2')^i u_2 + l_2'}, \ldots, b_t^{\sum_{i=0}^{n-2}(m_t')^i u_t + l_t'}). \tag{87}$$

В силу единственности разложения циклической группы (a) в прямое произведение примарных циклических подгрупп изоморфизм σ определяет изоморфизмы $\sigma_i : (a_i) \to (b_i)$ для всех индексов $i = 1, 2, \ldots, t$ как ограничения σ на подгруппы (a_i). А значит, $\sigma_i(a_i^{l_i}) = b_i^{\sum_{j=0}^{n-2}(m_i')^j u_i + l_i'}$. С другой стороны, $\sigma_i(a_i) = b_i^{w_i}$ для некоторого целого числа w_i, взаимно простого с p_i и $0 \le w_i < p_i^{\alpha_i}$. Тогда $\sigma_i(a_i^{l_i}) = b_i^{l_i w_i}$. Итак, $\sum_{j=0}^{n-2}(m_i')^j u_i + l_i' \equiv l_i w_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ или $(\sum_{j=0}^{n-2}(m_i')^j) u_i \equiv l_i w_i - l_i' \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, значит, $l_i w_i - l_i'$ будет делится на НОД $(\sum_{j=0}^{n-2}(m_i')^j, p_i^{\alpha_i})$. В дальнейшем нам понадобится

Лемма 9 *Если $ab \equiv c \pmod m$ и b взаимно просто с m, то НОД $(a,m) =$ НОД (c,m).*

Доказательство этой леммы ведется непосредственной проверкой (смотри лемма 1, [52]-A). Тогда, согласно этой лемме,

$$\text{НОД } (l_i, \sum_{j=0}^{n-2} (m_i')^j, p_i^{\alpha_i}) = \text{НОД } (l_i', \sum_{j=0}^{n-2} (m_i')^j, p_i^{\alpha_i}).$$

Тогда, согласно теореме 68, если $m_i' = 1$, или теореме 69, если $m_i' \neq 1$, имеем изоморфизм $\langle (a_i), f_i \rangle \cong \langle (b_i), f_i' \rangle$ для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, t$. Предложение доказано.

Из последней теоремы вытекает единственность декартова произведения примарных циклических n-групп в изоморфизме (85), то есть верно

Следствие 51 *(Следствие 2, [78]-A) Если циклическая n-группа $\langle (a), f \rangle$ порядка k, где $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$, p_i — различные простые числа, изоморфна двум декартовым произведениям: (85) и*

$$\langle (a), f \rangle \cong \langle (b_1, f_1' \rangle \times \langle (b_2, f_2' \rangle \times \ldots \times \langle (b_t, f_t \rangle, \tag{88}$$

где $\langle (a_i), f_i \rangle$ и $\langle (b_i), f_i' \rangle$ — циклические n-группы одинакового порядка $p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$, то $\langle (a_i), f_i \rangle \cong \langle (b_i), f_i' \rangle$ для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, t$.

Цикличность для конечных полуциклических n-групп. В начале этого параграфа уже отмечалось, что любая циклическая n-группа является полуциклической. Обратно неверно. Следующая теорема является признаком цикличности для конечных полуциклических n-групп. Заметим, что искать циклические n-группы среди конечных полуциклических n-групп типа (k, m, l) надо только для $m = 1$.

Предложение 51 *(Предложение 4, [52]-A) Полуциклическая n-группа типа $(k, 1, l)$ является циклической тогда и только тогда, когда найдется целое число r из неотрицательной наименьшей приведенной системы вычетов по модулю k такое, что $l - r$ делится на НОД $(n-1, k)$. Причем, для каждого найденного целого числа r эта циклическая n-группа $\langle (a), f \rangle$ порождается любым элементом a^s, где s — решение сравнения $x(n-1) \equiv r - l \pmod k$.*

Доказательство. Пусть полуциклическая n-группа $\langle (a), f \rangle$ типа $(k, 1, l)$ является циклической с порождающим элементом a^s. Делим $s(n-1)+l$ на k с остатком: $s(n-1)+l = kq+r$, $0 \leq r < k$. Тогда $s(n-1) \equiv r-l \pmod k$, а значит, $r-l$ делится на НОД $(n-1, k)$. Докажем взаимную простоту чисел r и k. Если НОД $(r, k) = d$, то $k = dk_1$, $r = dr_1$ для некоторых натуральных чисел k_1 и r_1, и (используем определение n-арной степени и равенство (76))

$$(a^s)^{\langle k_1 \rangle} = f_{(k_1)}(\overset{(k_1(n-1)+1)}{a^s}) = a^{sk_1(n-1)+s+k_1 l} = a^{k_1(s(n-1)+l)} a^s =$$

$$= a^{k_1(r+kq)} a^s = a^{k_1 r_1 d} a^s = (a^k)^{r_1} a^s = a^s.$$

Но n-арный порядок элемента a^s равен k. Значит, по следствию 18 имеем делимость $k \mid k_1$, а тогда $k_1 = k$, $d = 1$, т.е. целые числа r и k взаимно просты.

Обратно, пусть $l-r$ делится на НОД $(n-1, k)$ и r взят из неотрицательной наименьшей приведенной системы вычетов по модулю k. Тогда сравнение $x(n-1) \equiv r-l \pmod k$ имеет решение. Пусть это решение будет s $(0 \leq s < k)$, т.е. $s(n-1)+l = kq + r$ для некоторого целого числа q. Докажем, что элемент a^s порождает полуциклическую n-группу $\langle (a), f\rangle$. Действительно, для любого элемента $a^m \in (a)$ пусть t — решение сравнения $x(s(n-1)+l) \equiv m - s \pmod k$ (НОД $(s(n-1)+l, k)$ = НОД $(r,k) = 1$). Тогда, используя определение n-арной степени и равенство (76), получим

$$(a^s)^{\langle t\rangle} = f_{(t)}(\overset{(t(n-1)+1)}{a^s}) = a^{st(n-1)+s+tl} = a^{t(s(n-1)+l)+s} = a^m.$$

Предложение доказано.

Следствие 52 *(Следствие 1, [52]-A) Если натуральные числа $n-1$ и k взаимно просты, то полуциклическая n-группа типа $< k, 1, l >$ будет циклической при любом целом числе l, где $0 \leq l < k$.*

Доказательство. Если НОД $(n-1, k) = 1$, то для $r = 1$ и любого целого числа l из целочисленного интервала $[0, k-1]$ имеем делимость $l - r$ на НОД $(n-1,k)$, а значит, (согласно предложению 51) полуциклическая n-группа типа $< k, 1, l >$ будет циклической. Следствие доказано.

Следствие 53 *Полуциклическая n-группа $\langle (a), f\rangle$ типа $(k, 1, 1)$ является циклической с порождающим элементом e, где e — единица циклической группы (a).*

Доказательство. Для $r = 1$ и $l = 1$ имеем делимость $l - r$ на НОД $(n-1,k)$, а значит, (согласно предложению 51) полуциклическая n-группа $\langle (a), f\rangle$ типа $< k, 1, 1 >$ будет циклической и порождается элементом $a^0 = e$, где 0 — решение сравнения $x(n-1) \equiv 0 \pmod k$. Следствие доказано.

Докажем другой признак цикличности для конечных полуциклических n-групп типа $(k, 1, l)$.

Предложение 52 *(Следствие 2, [52]-A) Полуциклическая n-группа типа $(k, 1, l)$ является циклической тогда и только тогда, когда*

$$\textit{НОД}\ (l, n-1, k) = 1.$$

Доказательство. Пусть полуциклическая n-группа $\langle (a), f\rangle$ типа $(k, 1, l)$ является циклической. Тогда, согласно предложению 51, найдется число r из неотрицательной наименьшей приведенной системы вычетов по модулю k такое, что $l - r$ делится на НОД $(n-1,k)$. Полагаем НОД $(n-1,k) = d$. Предположим, что НОД $(l, n-1, k) = d' > 1$. Тогда $l = l_1 d'$, $d = d_1 d'$ и $r - l = dt$ для некоторых целых чисел l_1, d_1 и t. А значит,

$$r = dt + l = d_1 d' t + l_1 d' = d'(d_1 t + l_1),$$

т.е. $d' \mid r$, $d' \mid k$ и $d' > 1$ — противоречие. Значит, НОД $(l, n-1, k) = 1$.

Обратно, пусть $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-группа типа $(k, 1, l)$ и верно равенство НОД $(l, n-1, k) = 1$. Тогда, согласно теореме 68, $\langle (a), f\rangle$ изоморфна полуциклической n-группе $\langle (a), f_1\rangle$ типа $(k, 1, 1)$, которая будет циклической (следствие 53). Значит, $\langle (a), f\rangle$ — циклическая n-группа. Предложение доказано.

Заметим, что полуциклическая n-группа типа $(k, 1, 0)$ (которая изоморфна полуциклической n-группе типа $(k, 1, \text{НОД}\ (n-1, k))$ согласно теореме 68) является производной от циклической группы (a). Следующее следствие является признаком цикличности для конечных n-групп, которые являются производными от циклических групп.

Следствие 54 *(Следствие 3, [52]-А) Любая n-группа, являющаяся производной от конечной циклической группы порядка k, будет циклической тогда и только тогда, когда k и $n-1$ взаимно просты. Причем эта циклическая n-группа порождается теми же элементами, что и циклическая группа.*

Доказательство. Пусть n-группа $\langle (a), f\rangle$ является производной от конечной циклической группы (a) порядка k. Тогда $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-группа типа $(k, 1, 0)$.

Если $\langle (a), f\rangle$ является циклической n-группой, то, согласно предложению 52, НОД $(0, n-1, k) = 1$, но НОД $(0, n-1, k) =$ НОД $(n-1, k)$, значит, НОД $(n-1, k) = 1$. Обратно аналогично.

Переходим к доказательству второй части следствия. Пусть $\langle (a), f\rangle$ является циклической n-группой. Согласно предложению 51, найдется число r из неотрицательной наименьшей приведенной системы вычетов по модулю k такое, что $-r$ делится на НОД $(n-1, k) = 1$, значит, $r = 1$, и циклическая n-группа $\langle (a), f\rangle$ порождается любым элементом a^s, где s — решение сравнения $x(n-1) \equiv 1 \pmod k$. Но k и $n-1$ взаимно просты, значит, k и s взаимно просты, т.е. циклическая n-группа $\langle (a), f\rangle$ порождается теми же элементами, что и циклическая группа (a). Следствие доказано.

Идемпотентность для конечных полуциклических n-групп. Если в n-группе каждый элемент является идемпотентом, то ее называют идемпотентной n-группой. Примером идемпотентной n-группы служит тернарная группа $\langle B_n, f\rangle$ всех отражений правильного n-угольника.

Следующее предложение является признаком идемпотентности для производных n-групп от конечных циклических групп.

Предложение 53 *(Предложение 5, [52]-А) Производная n-группа от конечной циклической группы порядка k будет идемпотентной тогда и только тогда, когда k делит $n-1$.*

Доказательство. Пусть n-группа $\langle (a), f\rangle$ является производной от конечной циклической группы (a) порядка k.

Если $\langle (a), f\rangle$ будет идемпотентной n-группой, то $(a^s)^{\langle 1\rangle} = a^s$ для любого $s = 0, 1, \ldots, k-1$, т.е. $a^{sn} = a^s$, а значит, $sn \equiv s \pmod k$, откуда $k \mid s(n-1)$. Для $s = 1$ имеем $k \mid (n-1)$.

Обратно, пусть $(n-1)$ кратно k, тогда для любого $s = 0, 1, \ldots, k-1$ имеем делимость $s(n-1)$ на k, т.е. $sn \equiv s \pmod k$, а значит, $(a^s)^{\langle 1\rangle} = (a^s)^n = a^s$. Предложение доказано.

Отметим, что для всех l из целочисленного интервала $[0, k-1]$, которые отличны от нуля, среди полуциклических n-групп типа $(k, 1, l)$ нет идемпотентных n-групп, так как для единицы e группы (a) имеем $e^{\langle 1\rangle} = a^l \neq e$.

Следующее предложение является признаком идемпотентности для полуциклических n-групп типа (k, m, l) при $m \neq 1$.

Предложение 54 *(Предложение 6, [52]-А) Полуциклическая n-группа типа (k, m, l) при $m \neq 1$ будет идемпотентной тогда и только тогда, когда $l = 0$ и $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ делится на k.*

Доказательство. Если полуциклическая n-группа $\langle (a), f\rangle$ типа (k, m, l) при $m \neq 1$ будет идемпотентной, то для любого элемента $a^s \in (a)$ имеем $(a^s)^{\langle 1\rangle} = a^s$ или $a^{s(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}+1)+l} = a^s$ (использовали правило (77) и равенство $1 + m + m^2 + \ldots + m^{n-2} = \frac{m^{n-1}-1}{m-1}$), а значит,

$s(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}+1)+l \equiv s \pmod{k}$, откуда $s\frac{m^{n-1}-1}{m-1} \equiv -l \pmod{k}$. Для $s=1$ и $s=2$ имеем $\frac{m^{n-1}-1}{m-1} \equiv -l \pmod{k}$ и $2\frac{m^{n-1}-1}{m-1} \equiv -l \pmod{k}$. Из последнего сравнения вычитаем предпоследнее сравнение, получим $\frac{m^{n-1}-1}{m-1} \equiv 0 \pmod{k}$, т.е. $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ делится на k, а тогда и $l=0$.

Обратно, пусть $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-группа типа $(k, m, 0)$, где $m \neq 1$ и $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ делится на k. Тогда для любого $s = 0, 1, \ldots, k-1$ имеем делимость $s\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на k, т.е. $s(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}+1) \equiv s \pmod{k}$, а значит, для любого элемента $a^s \in (a)$ имеем $(a^s)^{\langle 1\rangle} = a^s$. Предложение доказано.

3.4 Бесконечные полуциклические n-группы

Рассмотрим теперь бесконечную циклическую группу (a), в которой всего два автоморфизма: тождественный $1_{(a)}$ и φ, где $\varphi(a^s) = a^{-s}$ для любого элемента $a^s \in (a)$. Для $1_{(a)}$ элемент d из обратной теоремы Глускина-Хоссу (теорема 11) может быть любым из группы (a). Тогда, согласно этой теореме, алгебра $\langle (a), f\rangle$ с операцией (76), где l — любое целое число, является полуциклической n-группой. Назовем такую n-группу полуциклической типа $(\infty, 1, l)$. Следующее предложение является критерием изоморфизма бесконечных полуциклических n-групп типа $(\infty, 1, l)$.

Предложение 55 *(Предложение 7, [52]-А) Полуциклические n-группы типов $(\infty, 1, l_1)$ и $(\infty, 1, l_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$l_1 \equiv l_2 \pmod{n-1} \ \ \textit{либо} \ \ l_1 \equiv -l_2 \pmod{n-1}. \tag{89}$$

Доказательство. Пусть имеем две полуциклические n-группы $\langle (a), f_1\rangle$ и $\langle (a), f_2\rangle$ типов $(\infty, 1, l_1)$ и $(\infty, 1, l_2)$ соответственно.

Если n-группы $\langle (a), f_1\rangle$ и $\langle (a), f_2\rangle$ изоморфны, то, согласно предложению 8, имеем $(a) = ret_e\langle (a), f_1\rangle = ret_e\langle (a), f_2\rangle$, а тогда, используя критерий изоморфизма абелевых n-групп (следствие 28), найдется в циклической группе (a) элемент a^v такой, что

$$1_{(a)}(a^{l_1}) = a^{(n-1)v+l_2} \ \ \text{или} \ \ \varphi(a^{l_1}) = a^{(n-1)v+l_2}, \tag{90}$$

или, что тоже самое, $a^{l_1} = a^{(n-1)v+l_2}$ или $a^{-l_1} = a^{(n-1)v+l_2}$, тогда

$$l_1 = (n-1)v + l_2 \ \ \text{или} \ \ -l_1 = (n-1)v + l_2, \tag{91}$$

значит, верно условие (89).

Обратно, если верно условие (89), то для некоторого целого числа v верно условие (91), а значит, нашелся элемент a^v такой, что верно условие (90), откуда, согласно критерию изоморфизма абелевых n-групп (следствие 28), имеем изоморфизм n-групп $\langle (a), f_1\rangle$ и $\langle (a), f_2\rangle$. Предложение доказано.

Аналогичное построение n-групп на аддитивной группе кольца целых чисел имеется в [24]. Очевидно, n-группы типа $(\infty, 1, l)$ будут абелевыми, среди которых есть и циклические. Следующее предложение является критерием цикличности для полуциклических n-групп типа $(\infty, 1, l)$.

Предложение 56 *(Предложение 8, [52]-А) Полуциклическая n-группа типа $(\infty, 1, l)$ является циклической тогда и только тогда, когда*

$$l \equiv 1 \pmod{n-1} \ \ \textit{либо} \ \ l \equiv -1 \pmod{n-1}.$$

Причем, циклическая n-группа $\langle (a), f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ порождается элементом $a^{\frac{1-l}{n-1}}$ в первом случае и $a^{\frac{-1-l}{n-1}}$ во втором случае.

Доказательство. Пусть элемент a^s порождает бесконечную циклическую n-группу $\langle (a), f\rangle$, где n-арная операция f действует по правилу (76). Тогда для любого элемента $a^q \in (a)$ имеем $a^q = (a^s)^{\langle t\rangle}$ для некоторого целого числа t. Если $t \geq 0$, то, согласно определению неотрицательной n-арной степени (смотри начало параграфа 1.4), получим $a^q = a^{t(s(n-1)+l)+s}$, если же $t < 0$, то, согласно определению отрицательной n-арной степени (смотри также начало параграфа 1.4), получим равенство $f_{(-t)}(\overset{(-t(n-1))}{a^s}, a^q) = a^s$ или, что то же самое (с учетом правила (76)), $a^{-t(s(n-1)+l)+q} = a^s$, откуда будем иметь такое же равенство $a^q = a^{t(s(n-1)+l)+s}$, как и для $t \geq 0$. Тогда, в силу бесконечности циклической n-группы $\langle (a), f\rangle$, верно равенство $q - s = t(s(n-1)+l)$, т.е. $q - s$ делится на $s(n-1)+l$. Это возможно для любого целого числа q только при $s(n-1)+l = \pm 1$. Откуда либо $l-1$ делится на $n-1$ и $s = \frac{1-l}{n-1}$, либо $l+1$ делится на $n-1$ и $s = \frac{-1-l}{n-1}$.

Обратно, выбираем любой элемент a^q из бесконечной полуциклической n-группы $\langle (a), f\rangle$ с операцией (76) при условии, что $l-1$ либо $l+1$ делится на $n-1$. Если $s = \frac{1-l}{n-1}$ ($l-1$ делится на $n-1$ и верно равенство $s(n-1)+l = 1$), то, согласно определению n-арной степени, получим

$$a^q = a^{(q-s)+s} = a^{(q-s)(s(n-1)+l)+s} = (a^s)^{\langle q-s\rangle}.$$

Если $s = \frac{-1-l}{n-1}$ ($l+1$ делится на $n-1$ и верно равенство $s(n-1)+l = -1$), то, согласно определению n-арной степени

$$a^q = a^{(q-s)+s} = a^{(s-q)(s(n-1)+l)+s} = (a^s)^{\langle s-q\rangle}.$$

Мы показали, что a^s в обоих случаях порождает циклическую n-группу $\langle (a), f\rangle$. Предложение доказано.

Для не тождественного автоморфизма φ бесконечной циклической группы (a) равенство (23) верно для любого элемента $x = a^s \in (a)$ только при нечетных n, причем элемент d из обратной теоремы Глускина-Хоссу (теорема 10) может быть только единицей группы (a). Из обратной теоремы Глускина-Хоссу мы получили в следующем предложении строение не абелевой бесконечной полуциклической n-группы.

Предложение 57 *(Предложение 9, [52]-А) На бесконечной циклической группе (a) можно задать полуциклическую n-группу $\langle (a), f\rangle$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с n-арной операцией*

$$f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) = a^{s_1 - s_2 + \ldots + s_{2k-1} - s_{2k} + s_{2k+1}}. \tag{92}$$

Назовем n-группу из предложения 57 полуциклической типа $(\infty, -1, 0)$. Для таких n-групп справедливо, очевидно,

Предложение 58 *(Предложение 10, [52]-А) Любая полуциклическая n-группа типа $<\infty, -1, 0>$ является идемпотентной.*

Покажем теперь, что изученные нами полуциклические n-группы типов $(\infty, 1, l)$ и $(\infty, -1, 0)$ исчерпывают класс всех бесконечных полуциклических n-групп.

Теорема 72 *(Теорема 3, [52]-А) Любая бесконечная полуциклическая n-груп-па будет изоморфна полуциклической n-группе типа $<\infty, -1, 0>$ либо типа $(\infty, 1, l)$, где $0 \leq l \leq \frac{n-1}{2}$.*

Доказательство. На бесконечной полуциклической n-группе $\langle G, f\rangle$ строим циклическую группу $= ret_c\langle G, f\rangle$ (смотри теорему 10), пусть она порождается элементом b. Для элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ из теоремы 10 полагаем $d = b^l$ для некоторого целого числа l. Автоморфизм φ из теоремы 10 либо будет тождественным $1_{(b)}$, либо действует по правилу $\varphi_1(b^s) = b^{-s}$ для любого элемента $b^s \in (b)$. Если $\varphi = 1_{(b)}$, то (по предложению 9)

$$\langle G, f\rangle = der_{1_{(b)},d}(b) = der_{1_{(b)},d}ret_c\langle G, f\rangle$$

будет полуциклической n-группой типа $(\infty, 1, l)$.

Делим l на $n-1$ с остатком: $l = (n-1)q+r$, где $0 \leq r < n-1$. Ясно, что $l \equiv r \pmod{n-1}$. Если $0 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$, то, согласно предложению 55, $\langle G, f\rangle$ будет изоморфна полуциклической n-группе типа $(\infty, 1, r)$. Если же $\frac{n-1}{2} < r < n-1$, то число $r_1 = n-1-r$ удовлетворяет условиям $0 \leq r_1 \leq \frac{n-1}{2}$ и $l \equiv -r_1 \pmod{n-1}$, тогда, согласно предложению 55, $\langle G, f\rangle$ будет изоморфна полуциклической n-группе типа $(\infty, 1, r_1)$.

Пусть теперь автоморфизм φ не является тождественным, тогда (по предложению 9) $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}(b) = der_{\varphi,d}ret_c\langle G, f\rangle$, а согласно предложению 57, $\langle G, f\rangle$ будет полуциклической n-группой типа $(\infty, -1, 0)$. Теорема доказана.

Обозначим через $[q]$ целую часть рационального числа q.

Следствие 55 *Количество различных (с точностью до изоморфизма) бесконечных абелевых полуциклических n-групп равно* $[\frac{n-1}{2}] + 1$.

Известно, что конечные примарные полуциклические n-группы являются неразложимыми (смотри предложение 49). К таковым относятся и бесконечные абелевы полуциклические n-группы, то есть верна

Теорема 73 *(Теорема 2, [**?**]-А) Бесконечная абелева полуциклическая n-группа неразложима.*

Доказательство. От противного. Пусть бесконечная абелева полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ является разложимой, т.е. $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle$ двух абелевых n-групп. Тогда

$$ret_c\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle = ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \times ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle,$$

где $c = (c_1, c_2)$ (см. теорему 28). По следствию 28 имеем групповой изоморфизм $ret_g\langle G, f\rangle \cong ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \oplus ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ для некоторого элемента $g \in G$, что противоречит неразложимости бесконечной циклической группы $ret_g\langle G, f\rangle$. Теорема доказана.

3.5 Коциклические n-группы

Большое влияние хорошо развитой теории групп на развитие теории n-групп позволяет находить и изучать новые типы n-групп, бинарные аналоги которых играют фундаментальную роль в теории групп. К важнейшим типам абелевых групп Л. Фукс в своей книге [40] относит коциклические группы. Здесь обобщается это групповое понятие и определяется коциклическая n-группа. Используя взаимосвязь между абелевыми группами и абелевыми n-группами и опираясь на известные факты из теории групп, в работе доказан признак коцикличности для абелевых n-групп, установлена коцикличность конечной примарной полуциклической n-группы (количество таких n-групп фиксированного порядка p^k равно количеству делителей числа НОД $(n-1, p^k)$) и n-группы, определяемой квазициклической группой (такая n-группа, как и в группах, одна для заданного простого числа). Более того, доказано, что эти n-группы исчерпывают все коциклические n-группы с точностью до изоморфизма.

В теории абелевых групп активно используются коциклические группы. Абелеву группу G называют коциклической, если существует такой элемент $v \in G$, что всякий гомоморфизм σ из G в абелеву группу B, где $v \notin Ker\ \sigma$, является мономорфизмом (смотри, например, [40], стр. 25). Для n-групп определим аналог коциклической группы. Назовем абелеву n-группу $\langle G, f\rangle$ коциклической, если существует такая пара элементов $c_1, c_2 \in G$, что всякий гомоморфизм ψ из $\langle G, f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle B, f_1\rangle$, где $(c_1, c_2) \notin Ker\ \psi$, является мономорфизмом. По аналогии с группами, пару элементов (c_1, c_2) из определения коциклической n-группы назовем кообразующей n-группы $\langle G, f\rangle$. Продолжая аналогию с группами, докажем признак коцикличности абелевой n-группы.

Теорема 74 *Абелева n-группа является коциклической тогда и только тогда, когда найдется наименьшая не диагональная конгруэнция этой n-группы. Причем, каждая пара элементов из этой наименьшей не диагональной конгруэнции является кообразующей n-группы.*

Доказательство. Необходимость. Так как всякая конгруэнция коциклической n-группы является ядром некоторого гомоморфизма из этой n-группы, то кообразующая пара n-группы должна лежать в каждой не диагональной конгруэнции. Значит, пересечение всех не диагональных конгруэнций коциклической n-группы является не диагональной конгруэнцией. Это пересечение и есть наименьшая не диагональная конгруэнция коциклической n-группы.

Достаточность. Пусть в абелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ нашлась наименьшая не диагональная конгруэнция. Выбираем любую пару (c_1, c_2) из этой конгруэнции. Если гомоморфизм ψ из $\langle G, f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle B, f_1\rangle$ удовлетворяет условию $(c_1, c_2) \notin Ker\ \psi$, то его ядро $Ker\ \psi$ — диагональная конгруэнция, а значит, ψ является мономорфизмом. Теорема доказана.

Докажем еще один признак коцикличности абелевой n-группы.

Теорема 75 *(Предложение 2, [67]-А) Абелева n-группа является коциклической тогда и только тогда, когда ее ретракт является коциклической группой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle G, f\rangle$ — коциклическая n-группа и c_1, c_2 — найденная пара элементов из условия коцикличности $\langle G, f\rangle$. Строим ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$. Выбираем гомоморфизм σ из G в абелеву группу B такой, что $v = c_1 - c_2 \notin Ker\ \sigma$. Для произвольно заданного элемента $u \in B$ находим $d' = \sigma(d) - (n-1)u$, где $d = f(\overset{(n)}{c})$. Строим абелеву n-группу $\langle B, f'\rangle = der_{1_B, d'}B$. Из предложения 9 следует $\langle G, f\rangle = der_{1_G, d}G$, тогда (по теореме 12), найдется гомоморфизм ψ из n-группы $\langle G, f\rangle$ в n-группу $\langle B, f'\rangle$, действующий по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого элемента $x \in G$. Так как $\sigma(c_1) \neq \sigma(c_2)$, то $\psi(c_1) \neq \psi(c_2)$, а значит, согласно условию необходимости, ψ является мономорфизмом, тогда и σ — мономорфизм. Итак, G — коциклическая группа.

Достаточность. Пусть ретракт $G = red_c\langle G, f\rangle$ будет коциклической группой, где $\langle G, f\rangle$ — абелева n-группа, и v — найденный элемент из условия коцикличности группы G.

Выбираем гомоморфизм ψ из $\langle G, f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle B, f'\rangle$ такой, что $(v, c) \notin Ker\ \psi$. Для произвольно выбранного элемента $c' \in B$ строим группу $B = ret_{c'}\langle B, f'\rangle$. Из предложения 9 имеем $\langle G, f\rangle = der_{1_G,d}G$ и $\langle B, f'\rangle = der_{1_B,d'}B$, где $d = f(\overset{(n)}{c})$, $d' = f'(\overset{(n)}{c'})$. Согласно теореме 12, найдутся групповой гомоморфизм σ из G в B и элемент $u \in B$ такие, что, $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого элемента $x \in G$. Так как $\psi(v) \neq \psi(c)$, то $\sigma(v) \neq \sigma(c)$, где $\sigma(c)$ — нуль в группе B, а значит, согласно условию достаточности, σ является мономорфизмом, тогда и ψ — мономорфизм. Итак, $\langle G, f\rangle$ — коциклическая n-группа. Теорема доказана.

В теории абелевых групп имеется прозрачная квалификация коциклических групп — это в точности примарние циклические и квазициклические группы (см., например, [40], теорема 3.1). Аналогичное описание коциклических n-групп доказано в следующем факте.

Следствие 56 *(Теорема 2, [67]-A) Абелева n-группа будет коциклической тогда и только тогда, когда она изоморфна абелевой полуциклической n-группе $\langle Z_{p^k}, f\rangle = der_{1_{Z_{p^k}},p^t}Z_{p^k}$, где p^t делит НОД $(n-1, p^k)$, p — здесь и дальше простое число, либо абелевой n-группе, 0-производной от квазициклической группы $Z(p^\infty)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle G, f\rangle$ — коциклическая n-группа. Тогда, согласно теореме 75, ее ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$ является коциклической группой. Как было отмечено перед следствием, коциклическая группа изоморфна примарной циклической группе либо квазициклической группе $Z(p^\infty)$. Если σ — изоморфизм из G в конечную циклическую группу A порядка p^k с порождающим элементом a, то, согласно теореме 12, найдется изоморфизм ψ из $\langle G, f\rangle$ в абелеву полуциклическую n-группу $\langle A, f_1\rangle = der_{1_A,la}A$, где $\langle G, f\rangle = der_{1_G,d}G$ (согласно предложению 9), $d = f(\overset{(n)}{c})$, $la = \sigma(d) - (n-1)u$ для произвольно выбранного элемента $u \in A$. Но $\langle A, f_1\rangle$ изоморфна $\langle Z_{p^k}, f_2\rangle = der_{1_{Z_{p^k}}p^t}Z_{p^k}$ (Z_{p^k} — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю p^k), где $p^t \mid$ НОД $(n-1, p^k)$ (смотри теорему 70). Значит, $\langle G, f\rangle$ изоморфна $\langle Z_{p^k}, f_2\rangle$. Если σ — изоморфизм из G в квазициклическую группу $Z(p^\infty)$, то, согласно теореме 12, найдется изоморфизм ψ из $\langle G, f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle Z(p^\infty), f_1\rangle = der_{1_{Z(p^\infty)}0}Z(p^\infty)$, где вновь $\langle G, f\rangle = der_{1_G,d}G$, $\sigma(d) = (n-1)u$, u — решение уравнения $(n-1)x = \sigma(d)$ (это уравнение разрешимо, так как $Z(p^\infty)$ является делимой группой).

Достаточность. Пусть абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна абелевой полуциклической n-группе $\langle Z_{p^k}, f\rangle = der_{1_{Z_{p^k}}p^t}Z_{p^k}$, где $p^t \mid$ НОД $(n-1, p^k)$ (абелевой n-группе $\langle Z(p^\infty), f_1\rangle = der_{1_{Z(p^\infty)}0}Z(p^\infty)$). Для произвольного элемента $c \in G$ имеем ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$. Из предложения 9 имеем $\langle G, f\rangle = der_{1_G,d}G$, где $d = f(\overset{(n)}{c})$. Согласно теореме 12, группа G изоморфна Z_{p^k} (соответственно $Z(p^\infty)$), значит, (по теореме 3.1 из [40]) группа G является коциклической. Тогда (по теореме 75) n-группа $\langle G, f\rangle$ будет коциклической. Следствие доказано.

Из следствия 56 следует, что примарные абелевы полуциклические (т.е. абелевы полуциклические типа $(p^k, 1, p^t)$) n-группы являются коциклическими. К таковым относятся и примарные циклические n-группы, так как они являются абелевыми полуциклическими n-группами типа $(p^k, 1, 1)$.

К неразложимым n-группам относятся коциклические n-группы, т.е. верно

Следствие 57 *Коциклическая n-группа неразложима.*

Доказательство. От противного. Допустим, что коциклическая n-группа изоморфна декартову произведению нескольких n-групп. Тогда изоморфны ретракты коциклической n-группы и этого декартова произведения. Получили разложение ретракта коциклической n-группы в виде прямого произведения нескольких групп (согласно теореме 28) и этот ретракт является коциклической группой (согласно теореме 75), это противоречит неразложимости коциклической группы (смотри, например, [40], следствие 27.4). Следствие доказано.

3.6 m-Полуциклические n-группы

Как уже отмечалось раньше, подгруппа ${}^mG$ группы G^*, как и ее частные случаи — сама группа G^* при $m = 2$ и ее подгруппа G_0 при $m = n$ (смотри параграф 3.3), могут быть использованы при изучении n-групп. Одним из примеров такого использования является критерий m-полуабелевости n-группы (смотри теорему44). Продемонстрируем это также на примере m-полуциклических n-групп, которые мы определим по аналогии с m-полуабеле-выми n-группами, отталкиваясь от критерия m-полуабелевости n-группы.

Пусть $m-1$ делит $n-1$. Назовем n-группу $\langle G, f\rangle$ m-полуциклической, если существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_{m-1} \in G$, что группа ${}^mG$ является циклической с порождающим элементом $\theta_G(a_1 \ldots a_{m-1})$. Последовательность элементов $a_1 \ldots a_{m-1}$ в этом случае называется порождающей для m-полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$.

Так как ${}^2G = G^*$, то, согласно следствию 43, циклические n-группы — это в точности 2-полуциклические n-группы.

Так как ${}^nG = G_0$, то полуциклические n-группы — это в точности n-полуциклические n-группы.

Таким образом, циклические и полуциклические n-группы являются частными случаями m-полуциклических n-групп при $m = 2$ и $m = n$ соответственно.

Имеет место

Предложение 59 *(Предложение 4.1, [85]-А) Справедливы следующие утверждения:*

1) всякая циклическая n-группа является m-полуциклической;

2) всякая m-полуциклическая n-группа является полуциклической;

3) всякая m-полуциклическая n-группа является m-полуабелевой.

Доказательство. 1) Если $\langle G, f\rangle$ — циклическая n-группа с порождающим элементом a, то по теореме 57 группа ${}^mG$ является циклической, порожденной элементом $\theta_G(\underbrace{a \ldots a}_{m-1})$. Тогда, согласно определению, $\langle G, f\rangle$ — m-полуциклическая n-группа, порожденная последовательностью элементов $\underbrace{a \ldots a}_{m-1}$.

2) Следует из включения $G_0 \subseteq^m G$ (смотри теорему 43).

3) Следует из теоремы 44. Предложение доказано.

Сформулируем теперь критерий m-полуцикличности для n-групп.

Теорема 76 *(Теорема 4.1, [85]-А) n-Группа $\langle G, f\rangle$ является конечной (бесконечной) m-полуциклической с порождающей последовательностью элементов $a_1 \ldots a_{m-1}$ тогда и только тогда, когда $k+1$-группа $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$ из замечания 1 параграфа 3.3 является конечной (бесконечной) циклической с порождающим элементом $\theta_G(a_1 \ldots a_{m-1})$.*

Доказательство. Сразу же заметим, что множества G и $G^{(m-1)}$ равномощны. Пусть вначале $\langle G, f\rangle$ — конечная n-группа порядка γ.

Необходимость. Так как $\langle G, f\rangle$ — m-полуциклическая n-группа с порождающей последовательностью элементов $a_1 \dots a_{m-1}$, то $m-1$ делит $n-1$, а группа ${}^mG$ будет циклической с порождающим элементом $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$. Полагая в утверждении 1) леммы 7 $i = 1$, получим

$$G^{(m-1)} = \{\nu^{rk+1} \mid r = 0, 1, \dots, \gamma - 1\}.$$

Для любого индекса $r = 0, 1, \dots, \gamma - 1$ имеем $\nu^{\langle 0\rangle} = \nu$,

$$\nu^{\langle r\rangle} = g_{(r)}(\underbrace{\nu \dots \nu}_{rk+1}) = g_{(r)}(\underbrace{\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})}_{rk+1}) =$$

$$= \theta_G(\underbrace{a_1 \dots a_{m-1}, \dots, a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+1}) = \underbrace{\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})}_{rk+1} =$$

$$= (\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}))^{rk+1} = \nu^{rk+1},$$

то есть

$$\nu^{\langle 0\rangle} = \nu,\ \nu^{\langle 1\rangle} = \nu^{k+1},\ \nu^{\langle 2\rangle} = \nu^{2k+1}, \dots,\ \nu^{\langle \gamma-1\rangle} = \nu^{(\gamma-1)k+1}. \tag{93}$$

В правых частях равенств из (93) стоят степени элемента $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$, порождающего циклическую группу ${}^mG$. А так как порядки всех степеней в правых частях равенств из (93) не превосходят порядка γk группы ${}^mG$, то среди этих степеней нет одинаковых. Но тогда и среди стоящих в левых частях равенств из (93) n-арных степеней элемента $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$ $k+1$-группы $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$ также нет одинаковых элементов. Таким образом, множество

$$G^{(m-1)} = \{\nu,\ \nu^{k+1},\ \nu^{2k+1}, \dots,\ \nu^{(\gamma-1)k+1}\} = \{\nu^{\langle 0\rangle},\ \nu^{\langle 1\rangle},\ \nu^{\langle 2\rangle}, \dots,\ \nu^{\langle \gamma-1\rangle}\}$$

состоит из различных n-арных степеней элемента $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$. Следовательно, $k+1$-группа $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$ является циклической, порожденной элементом $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$.

Достаточность. Так как $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$ — конечная циклическая $k+1$-группа с порождающим элементом $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$, то

$$G^{(m-1)} = \{\nu^{\langle 0\rangle},\ \nu^{\langle 1\rangle},\ \nu^{\langle 2\rangle}, \dots,\ \nu^{\langle \gamma-1\rangle}\},$$

откуда, ввиду (93), вытекает $G^{(m-1)} = \{\nu,\ \nu^{k+1},\ \nu^{2k+1}, \dots,\ \nu^{(\gamma-1)k+1}\}$. Не сложно установить, что если $n = k(m-1)+1$, то для любого элемента u из $G^{(m-1)}$ верны равенства $G^{(i(m-1))} = G^{(m-1)}u^{i-1} = u^{i-1}G^{(m-1)}$, $i = 1, \dots, k$. Тогда получим $G^{(i(m-1))} = G^{(m-1)}\nu^{i-1} = \{\nu^i,\ \nu^{k+i},\ \nu^{2k+i}, \dots,\ \nu^{(\gamma-1)k+i}\}$ для любого индекса $i = 1, \dots, k$. Так как

$$\bigcup_{i=1}^{k}\{\nu^i,\ \nu^{k+i},\ \nu^{2k+i}, \dots,\ \nu^{(\gamma-1)k+i}\} = \{\nu^s \mid s = 1, \dots, \gamma k\},$$

то из предыдущего равенства следует $\bigcup_{i=1}^{k} G^{(i(m-1))} = \{\nu^s \mid s = 1, \dots, \gamma k\}$. Следовательно, группа ${}^mG$ порождается элементом $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$. Соответственно, $\langle G, f\rangle$ будет конечной m-полуциклической n-группой, порожденной последовательностью элементов $a_1 \dots a_{m-1}$.

Пусть теперь $\langle G, f\rangle$ — бесконечная n-группа.

Необходимость. Вновь ${}^mG$ — циклическая группа с порождающим элементом $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$. Полагая в утверждении 2) леммы 7 $i = 1$, получим $G^{(m-1)} = \{\nu^{rk+1} \mid r -$ целое число$\}$. Так же, как и в конечном случае, получаем равенства $\nu^{\langle 0\rangle} = \nu$, $\nu^{\langle 1\rangle} = \nu^{k+1}$, $\nu^{\langle 2\rangle} = \nu^{2k+1}, \dots$, $\nu^{\langle r\rangle} = \nu^{rk+1}, \dots$, то есть $\nu^{\langle r\rangle} = \nu^{rk+1}$ для любого целого числа $r \geq 0$. Для целого числа $r < 0$ n-арная степень $\nu^{\langle r\rangle}$ элемента $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$ является решением уравнения $g_{(-r)}(x, \underbrace{\nu, \dots, \nu}_{-rk}) = \nu$. Тогда последовательно получаем

$$g_{(-r)}(\nu^{\langle r\rangle}, \underbrace{\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}), \dots, \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})}_{-rk}) = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1}),$$

$$\nu^{\langle r\rangle} \underbrace{\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})}_{-rk}) = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1}),$$

$$\nu^{\langle r\rangle} = (\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}))^{rk+1},$$

то есть $\nu^{\langle r\rangle} = \nu^{rk+1}$ для любого целого числа $r < 0$. Таким образом,

$$\nu^{\langle r\rangle} = \nu^{rk+1}, \quad r - \text{целое число}. \tag{94}$$

В правых частях равенств (94) стоят степени элемента $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$, порождающего бесконечную циклическую группу ${}^mG$. Тогда среди стоящих в левых частях равенств из (94) n-арных степеней элемента $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$ нет одинаковых. Таким образом, множество

$$G^{(m-1)} = \{\nu^{rk+1} \mid r - \text{целое число}\} = \{\nu^{\langle r\rangle} \mid r - \text{целое число}\}$$

состоит из различных n-арных степеней элемента $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$. Следовательно, $k+1$-группа $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$ является бесконечной циклической с порождающим элементом $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$.

Достаточность. Так как $\langle G^{(m-1)}, g\rangle$ — бесконечная циклическая $k+1$-группа с порождающим элементом $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$, то $G^{(m-1)} = \{\nu^{\langle r\rangle} \mid r -$ целое число$\}$, откуда, ввиду (94), вытекает $G^{(m-1)} = \{\nu^{rk+1} \mid r -$ целое число$\}$, тогда, используя равенство $G^{(i(m-1))} = G^{(m-1)}u^{i-1} = u^{i-1}G^{(m-1)}$, указанное выше (в достаточности конечного случая), получим $G^{(i(m-1))} = G^{(m-1)}\nu^{i-1} = \{\nu^{rk+i} \mid r -$ целое число$\}$ для любого индекса $i = 1, \dots, k$. Так как $\bigcup_{i=1}^k \{\nu^{rk+i} \mid r -$ целое число$\} = \{\nu^s \mid s -$ целое число$\}$, то из предыдущего равенства следует $\bigcup_{i=1}^k G^{(i(m-1))} = \{\nu^s \mid s -$ целое число$\}$. Следовательно, бесконечная циклическая группа ${}^mG$ порождается элементом $\nu = \theta_G(a_1 \dots a_{m-1})$. Соответственно, $\langle G, f\rangle$ будет бесконечной m-полуциклической n-группой, порожденной последовательностью элементов $a_1 \dots a_{m-1}$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 76 $m = n$, получим

Следствие 58 *(Следствие 4.2, [85]-A) n-Группа $\langle G, f\rangle$ является конечной (бесконечной) полуциклической с порождающей последовательностью элементов $a_1 \dots a_{m-1}$ тогда и только тогда, когда группа G_0 является конечной (бесконечной) циклической с порождающим элементом $\theta_G(a_1 \dots a_{n-1})$.*

Приведем еще один критерий m-полуцикличности для n-групп. Теорема 76 и лемма 6 позволяют сформулировать еще один критерий m-полуцикличности для n-групп.

Теорема 77 *(Теорема 4.2, [85]-A) Пусть* $n = k(m-1)+1$, $\langle G, f\rangle$ *— n-группа. Тогда:*

1) если $\langle G, f\rangle$ *— m-полуциклическая с порождающей последовательностью элементов* $a_1 \dots a_{m-1}$, *то для любых элементов* $c_1, \dots, c_{m-2} \in G$ $(k+1)$*-группа* $\langle G, [\ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}\rangle$ *— циклическая с порождающим элементом* a, *который однозначно определяется из условия* $\theta_G(a_1 \dots a_{m-1}) = \theta_G(ac_1 \dots c_{m-2})$;

2) если для некоторых элементов $c_1, \dots, c_{m-2} \in G$ *имеем циклическую* $(k+1)$*-группу* $\langle G, [\ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}\rangle$ *с порождающим элементом* a, *то* $\langle G, f\rangle$ *— m-полуциклическая с порождающей последовательностью элементов* $ac_1 \dots c_{m-2}$.

4 Конечно порожденные полуабелевы n-группы

Интерес вызывает исследование строения конечно порожденных полуабелевых n-групп по аналогии с известным строением конечно порожденных абелевых групп в виде прямых сумм циклических групп. Вначале мы изучим строение конечных и конечно порожденных абелевых n-групп, используя декартовы произведения конечных и бесконечных абелевых полуциклических n-групп, а затем приступим к изучению строения конечных и конечно порожденных полуабелевых n-групп.

4.1 Конечные абелевы n-группы

Здесь мы укажем полное описание строения конечных абелевых примарных n-групп в виде прямого произведения абелевых полуциклических примарных n-групп с точностью до изоморфизма. Далее найдем инварианты конечной абелевой примарной n-группы. Используя это описание, рассмотрим строение конечных абелевых n-групп в виде прямого произведения примарных абелевых полуциклических n-групп с точностью до изоморфизма и найдем полную систему инвариантов конечной абелевой n-группы.

Разложение конечной абелевой n-группы в декартово произведение примарных абелевых n-групп. Как и в теории групп, конечную n-группу, порядок которой есть степень простого числа p, назовем p-n-группой. Если n-группа является p-n-группой для некоторого простого числа p, то она называется примарной.

Теорема 78 *(Теорема 2, [78]-A) Конечная абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ (p_i — различные простые числа), изоморфна декартову произведению $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k\rangle$ p_i-n-групп $\langle G_i, f_i\rangle$ порядков $p_i^{\alpha_i}$.*

Доказательство. Ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$ конечной абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ является абелевой группой того же порядка (смотри теорему 10), которая допускает разложение $G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_k$ в прямое произведение своих силовских подгрупп G_i (смотри, например, теорема 3.5, [42]). Пусть $d = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k$, $d_i \in G_i$, где $d = f(\overset{(n)}{c})$ из теоремы 10. По обратной теореме Глускина-Хоссу (теорема 11) строим p_i-n-группы $\langle G_i, f_i\rangle$, $(1_{G_i}, d_i)$-определенные на каждой силовской подгруппе G_i. Отображение $\psi : G \to G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$, заданное по правилу $\psi(g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k) = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$, $g_i \in G_i$, является изоморфизмом n-групп $\langle G, f\rangle$ и $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle$, так как для любых элементов $x_j = g_{j1} \cdot g_{j2} \cdot \ldots \cdot g_{jk} \in G$, $g_{ji} \in G_i$, $j = 1, \ldots, n$, имеем $\psi(f(x_1, \ldots, x_k) = \psi(x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot d) =$

$$= \psi((g_{11} \cdot g_{12} \cdot \ldots \cdot g_{1k}) \cdot \ldots \cdot (g_{n1} \cdot g_{n2} \cdot \ldots \cdot g_{nk}) \cdot (d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k)) =$$

$$= \psi((g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{n1} \cdot d_1) \cdot (g_{12} \cdot \ldots \cdot g_{n2} \cdot d_2) \cdot \ldots \cdot (g_{1k} \cdot \ldots \cdot g_{nk} \cdot d_k)) =$$

$$= ((g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{n1} \cdot d_1), (g_{12} \cdot \ldots \cdot g_{n2} \cdot d_2), \ldots, (g_{1k} \cdot \ldots \cdot g_{nk} \cdot d_k)) =$$

$$= (f_1(g_{11}, \ldots, g_{n1}), f_2(g_{12}, \ldots, g_{n2}), \ldots, f_k(g_{1k}, \ldots, g_{nk})).$$

Теорема доказана.

Важным дополнением к теореме 78 служит

Теорема 79 *(Теорема 3, [78]-А) Если конечная абелева n-группа* $\langle G, f\rangle$ *порядка* $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ *(*p_i *— различные простые числа), изоморфна двум декартовым произведениям*

$$\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle, \tag{95}$$

$$\langle G_1', f_1'\rangle \times \langle G_2', f_2'\rangle \times \ldots \times \langle G_k', f_k'\rangle \tag{96}$$

p_i*-n-групп* $\langle G_i, f_i\rangle$ *и* $\langle G_i', f_i'\rangle$ *порядков* $|G_i| = |G_i'| = p_i^{\alpha_i}$*, то* $\langle G_1, f_1\rangle \cong \langle G_1', f_1'\rangle$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. По теореме 10 определяем группы $G_i = ret_{c_i}\langle G_i, f_i\rangle$ и $G_i' = ret_{c_i'}\langle G_i', f_i'\rangle$ с операциями $\cdot$ и $\circ$ соответственно для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Кроме того, имеем элементы $d_i = f_i(\overset{(n)}{c_i})$ и $d_i' = f_i'(\overset{(n)}{c_i'})$ из n-групп $\langle G_i, f_i\rangle$ и $\langle G_i', f_i'\rangle$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда по теореме 28

$$ret_{(c_1, c_2, \ldots, c_k)}\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k,$$

$$ret_{(c_1', c_2', \ldots, c_k')}\langle G_1', f_1'\rangle \times \langle G_2', f_2'\rangle \times \ldots \times \langle G_k', f_k'\rangle = G_1' \times G_2' \times \ldots \times G_k'.$$

В силу изоморфизма n-групп (95) и (96) по следствию 28 найдутся изоморфизм σ из $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$ в $G_1' \times G_2' \times \ldots \times G_k'$ и элемент $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ из $G_1' \times G_2' \times \ldots \times G_k'$ такие, что верно равенство

$$\sigma((d_1, d_2, \ldots, d_k)) = (u_1^{n-1} \circ d_1', u_2^{n-1} \circ d_1', \ldots, u_k^{n-1} \circ d_1').$$

Так как конечная абелева группа раскладывается однозначно в прямое произведение своих силовских подгрупп, то изоморфизм σ определяет для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, k$ изоморфизм $\sigma_i : G_i \to G_i'$ по правилу $\sigma_i(x_i) = \sigma((c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots, c_k))$, причем, для любого элемента $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$ верно равенство

$$\sigma((x_1, x_2, \ldots, x_k)) = (\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2), \ldots, \sigma_k(x_k)).$$

Таким образом, для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, k$ верно равенство $\sigma_i(d_i) = u_i^{n-1} \circ d_i'$, а тогда по следствию 28 имеем $\langle G_1, f_1\rangle \cong \langle G_1', f_1'\rangle$. Теорема доказана.

Наша цель в этом параграфе заключается в том, чтобы доказать изоморфизм конечной абелевой n-группы и декартова произведения простейших n-групп, каковыми являются абелевы полуциклические n-группы.

Конечные примарные абелевы n-группы. Примарная абелева полуциклическая n-группа не может быть изоморфна декартову произведению каких-нибудь нескольких n-групп меньших порядков (Предложение 49). Именно такие неразложимые абелевы n-группы служат компонентами прямого разложения примарной абелевой n-группы, т.е. верна

Теорема 80 *(Теорема 8, [78]-А). Каждая конечная абелева p-n-группа изоморфна декартову произведению неразложимых абелевых полуциклических p-n-групп.*

Доказательство. Ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$ конечной абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ порядка p^α является абелевой группой того же порядка, которая допускает разложение $G = (a_1)\cdot(a_2)\cdot \ldots \cdot (a_t)$ в прямое произведение своих циклических подгрупп (a_i) порядков p^{α_i}, $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_t$ (смотри, например, теорема 3.4, [42]). На каждой циклической группе (a_i) строим абелеву полуциклическую n-группу $\langle (a_i), f_i\rangle$ типа $(p^{\alpha_i}, 1, l_i)$, где $0 \le l_i < p^{\alpha_i}$ (смотри начало параграфа 3.3). Пусть $d = a_1^{l_1}\cdot a_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot a_t^{l_t}$. Отображение $\psi : G \to (a_1)\times(a_2)\times\ldots\times(a_t)$, заданное по правилу $\psi(g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_t) = (g_1, g_2, \ldots, g_t)$, $g_i \in (a_i)$, является изоморфизмом n-групп $\langle G, f\rangle$ и $\langle (a_1), f_1\rangle \times \langle (a_2), f_2\rangle \times \ldots \times \langle (a_t), f_t\rangle$, так как это отображение является биективным и сохраняет n-арную операцию (проверяется также, как в доказательстве теоремы 78). Теорема доказана.

Например, абелева тернарная группа $der_{1_G, a\cdot b}G$ порядка 16, где $G = (a)\cdot(b)$ — прямое произведение циклических групп (a) и (b) порядков 8 и 2 соответственно, изоморфна декартову произведению $der_{1_{(a)},a}(a) \times der_{1_{(b)},b}(b)$ абелевых полуциклических тернарных групп. Действительно, согласно теореме 29, тернарная группа $der_{1_{(a)},a}(a) \times der_{1_{(b)},b}(b) = der_{1_G,a\cdot b}G$. Тождественный автоморфизм группы G будет изоморфизмом тернарных групп $der_{1_G,a\cdot b}G$ и $der_{1_{(a)},a}(a) \times der_{1_{(b)},b}(b)$.

В теории групп каждая абелева p-группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма своими инвариантами $p^{\alpha_1}, \ldots, p^{\alpha_t}$. Для n-групп это не так. Например, для тернарных групп декартово произведение $der_{1_{(a)},a}(a) \times der_{1_{(b)},b}(b)$, где вновь $|(a)| = 8$, $|(b)| = 2$, изоморфно декартову произведению $der_{1_{(a)},a}(a) \times der_{1_{(b)},1}(b)$. Действительно, согласно теореме 29, $der_{1_{(a)},a}(a) \times der_{1_{(b)},b}(b) = der_{1_G,a\cdot b}G$, $der_{1_{(a)},a}(a) \times der_{1_{(b)},1}(b) = der_{1_G,a}G$, где $G = (a)\cdot(b)$ — прямое произведение циклических групп (a) и (b). Имеется автоморфизм σ группы G, переводящий базис a, b в базис $a\cdot b, b$. При таком автоморфизме верно равенство $\sigma(a\cdot b) = a$, а значит, по следствию 28, имеем искомый изоморфизм. Однако вторые множители $der_{1_{(b)},b}(b)$ и $der_{1_{(b)},1}(b)$ не изоморфны (по теореме 68).

Таким образом, если конечная абелева p-n-группа, согласно теореме 80, изоморфна декартову произведению

$$der_{1_{(a_1)},a_1^{l_1}}(a_1) \times \ldots \times der_{1_{(a_r)},a_r^{l_r}}(a_r), \tag{97}$$

абелевых полуциклических p-n-групп $der_{1_{(a_i)},a_1^{l_1}}(a_i)$ порядков p^{α_i}, $i = 1, \ldots, r$, то набор порядков $p^{\alpha_1}, \ldots, p^{\alpha_r}$ не является полной системой инвариантов этой абелевой p-n-группы.

Для нахождения условий однозначности разложения (97) введем новое определение. Множители с равными порядками в разложении (97) расположим рядом и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей, входящих в эти подпрямые произведения. Получим разложение

$$\prod_{i=1}^{r_1} der_{1_{(a_{i1})}a_{i1}^{l_{i1}}}(a_{i1}) \times \prod_{i=1}^{r_2} der_{1_{(a_{i2})}a_{i2}^{l_{i2}}}(a_{i2}) \times \ldots \times \prod_{i=1}^{r_t} der_{1_{(a_{it})}a_{it}^{l_{it}}}(a_{it}) \tag{98}$$

и если $|(a_{ij})| = p^{m_j}$ для $j = 1, \ldots, t$ каждый раз $i = 1, \ldots, r_j$, то $m_1 > m_2 > \ldots > m_t$. Для разложения (98) назовем определяющим набор $D_1, \ldots, D_t$ наибольших общих делителей, заданных по правилу

$$\begin{cases} D_1 = \text{НОД}(d_1, p^{m_1-m_2}d_2, \ldots, p^{m_1-m_t}d_t, p^{m_1}, n-1), \\ D_2 = \text{НОД}(d_1, d_2, p^{m_2-m_3}d_3, \ldots, p^{m_2-m_t}d_t, p^{m_2}, n-1), \\ \ldots \\ D_{t-1} = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t}d_t, p^{m_{t-1}}, n-1), \\ D_t = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_{t-1}, d_t, p^{m_t}, n-1), \end{cases} \tag{99}$$

где $d_j = \text{НОД}\ (l_{1j}, \ldots, l_{r_j j})$, для всех $j = 1, \ldots, t$. Теперь можно доказать теорему о единственности разложения конечной абелевой p-n-группы в прямое произведению абелевых полуциклических p-n-групп.

Теорема 81 *(Теорема 4, [55]-А) Если конечная абелева p-n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна двум прямым произведениям абелевых полуциклических p-n-групп: (97) и*

$$der_{1_{(b_1)}, b_1^{l'_1}}(b_1) \times \ldots \times der_{1_{(b_s)}, b_s^{l'_s}}(b_s), \tag{100}$$

то $r = s$, порядки $|(a_i)|$ совпадают с порядками $|(b_j)|$ при некотором упорядочении последних и определяющие наборы наибольших общих делителей для разложений (97) и (100) одинаковые.

Доказательство. n-Группа (97) равна $der_{1_A, d}A$, где $A = \prod_{i=1}^r (a_i)$, $d = \prod_{i=1}^r a_i^{l_i}$, а n-группа (100) равна $der_{1_B, d'}B$, где $B = \prod_{i=1}^s (b_i)$, $d' = \prod_{i=1}^s b_i^{l'_i}$ (согласно теореме 29). Группы A и B изоморфны (следует из изоморфизма n-групп (97) и (100) по следствию 2). В силу единственности разложения конечной абелевой p-группы в прямое произведение циклических p-групп имеем $r = s$ и $|(a_i)| = |(b_j)|$ при соответствующей нумерации последних.

Для доказательства равенства определяющих наборов наибольших общих делителей n-арных групп (97) и (100) упорядочим разложения (97) в виде (98) и (100) в аналогичном виде

$$\prod_{i=1}^{r_1} der_{1_{(b_{i1})}, b_{i1}^{l'_{i1}}}(b_{i1}) \times \prod_{i=1}^{r_2} der_{1_{(b_{i2})}, b_{i2}^{l'_{i2}}}(b_{i2}) \times \ldots \times \prod_{i=1}^{r_t} der_{1_{(b_{it})}, b_{it}^{l'_{it}}}(b_{it}). \tag{101}$$

Требуется доказать систему равенств

$$\begin{cases} \text{НОД}(d_1, p^{m_1-m_2}d_2, \ldots, p^{m_1-m_t}d_t, p^{m_1}, n-1) = \\ = \text{НОД}(d'_1, p^{m_1-m_2}d'_2, \ldots, p^{m_1-m_t}d'_t, p^{m_1}, n-1), \\ \text{НОД}(d_1, d_2, p^{m_2-m_3}d_3, \ldots, p^{m_2-m_t}d_t, p^{m_2}, n-1) = \\ = \text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{m_2-m_3}d'_3, \ldots, p^{m_2-m_t}d'_t, p^{m_2}, n-1), \\ \ldots \\ \text{НОД}(d_1, \ldots, d_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t}d_t, p^{m_{t-1}}, n-1) = \\ = \text{НОД}(d'_1, \ldots, d'_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t}d'_t, p^{m_{t-1}}, n-1), \\ \text{НОД}(d_1, \ldots, d_{t-1}, d_t, p^{m_t}, n-1) = \text{НОД}(d'_1, \ldots, d'_{t-1}, d'_t, p^{m_t}, n-1), \end{cases} \tag{102}$$

где $d'_j = \text{НОД}\ (l'_{1j}, \ldots, l'_{r_j j})$, для всех $j = 1, \ldots, t$.

Согласно следствию 28 найдутся изоморфизм σ из A в B и элемент u из B такие, что верно равенство $\sigma(d) = u^{n-1} \cdot d'$, где $d = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} a_{ij}^{l_{ij}}$, $d' = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} b_{ij}^{l'_{ij}}$. Пусть $u = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} b_{ij}^{u_{ij}}$. Элементы $c_{ij} = \sigma(a_{ij})$, где $i = 1, \ldots, r_j$ при $j = 1, \ldots, t$, будут базисом в группе B, а значит, имеется автоморфизм τ группы B, переводящий базисные элементы $b_{11}, \ldots, b_{r_t t}$ в базис $c_{11}, \ldots, c_{r_t t}$, т.е. $\tau(b_{ij}) = c_{ij}$. Тогда из равенства $\sigma(d) = u^{n-1} \cdot d'$ имеем $\sigma(d) = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} c_{ij}^{l_{ij}} = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} b_{ij}^{(n-1)u_{ij} + l'_{ij}}$, кроме того,

$$\sigma(d) = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} c_{ij}^{l_{ij}} = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} \tau(b_{ij})^{l_{ij}} = \tau(\prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} b_{ij}^{l_{ij}}),$$

тогда $\tau(\prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} b_{ij}^{l_{ij}}) = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} b_{ij}^{(n-1)u_{ij} + l'_{ij}}$, откуда элемент $\prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} b_{ij}^{l_{ij}}$ лежит в орбите элемента $\prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^{r_j} b_{ij}^{(n-1)u_{ij} + l'_{ij}}$ при действии группы автоморфизмов $Aut\ B$ на B. Нам понадобится следующая

Лемма 10 *Пусть $G = \prod_{s=1}^{k} G_s$ — прямое произведение абелевых p-групп G_s, где каждая группа $G_s = \prod_{i=1}^{n_s}(a_{is})$ — прямое произведение циклических групп (a_{is}) одного и того же порядка p^{α_s} и $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$, p — простое число. Каждая орбита элемента $\prod_{s=1}^{k}\prod_{i=1}^{n_s} a_{is}^{l'_{is}}$ при действии группы автоморфизмов $Aut\ G$ на G состоит из всех элементов $\prod_{s=1}^{k}\prod_{i=1}^{n_s} a_{is}^{l_{is}}$, для которых*

$$\begin{cases} \text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1-\alpha_2}d'_2, \ldots, p^{\alpha_1-\alpha_k}d'_k, p^{\alpha_1}) = \\ = \text{НОД}(d_1, p^{\alpha_1-\alpha_2}d_2, \ldots, p^{\alpha_1-\alpha_k}d_k, p^{\alpha_1}), \\ \text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2-\alpha_3}d'_3, \ldots, p^{\alpha_2-\alpha_k}d'_k, p^{\alpha_2}) = \\ = \text{НОД}(d_1, d_2, p^{\alpha_2-\alpha_3}d_3, \ldots, p^{\alpha_2-\alpha_k}d_k, p^{\alpha_2}), \\ \ldots \\ \text{НОД}(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{k-1}, p^{\alpha_{k-1}-\alpha_k}d'_k, p^{\alpha_{k-1}}) = \\ = \text{НОД}(d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}, p^{\alpha_{k-1}-\alpha_k}d_k, p^{\alpha_{k-1}}), \\ \text{НОД}(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{k-1}, d'_k, p^{\alpha_k}) = \text{НОД}(d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}, d_k, p^{\alpha_k}), \end{cases} \tag{103}$$

где $d'_s = \text{НОД}\ (l'_{1s}, \ldots, l'_{n_s s})$, $d_s = \text{НОД}\ (l_{1s}, \ldots, l_{n_s s})$, для всех $s = 1, \ldots, k$.

Доказательство леммы 10 смотри в [55]-А. Продолжаем доказательство теоремы 81. Тогда по лемме 10 имеем

$$\begin{cases} \text{НОД}(d''_1, p^{m_1-m_2}d''_2, \ldots, p^{m_1-m_t}d''_t, p^{m_1}) = \\ = \text{НОД}(d_1, p^{m_1-m_2}d_2, \ldots, p^{m_1-m_t}d_t, p^{m_1}), \\ \text{НОД}(d''_1, d''_2, p^{m_2-m_3}d''_3, \ldots, p^{m_2-m_t}d''_t, p^{m_2}) = \\ = \text{НОД}(d_1, d_2, p^{m_2-m_3}d_3, \ldots, p^{m_2-m_t}d_t, p^{m_2}), \\ \ldots \\ \text{НОД}(d''_1, \ldots, d''_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t}d''_t, p^{m_{t-1}}) = \\ = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t}d_t, p^{m_{t-1}}), \\ \text{НОД}(d''_1, \ldots, d''_{t-1}, d''_t, p^{m_t}) = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_{t-1}, d_t, p^{m_t}), \end{cases} \tag{104}$$

где $d''_j = \text{НОД}\ ((n-1)u_{1j} + l'_{1j}, \ldots, (n-1)u_{r_j j} + l'_{r_j j})$, для всех $j = 1, \ldots, t$.

Осталось показать, что из справедливости системы (104) следует верность системы (102). С помощью произвольно выбранного j-того равенства

$$\begin{aligned} q_j = \text{НОД}(d''_1, \ldots, d''_j, p^{m_j-m_{j+1}}d''_{j+1}, \ldots, p^{m_j-m_t}d''_t, p^{m_j}) = \\ = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_j, p^{m_j-m_{j+1}}d_{j+1}, \ldots, p^{m_j-m_t}d_t, p^{m_j}) \end{aligned} \tag{105}$$

системы (104) покажем справедливость j-того равенства

$$\begin{aligned} q'_j = \text{НОД}(d'_1, \ldots, d'_j, p^{m_j-m_{j+1}}d'_{j+1}, \ldots, p^{m_j-m_t}d'_t, p^{m_j}, n-1) = \\ = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_j, p^{m_j-m_{j+1}}d_{j+1}, \ldots, p^{m_j-m_t}d_t, p^{m_j}, n-1) = q''_j \end{aligned} \tag{106}$$

системы (102). Так как q'_j делит каждое число, стоящее в левой части равенства (106), то q'_j будет делить каждое число, стоящее в левой части равенства (105), а значит, q'_j делит q_j, откуда следует делимость каждого числа, стоящего в правой части равенства (106), на q'_j, тогда и q''_j делится на q'_j. Аналогично доказывается делимость q'_j на q''_j. Значит, $q'_j = q''_j$. Итак поступаем для каждого $j = 1, \ldots, t$, тем самым мы покажем, что из справедливости системы (104) следует верность системы (102). Теорема доказана.

Порядки p^{m_j} абелевых полуциклических прямых множителей и определяющий набор наибольших общих делителей $D_1, \ldots, D_t$ из разложения (98) назовем инвариантами абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ из теоремы 81.

Теорема 82 *(Теорема 5, [55]-A) Своими инвариантами абелева p-n-группа определяется с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть две абелевы n-группы $\langle G, f\rangle$ и $\langle G', f'\rangle$ имеют одинаковые инварианты и пусть $\langle G, f\rangle$ изоморфна разложению (98), а $\langle G', f'\rangle$ изоморфна разложению (101). Рассмотрим еще одно прямое произведение

$$\prod_{i=1}^{r_1} der_{1_{(a_{i1})}a_{i1}^{l'_{i1}}}(a_{i1}) \times \prod_{i=1}^{r_2} der_{1_{(a_{i2})}a_{i2}^{l'_{i2}}}(a_{i2}) \times \ldots \times \prod_{i=1}^{r_t} der_{1_{(a_{it})}a_{it}^{l'_{it}}}(a_{it}). \tag{107}$$

n-Группа (98) равна $der_{1_{A,d}A}$, где $A = \prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{r_j}(a_{ij})$, $d = \prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{r_j} a_{ij}^{l_{ij}}$, а n-группа (107) равна $der_{1_{A,d'}A}$, где $d' = \prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{r_j} a_{ij}^{l'_{ij}}$. В силу теоремы 68 можно считать, что все l_{ij} и l'_{ij} удовлетворяют условиям: $0 \le l_{ij}, l'_{ij} <$ НОД $(n-1, p^{m_j})$ и l_{ij}, l'_{ij} делят НОД $(n-1, p^{m_j})$. Так как определяющие наборы наибольших общих делителей для разложений (98) и (107) одинаковы, то, согласно лемме 10, найдется автоморфизм σ группы A такой, что $\sigma(d) = d'$, а значит, по следствию 2 имеем изоморфизм n-групп (98) и (107). Изоморфизм n-групп (107) и (101) очевиден. Теорема доказана.

Пусть m — натуральное число. Запишем его в виде суммы

$$\begin{gathered} m = \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{r_j} m_{ji}, \\ m_{11} = \ldots = m_{1r_1} > m_{21} = \ldots = m_{2r_2} > \ldots > m_{t1} = \ldots = m_{tr_t} \ge 1. \end{gathered} \tag{108}$$

Число всех таких разбиений с $r = 1, 2, \ldots$, где $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_t$ и t — количество различных слагаемых в разбиении m, обозначим через $p(m)$. Для каждого разбиения $\delta_s(m)$ вида (108) $(s = 1, \ldots, p(m))$ определим число $q(s, m)$, равное количеству всевозможных наборов наибольших общих делителей вида (99), где $m_j = m_{ij}$ для $j = 1, \ldots, t$ всякий раз $i = 1, \ldots, r_j$. Например, для $m = 4$ имеем $p(4) = 5$ разбиений:

$$\delta_1(4) : 4 = 1+1+1+1, \quad \delta_2(4) : 4 = 2+1+1,$$

$$\delta_3(4) : 4 = 2+2, \quad \delta_4(4) : 4 = 3+1, \quad \delta_5(4) : 4 = 4.$$

Для каждого указанного разбиения при $n = 3$ и $p = 2$ определяем количество всевозможных наборов вида (99): $q(1,4) = 2,\ q(2,4) = 3,\ q(3,4) = 2,\ q(4,4) = 3,\ q(5,4) = 2.$

Следствие 59 *Число неизоморфных абелевых n-групп порядка p^m равно*

$$\sum_{s=1}^{p(m)} q(s, m).$$

Например, число неизоморфных абелевых тернарных групп порядка 16 равно 12, хотя число неизоморфных обычных (бинарных) абелевых групп того же порядка 16 равно 5. Если циклическую группу порядка k с операцией сложение обозначить Z_k, то выше указанные неизоморфные абелевы тернарные группы порядка 16 имеют вид:

$$der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2,$$

$$der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2,$$

$$der_{1_{Z_4},1}Z_4 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2, \quad der_{1_{Z_4},0}Z_4 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2,$$
$$der_{1_{Z_4},0}Z_4 \times der_{1_{Z_2},0} \times der_{1_{Z_2},0}Z_2, \quad der_{1_{Z_4},1}Z_4 \times der_{1_{Z_4},1}Z_4,$$
$$der_{1_{Z_4},0}Z_4 \times der_{1_{Z_4},0}Z_4, \quad der_{1_{Z_8},1}Z_8 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2, \quad der_{1_{Z_8},0}Z_8 \times der_{1_{Z_2},1}Z_2,$$
$$der_{1_{Z_8},0}Z_8 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2, \quad der_{1_{Z_{16}},1}Z_{16}, \quad der_{1_{Z_{16}},0}Z_{16}.$$

Если $n-1$ не делится на простое число p, то разложение конечной абелевой p-n-группы в прямое произведение абелевых полуциклических p-n-групп значительно упрощается. Дело в том, что в этом случае имеем только один определяющий набор наибольших общих делителей (99) — все D_j равны 1. Кроме того, любая конечная абелева полуциклическая p-n-группа изоморфна циклической n-группе того же порядка (см. Следствие 1, [52]-A). А значит, верно (как и для групп)

Следствие 60 *(Теорема 9, [78]-A) Если p не делит $n-1$, то каждая конечная абелева p-n-группа изоморфна прямому произведению циклических p-n-групп. Если имеется два таких изоморфизма*

$$\langle G, f\rangle \cong der_{1_{(a_1)}a_1^{l_1}}(a_1) \times \ldots \times der_{1_{(a_r)}a_r^{l_r}}(a_r) \cong der_{1_{(b_1)}b_1^{l'_1}}(b_1) \times \ldots \times der_{1_{(b_s)}b_s^{l'_s}}(b_s),$$

то $r = s$ и $der_{1_{(a_i)}a_i^{l_i}}(a_i) \cong der_{1_{(b_j)}b_j^{l'_j}}(b_j)$ при некотором упорядочении последних.

Основная теорема о конечных абелевых n-группах. Опираясь на разложение конечной абелевой n-группы в прямое произведение примарных абелевых n-групп (теорема 78) и на его единственность (теорема 79), а также на теоремы 80 и 81, мы непосредственно приходим к следующему основному утверждению о конечных абелевых n-группах.

Теорема 83 *(Теорема 6, [55]-A) Всякая конечная абелева n-группа изоморфна прямому призведению примарных абелевых полуциклических n-групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка и по каждому простому делителю порядка этой n-группы произведения примарных множителей в этих разложениях имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей.*

Следствие 61 *(Теорема 11, [78]) Всякая конечная абелева n-группа, порядок которой взаимно прост с $n-1$, изоморфна прямому произведению примарных циклических n-групп. Любые два таких изоморфизма в этом случае имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка.*

Заимствуя терминологию из теории групп, мы, как и в случае приматных n-групп, порядки $p_s^{m_{sj}}$ примарных абелевых полуциклических множителей в разложении абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ из теоремы 83 вместе с определяющими наборами наибольших общих делителей $D_{s1}, \ldots, D_{st_s}$ по каждому простому делителю p_s порядка $|G|$ назовем инвариантами абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$. Выпишем все инварианты, расположив их в строки, которые отвечают различным простым делителям порядка $|G|$:

$$\underbrace{p_1^{m_{11}}, \ldots, p_1^{m_{11}}}_{r_{11}}, \ldots, \underbrace{p_1^{m_{1t_1}}, \ldots, p_1^{m_{1t_1}}}_{r_{1t_1}}, D_{11}, \ldots, D_{1t_1};\ m_{11} > \ldots > m_{1t_1};$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\underbrace{p_k^{m_{k1}},\ldots,p_k^{m_{k1}}}_{r_{k1}},\ldots,\underbrace{p_k^{m_{kt_k}},\ldots,p_k^{m_{kt_k}}}_{r_{kt_k}},D_{k1},\ldots,D_{kt_k};\ m_{k1}>\ldots>m_{kt_k};$$

Для заданного простого делителя p_s порядка абелевой n-группы $\langle G,f\rangle$ рассмотрим произведение примарных множителей из разложения $\langle G,f\rangle$:

$$\prod_{i=1}^{r_{s1}} der_{1_{(a_{s1})},a_{s1}^{l_{i1}}}(a_{s1})\times\ldots\times\prod_{i=1}^{r_{st_s}} der_{1_{(a_{st_s})},a_{st_s}^{l_{its}}}(a_{st_s}), \tag{109}$$

где для $j=1,\ldots,t_s$ имеем $|a_{sj}|=p_s^{m_{sj}}$. Произведение (109) имеет определяющий набор наибольших общих делителей

$$\begin{cases} D_{s1}=\text{НОД}(d_{s1},p^{m_{s1}-m_{s2}}d_{s2},\ldots,p^{m_{s1}-m_{sts}}d_{st_s},p^{m_{s1}},n-1),\\ D_{s2}=\text{НОД}(d_{s1},d_{s2},p^{m_{s2}-m_{s3}}d_{s3},\ldots,p^{m_{s2}-m_{sts}}d_{st_s},p^{m_{s2}},n-1),\\ \ldots\\ D_{st_s-1}=\text{НОД}(d_{s1},\ldots,d_{st_s-1},p^{m_{st_s-1}-m_{sts}}d_{st_s},p^{m_{st_s-1}},n-1),\\ D_{st_s}=\text{НОД}(d_{s1},\ldots,d_{st_s-1},d_{st_s},p^{m_{t_s}},n-1), \end{cases} \tag{110}$$

где $d_{sj}=\text{НОД }(l_{1j},\ldots,l_{r_{sj}j})$, для всех $j=1,\ldots,t_s$.

Среди всех изоморфных копий произведения (109) удобнее всего рассматривать произведение

$$\begin{array}{c} der_{1_{(a_{s1})},a_{s1}^{d_{s1}}}(a_{s1})\times\prod_{i=2}^{r_{s1}} der_{1_{(a_{s1})},1}(a_{s1})\times\ldots\\ \ldots\times der_{1_{(a_{st_s})},a_{st_s}^{d_{sts}}}(a_{st_s})\times\prod_{i=2}^{r_{sts}} der_{1_{(a_{st_s})},1}(a_{st_s}). \end{array} \tag{111}$$

Так как, согласно теореме 29, имеем

$$\prod_{i=2}^{r_{s1}} der_{1_{(a_{s1})},1}(a_{s1})\times\ldots\times\prod_{i=2}^{r_{st_s}} der_{1_{(a_{st_s})},1}(a_{st_s})\cong der_{1_{\prod_{j=1}^{t_s}\prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj})},1}\prod_{j=1}^{t_s}\prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj}),$$

то произведение (111) изоморфно произведению

$$\prod_{j=1}^{t_s} der_{1_{(a_{sj})},a_{sj}^{d_{sj}}}(a_{sj})\times der_{1_{\prod_{j=1}^{t_s}\prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj})},1}\prod_{j=1}^{t_s}\prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj}).$$

Тогда разложение $\langle G,f\rangle$ будет иметь вид

$$\langle G,f\rangle\cong\prod_{j=1}^{t_1} der_{1_{(a_{1j})},a_{1j}^{d_{1j}}}(a_{1j})\times der_{1_{\prod_{j=1}^{t_1}\prod_{i=2}^{r_{1j}}(a_{1j})},1}\prod_{j=1}^{t_1}\prod_{i=2}^{r_{1j}}(a_{1j})\times\ldots$$

$$\ldots\times\prod_{j=1}^{t_k} der_{1_{(a_{kj})},a_{kj}^{d_{kj}}}(a_{kj})\times der_{1_{\prod_{j=1}^{t_k}\prod_{i=2}^{r_{kj}}(a_{kj})},1}\prod_{j=1}^{t_k}\prod_{i=2}^{r_{kj}}(a_{kj}),$$

или, еще удобнее,

$$\langle G,f\rangle\cong\prod_{s=1}^{k}\prod_{j=1}^{t_s} der_{1_{(a_{sj})},a_{sj}^{d_{sj}}}(a_{sj})\times der_{1_{\prod_{s=1}^{k}\prod_{j=1}^{t_s}\prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj})},1}\prod_{s=1}^{k}\prod_{j=1}^{t_s}\prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj}).$$

В качестве примера перечислим все абелевы тернарные группы порядка 36:

Абелевы тернарные группы порядка 36	Инвариенты
$der_{1_{Z_4},0}Z_4 \times der_{1_{Z_9},0}Z_9 \cong der_{1_{Z_4\times Z_9},0}(Z_4 \times Z_9)$	4,2; 9,1
$der_{1_{Z_4},1}Z_4 \times der_{1_{Z_9},0}Z_9$	4,1; 9,1
$der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_9},0}Z_9 \cong der_{1_{Z_2\times Z_2\times Z_9},0}(Z_2 \times Z_2 \times Z_9)$	2,2,2; 9,1
$der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_9},0}Z_9 \cong der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2\times Z_9},0}(Z_2 \times Z_9)$	2,2,1; 9,1
$der_{1_{Z_4},1}Z_4 \times der_{1_{Z_3},0}Z_3 \times der_{1_{Z_3},0}Z_3 \cong der_{1_{Z_4},1}Z_4 \times der_{1_{Z_3\times Z_3},0}(Z_3 \times Z_3)$	4,1; 3.3,1
$der_{1_{Z_4},0}Z_4 \times der_{1_{Z_3},0}Z_3 \times der_{1_{Z_3},0}Z_3 \cong der_{1_{Z_4\times Z_3\times Z_3},0}(Z_4 \times Z_3 \times Z_3)$	4,2; 3,3,1
$der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_3},0}Z_3 \times der_{1_{Z_3},0}Z_3 \cong der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2\times Z_3\times Z_3},0}(Z_2 \times Z_3 \times Z_3)$	2,2,1; 3.3,1
$der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_3},0}Z_3 \times der_{1_{Z_3},0}Z_3 \cong der_{1_{Z_2\times Z_2\times Z_3\times Z_3},0}(Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_3)$	2,2,2; 3,3,1

4.2 Конечно порожденные абелевы n-группы

В этом параграфе докажем изоморфизм конечно порожденной абелевой n-группы и декартова произведения конечного числа неразложимых абелевых полуциклических n-групп, частью конечных примарных, частью бесконечных. Также найдем полную систему инвариантов для конечно порожденных абелевых n-групп.

Разложение конечно порожденной абелевой n-группы. Известно, что конечная примарная и бесконечная абелевы полуциклические n-группы являются неразложимыми (смотри предложение 49 и теорему 73). Этот факт позволяет получить следующее усиление формулировки теоремы об изоморфизме конечно порожденной абелевой n-группы и декартова произведения абелевых полуциклических n-групп, доказанной в [25] (стр. 31, теорема 5).

Теорема 84 *Конечно порожденная абелева n-группа изоморфна декартову произведению конечного числа неразложимых абелевых полуциклических n-групп, которые являются бесконечными либо конечными примарными.*

Следствие 62 *(Теорема 10, [78]-А) Конечная абелева n-группа изоморфна декартову произведению примарных абелевых полуциклических n-групп.*

Таким образом, мы получим все конечно порожденные абелевы n-группы, если будем брать декартовы произведения всевозможных конечных систем абелевых полуциклических n-групп, бесконечных или конечных примарных. Какие же среди всех получаемых этим путем абелевы n-группы будут различными (с точностью до изоморфизма)? На этот вопрос мы ответим ниже.

Декартовы произведения бесконечных абелевых полуциклических n-групп. В разложение конечно порожденной абелевой n-группы из теоремы 84 входит декартово произведение бесконечных абелевых полуциклических n-групп. Найдем условия однозначности такого вхождения.

Вначале заметим, что любая бесконечная абелева полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна полуциклической n-группе $der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le \frac{n-1}{2}$, Z — аддитивная группа целых чисел (теорема 72), в этом случае говорят, что $\langle G, f\rangle$ имеет тип $(\infty, 1, l)$. Напомним, что бесконечная циклическая n-группа также является абелевой полуциклической n-группой, которая имеет тип $(\infty, 1, 1)$.

Для изучения изоморфизма декартовых произведений k бесконечных абелевых полуциклических n-групп ($k \geq 2$) нам понадобится

Лемма 11 *Для $k \geq 2$ верен изоморфизм*

$$\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z, l_i} Z \cong der_{1_Z, d} Z \times \prod_{i=2}^{k} der_{1_Z, 0} Z,$$

где $d =$ НОД $(l_1, \ldots, l_k)$.

Доказательство. Доказательство ведем индукцией по k. Докажем лемму для $k = 2$. Из теоремы 29 следует $der_{1_Z, l_1} Z \times der_{1_Z, l_2} Z = der_{1_{Z \oplus Z}, (l_1, l_2)} Z \oplus Z$ и $der_{1_Z, d} Z \times der_{1_Z, 0} Z = der_{1_{Z \oplus Z}, (d,0)} Z \oplus Z$, где $d =$ НОД (l_1, l_2). Для доказательства изоморфизма $der_{1_{Z \oplus Z}, (d,0)} Z \oplus Z \cong der_{1_{Z \oplus Z}, (l_1, l_2)} Z \oplus Z$, согласно следствию 2, надо найти групповой автоморфизм σ и элемент (u_1, u_2) прямой суммы $Z \oplus Z$ такие, что

$$\sigma((d, 0)) = (n - 1)(u_1, u_2) + (l_1, l_2). \tag{112}$$

Известно, что любой автоморфизм σ прямой суммы $Z \oplus Z$ задается целочисленной квадратной матрицей (a_{ij}) второго порядка с определителем ± 1 по следующему правилу: $\sigma((x, y)) = (a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y)$. Решая систему

$$\begin{cases} a_{11} d \equiv l_1 \pmod{n-1} \\ a_{12} d \equiv l_2 \pmod{n-1} \end{cases}$$

с неизвестными a_{11}, a_{12}, мы найдем автоморфизм σ с матрицей (a_{ij}) и элементы u_1, u_2, для которых верно равенство (112). Тогда, согласно следствию 2, имеем $der_{1_{Z \oplus Z}, (d,0)} Z \oplus Z \cong der_{1_{Z \oplus Z}, (l_1, l_2)} Z \oplus Z$.

Далее делаем индуктивное предположение. Допустим, что наша лемма верна для $k-1$. Пусть $d_1 =$ НОД $(l_1, \ldots, l_{k-1})$, тогда $d =$ НОД (d_1, l_k). Согласно предположению

$$\prod_{i=1}^{k-1} der_{1_Z, l_i} Z \cong der_{1_Z, d_1} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z, 0} Z. \tag{113}$$

Из верности леммы для $k = 2$ имеем изоморфизм

$$der_{1_Z, d_1} Z \times der_{1_Z, l_k} Z \cong der_{1_Z, d} Z \times der_{1_Z, 0} Z. \tag{114}$$

Тогда из (113) и (114) получим $\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z, l_i} Z = \prod_{i=1}^{k-1} der_{1_Z, l_i} Z \times der_{1_Z, l_k} Z \cong$

$$\cong der_{1_Z, d_1} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z, 0} Z \times der_{1_Z, l_k} Z \cong der_{1_Z, d_1} Z \times der_{1_Z, l_k} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z, 0} Z \cong$$

$\cong der_{1_Z, d} Z \times der_{1_Z, 0} Z \times \prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z, 0} Z = der_{1_Z, d} Z \times \prod_{i=2}^{k} der_{1_Z, 0} Z$. Лемма доказана.

Для декартова произведения k бесконечных абелевых полуциклических n-групп ($k \geq 2$) верна

Теорема 85 *Пусть $\langle G_i, f_i\rangle$, $\langle G'_i, f'_i\rangle$, $i = 1,\dots,k$ – абелевы полуциклические n-группы типов $(\infty, 1, l_i)$, $(\infty, 1, l'_i)$ соответственно, $k \geq 2$. Декартовы произведения $\prod_{i=1}^{k}\langle G_i, f_i\rangle$ и $\prod_{i=1}^{k}\langle G'_i, f'_i\rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$\textit{НОД}\ (l_1,\dots,l_k,n-1) = \textit{НОД}\ (l'_1,\dots,l'_k,n-1).$$

Доказательство. Необходимость. Из $\prod_{i=1}^{k}\langle G_i, f_i\rangle \cong \prod_{i=1}^{k}\langle G'_i, f'_i\rangle$ следует $\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l_i}Z \cong \prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l'_i}Z$, где $0 \leq l_i, l'_i \leq \frac{n-1}{2}$ для всех $i = 1,\dots,k$. Обозначим $d =$ НОД $(l_1,\dots,l_k,n-1)$ и $d' =$ НОД $(l'_1,\dots,l'_k,n-1)$. Из теоремы 29 следует $\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l_i}Z = der_{1_{Z^k},(l_1,\dots,l_k)}Z^k$ и $\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l'_i}Z = der_{1_{Z^k},(l'_1,\dots,l'_k)}Z^k$. Тогда из $der_{1_{Z^k},(l_1,\dots,l_k)}Z^k \cong der_{1_{Z^k},(l'_1,\dots,l'_k)}Z^k$, по следствию 2, имеем групповой автоморфизм σ и элемент $(u_1,\dots,u_k)$ прямой суммы Z^k такие, что

$$\sigma((l_1,\dots,l_k)) = (n-1)(u_1,\dots,u_k) + (l'_1,\dots,l'_k). \tag{115}$$

Автоморфизм σ задается целочисленной матрицей $(a_{ij})_{k\times k}$ с определителем ± 1:

$$\sigma((x_1,\dots,x_k)) = (\sum_{i=1}^{k} a_{i1}x_i,\dots,\sum_{i=1}^{k} a_{ik}x_i).$$

Тогда из равенства (115) имеем $\sum_{i=1}^{k} a_{ij}l_i = (n-1)u_j + l'_j$, $j = 1,\dots,k$, откуда имеем делимость d' на d. Аналогично имеем делимость d на d', значит, $d = d'$.

Достаточность. Используем индукцию по k. Для $k = 2$ обозначим $d =$ НОД (l_1,l_2), $d' =$ НОД (l'_1,l'_2) и НОД $(d,n-1) =$ НОД $(d',n-1) = q$. Согласно лемме 11 имеем изоморфизмы $der_{1_Z,l_1}Z \times der_{1_Z,l_2}Z \cong der_{1_Z,d}Z \times der_{1_Z,0}Z$ и $der_{1_Z,l'_1}Z \times der_{1_Z,l'_2}Z \cong der_{1_Z,d'}Z \times der_{1_Z,0}Z$. По аналогии с доказательством леммы 11 доказывается изоморфизм $der_{1_Z,d}Z \times der_{1_Z,0}Z \cong der_{1_Z,d'}Z \times der_{1_Z,0}Z$. А значит, $der_{1_Z,l_1}Z \times der_{1_Z,l_2}Z \cong der_{1_Z,l'_1}Z \times der_{1_Z,l'_2}Z$, тогда $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \cong \langle G'_1, f'_1\rangle \times \langle G'_2, f'_2\rangle$. Достаточность при $k = 2$ доказана.

Пусть достаточность верна для $k-1$ и $d_1 =$ НОД $(l_1,\dots,l_{k-1})$, $d'_1 =$ НОД $(l'_1,\dots,l'_{k-1})$, тогда НОД $(d_1,l_k,n-1) =$ НОД $(d'_1,l'_k,n-1)$, откуда, по доказанному для $k = 2$, имеем изоморфизм

$$der_{1_Z,d_1}Z \times der_{1_Z,l_k}Z \cong der_{1_Z,d'_1}Z \times der_{1_Z,l'_k}Z. \tag{116}$$

Домножаем обе части (116) на $\prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z,0}Z$, получим

$$der_{1_Z,d_1}Z \times \prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z,0}Z \times der_{1_Z,l_k}Z \cong der_{1_Z,d'_1}Z \times \prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z,0}Z \times der_{1_Z,l'_k}Z. \tag{117}$$

Согласно лемме 11 имеем $der_{1_Z,d_1}Z \times \prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z,0}Z \cong \prod_{i=1}^{k-1} der_{1_Z,l_i}Z$, а также $der_{1_Z,d'_1}Z \times \prod_{i=2}^{k-1} der_{1_Z,0}Z \cong \prod_{i=1}^{k-1} der_{1_Z,l'_i}Z$. Из (117) имеем $\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l_i}Z \cong \prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l'_i}Z$, а тогда $\prod_{i=1}^{k}\langle G_i, f_i\rangle \cong \prod_{i=1}^{k}\langle G'_i, f'_i\rangle$. Теорема доказана.

Следствие 63 *Число неизоморфных прямых произведений k бесконечных абелевых полуциклических n-групп ($k \geq 2$) равно $\tau(n-1)$ — количеству делителей $n-1$.*

Инварианты конечно порожденной абелевой n-группы. Любая конечная абелева полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка k изоморфна n-группе $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l \mid$ НОД$(n-1, k)$, Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k (теорема 70). Говорят в этом случае, что $\langle G, f\rangle$ имеет тип $(k, 1, l)$. Конечная циклическая n-группа имеет тип $(k, 1, 1)$.

Из следствия 62 следует, что любая конечная примарная (по простому числу p) n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению

$$der_{1_{Z_{p^{m_1}}},l_1}Z_{p^{m_1}} \times \ldots \times der_{1_{Z_{p^{m_r}}},l_r}Z_{p^{m_r}}, \tag{118}$$

абелевых полуциклических n-групп $der_{1_{Z_{p^{m_i}}},l_i}Z_{p^{m_i}}$. Множители с равными порядками в разложении (118) расположим рядом и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей, входящих в эти подпрямые произведения. Получим

$$\begin{gathered}\prod_{w_1=1}^{r_1} der_{1_{Z_{p^{m_1}}},l_{w_1}}Z_{p^{m_1}} \times \prod_{w_2=1}^{r_2} der_{1_{Z_{p^{m_2}}},l_{r_1+w_2}}Z_{p^{m_2}} \times \ldots \\ \ldots \times \prod_{w_t=1}^{r_t} der_{1_{Z_{p^{m_t}}},l_{\sum_{i=1}^{t-1} r_i+w_t}}Z_{p^{m_t}},\end{gathered} \tag{119}$$

где $m_1 > m_2 > \ldots > m_t$. Для разложения (119) назовем определяющим набор $D_1, \ldots, D_t$ наибольших общих делителей, заданных по правилу (99) из предыдущего параграфа, где $d_j =$ НОД $(l_{\sum_{i=0}^{j-1} r_i+1}, \ldots, l_{\sum_{i=0}^{j-1} r_i+r_j})$ для всех $j = 1, \ldots, t$ (здесь и дальше $r_0 = 0$).

По теореме 84 любая конечно порожденная абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению

$$\prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \times \prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l_i}Z \tag{120}$$

$u_1 + \ldots + u_s$ конечных примарных полуциклических n-групп $der_{1Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, где $l_{\epsilon j} \mid$ НОД$(n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$, p_ϵ — различные простые числа, и k бесконечных абелевых полуциклических n-групп $der_{1_Z,l_i}Z$, где $0 \le l_i \le \frac{n-1}{2}$. Найдем инварианты разложения (120).

Теорема 86 *Если конечно порожденная абелева n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна двум декартовым произведениям: (120) и*

$$\prod_{\zeta=1}^{t}\prod_{w=1}^{v_\zeta} der_{1Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}},l'_{\zeta w}}Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \times \prod_{i=1}^{h} der_{1_Z,l'_i}Z, \tag{121}$$

где $der_{1Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}},l'_{\zeta w}}Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}}$ — конечные примарные полуциклические n-группы, $l'_{\zeta w} \mid$ НОД$(n-1, q_\zeta^{m'_{\zeta w}})$, q_ζ — различные простые числа, и $der_{1_Z,l'_i}Z$ — бесконечные абелевы полуциклические n-группы, $0 \le l'_i \le \frac{n-1}{2}$, то $k = h$ и $p_\epsilon^{m_{\epsilon j}} = q_\zeta^{m'_{\zeta w}}$ при соответствующей нумерации последних.

Доказательство. Из теоремы 29 имеем

$$\prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \times \prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l_i}Z =$$

$$= der_{1_{\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{u_\epsilon} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \oplus Z^k, \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{u_\epsilon} l_{\epsilon j} + \sum_{i=1}^{k} l_i}} \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{u_\epsilon} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \oplus Z^k,$$

где $\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{u_\epsilon} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \oplus Z^k$ – прямая сумма $u_1 + \ldots + u_s$ конечных циклических групп $Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ и k бесконечных циклических групп Z. Аналогично

$$\prod_{\zeta=1}^{t}\prod_{w=1}^{v_\zeta} der_{1_{Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}}, l'_{\zeta w}}} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \times \prod_{i=1}^{h} der_{1_Z, l'_i} Z =$$

$$= der_{1_{\sum_{\zeta=1}^{t}\sum_{w=1}^{v_\zeta} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \oplus Z^h, \sum_{\zeta=1}^{t}\sum_{w=1}^{v_\zeta} l_{\zeta w} + \sum_{i=1}^{h} l_i}} \sum_{\zeta=1}^{t}\sum_{w=1}^{v_\zeta} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \oplus Z^h.$$

Согласно следствию 2, имеем групповой изоморфизм

$$\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{u_\epsilon} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \oplus Z^k \cong \sum_{\zeta=1}^{t}\sum_{w=1}^{v_\zeta} Z_{q_\zeta^{m'_{\zeta w}}} \oplus Z^h.$$

В силу однозначности разложения конечно порожденной абелевой группы (см., например, стр. 133, [44]) имеем $k = h$ и $p_\epsilon^{m_{\epsilon j}} = q_\zeta^{m'_{\zeta w}}$ при соответствующей нумерации последних. Теорема доказана.

Таким образом, количество бесконечных абелевых полуциклических n-групп и совокупности порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (120) являются инвариантами конечно порожденной абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, но эти инварианты не являются полной системой инвариантов для конечно порожденных абелевых n-групп, т.е. две конечно порожденные абелевы n-группы с этими инвариантами не обязательно изоморфны. Это видно из ниже приведенного примера.

Пример 5 *Рассмотрим две абелевы полуциклические* 3*-группы* $der_{1_{Z_4},1} Z_4$ *и* $der_{1_{Z_4},2} Z_4$. *Они не изоморфны, так как* 1 *и* 2 *являются разными делителями НОД*$(2, 4)$, *хотя их порядки равны.*

Полную систему инвариантов для конечно порожденной абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, изоморфной разложению (120), будем находить отдельно для $k = 1$ и $k > 1$. Заметим, что для конечной абелевой n-группы (случай $k = 0$) полная система инвариантов уже найдена в предыдущем параграфе, это порядки примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (120) вместе с определяющими наборами наибольших общих делителей произведений примарных множителей по каждому простому делителю порядка этой n-группы (см. теорему 83).

В случае $k = 1$ в разложении (120) по каждому простому числу p_ϵ, $\epsilon = 1, \ldots, s$, множители с равными порядками в разложении $\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ расположим рядом и такие поддекартовы произведения расположим в порядке убывания порядков множителей. Получим разложение

$$der_{1_Z, l_0} Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, \tag{122}$$

где $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + w_j$, $w_j = 1, \ldots, r_{\epsilon j}$ при каждом $j = 1, \ldots, t_\epsilon$ (здесь и дальше $r_{\epsilon 0} = 0$), и $m_{\epsilon 1} > m_{\epsilon 2} > \ldots > m_{\epsilon t_\epsilon}$, p_ϵ – различные простые числа.

Теорема 87 *Пусть даны* $der_{1_{Z},l_0}Z$, $der_{1_{Z},l_0'}Z$, *где* $0 \le l_0, l_0' \le \frac{n-1}{2}$, *и* $der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, $der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l'_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, $v=\sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+w_j$, $j=1,\ldots,t_\epsilon$, $w_j=1,\ldots,r_{\epsilon j}$, *где* $l_{\epsilon v}, l'_{\epsilon v}$ *делят НОД*$(n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$ *и* $m_{\epsilon 1} > m_{\epsilon 2} > \ldots > m_{\epsilon t_\epsilon}$, p_ϵ *– различные простые числа,* $\epsilon = 1,\ldots,s$. *Декартовы произведения (122) и*

$$der_{1_{Z},l_0'}Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l'_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \tag{123}$$

изоморфны тогда и только тогда, когда $l_0 = l_0'$ *и для каждого индекса* $\epsilon = 1,\ldots,s$ *верно НОД*$(l_0, D_{\epsilon j}) =$ *НОД*$(l_0', D'_{\epsilon j})$ *для всех* $j=1,\ldots,t_\epsilon$, *где* $D_{\epsilon j}$ *и* $D'_{\epsilon j}$ *— компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений*

$$\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \ \text{и}\ \prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l'_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$$

соответственно.

Доказательство. Необходимость. Выбираем простое число p_ϵ, $\epsilon=1,\ldots,s$. У произведения $\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ определяющим набором наибольших общих делителей будет набор

$$\begin{cases} D_{\epsilon 1} = \text{НОД}(d_{\epsilon 1}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1}-m_{\epsilon 2}}d_{\epsilon 2},\ldots, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1}-m_{\epsilon t_\epsilon}}d_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1}}, n-1),\\ D_{\epsilon 2} = \text{НОД}(d_{\epsilon 1}, d_{\epsilon 2}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2}-m_{\epsilon 3}}d_{\epsilon 3},\ldots, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2}-m_{\epsilon t_\epsilon}}d_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2}}, n-1),\\ \ldots\\ D_{\epsilon t_\epsilon -1} = \text{НОД}(d_{\epsilon 1},\ldots, d_{\epsilon t_\epsilon -1}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon -1}-m_{\epsilon t_\epsilon}}d_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon -1}}, n-1),\\ D_{\epsilon t_\epsilon} = \text{НОД}(d_{\epsilon 1},\ldots, d_{\epsilon t_\epsilon -1}, d_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon}}, n-1), \end{cases} \tag{124}$$

где $d_{\epsilon j}$ = НОД $(l_{\epsilon \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+1},\ldots, l_{\epsilon \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+r_{\epsilon j}})$, для всех $j=1,\ldots,t_\epsilon$, а для произведения $\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l'_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ этот определяющий набор имеет вид

$$\begin{cases} D'_{\epsilon 1} = \text{НОД}(d'_{\epsilon 1}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1}-m_{\epsilon 2}}d'_{\epsilon 2},\ldots, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1}-m_{\epsilon t_\epsilon}}d'_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1}}, n-1),\\ D'_{\epsilon 2} = \text{НОД}(d'_{\epsilon 1}, d'_{\epsilon 2}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2}-m_{\epsilon 3}}d'_{\epsilon 3},\ldots, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2}-m_{\epsilon t_\epsilon}}d'_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2}}, n-1),\\ \ldots\\ D'_{\epsilon t_\epsilon -1} = \text{НОД}(d'_{\epsilon 1},\ldots, d'_{\epsilon t_\epsilon -1}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon -1}-m_{\epsilon t_\epsilon}}d'_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon -1}}, n-1),\\ D'_{\epsilon t_\epsilon} = \text{НОД}(d'_{\epsilon 1},\ldots, d'_{\epsilon t_\epsilon -1}, d'_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon}}, n-1), \end{cases} \tag{125}$$

где $d'_{\epsilon j}$ = НОД $(l'_{\epsilon \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+1},\ldots, l'_{\epsilon \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+r_{\epsilon j}})$, для всех $j=1,\ldots,t_\epsilon$.

Из теоремы 29 имеем

$$der_{1_{Z},l_0}Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} =$$

$$= der_{1_{Z\oplus\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},\, l_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}} Z \oplus \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},$$

$$der_{1_{Z},l_0'}Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l'_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} =$$

$$= der_{1_{Z\oplus\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l'_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l'_{\epsilon v}} Z\oplus\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}.$$

По следствию 2 имеем автоморфизм σ прямой суммы

$$A = Z\oplus\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$$

и элемент $u_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v}$, $u_0\in Z$, $u_{\epsilon v}\in Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, такие, что

$$\sigma(l_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} l_{\epsilon v}) = (n-1)(u_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} u_{\epsilon v}) + l'_0 + \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} l'_{\epsilon v}. \tag{126}$$

Пусть $A_2=\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$. Ограничение σ_{A_2} автоморфизма σ на подгруппу A_2 является автоморфизмом A_2. Так как $A=Z\oplus A_2$, то $Z\cong A/A_2$ (см., например, стр. 50, [40]). Пусть θ_1 – найденный изоморфизм из Z в A/A_2 и этот изоморфизм действует по правилу $\theta_1(z)=z+A_2$. Так как ограничение σ_{A_2} автоморфизма σ на подгруппу A_2 является автоморфизмом A_2, то σ индуцирует автоморфизм σ' фактор-группы A/A_2 по правилу $\sigma'(z+A_2)=\sigma(z)+A_2$ (проверяется непосредственно). Итак, $\tau=\theta_1^{-1}\circ\sigma'\circ\theta_1$ – автоморфизм группы Z.

Для элемента $l_0\in Z$, используя (126), получим

$$\tau(l_0)=\theta_1^{-1}\circ\sigma'\circ\theta_1(l_0)=\theta_1^{-1}\circ\sigma'(l_0+A_2)=\theta_1^{-1}(\sigma(l_0)+A_2)=$$

$$=\theta_1^{-1}((n-1)(u_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v})+l'_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l'_{\epsilon v}-$$

$$-\sigma(\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v})+A_2)=\theta_1^{-1}((n-1)u_0+l'_0+A_2)=(n-1)u_0+l'_0.$$

Таким образом, для элемента u_0 из Z и автоморфизма τ верно равенство

$$\tau(l_0)=(n-1)u_0+l'_0. \tag{127}$$

По следствию 2 имеем $der_{1_{Z,l_0}}Z\cong der_{1_{Z,l'_0}}Z$, но $0\le l_0,l'_0\le\frac{n-1}{2}$, тогда $l_0=l'_0$.

Далее, полагаем $\sigma(1)=e_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} e_{\epsilon v}$, где $e_0\in Z$, $e_{\epsilon v}\in Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ для $\epsilon=1,\ldots,s$ и $v=\sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+w_j$, $1\le w_j\le r_{\epsilon j}$. Тогда

$$\sigma(l_0)=l_0(e_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} e_{\epsilon v})=l_0e_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_0e_{\epsilon v}.$$

Из (126) получим

$$\sigma(\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v})=(n-1)(u_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v})+l'_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l'_{\epsilon v}-\sigma(l_0)$$

$$= (n-1)(u_0 + \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v}) + l'_0 + \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l'_{\epsilon v} - l_0 e_0 - \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_0 e_{\epsilon v},$$

но $\sigma(\sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}) \in A_2$, значит, $(n-1)u_0 + l'_0 - l_0 e_0 = 0$ и

$$\sigma_{A_2}(\sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} l_{\epsilon v}) = (n-1)(\sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} u_{\epsilon v}) + \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} (l'_{\epsilon v} - l_0 e_{\epsilon v}). \tag{128}$$

Таким образом, для элемента $\sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v}$ из A_2 и автоморфизма σ_{A_2} верно равенство (128). По следствию 2 имеем изоморфизм n-групп

$$der_{1_{A_2}, \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}} A_2 \cong der_{1_{A_2}, \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} (l'_{\epsilon v} - l_0 e_{\epsilon v})} A_2,$$

а по теореме 29 имеем

$$der_{1_{A_2}, \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}} A_2 = \prod_{\epsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, \tag{129}$$

$$der_{1 A_2, \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} (l'_{\epsilon v} - l_0 e_{\epsilon v})} A_2 = \prod_{\epsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, (l'_{\epsilon v} - l_0 e_{\epsilon v})} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \cong$$

$$\cong \prod_{\epsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l''_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},$$

где $l''_{\epsilon v} = \text{НОД}(l'_{\epsilon v} - l_0 e_{\epsilon v}, n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$. Тогда

$$\prod_{\epsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \cong \prod_{\epsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l''_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}. \tag{130}$$

Из этого изоморфизма по теореме 83 для каждого простого числа p_ϵ ($\epsilon = 1, \ldots, s$) произведения примарных множителей $\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ и $\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l''_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей. У произведения $\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l''_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ определяющим набором наибольших общих делителей будет набор

$$\begin{cases} D''_{\epsilon 1} = \text{НОД}(d''_{\epsilon 1}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1} - m_{\epsilon 2}} d''_{\epsilon 2}, \ldots, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1} - m_{\epsilon t_\epsilon}} d''_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 1}}, n-1), \\ D''_{\epsilon 2} = \text{НОД}(d''_{\epsilon 1}, d''_{\epsilon 2}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2} - m_{\epsilon 3}} d''_{\epsilon 3}, \ldots, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2} - m_{\epsilon t_\epsilon}} d''_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon 2}}, n-1), \\ \ldots \\ D''_{\epsilon t_\epsilon - 1} = \text{НОД}(d''_{\epsilon 1}, \ldots, d''_{\epsilon t_\epsilon - 1}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon - 1} - m_{\epsilon t_\epsilon}} d''_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon - 1}}, n-1), \\ D''_{\epsilon t_\epsilon} = \text{НОД}(d''_{\epsilon 1}, \ldots, d''_{\epsilon t_\epsilon - 1}, d''_{\epsilon t_\epsilon}, p_\epsilon^{m_{\epsilon t_\epsilon}}, n-1), \end{cases} \tag{131}$$

где $d''_{\epsilon j} = \text{НОД}\ (l''_{\epsilon \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + 1}, \ldots, l''_{\epsilon \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + r_{\epsilon j}})$, для всех $j = 1, \ldots, t_\epsilon$. Тогда $D_{\epsilon j} = D''_{\epsilon j}$ для всех $j = 1, \ldots, t_\epsilon$.

Фиксируем индекс $\epsilon = 1, \ldots, s$. По свойствам делимости доказывается $\text{НОД}(l_0, D_{\epsilon j}) = \text{НОД}(l'_0, D'_{\epsilon j})$. Необходимость доказана.

Достаточность. Из $l_0 = l'_0$ имеем $der_{l_0}Z \cong der_{l'_0}Z$, а тогда по следствию 2 имеем автоморфизм τ и элемент u_0 группы Z такие, что верно (127).

Выбираем автоморфизм σ прямой суммы $A_2 = \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ и пусть

$$\sigma(\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}) = \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} x_{\epsilon v}.$$

Согласно следствию 2 имеем изоморфизм n-групп

$$der_{1_{A_2},\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}} A_2 \cong der_{1_{A_2},\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} x_{\epsilon v}} A_2,$$

а по теореме 29 имеем (129) и $\quad der_{1_{A_2},\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} x_{\epsilon v}} A_2 =$

$$= \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, x_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \cong \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l''_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},$$

где $l''_{\epsilon v} = \text{НОД}(x_{\epsilon v}, n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$. Тогда имеем изоморфизм (130). Из этого изоморфизма по теореме 83 для каждого простого числа p_ϵ ($\epsilon = 1, \ldots, s$) произведения

$$\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \text{ и } \prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l''_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$$

имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей, т.е. $D_{\epsilon j} = D''_{\epsilon j}$ для всех $j = 1, \ldots, t_\epsilon$, где $D''_{\epsilon j}$ взяты из системы (131).

Пусть для каждого $\epsilon = 1, \ldots, s$ верно $\text{НОД}(l_0, D_{\epsilon j}) = \text{НОД}(l'_0, D'_{\epsilon j})$ для всех $j = 1, \ldots, t_\epsilon$. Если для каждого индекса $\epsilon = 1, \ldots, s$ верно $D_{\epsilon j} = D'_{\epsilon j}$ для всех индексов $j = 1, \ldots, t_\epsilon$, то, по теореме 82, декартовы произведения

$$\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \text{ и } \prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l'_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$$

изоморфны, а тогда декартовы произведения (122) и (123) изоморфны.

Пусть для некоторого ϵ ($\epsilon = 1, \ldots, s$) верно $D_{\epsilon j} \neq D'_{\epsilon j}$ для некоторых j из целочисленного интервала $[1, t_\epsilon]$. В этом случае для каждого $\epsilon = 1, \ldots, s$ будем искать целые числа $e_{\epsilon v}$, $v = 1, \ldots, \sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}$, для которых разрешимы линейные сравнения

$$(n-1)x \equiv l''_{\epsilon v} - l'_{\epsilon v} + l_0 e_{\epsilon v} \pmod{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, \tag{132}$$

$j = 1, \ldots, t_\epsilon$.

Для тех j из целочисленного интервала $[1, t_\epsilon]$, для которых $D_{\epsilon j} \neq D'_{\epsilon j}$, пусть $D_{\epsilon j} < D'_{\epsilon j}$ (аналогично $D_{\epsilon j} > D'_{\epsilon j}$). Полагаем $l_0 = p_\epsilon^{m_0} q_0$, q_0 не делится на p_ϵ, $D_{\epsilon j} = p_\epsilon^{n_{\epsilon j}}$, $D'_{\epsilon j} = p_\epsilon^{n'_{\epsilon j}}$. Тогда $\text{НОД}(l_0, D_{\epsilon j}) = p_\epsilon^{min\{m_0, n_{\epsilon j}\}}$. Заметим, что $min\{m_0, n_{\epsilon j}\} = m_0$, иначе не было бы верно равенство $\text{НОД}(l_0, D_{\epsilon j}) = \text{НОД}(l'_0, D'_{\epsilon j})$. Находим $\text{НОД}(l_0, n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}) = p_\epsilon^{m_0}$, тогда для каждого $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + w_j$, $w_j = 1, \ldots, r_{\epsilon j}$, сравнение $l_0 x \equiv l'_{\epsilon v} - l''_{\epsilon v} \pmod{\text{НОД}(n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})}$ разрешимо, так как $l'_{\epsilon v} - l''_{\epsilon v}$ делится на $\text{НОД}(l_0, n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$. Пусть $e_{\epsilon v}$ – решение этого сравнения. Тогда разрешимо сравнение (132).

Для тех j из целочисленного интервала $[1,t_\epsilon]$, для которых $D_{\epsilon j}=D'_{\epsilon j}$, полагаем $e_{\epsilon v}=0$ для каждого $v=\sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+w_j$, $w_j=1,\ldots,r_{\epsilon j}$.

Итак, мы нашли целые числа $e_{\epsilon v}$, $v=1,\ldots,\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}$, для которых разрешимы линейные сравнения (132). Для каждого $\epsilon=1,\ldots,s$ пусть $u_{\epsilon v}$ – решения этих сравнений, $v=1,\ldots,\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}$, для них верны сравнения

$$l''_{\epsilon v}\equiv(n-1)u_{\epsilon v}+l'_{\epsilon v}-l_0e_{\epsilon v}\pmod{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, \tag{133}$$

$j=1,\ldots,t_\epsilon$.

Далее, по теореме 29 имеем

$$der_{1_{A_2},\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l''_{\epsilon v}}A_2=\prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l''_{\epsilon v}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},$$

а тогда из (130) с учетом (129), согласно следствию 2, имеем автоморфизм σ' и элемент $\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u'_{\epsilon v}$ прямой суммы A_2 такие, что верно

$$\sigma'(\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v})=(n-1)(\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u'_{\epsilon v})+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l''_{\epsilon v}. \tag{134}$$

С помощью найденных целых чисел $e_{\epsilon v}$, $\epsilon=1,\ldots,s$, $v=1,\ldots,\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}$, автоморфизма τ группы Z, который указан в начале доказательства достаточности, и автоморфизма σ' группы A_2 зададим отображение μ прямой суммы $Z\oplus A_2$ на себя по правилу: если $a\in Z$, $b\in A_2$, то

$$\mu(a+b)=\tau(a)+a(\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} e_{\epsilon v})+\sigma'(b). \tag{135}$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение μ будет автоморфизмом группы $Z\oplus A_2$. Для этого автоморфизма, используя (135), (127), (134), (133), получим $\mu(l_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v})=$

$$=(n-1)(u_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}}(u'_{\epsilon v}+u_{\epsilon v}))+l'_0+\sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l'_{\epsilon v},$$

значит, согласно следствию 2, имеем изоморфизм декартовых произведений (122) и (123). Теорема доказана.

Теперь можно указать полную систему инвариантов для конечно порожденной абелевой n-группы $\langle G,f\rangle$, в разложение которой входит одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа. Пусть $\langle G,f\rangle$ изоморфна декартову произведению

$$der_{1_Z,l_0}Z\times\prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l_{\epsilon j}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \tag{136}$$

бесконечной абелевой полуциклической n-группы $der_{1_Z,l_0}Z$, где $0\le l_0\le\frac{n-1}{2}$, и $u_1+\ldots+u_s$ конечных примарных абелевых полуциклических n-групп $der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l_{\epsilon j}}Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, где $l_{\epsilon j}$ делит НОД$(n-1,p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$. Число l_0 и совокупность порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (136) вместе с набором наибольших общих делителей

НОД$(l_0, D_{\epsilon i})$, где $D_{\epsilon i}$ – компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ для каждого индекса $\epsilon = 1, \ldots, s$, назовем инвариантами n-группы $\langle G, f \rangle$.

Следствие 64 *Своими инвариантами конечно порожденная абелева n-группа, в разложение которой входит одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Пусть теперь конечно порожденная абелева n-группа $\langle G, f \rangle$ изоморфна декартову произведению (120) и $k > 1$. Как и в случае, когда $k = 1$, в разложении (120) по каждому простому числу p_ϵ, $\epsilon = 1, \ldots, s$, множители с равными порядками в разложении $\prod_{j=1}^{s_\epsilon} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ расположим рядом и такие поддекартовы произведения расположим в порядке убывания порядков множителей. Получим разложение

$$\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z, l_i} Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, \tag{137}$$

где $0 \leq l_i \leq \frac{n-1}{2}$, $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + w_j$, $w_j = 1, \ldots, r_{\epsilon j}$ при каждом $j = 1, \ldots, t_\epsilon$, и $m_{\epsilon 1} > m_{\epsilon 2} > \ldots > m_{\epsilon t_\epsilon}$, p_ϵ – различные простые числа.

Теорема 88 *Пусть даны $der_{1_Z, l_i} Z$, $der_{1_Z, l'_i} Z$, где $0 \leq l_i, l'_i \leq \frac{n-1}{2}$, $i = 1, \ldots, k$, $k > 1$, и $der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, $der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l'_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + w_j$, $j = 1, \ldots, t_\epsilon$, $w_j = 1, \ldots, r_{\epsilon j}$, где $m_{\epsilon 1} > m_{\epsilon 2} > \ldots > m_{\epsilon t_\epsilon}$, p_ϵ – различные простые числа, $\epsilon = 1, \ldots, s$. Декартовы произведения (137) и*

$$\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z, l'_i} Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l'_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \tag{138}$$

изоморфны тогда и только тогда, когда

$$НОД\ (l_1, \ldots, l_k, n-1) = НОД\ (l'_1, \ldots, l'_k, n-1) = L$$

и для каждого $\epsilon = 1, \ldots, s$ верно НОД$(L, D_{\epsilon j})$ = НОД$(L, D'_{\epsilon j})$ для всех индексов $j = 1, \ldots, t_\epsilon$, где $D_{\epsilon j}$ и $D'_{\epsilon j}$ взяты из определяющих наборов наибольших общих делителей соответственно произведений $\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ и $\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l'_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$.

Доказательство. Необходимость. Для фиксированного простого числа p_ϵ ($\epsilon = 1, \ldots, s$) у произведения $\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ определяющим набором наибольших общих делителей будет набор (124), а для произведения $\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l'_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ этот определяющий набор имеет вид (125).

Согласно теоремы 29, имеем

$$\prod_{i=1}^{k} der_{l_i} Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s} \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} =$$

$$= der_{1_{Z^k\oplus\sum_{\epsilon=1}^s\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, \sum_{i=1}^k l_i+\sum_{\epsilon=1}^s\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}} Z^k \oplus \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},$$

$$\prod_{i=1}^k der_{l_i'} Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l'_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} =$$

$$= der_{1_{Z^k\oplus\sum_{\epsilon=1}^s\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, \sum_{i=1}^k l_i'+\sum_{\epsilon=1}^s\sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l'_{\epsilon v}} Z^k \oplus \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}.$$

По следствию 2 имеем автоморфизм σ прямой суммы

$$A = Z^k \oplus \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$$

и элемент $\sum_{i=1}^k u_i + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v}$, $u_i \in Z$, $u_{\epsilon v} \in Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$, такие, что

$$\sigma(\sum_{i=1}^k l_i + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}) =$$

$$= (n-1)(\sum_{i=1}^k u_i + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v}) + \sum_{i=1}^k l_i' + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l'_{\epsilon v}. \qquad (139)$$

Как и раньше в доказательстве необходимости теоремы 87, ограничение σ_{A_2} автоморфизма σ на подгруппу $A_2 = \sum_{\epsilon=1}^s\sum_{j=1}^{t_\epsilon}\sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ является автоморфизмом A_2.

Так как $A = Z^k \oplus A_2$, то $Z^k \cong A/A_2$. Пусть $\theta_1(\sum_{i=1}^k z_i) = \sum_{i=1}^k z_i + A_2$ – изоморфизм из Z^k в A/A_2. Автоморфизм σ индуцирует автоморфизм σ' фактор-группы A/A_2 по правилу $\sigma'(\sum_{i=1}^k z_i + A_2) = \sigma(\sum_{i=1}^k z_i) + A_2$ (проверяется непосредственно). Получили автоморфизм $\tau = \theta_1^{-1} \circ \sigma' \circ \theta_1$ группы Z^k.

Для элемента $\sum_{i=1}^k l_i \in Z^k$, используя (139), получим

$$\tau(\sum_{i=1}^k l_i) = \theta_1^{-1}\circ\sigma'\circ\theta_1(\sum_{i=1}^k l_i) = \theta_1^{-1}\circ\sigma'(\sum_{i=1}^k l_i + A_2) = \theta_2^{-1}(\sigma(\sum_{i=1}^k l_i) + A_2) =$$

$$= \theta_2^{-1}((n-1)(\sum_{i=1}^k u_i + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v}) + \sum_{i=1}^k l_i' + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l'_{\epsilon v} -$$

$$-\sigma(\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}) + A_2) = \theta_2^{-1}((n-1)(\sum_{i=1}^k u_i) + \sum_{i=1}^k l_i' + A_2) =$$

$$= (n-1)(\sum_{i=1}^k u_i) + \sum_{i=1}^k l_i'.$$

Таким образом, для элемента $\sum_{i=1}^k u_i$ из Z^k и автоморфизма τ верно

$$\tau(\sum_{i=1}^k l_i) = (n-1)(\sum_{i=1}^k u_i) + \sum_{i=1}^k l_i'. \qquad (140)$$

По следствию 2, имеем изоморфизм n-групп $der_{1_{Z^k},\sum_{i=1}^k l_i}Z^k \cong der_{1_{Z^k},\sum_{i=1}^k l'_i}Z^k$, откуда, по теореме 29, имеем изоморфизм $\prod_{i=1}^k der_{1_Z,l_i}Z \cong \prod_{i=1}^k der_{1_Z,l'_i}Z$, тогда по теореме 85 имеем НОД $(l_1,\ldots,l_k,n-1) =$ НОД $(l'_1,\ldots,l'_k,n-1)$.

Далее, пусть образ $\sigma(1)$ образующего элемента 1 каждой группы Z из прямой суммы Z^k имеет вид $\sigma(1) = \sum_{i=1}^k e_{\rho i} + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} e_{\rho\epsilon v}$, где $\rho = 1,\ldots,k$, $e_{\rho i} \in Z$, $e_{\rho\epsilon v} \in Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ для $\epsilon = 1,\ldots,s$ и $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + w_j$, $1 \le w_j \le r_{\epsilon j}$. Тогда

$$\sigma(\sum_{i=1}^k l_i) = \sum_{\rho=1}^k l_\rho(\sum_{i=1}^k e_{\rho i} + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} e_{\rho\epsilon v}) = \sum_{i=1}^k \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho i} + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho\epsilon v}.$$

Из (139) получим

$$\sigma(\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} l_{\epsilon v}) = (n-1)(\sum_{i=1}^k u_i + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} u_{\epsilon v}) + \sum_{i=1}^k l'_i + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} l'_{\epsilon v} -$$

$$-\sigma(\sum_{i=1}^k l_i) = (n-1)(\sum_{i=1}^k u_i + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} u_{\epsilon v}) + \sum_{i=1}^k l'_i + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} l'_{\epsilon v} -$$

$$-\sum_{i=1}^k \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho i} - \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{\sum_{i=1}^{t_\epsilon} r_{\epsilon i}} \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho\epsilon v},$$

но $\sigma(\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}) \in A_2$, значит,

$$(n-1)(\sum_{i=1}^k u_i) + \sum_{i=1}^k l'_i - \sum_{i=1}^k \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho i} = 0$$

и

$$\sigma_{A_2}(\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}) =$$

$$= (n-1)(\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v}) + \sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} (l'_{\epsilon v} - \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho\epsilon v}). \tag{141}$$

Таким образом, для элемента $\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} u_{\epsilon v}$ из A_2 и автоморфизма σ_{A_2} верно равенство (128). По следствию 2 имеем изоморфизм n-групп

$$der_{1_{A_2},\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}} A_2 \cong der_{1_{A_2},\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} (l'_{\epsilon v} - \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho\epsilon v})} A_2,$$

а по теореме 29 имеем (129) и

$$der_{1_{A_2},\sum_{\epsilon=1}^s \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} (l'_{\epsilon v} - \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho\epsilon v})} A_2 = \prod_{\epsilon=1}^s \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},(l'_{\epsilon v} - \sum_{\rho=1}^k l_\rho e_{\rho\epsilon v})} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \cong$$

$$\cong \prod_{\epsilon=1}^s \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}},l''_{\epsilon v}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},$$

где $l''_{\epsilon v} = \text{НОД}(l'_{\epsilon v} - \sum_{\rho=1}^{k} l_\rho e_{\rho\epsilon v}, n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$. Тогда верно (130). Из изоморфизма (130) по теореме 83 для каждого простого числа p_ϵ ($\epsilon = 1, \ldots, s$) произведения

$$\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, l_{\epsilon v}}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \text{ и } \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, l''_{\epsilon v}}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$$

имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей, т.е. $D_{\epsilon j} = D''_{\epsilon j}$ для всех $j = 1, \ldots, t_\epsilon$, где $D''_{\epsilon j}$ взяты из системы (131).

Фиксируем индекс $\epsilon = 1, \ldots, s$. По свойствам делимости доказывается $\text{НОД}(L, D_{\epsilon j}) = \text{НОД}(L, D'_{\epsilon j})$. Необходимость доказана.

Достаточность. Из НОД $(l_1, \ldots, l_k, n-1) =$ НОД $(l'_1, \ldots, l'_k, n-1)$ по теореме 85 имеем $\prod_{i=1}^{k} der_{1_{Z, l_i}} Z \cong \prod_{i=1}^{k} der_{1_{Z, l'_i}} Z$, тогда, согласно теореме 29, имеем изоморфизм n-групп $der_{1_{Z^k, \sum_{i=1}^{k} l_i}} Z^k \cong der_{1_{Z^k, \sum_{i=1}^{k} l'_i}} Z^k$, из этого изоморфизма по следствию 2 имеем автоморфизм τ и элемент $\sum_{i=1}^{k} u_i$ группы Z^k такие, что верно (140).

Также, как в начале доказательства достаточности теоремы 87, выбираем автоморфизм σ прямой суммы $A_2 = \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{j=1}^{t_\epsilon} \sum_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ и пусть

$$\sigma(\sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} l_{\epsilon v}) = \sum_{\epsilon=1}^{s} \sum_{v=1}^{r_{\epsilon 1}+\ldots+r_{\epsilon t_\epsilon}} x_{\epsilon v}.$$

Тогда получим изоморфизм (130), где $l''_{\epsilon v} = \text{НОД}(x_{\epsilon v}, n-1, p_\epsilon^{m_{\epsilon j}})$. Из этого изоморфизма по теореме 83 для каждого простого числа p_ϵ ($\epsilon = 1, \ldots, s$) произведения

$$\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, l_{\epsilon v}}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \text{ и } \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, l''_{\epsilon v}}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$$

имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей, т.е. $D_{\epsilon j} = D''_{\epsilon j}$ для всех $j = 1, \ldots, t_\epsilon$, где $D''_{\epsilon j}$ взяты из системы (131).

Пусть для каждого $\epsilon = 1, \ldots, s$ верно $\text{НОД}(L, D_{\epsilon j}) = \text{НОД}(L, D'_{\epsilon j})$ для всех $j = 1, \ldots, t_\epsilon$. Если для каждого индекса $\epsilon = 1, \ldots, s$ верно $D_{\epsilon j} = D'_{\epsilon j}$ для всех индексов $j = 1, \ldots, t_\epsilon$, то, согласно теореме 82, декартовы произведения

$$\prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, l_{\epsilon v}}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}} \text{ и } \prod_{j=1}^{t_\epsilon} \prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}, l'_{\epsilon v}}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$$

изоморфны, а тогда декартовы произведения (137) и (138) изоморфны.

Пусть для некоторого ϵ ($\epsilon = 1, \ldots, s$) верно $D_{\epsilon j} \neq D'_{\epsilon j}$ для некоторых j из целочисленного интервала $[1, t_\epsilon]$. В этом случае также, как в доказательстве теоремы 87 аналогичного случая, доказывается изоморфизм декартовы произведений (137) и (138). Теорема доказана.

Теперь можно указать полную систему инвариантов для конечно порожденной абелевой n-группы $\langle G, f \rangle$, в разложение которой входит больше чем одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа. Пусть $\langle G, f \rangle$ изоморфна декартову произведению (120), где $k > 1$. Количество бесконечных абелевых полуциклических n-групп k в разложении (120) вместе с $L =$ НОД $(l_1, \ldots, l_k, n-1)$ и совокупность порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (120) вместе с набором наибольших общих делителей

НОД$(L, D_{\epsilon i})$, где $D_{\epsilon i}$ — компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}}, l_{\epsilon j}} Z_{p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}}$ для каждого $\epsilon = 1, \ldots, s$, назовем инвариантами n-группы $\langle G, f\rangle$.

Следствие 65 *Своими инвариантами конечно порожденная абелева n-группа, в разложение которой входит больше чем одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

4.3 Конечные полуабелевы n-группы

Наша основная цель в этом параграфе заключается в том, чтобы найти полную систему свойств (инвариантов) класса конечных полуабелевых n-групп, которая остается неизменной при изоморфизме n-групп в этом классе (по аналогии как в классе конечных абелевых групп инвариантами являются порядки элементов базиса конечной абелевой группы).

Изоморфизмы полуабелевых n-арных групп Заметим, что ретракты изоморфных полуабелевых n-групп изоморфны. Обратно неверно, т.е. полуабелевы n-группы, имеющие изоморфные ретракты, могут быть и не изоморфными. Найдем условия изоморфизма полуабелевых n-групп, которые (φ, d)-определенны на одной и той же группе G.

Пусть $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}G$ — полуабелева n-группа, где G — группа с операцией сложение. Для каждого автоморфизма φ' группы G, сопряженного автоморфизму φ, на группе G, рассмотрим эндоморфизм $\mu_{\varphi'}(x) = x + \varphi'(x) + \ldots + \varphi'^{n-2}(x)$. Обозначим через $Im\ \mu_{\varphi'}$ образ этого эндоморфизма. Пусть φ' получен из φ сопряжением с помощью автоморфизма θ, т.е. $\varphi' = \theta \circ \varphi \circ \theta^{-1}$. Тогда для каждого такого автоморфизма θ имеем смежный класс $\theta(d) + Im\ \mu_{\varphi'}$ по подгруппе $Im\ \mu_{\varphi'}$. Набор

$$\{\theta(d) + Im\ \mu_{\varphi'} \mid \theta \in Aut\ G\} \tag{142}$$

всех таких смежных классов назовем определяющим набором множеств для n-группы $\langle G, f\rangle$.

Теорема 89 *(Теорема 2, [87]-A) Полуабелевы n-группы $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}G$ и $\langle G, f'\rangle = der_{\psi,q}G$ изоморфны тогда и только тогда, когда автоморфизмы φ и ψ сопряжены в группе автоморфизмов группы G и определяющие наборы множеств этих n-групп одинаковые с точностью до перестановки.*

Доказательство. Для n-группы $\langle G, f'\rangle$ пусть определяющим набором множеств будет

$$\{\tau(q) + Im\ \mu_{\psi'} \mid \tau \in Aut\ \langle G, +\rangle\}. \tag{143}$$

Необходимость. Согласно следствию 2 найдутся автоморфизм σ группы G и элемент $u \in G$ такие, что верны равенства

$$\sigma(d) = u + \psi(u) + \ldots + \psi^{n-2}(u) + q, \tag{144}$$

$$\sigma \circ \varphi(x) = \psi \circ \sigma(x) \ \text{ для любого элемента } \ x \in G. \tag{145}$$

Сопряженность автоморфизмов φ и ψ следует из (145). Из (144) получим $\sigma(d) \in q + Im\ \mu_\psi$, а значит,

$$\sigma(d) + Im\ \mu_\psi = q + Im\ \mu_\psi. \tag{146}$$

Непосредственная проверка показывает, что если автоморфизм ψ получен из автоморфизма φ сопряжением с помощью автоморфизма σ в группе автоморфизмов группы G (т.е. $\psi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$), то

$$\sigma(Im\ \mu_\varphi) = Im\ \mu_\psi. \tag{147}$$

Из (146) и (147) получим

$$\sigma^{-1}(q) + Im\ \mu_\varphi = d + Im\ \mu_\varphi. \tag{148}$$

Пусть $\theta(d) + Im\ \mu_{\varphi'}$ – произвольно выбранное множество из определяющего набора множеств (142) n-группы $\langle G, f\rangle$. Выбираем автоморфизм $\theta \circ \sigma^{-1}$, для которого находим $\psi' = (\theta\circ\sigma^{-1})\circ\psi\circ(\theta\circ\sigma^{-1})^{-1}$, тогда класс смежности $\theta\circ\sigma^{-1}(q)+Im\ \mu_{\psi'}$ является множеством из определяющего набора множеств (143) n-группы $\langle G, f'\rangle$. Тогда верно равенство

$$\theta(d) + Im\ \mu_{\varphi'} = \theta \circ \sigma^{-1}(q) + Im\ \mu_{\psi'}. \tag{149}$$

Пусть теперь $\tau(q) + Im\ \mu_{\psi'}$ – произвольно выбранное множество из определяющего набора множеств (143) n-группы $\langle G, f'\rangle$. Выбираем автоморфизм $\tau\circ\sigma$, для которого находим $\varphi' = (\tau \circ \sigma) \circ \varphi \circ (\tau \circ \sigma)^{-1}$, тогда класс смежности $\tau \circ \sigma(d) + Im\ \mu_{\varphi'}$ является множеством из определяющего набора множеств (142) n-группы $\langle G, f\rangle$. Тогда верно равенство

$$\tau(q) + Im\ \mu_{\psi'} = \tau \circ \sigma(d) + Im\ \mu_{\varphi'}. \tag{150}$$

Из верности равенств (149) и (150) получим совпадение определяющих наборов множеств n-групп $\langle G, f\rangle$ и $\langle G, f'\rangle$.

Достаточность. Согласно условию, найдется автоморфизм σ группы G такой, что $\psi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ и смежный класс $\sigma(d) + Im\ \mu_\psi$ будет лежать в определяющем наборе множеств (142) n-группы $\langle G, f\rangle$. С другой стороны, в силу равенства определяющих наборов множеств (142) и (143), найдется автоморфизм τ, который перестановочен с автоморфизмом ψ, и верно равенство $\tau(q) + Im\ \mu_\psi = \sigma(d) + Im\ \mu_\psi$. Тогда автоморфизм τ^{-1} также перестановочен с автоморфизмом ψ. Получим $q + Im\ \mu_\psi = \tau^{-1} \circ \sigma(d) + Im\ \mu_\psi$. Тогда для нуля группы G найдется элемент u из G такой, что $\tau^{-1}\circ\sigma(d) = q+u+\psi(u)+\ldots+\psi^{n-2}(u)$, кроме того, $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \varphi = \psi \circ \tau^{-1} \circ \sigma$. Тогда по следствию 2 n-группы $\langle G, f\rangle$ и $\langle G, f'\rangle$ изоморфны. Теорема доказана.

Для абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$, $(1_G, d)$-определенной на абелевой группе G, класс сопряженности в группе автоморфизмов группы G, где лежит тождественный автоморфизм 1_G, является одноэлементным. На группе G рассмотрим эндоморфизм $\mu_{1_G}(x) = x + 1_G(x) + \ldots + 1_G^{n-2}(x) = (n-1)x$. Образом так построенного эндоморфизма будет подгруппа $Im\ \mu_{1_G} = (n-1)G$. Тогда для каждого автоморфизма θ имеем смежный класс $\theta(d) + (n-1)G$ по подгруппе $(n-1)G$. Набор

$$\{\theta(d) + (n-1)G \mid \theta \in Aut\ G\}. \tag{151}$$

всех таких смежных классов является определяющим набором множеств для абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$.

Следствие 66 *(Следствие 1, [87]-А) Абелевы n-группы $\langle G, f\rangle = der_{1_G,d}G$ и $\langle G, f'\rangle = der_{1_G,q}G$ изоморфны тогда и только тогда, когда определяющие наборы множеств этих n-групп одинаковые с точностью до перестановки.*

Разложение конечной полуабелевой n-группы в декартово произведение примарных полуабелевых n-групп. Как и для конечных абелевых n-групп (по аналогии с теорией абелевых групп), верна

Теорема 90 *(Теорема 3, [87]-А) Полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ изоморфна декартову произведению*

$$\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle$$

p_i-n-групп $\langle G_i, f_i\rangle$ порядков $|G_i| = p_i^{\alpha_i}$, где p_i – различные простые числа.

Доказательство. На n-группе $\langle G, f\rangle$ строим абелеву группу $\langle G, +\rangle = ret_c\langle G, f\rangle$, которая допускает разложение $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_k$ в прямую сумму своих силовских подгрупп G_i. Выбираем автоморфизм φ группы G по правилу $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$. Ограничение φ_{G_i} является автоморфизмом группы G_i $(i = 1, \ldots, k)$. Пусть для $d = f(\overset{(n)}{c})$ имеем $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$, где $d_i \in G_i$. Очевидно выполнены условия (22) и (23) из теоремы Глускина-Хоссу (теорема 10) для каждой пары φ_{G_i}, d_i.

Теперь строим p_i-n-группы $\langle G_i, f_i\rangle$, (φ_{G_i}, d_i)-определенные на каждой силовской подгруппе G_i. Отображение $\psi : G \to G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$, заданное по правилу

$$\psi(g_1 + g_2 + \ldots + g_k) = (g_1, g_2, \ldots, g_k),$$

является изоморфизмом n-групп $\langle G, f\rangle$ и $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle$ (проверяется непосредственно). Теорема доказана.

Как и в группах, разложение в теореме 90 определено однозначно, т.е. верна

Теорема 91 *(Теорема 4, [87]-А). Если конечная полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ изоморфна двум прямым произведениям*

$$\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle, \tag{152}$$

$$\langle G'_1, f'_1\rangle \times \langle G'_2, f'_2\rangle \times \ldots \times \langle G'_k, f'_k\rangle \tag{153}$$

p_i-n-групп $\langle G_i, f_i\rangle$ и $\langle G'_i, f'_i\rangle$ порядков $|G_i| = |G'_i| = p_i^{\alpha_i}$, то $\langle G_i, f_i\rangle \cong \langle G'_i, f'_i\rangle$ для всех индексов $i = 1, 2, \ldots, k$.

Теорема доказывается с использованием следствия 2.

Заметим, что теоремы 90 и 91 для абелевых n-групп доказаны в первом параграфе этой главы.

Конечные неразложимые полуабелевы p-n-группы. Известно, что примарная полуциклическая n-группа не может быть изоморфна декартову произведению каких-нибудь нескольких n-групп меньшего порядка (Предложение 49), т.е. такие полуциклические n-группы являются неразложимыми. Но среди конечных полуабелевых n-групп имеются и другие неразложимые n-группы. Какие же конечные полуабелевы p-n-группы являются неразложимыми? На этот вопрос мы ответим в следующей теореме.

Автоморфизм ψ конечной абелевой p-группы G назовем разложимым, если группу G можно представить в виде прямой суммы $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$ своих собственных подгрупп G_i (не обязательно циклических), так, чтобы ограничение ψ_{G_i} этого автоморфизма на каждую подгруппу G_i было бы автоморфизмом этой подгруппы. В противном случае назовем такой автоморфизм неразложимым.

Теорема 92 *(Теорема 5, [87]-А). Конечная полуабелева p-n-группа $\langle G, f\rangle$ является разложимой тогда и только тогда, когда автоморфизм φ ретракта $G = ret_c\langle G, f\rangle$ этой n-группы, заданный по правилу $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$, сопряжен (в группе автоморфизмов этого ретракта) некоторому разложимому автоморфизму.*

Доказательство. Пусть полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка p^α изоморфна декартову произведению $\langle H_1, f_1\rangle \times \ldots \times \langle H_k, f_k\rangle$ k полуабелевых n-групп $\langle H_i, f_i\rangle$ порядков p^{β_i}, $\beta_i < \alpha$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Пусть $H_i = ret_{c_i}\langle H_i, f_i\rangle$, $i = 1, \ldots, k$. На каждом ретракте H_i выбираем элемент $d_i = f_i(\overset{(n)}{c_i})$ и автоморфизм $\psi_i(x) = f_i(c_i, x, \overset{(n-3)}{c_i}, \bar{c}_i)$. На группе $H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$ выбираем автоморфизм $\psi(x_1 + \ldots + x_k) = \psi_1(x_1) + \ldots + \psi_k(x_k)$.

Согласно следствия 2, группы $G = ret_c\langle G, f\rangle$ и $H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$ изоморфны. Значит, группу G можно разложить в прямую сумму $G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$ своих подгрупп так, чтобы соответствующие прямые слагаемые G_i и H_i $(i = 1, \ldots, k)$ были изоморфны. Пусть τ_i – изоморфизм из H_i в G_i. Тогда $\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1}$ будет автоморфизмом в группе G_i, причем этот автоморфизм удовлетворяет условию $(\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1})^{n-1}(x) = x$ для любого элемента $x \in G_i$. Кроме того, для элемента $\tau(d_i) \in G_i$ верно равенство $\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1}(\tau(d_i)) = \tau(d_i)$. Тогда на каждой группе G_i строим полуабелеву n-группу $\langle G_i, f'_i\rangle = der_{\tau_i\circ\psi_i\circ\tau_i^{-1}, \tau(d_i)}G_i$. На группе G выбираем автоморфизм

$$\theta(x_1 + \ldots + x_k) = \tau_1 \circ \psi_1 \circ \tau_1^{-1}(x_1) + \ldots + \tau_k \circ \psi_k \circ \tau_k^{-1}(x_k).$$

Заметим, что автоморфизм θ будет разложимым. Тогда по теореме 29

$$\langle G_1, f'_1\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f'_k\rangle = der_{\theta, \tau_1(d_1)+\ldots+\tau_k(d_k)}G_1 \oplus \ldots \oplus G_k.$$

По следствия 2, n-группы $\langle H_1, f_1\rangle \times \ldots \times \langle H_k, f_k\rangle$ и $\langle G_1, f'_1\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f'_k\rangle$ изоморфны. Тогда изоморфны n-группы $\langle G, f\rangle$ и $\langle G_1, f'_1\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f'_k\rangle$. По следствия 2, есть автоморфизм σ группы G такой, что $\sigma \circ \varphi = \theta \circ \sigma$.

Обратно. На полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ порядка p^α строим ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$ и пусть автоморфизм $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ сопряжен с помощью автоморфизма σ в группе автоморфизмов группы G некоторому разложимому автоморфизму ψ, т.е. $\sigma \circ \varphi = \psi \circ \sigma$. Значит, группу G можно представить в виде прямой суммы $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$ своих подгрупп G_i так, что ограничение ψ_{G_i} автоморфизма ψ на каждую подгруппу G_i является автоморфизмом этой подгруппы. Пусть порядок каждой подгруппы G_i равен p^{β_i} и $\beta_i < \alpha$. Для элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ полагаем $\sigma(d) = d_1 + \ldots + d_k$, $d_i \in G_i$. На каждой группе G_i строим полуабелеву n-группу $\langle G_i, f_i\rangle = der_{\psi_{G_i}, d_i}G_i$. Тогда, по следствия 2, n-группы $\langle G, f\rangle$ и $\langle G_1, f_1\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle$ изоморфны. Теорема доказана.

Инварианты конечных полуабелевых p-n-групп. Пусть конечная полуабелева p-n-группа $\langle G, f\rangle$ (φ, d)-определена на абелевой p-группе G порядка $|G| = p^{\alpha_1}p^{\alpha_2}\ldots p^{\alpha_r}$, которая разлагается в прямую сумму циклических групп, т.е.

$$G = (a_1) \oplus (a_2) \oplus \ldots \oplus (a_r), \tag{154}$$

где $|(a_i)| = p^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Выбираем прямую сумму

$$A = Z_{p^{\alpha_1}} \oplus Z_{p^{\alpha_2}} \oplus \ldots \oplus Z_{p^{\alpha_r}} \tag{155}$$

аддитивных групп $Z_{p^{\alpha_i}}$ колец классов вычетов по модулям p^{α_i} и изоморфизмы σ_i из (a_i) в $Z_{p^{\alpha_i}}$, действующие по правилу $\sigma_i(sa_i) = s$, $0 \leq s \leq p^{\alpha_i} - 1$. Система изоморфизмов σ_i индуцирует изоморфизм $\sigma : \sigma(s_1a_1+s_2a_2+\ldots+s_ra_r) = s_1+s_2+\ldots+s_r$ между группами G и A. Изоморфизм σ, в свою очередь, индуцирует изоморфизм σ^* из группы автоморфизмов $AutG$ в группу автоморфизмов $AutA$, а именно: $\sigma^* : \psi \to \sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1}$, $\psi \in AutG$ (см., например, [40], стр. 294). При этом изоморфизме классу сопряженности $\{\psi \mid \psi$ сопряжен $\varphi\}$ из $AutG$ соответствует класс сопряженности

$$\{\sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1} \mid \psi \text{ сопряжен } \varphi \text{ в } AutG\} \text{ из } AutA. \tag{156}$$

Очевидно, для полуабелевой n-группы $\langle A, h\rangle = der_{\sigma\circ\varphi\circ\sigma^{-1},\sigma(d)}A$ определяющий набор множеств совпадает с набором множеств

$$\{\sigma(\theta(d)) + Im\ \mu_{\sigma\circ\varphi'\circ\sigma^{-1}} \mid \theta, \varphi' \in AutG, \varphi' = \theta \circ \varphi \circ \theta^{-1}\}. \tag{157}$$

Порядки $|(a_i)| = p^{\alpha_i}$ прямых слагаемых группы G, класс сопряженности (156) в группе автоморфизмов группы A и определяющий набор множеств (157) n-группы $\langle A, h\rangle$ назовем инвариантами конечной полуабелевой p-n-группы $\langle G, f\rangle$, (φ, d)-определенной на абелевой p-группе G порядка $|G| = p^{\alpha_1}p^{\alpha_2}\ldots p^{\alpha_r}$. Тогда из теоремы 89 и следствия 2 имеем

Следствие 67 *(Следствие 5, [87]-А) Своими инвариантами конечная полуабелева p-n-группа $\langle G, f\rangle$, (φ, d)-определенная на абелевой p-группе G порядка $|G| = p^{\alpha_1}p^{\alpha_2}\ldots p^{\alpha_r}$, определяется с точностью до изоморфизма.*

Рассмотрим теперь абелеву p-n-группу $\langle G, f\rangle$, $(1_G, d)$-определенную на абелевой p-группе G порядка $|G| = p^{\alpha_1}p^{\alpha_2}\ldots p^{\alpha_r}$, которая разлагается в прямую сумму циклических групп (154). Выбираем прямую сумму (155) аддитивных групп $Z_{p^{\alpha_i}}$ колец классов вычетов по модулям p^{α_i} и изоморфизмы σ_i из (a_i) в $Z_{p^{\alpha_i}}$, действующие по правилу $\sigma_i(sa_i) = s$, $0 \leq s \leq p^{\alpha_i} - 1$. Вновь система изоморфизмов σ_i индуцирует изоморфизм $\sigma : \sigma(s_1a_1 + s_2a_2 + \ldots + s_ra_r) = s_1 + s_2 + \ldots + s_r$ между группами G и A. Для абелевой n-руппы $\langle A, h\rangle = der_{1_A,\sigma(d)}A$ определяющий набор множеств совпадает с набором множеств

$$\{\sigma(\theta(d)) + (n-1)A \mid \theta \in AutG\}. \tag{158}$$

При определении инвариантов для конечной абелевой p-n-группы $\langle G, f\rangle$ класс сопряженности (156) можно не указывать, так как этот класс состоит только из тождественного автоморфизма. Заметим, что так выбранная система инвариантов для конечной абелевой p-n-группы отличается от системы инвариантов, которая была найдена в первом параграфе этой главы для этой же p-n-группы.

Следствие 68 *(Следствие 6, [87]-А) Если конечная абелева p-n-группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна двум прямым произведениям*

$$\langle(a_1), f_1\rangle \times \langle(a_2), f_2\rangle \times \ldots \times \langle(a_r), f_r\rangle, \tag{159}$$

$$\langle(b_1), f_1'\rangle \times \langle(b_2), f_2'\rangle \times \ldots \times \langle(b_s), f_s'\rangle \tag{160}$$

абелевых полуциклических p-n-групп $\langle(a_i), f_i\rangle$ и $\langle(b_j), f_j'\rangle$, то инварианты прямых произведений (159) и (160) одинаковые, в частности, $r = s$ и порядки $|(a_i)|$ совпадают с порядками $|(b_j)|$ при некотором упорядочении последних.

Пусть α — натуральное число. Запишем его в виде суммы

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r \geq 1. \tag{161}$$

Число всех таких разбиений с $r = 1, 2, \ldots$ обозначим через $p(\alpha)$. Известно, что число неизоморфных абелевых групп порядка p^α равно $p(\alpha)$ (см., например, [47]). Для каждого разбиения $\delta_s(\alpha)$ вида (161) ($s = 1, \ldots, p(\alpha)$) имеем единственную (с точностью до изоморфизма) абелеву группу (154). Выбираем прямую сумму (155). Пусть $[\varphi_1]_s, \ldots, [\varphi_{in(\delta_s(\alpha))}]_s$ — классы сопряженности автоморфизмов группы A, порядки которых делят $n-1$, где $in(\delta_s(\alpha))$ — число этих классов. Для автоморфизма φ_t из каждого класса сопряженности $[\varphi_t]_s$ ($t = 1, \ldots, in(\delta_s(\alpha))$) и для всех элементов d группы A, для которых $\varphi_t(d) = d$, находим определяющие наборы множеств. Через $q([\varphi_t]_s, \alpha)$ обозначим количество таких наборов для класса сопряженности $[\varphi_t]_s$.

Следствие 69 *(Следствие 8, [87]-A) Число неизоморфных полуабелевых n-групп порядка* p^α *равно* $\sum_{s=1}^{p(\alpha)} \sum_{t=1}^{in(\delta_s(\alpha))} q([\varphi_t]_s, \alpha)$.

Среди классов $[\varphi_1]_s, \ldots, [\varphi_{in(\delta_s(\alpha))}]_s$ сопряженности автоморфизмов группы A, порядки которых делят $n-1$, имеется класс $[1_A]_s$, состоящий только из тождественного автоморфизма 1_A.

Следствие 70 *(Следствие 9, [87]-A) Число неизоморфных абелевых n-групп порядка* p^α *равно* $\sum_{s=1}^{p(\alpha)} q([1_A]_s, \alpha)$.

Пример 6 *Найдем все тернарные группы порядка 3 (с точностью до изоморфизма). Они все будут полуциклическими, так как у них ретракты – циклическая группа порядка 3.*

Для $\alpha = 1$ *имеем одно разбиение (так как* $p(1) = 1$*):* $\delta_1(1) : 3 = 3$.

Фиксируем $n = 3$ *и* $p = 3$. *Для разбиения* $\delta_1(1)$ *имеем циклическую группу* $G = (a_1)$, *где* $|(a_1)| = 3$. *Выбираем аддитивную группу* Z_3 *кольца классов вычетов по модулю 3. Оба автоморфизма из* $Aut Z_3$ *имеют порядки, делящие* $n-1 = 2$, *это тождественный автоморфизм* 1_{Z_3}; *автоморфизм* φ_1, *для которого* $\varphi_1(1) = 2$. *Число классов сопряженности* $in(\delta_1(1))$ *автоморфизмов группы* Z_3, *порядки которых делят* $n-1 = 2$, *равно 2, т.е.* $in(\delta_1(1)) = 2$. *Оба класса одноэлементные. Для класса сопряженности* $[1_{Z_3}]_1$ *имеем один определяющих набора множеств, это* $\{0, 1, 2\}$. *Для класса сопряженности* $[\varphi_1]_1$ *имеем также один определяющий набор множеств, это* $\{0\}$.

Число неизоморфных тернарных групп порядка 3 *равно 2. Если* $(a_1) = Z_3$, *то все неизоморфные тернарные группы порядка* 3 *имеют вид:*

$$der_{1_{Z_3},0} Z_3, \quad der_{\varphi_1,0} Z_3.$$

Отметим, что среди перечисленных тернарных групп имеется одна абелева тернарная группа, это $der_{1_{Z_3},0} Z_3$, *причем, она будет циклической.*

Пример 7 *Найдем все тернарные группы порядка 4 (с точностью до изоморфизма). Они все будут полубелевы, так как у них ретракты – абелевы группы.*

Для $\alpha = 2$ *имеем* $p(2) = 2$ *разбиения:* $\delta_1(2) : 2 = 1 + 1$, $\delta_2(2) : 2 = 2$. *Фиксируем* $n = 3$ *и* $p = 2$. *Для разбиения* $\delta_1(2)$ *имеем абелеву группу* $G = (a_1) \oplus (a_2)$, *где* $|(a_1)| = |(a_2)| = 2$.

Выбираем прямую сумму $A = Z_2 \oplus Z_2$, где Z_2 — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю 2. Группа автоморфизмов $AutA$ этой группы изоморфна симметрической группе S_3. Четыре автоморфизма из $AutA$ имеют порядки, делящие $n-1=2$, это тождественный автоморфизм 1_A; автоморфизм φ_1, для которого $\varphi_1((1,0)) = (0,1)$, $\varphi_1((0,1)) = (1,0)$; автоморфизм φ_2, для которого $\varphi_2((1,0)) = (1,1)$, $\varphi_2((0,1)) = (0,1)$; автоморфизм φ_3, для которого $\varphi_3((1,0)) = (1,0)$, $\varphi_3((0,1)) = (1,1)$. Число классов сопряженности $in(\delta_1(2))$ автоморфизмов группы A, порядки которых делят $n-1=2$, равно 2, т.е. $in(\delta_1(2))$=2. Первый класс сопряженности одноэлементный, он состоит из тождественного автоморфизма 1_A. Второй класс сопряженности содержит три автоморфизма, это $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Для класса сопряженности $[1_A]_1$ имеем два определяющих набора множеств, это $\{(0,0)\}$ и $\{(1,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,1)\}$. Для класса сопряженности $[\varphi_1]_1$ имеем один определяющий набор множеств, это $\{(0,0),(1,0)\}$, $\{(0,0),(0,1)\}, \{(0,0),(1,1)\}$.

Для разбиения $\delta_2(2)$ имеем абелеву группу $G = (a_1)$, где $|(a_1)| = 4$. Выбираем аддитивную группу Z_4 кольца классов вычетов по модулю 4. Оба автоморфизма из $AutZ_4$ имеют порядки, делящие $n-1=2$. $in(\delta_2(2))$=2. Оба класса сопряженности одноэлементные. Для класса сопряженности $[1_{Z_4}]_2$ имеем два определяющих набора множеств, это $\{0,2\}$ и $\{1,3\}$. Для класса сопряженности $[\psi_1]_2$, где $\psi_1(1) = 3$, имеем два определяющих набора множеств, это $\{0\}$ и $\{2\}$.

Число неизоморфных тернарных групп порядка 4 равно 7. Если циклическую группу порядка m обозначить Z_m, то все неизоморфные тернарные группы порядка 4 имеют вид:

$$der_{1_{Z_2\times Z_2},(0,0)}Z_2 \oplus Z_2,\quad der_{1_{Z_2\times Z_2},(1,0)}Z_2 \oplus Z_2,\quad der_{\varphi_1,(0,0)}Z_2 \oplus Z_2,$$
$$der_{1_{Z_4},0}Z_4,\quad der_{1_{Z_4},1}Z_4,\quad der_{\psi_1,0}Z_4,\quad der_{\psi_1,2}Z_4.$$

Отметим, что среди перечисленных тернарных групп имеются четыре абелевы тернарные группы, это

$$der_{1_{Z_2\times Z_2},(0,0)}Z_2 \oplus Z_2,\quad der_{1_{Z_2\times Z_2},(1,0)}Z_2 \oplus Z_2,\quad der_{1_{Z_4},0}Z_4,\quad der_{1_{Z_4},1}Z_4,$$

причем, первые две тернарные группы раскладываются в декартово произведение абелевых полуциклических тернарных групп, т.е.

$$der_{1_{Z_2\times Z_2},(0,0)}Z_2 \oplus Z_2 \cong der_{1_{Z_2},0}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2,$$
$$der_{1_{Z_2\times Z_2},(1,0)}Z_2 \oplus\ Z_2 \cong der_{1_{Z_2},1}Z_2 \times der_{1_{Z_2},0}Z_2.$$

Основная теорема о конечных полуабелевых n-группах. Опираясь на разложение конечной полуабелевой n-группы в декартово произведение примарных полуабелевых n-групп (теорема 90) и на его единственность (теорема 91), а также на следствие 67, мы приходим к следующему основному утверждению о конечных полуабелевых n-группах.

Теорема 93 *(Теорема 6, [87]-А) Всякая конечная полуабелева n-группа изоморфна прямому произведению примарных полуабелевых n-групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей и примарные множители в этих разложениях по одному и тому же простому числу имеют одинаковые инварианты.*

Согласно теореме 93, для любой полуабелевой n-агруппы $\langle G, f\rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ имеем изоморфизм

$$\langle G, f\rangle \cong \langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k\rangle,$$

где $\langle G_i, f_i\rangle$ — p_i-n-группа порядка $|G_i| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$, p_i — различные простые числа. Совокупность инвариантов примарных множителей $\langle G_i, f_i\rangle$, $i = 1, \ldots, k$, назовем инвариантами n-группы $\langle G, f\rangle$.

Для абелевых n-групп, опираясь на теоремы 90 и 91, а также на теорему 80 и следствие 68, мы получим основную теорему о строении конечных абелевых n-групп:

Теорема 94 *(Теорема 7, [87]-A) Всякая конечная абелева n-группа изоморфна декартову призведению примарных абелевых полуциклических n-групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка и по каждому простому делителю порядка этой n-группы произведения примарных множителей в этих разложениях имеют одинаковые инварианты.*

Согласно теореме 94, для любой абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ имеем изоморфизм

$$\langle G, f\rangle \cong \langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle \cong$$

$$\cong \prod_{j=1}^{r_1}\langle (a_{j1}), f_{j1}\rangle \times \prod_{j=1}^{r_2}\langle (a_{j2}), f_{j2}\rangle \times \ldots \times \prod_{j=1}^{r_k}\langle (a_{jk}), f_{jk}\rangle,$$

где $\langle G_i, f_i\rangle$ — p_i-n-группа порядка $|G_i| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$, p_i – различные простые числа. По каждому простому числу p_i имеем разложение p_i-n-группы

$$\langle G_i, f_i\rangle \cong \langle (a_{1i}), f_{1i}\rangle \times \langle (a_{2i}), f_{2i}\rangle \times \ldots \times \langle (a_{r_i i}), f_{r_i i}\rangle$$

в декартово произведение абелевых полуциклических p_i-n-групп $\langle (a_{ji}), f_{ji}\rangle$. Совокупность инвариантов примарных множителей $\langle G_i, f_i\rangle$, $i = 1, \ldots, k$, назовем инвариантами абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$. Заметим, что так выбранная система инвариантов для конечной абелевой n-группы отличается от системы инвариантов, которая была найдена в первом параграфе этой главы для этой же n-группы.

Как пример перечислим все полуабелевы тернарные группы порядка 12:

Полубелевы тернарные группы порядка 12	Инварианты
$der_{1_{Z_2\oplus Z_2},(0,0)}Z_2\oplus Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3\cong$ $\cong der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3,$	$2,2,[1_{Z_2\oplus Z_2}]_1,\ \{0\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{1_{Z_2\oplus Z_2},(1,0)}Z_2\oplus Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3\cong$ $\cong der_{1_{Z_2},1}Z_2\times der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3,$	$2,\ 2,\ [1_{Z_2\oplus Z_2}]_1,\ \{(1,0)\},\{(0,1)\},\{(1,1)\};$ $3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{\varphi_1,(0,0)}Z_2\oplus Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3$	$2,\ 2,\ [\varphi_1]_1,\ \{(0,0),(1,0)\},\ \{(0,0),(0,1)\},$ $\{0,(0,0),(1,1)\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{1_{Z_4},0}Z_4\times der_{1_{Z_3},0}Z_3$	$4,\ [1_{Z_4}]_2,\ \{0,\ 2\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{1_{Z_4},1}Z_4\times der_{1_{Z_3},0}Z_3$	$4,\ [1_{Z_4}]_2,\ \{1,\ 3\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{\psi_1,0}Z_4\times der_{1_{Z_3},0}Z_3$	$4,\ [\psi_1]_2,\ \{0\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{\psi_1,2}Z_4\times der_{1_{Z_3},0}Z_3$	$4,\ [\psi_1]_2,\ \{2\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{1_{Z_2\oplus Z_2},(0,0)}Z_2\oplus Z_2\times der_{\varphi_1,0}Z_3\cong$ $\cong der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{\varphi_1,0}Z_3,$	$2,2,[1_{Z_2\oplus Z_2}]_1,\ \{0\};\ 3,\ [\varphi_1]_1,\ \{0\}$
$der_{1_{Z_2\oplus Z_2},(1,0)}Z_2\oplus Z_2\times der_{\varphi_1,0}Z_3\cong$ $\cong der_{1_{Z_2},1}Z_2\times der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{\varphi_1,0}Z_3,$	$2,\ 2,\ [1_{Z_2\oplus Z_2}]_1,\ \{(1,0)\},\{(0,1)\},\{(1,1)\};$ $3,\ [\varphi_1]_1,\ \{0\}$
$der_{\varphi_1,(0,0)}Z_2\oplus Z_2\times der_{\varphi_1,0}Z_3$	$2,\ 2,\ [\varphi_1]_1,\ \{(0,0),(1,0)\},\ \{(0,0),(0,1)\},$ $\{0,(0,0),(1,1)\};\ 3,\ [\varphi_1]_1,\ \{0\}$
$der_{1_{Z_4},0}Z_4\times der_{\varphi_1,0}Z_3$	$4,\ [1_{Z_4}]_2,\ \{0,\ 2\};\ 3,\ [\varphi_1]_1,\ \{0\}$
$der_{1_{Z_4},1}Z_4\times der_{\varphi_1,0}Z_3$	$4,\ [1_{Z_4}]_2,\ \{1,\ 3\};\ 3,\ [\varphi_1]_1,\ \{0\}$
$der_{\psi_1,0}Z_4\times der_{\varphi_1,0}Z_3$	$4,\ [\psi_1]_2,\ \{0\};\ 3,\ [\varphi_1]_1,\ \{0\}$
$der_{\psi_1,2}Z_4\times der_{\varphi_1,0}Z_3$	$4,\ [\psi_1]_2,\ \{2\};\ 3,\ [\varphi_1]_1,\ \{0\}$

Выбрав из таблицы абелевы тернарные группы, мы получим перечисление всех абелевых тернарных групп порядка 12:

Абелевы тернарные группы порядка 12	Инварианты
$der_{1_{Z_2\oplus Z_2},(0,0)}Z_2\oplus Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3\cong$ $\cong der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3,$	$2,2,[1_{Z_2\oplus Z_2}]_1,\ \{0\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{1_{Z_2\oplus Z_2},(1,0)}Z_2\oplus Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3\cong$ $\cong der_{1_{Z_2},1}Z_2\times der_{1_{Z_2},0}Z_2\times der_{1_{Z_3},0}Z_3,$	$2,\ 2,\ [1_{Z_2\oplus Z_2}]_1,\ \{(1,0)\},\{(0,1)\},\{(1,1)\};$ $3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{1_{Z_4},0}Z_4\times der_{1_{Z_3},0}Z_3$	$4,\ [1_{Z_4}]_2,\ \{0,\ 2\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$
$der_{1_{Z_4},1}Z_4\times der_{1_{Z_3},0}Z_3$	$4,\ [1_{Z_4}]_2,\ \{1,\ 3\};\ 3,\ [1_{Z_3}]_1,\ \{0,1,2\}$

4.4 Конечно порожденные полуабелевы n-группы

В этом параграфе изучим неразложимые полуабелевы n-группы и докажем неразложимость бесконечной полуциклической n-группы. Далее докажем признак неразложимости полуабелевой n-группы и разложимость конечно порожденной полуабелевой n-группы в прямое произведение неразложимых конечно порожденных полуабелевых n-групп, частью бесконечных, частью конечных примарных.

Неразложимые конечно порожденные полуабелевы n-группы. В теории конечно порожденных абелевых групп неразложимыми являются бесконечные и конечные примарные циклические группы, которые служат компонентами прямого разложения конечно порожденной абелевой группы.

Для конечно порожденных полуабелевых n-групп ситуация иная. n-Арным аналогом циклической группы служит полуциклическая n-группа. Следующая теорема является аналогом теоремы из теории абелевых групп о неразложимости бесконечной циклической группы.

Теорема 95 *(Теорема 2, [88]-А) Бесконечная полуциклическая n-группа неразложима.*

Доказательство. В аддитивной группе целых чисел Z имеем два автоморфизма: тождественный 1_Z и φ_1, где $\varphi_1(z) = -z$, $z \in Z$. Для 1_G и любого целого числа l определяем абелеву n-группу $der_{1_Z,l}Z$, которая будет полуциклической, так как $ret_0 der_{1_Z,l}Z = Z$ (согласно предложению 8). Любая бесконечная абелева полуциклическая n-группа изоморфна $der_{1_Z,l}Z$, где $0 \leq l \leq \frac{n-1}{2}$ (теорема 72). Для автоморфизма φ_1 равенство $\varphi_1^{n-1}(x) = x$ верно для любого $x \in Z$ только при нечетных n, причем элемент d, для которого верно $\varphi_1(d) = d$, может быть только нулем. Для φ_1 и 0 при нечетных n определяем n-группу $der_{\varphi_1,0}Z$, которая будет также полуциклической, но не абелевой. Любая бесконечная неабелева полуциклическая n-группа изоморфна $der_{\varphi_1,0}Z$ (теорема 72).

Перейдем к доказательству теоремы. Доказано, что n-группы $der_{1_Z,l}Z$, где $0 \leq l \leq \frac{n-1}{2}$, являются неразложимыми (теорема 73). Докажем, что n-группа $der_{\varphi_1,0}Z$ при нечетных n является неразложимой. От противного. Пусть n-группа $der_{\varphi_1,0}Z$ является разложимой, т.е. она изоморфна декартову произведению $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle$ двух полуабелевых n-групп. Тогда

$$ret_c\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle = ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \times ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle,$$

где $c = (c_1, c_2)$ (см. теорему 28). Значит, декартово произведение $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle$, согласно предложению 8, является n-группой, (φ, d)-определенной от прямой суммы $ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \oplus ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$, где $d = (f_1(\overset{(n)}{c_1}), f_2(\overset{(n)}{c_2}))$ и автоморфизм φ действует по правилу $\varphi((x,y)) = (f_1(c_1, x, \overset{(n-3)}{c_1}, \bar{c}_1), f_2(c_2, y, \overset{(n-3)}{c_2}, \bar{c}_2))$. Но $Z \cong ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \oplus ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$ (по следствию 2), а это противоречит неразложимости группы Z. Теорема доказана.

Среди неразложимых полуабелевых n-групп, кроме бесконечных и конечных примарных полуциклических, имеются другие неразложимые n-группы. В параграфе 4.3 приведен пример конечной неразложимой полуабелевой тернарной группы, которая не является полуциклической. Здесь мы укажем пример для бесконечного случая.

Рассмотрим тернарную группу $\langle G, f\rangle$, (φ, d)-определенную на прямой сумме $Z \oplus Z_2$, где Z_2 — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю 2, автоморфизм φ задан по правилу $\varphi((x,y)) = (x, x+y)$, $d = (2, 1)$. Эта тернарная группа не является абелевой, так как автоморфизм φ не является тождественным. Если бы она была разложимой, т.е. $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению $\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle$ двух полуабелевых тернарных групп, то имеем $ret_c\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle = ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \times ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle$, где $c = (c_1, c_2)$ (см. теорему 28). Значит, согласно предложению 8, имеем

$$\langle G_1, f_1\rangle \times \langle G_2, f_2\rangle = der_{\varphi', d'}(ret_{c_1}\langle G_1, f_1\rangle \oplus ret_{c_2}\langle G_2, f_2\rangle),$$

где $\varphi'((g_1,g_2)) = (f_1(c_1,g_1,\overset{(n-3)}{c_1},\bar{c}_1), f_2(c_2,g_2,\overset{(n-3)}{c_2},\bar{c}_2)) = (\varphi'_{G_1}(g_1),\varphi'_{G_2}(g_2))$, $d' = (d_1,d_2) = (f_1(\overset{(n)}{c_1}), f_2(\overset{(n)}{c_2}))$. По следствию 2 имеем $Z\oplus Z_2 \cong ret_{c_1}\langle G_1,f_1\rangle \oplus ret_{c_2}\langle G_2,f_2\rangle$. В силу однозначной разложимости группы $Z\oplus Z_2$, получим $ret_{c_1}\langle G_1,f_1\rangle \cong Z$, $ret_{c_2}\langle G_2,f_2\rangle \cong Z_2$. Итак, $ret_{c_1}\langle G_1,f_1\rangle$ — бесконечная циклическая группа, пусть $ret_{c_1}\langle G_1,f_1\rangle = (a)$, и $ret_{c_2}\langle G_2,f_2\rangle$ — конечная циклическая группа второго порядка, пусть $ret_{c_2}\langle G_2,f_2\rangle = (b)$. Автоморфизм φ'_{G_1} на группе (a) может быть тождественным, либо действовать по правилу $\varphi'_{G_1}(sa) = -sa$. Автоморфизм φ'_{G_2} на группе (b) может быть только тождественным. Тогда автоморфизм φ' на группе $(a)\oplus(b)$ может быть тождественным, либо действовать по правилу $\varphi'((sa,tb)) = (-sa,tb)$.

Кроме того, по следствию 2 есть изоморфизм σ группы $Z\oplus Z_2$ в группу $(a)\oplus(b)$ такой, что верно $\sigma\circ\varphi = \varphi'\circ\sigma$. Причем, изоморфизм σ может действовать только по одному из четырех правил:

$$1)\ \sigma((x,y)) = (xa,yb);\ 2)\ \sigma((x,y)) = (-xa,yb);$$

$$3)\ \sigma((x,y)) = (xa,(x+y)b);\ 4)\ \sigma((x,y)) = (-xa,(x+y)b).$$

Непосредственная проверка показывает, что во всех этих четырех случаях верно $\sigma\circ\varphi \neq \varphi'\circ\sigma$, что противоречит выше указанному правилу. Значит, тернарная группа $\langle G,f\rangle = der_{\varphi,d}Z\oplus Z_2$, где автоморфизм φ задан по правилу $\varphi((x,y)) = (x,x+y)$ и $d = (2,1)$, является неразложимой.

Какие же конечно порожденные полуабелевы n-группы являются неразложимыми? На этот вопрос мы ответим в следующей теореме.

Автоморфизм ψ конечно порожденной абелевой группы G назовем разложимым, если группу G можно представить в виде прямой суммы

$$G = G_1\oplus\ldots\oplus G_k$$

своих собственных подгрупп G_i (не обязательно циклических) так, чтобы ограничение ψ_{G_i} этого автоморфизма на каждую подгруппу G_i было бы автоморфизмом этой подгруппы. В противном случае назовем такой автоморфизм неразложимым.

Теорема 96 *(Теорема 3, [88]-A) Конечно порожденная полуабелева n-группа $\langle G,f\rangle$ является разложимой тогда и только тогда, когда автоморфизм φ ретракта $G = ret_c\langle G,f\rangle$ этой n-группы, заданный по правилу $\varphi(x) = f(c,x,\overset{(n-3)}{c},\bar{c})$, сопряжен (в группе автоморфизмов этого ретракта) некоторому разложимому автоморфизму.*

Доказательство. Пусть конечно порожденная полуабелева n-группа $\langle G,f\rangle$ изоморфна прямому произведению $\langle H_1,f_1\rangle\times\ldots\times\langle H_k,f_k\rangle$ полуабелевых n-групп $\langle H_i,f_i\rangle$. На n-группе $\langle G,f\rangle$ строим ретракт $G = ret_c\langle G,f\rangle$. Согласно предложению 9 имеем $\langle G,f\rangle = der_{\varphi,d}G$, где $d = f(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм φ ретракта G действует по правилу $\varphi(x) = f(c,x,\overset{(n-3)}{c},\bar{c})$.

По теореме 28 имеем

$$ret_{(c_1,\ldots,c_k)}\langle H_1,f_1\rangle\times\ldots\times\langle H_k,f_k\rangle = ret_{c_1}\langle H_1,f_1\rangle\oplus\ldots\oplus ret_{c_k}\langle H_k,f_k\rangle.$$

Пусть $H_i = ret_{c_i}\langle H_i,f_i\rangle$ для всех $i = 1,\ldots,k$. На каждом ретракте H_i выбираем $d_i = f_i(\overset{(n)}{c_i})$ и рассмотрим автоморфизм ψ_i, действующий по правилу $\psi_i(x) = f_i(c_i,x,\overset{(n-3)}{c_i},\bar{c}_i)$. На группе

$H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$ выбираем автоморфизм ψ, действующий по правилу: для любых элементов $x_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, k$, $\psi(x_1 + \ldots + x_k) = \psi_1(x_1) + \ldots + \psi_k(x_k)$. По теореме 29 имеем

$$\langle H_1, f_1 \rangle \times \ldots \times \langle H_k, f_k \rangle = der_{\psi, d_1 + \ldots + d_k} H_1 \oplus \ldots \oplus H_k.$$

По следствию 2 группы G и $H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$ изоморфны. Значит, группу G можно разложить в прямую сумму $G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$ своих подгрупп так, чтобы соответствующие прямые слагаемые G_i и H_i $(i = 1, \ldots, k)$ были изоморфны. Пусть τ_i – изоморфизм из H_i в G_i. Тогда $\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1}$ будет автоморфизмом в группе G_i, причем верно $(\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1})^{n-1}(x) = x$ для любого элемента $x \in G_i$. Кроме того, для элемента $\tau_i(d_i) \in G_i$ верно равенство $\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1}(\tau_i(d_i)) = \tau_i(d_i)$. Тогда на каждой группе G_i строим полуабелеву n-группу $\langle G_i, f_i' \rangle = der_{\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1}, \tau_i(d_i)} G_i$. На группе $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$ выбираем автоморфизм θ по правилу: для любых элементов $x_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, k$,

$$\theta(x_1 + \ldots + x_k) = \tau_1 \circ \psi_1 \circ \tau_1^{-1}(x_1) + \ldots + \tau_k \circ \psi_k \circ \tau_k^{-1}(x_k).$$

Заметим, что автоморфизм θ будет разложимым. Кроме того, для любых элементов $x_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, k$, $\theta^{n-1}(x_1 + \ldots + x_k) = x_1 + \ldots + x_k$ и $\theta(\tau_1(d_1) + \ldots + \tau_k(d_k)) = \tau_1(d_1) + \ldots + \tau_k(d_k)$. Тогда по теореме 29

$$\langle G_1, f_1' \rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k' \rangle = der_{\theta, \tau_1(d_1) + \ldots + \tau_k(d_k)} G_1 \oplus \ldots \oplus G_k.$$

Таким образом, нашелся изоморфизм τ из группы $H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$ в группу G, действующий по правилу $\tau(x_1 + \ldots + x_k) = \tau_1(x_1) + \ldots + \tau_k(x_k)$, и элемент $u = 0$ — нуль из G такие, что

$$\tau(d_1 + \ldots + d_k) = u + \theta(u) + \ldots + \theta^{n-2}(u) + \tau_1(d_1) + \ldots + \tau_k(d_k)$$

и $\tau \circ \psi(x_1 + \ldots + x_k) = \theta \circ \tau(x_1 + \ldots + x_k)$ для любого элемента $x_1 + \ldots + x_k$ из $H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$.

По следствию 2, $\langle H_1, f_1 \rangle \times \ldots \times \langle H_k, f_k \rangle \cong \langle G_1, f_1' \rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k' \rangle$. Тогда изоморфны n-группы $\langle G, f \rangle$ и $\langle G_1, f_1' \rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k' \rangle$. По следствию 2, найдется автоморфизм σ группы G такой, что $\sigma \circ \varphi = \theta \circ \sigma$, т.е. автоморфизм φ сопряжен в группе автоморфизмов группы G разложимому автоморфизму θ.

Обратно. На конечно порожденной полуабелевой n-группе $\langle G, f \rangle$ строим ретракт $G = ret_c\langle G, f \rangle$ и пусть автоморфизм φ этого ретракта, заданный $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$, сопряжен с помощью автоморфизма σ в группе автоморфизмов группы G некоторому разложимому автоморфизму ψ, т.е. $\sigma \circ \varphi = \psi \circ \sigma$. Значит, группу G можно представить в виде прямой суммы $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$ своих подгрупп G_i так, что ограничение ψ_{G_i} автоморфизма ψ на каждую подгруппу G_i является автоморфизмом этой подгруппы. Для элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ полагаем $\sigma(d) = d_1 + \ldots + d_k$, $d_i \in G_i$. Тогда

$$\psi_{G_1}(d_1) + \ldots + \psi_{G_k}(d_k) = \psi(d_1 + \ldots + d_k) =$$

$$= \psi(\sigma(d)) = \sigma(\varphi(d)) = \sigma(d) = d_1 + \ldots + d_k.$$

В силу единственности разложения каждого элемента в прямой сумме групп $G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$ имеем $\psi_{G_i}(d_i) = d_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Далее, для любого элемента $x_i \in G_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ получим

$$\psi_{G_i}^{n-1}(x_i) = \psi^{n-1}(x_i) = \sigma(\varphi^{n-1}(\sigma^{-1}(x_i))) = \sigma(\sigma^{-1}(x_i)) = x_i.$$

На каждой группе G_i строим полуабелеву n-группу $\langle G_i, f_i\rangle = der_{\psi_{G_i}, d_i} G_i$. Тогда, по теореме 29, $\langle G_1, f_1\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle = der_{\psi, d_1+\ldots+d_k} G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$. Кроме того, согласно предложению 9, имеем $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} G$. Таким образом, для n-групп $\langle G, f\rangle$ и $\langle G_1, f_1\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle$ нашлись автоморфизм σ и элемент 0 группы G такие, что $\sigma(d) = 0+\psi(0)+\ldots+\psi^{n-2}(0)+d_1+\ldots+d_k$ и $\sigma \circ \varphi(x) = \psi \circ \sigma(x)$ для любого элемента $x \in G$. Тогда, по следствию 2, n-группы $\langle G, f\rangle$ и $\langle G_1, f_1\rangle \times \ldots \times \langle G_k, f_k\rangle$ изоморфны, т.е. n-группа $\langle G, f\rangle$ является разложимой. Теорема доказана.

Разложение конечно порожденной полуабелевой n-группы.

Теорема 97 *(Теорема 4, [88]-А) Конечно порожденная полуабелева n-группа изоморфна декартову произведению неразложимых конечно порожденных полуабелевых n-групп, частью бесконечных, частью конечных примарных.*

Доказательство. Ретракт $G = ret_c\langle G, f\rangle$ конечно порожденной полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ является конечно порожденной абелевой группой (согласно следствию 3.2 из [75]), а значит, G раскладывается в прямую сумму своих циклических подгрупп, частью бесконечных, частью конечных примарных, т.е.

$$G = \sum_{i=1}^{k} (a_i) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{r_j} (b_{js}), \tag{162}$$

где (a_i) — бесконечные циклические группы, (b_{js}) — циклические группы порядков $p_j^{\alpha_{js}}$, p_j — различные простые числа.

Доказательство теоремы будем вести индукцией по количеству t прямых слагаемых в разложении (162), где $t = k+\sum_{j=1}^{m} r_j$. Для $t = 1$ имеем циклическую группу G бесконечную или конечную, а тогда $\langle G, f\rangle$ является бесконечной полуциклической n-группой, которая неразложима по теореме 95, либо является конечной полуциклической n-группой, которая разложима на произведение примарных полуциклических n-групп по предложению 50.

Пусть теперь теорема верна для всех v таких, что $v < t$. Докажем теорему для t. Выбираем автоморфизм φ ретракта G, который задан по правилу $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$. Если в классе сопряженности, где находится φ, нет разложимых автоморфизмов, то $\langle G, f\rangle$ будет неразложимой n-группой (теорема 96). Если же φ сопряжен некоторому разложимому автоморфизму (в группе автоморфизмов этого ретракта), то, по той же теореме 96, $\langle G, f\rangle$ будет разложимой n-группой. Пусть

$$\langle G, f\rangle \cong \langle A, f_1\rangle \times \langle B, f_2\rangle. \tag{163}$$

Тогда $ret_{(a,b)}\langle A, f_1\rangle \times \langle B, f_2\rangle = ret_a\langle A, f_1\rangle \oplus ret_b\langle B, f_2\rangle$ (см. теорему 28). Из второго условия следствия 2 имеем $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} G$ и $\langle A, f_1\rangle \times \langle B, f_2\rangle = der_{\varphi',d'} ret_a\langle A, f_1\rangle \oplus ret_b\langle B, f_2\rangle$ для соответствующих элементов d, d' и автоморфизма φ'. Тогда $G \cong ret_a\langle A, f_1\rangle \oplus ret_b\langle B, f_2\rangle$ (следствие 2). Значит, ретракты $ret_a\langle A, f_1\rangle$ и $ret_b\langle B, f_2\rangle$ прямых множителей из (163) раскладываются в прямую сумму своих циклических подгрупп и количество этих подгрупп в каждом таком разложении меньше t. Причем, прямые множители из (163) будут конечно порожденными n-группами (по теореме 3.3 из [75]). Согласно индуктивному предположению, для n-групп $\langle A, f_1\rangle$ и $\langle B, f_2\rangle$ теорема верна, а значит, и для $\langle G, f\rangle$ теорема верна. Теорема доказана.

5 Свободные n-группы в классе полуабелевых n-групп

Свободные n-группы в классе всех n-групп изучались в [19] В. А. Артамоновым. Мы изучим свободные n-группы в классах абелевых полуциклических, абелевых, полуабелевых и m-полуабелевых n-групп.

5.1 Свободные абелевы полуциклические n-группы

Мы будем рассматривать класс абелевых полуциклических n-групп и дадим описание свободной n-группы в этом классе. В этом параграфе также построена группа автоморфизмов свободной абелевой полуциклической n-группы и бесконечных абелевых полуциклических n-групп.

Напомним, что n-группу называют полуциклической, если ее ретракт является циклической группой. Любая конечная абелева полуциклическая n-группа порядка k изоморфна полуциклической n-группе $der_{1_{(a)},la}(a)$, где (a) — циклическая группа порядка k с операцией сложение и $l \mid$ НОД $(n-1,k)$ (теорема 70). Про такую n-группу мы говорили, что она полуциклическая типа $(k,1,l)$. Любая бесконечная абелева полуциклическая n-группа изоморфна полуциклической n-группе $der_{1_{(a)},la}(a)$, где (a) — бесконечная циклическая группа с операцией сложение и $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$ (теорема 72). Такие n-группы мы называли полуциклическими типа $(\infty,1,l)$. Среди абелевых полуциклических n-групп есть циклические n-группы (порожденные одним элементом). Каждая конечная (бесконечная) циклическая n-группа порядка k является полуциклической типа $(k,1,1)$ (типа $(\infty,1,1)$). Таким образом, на множестве C всех циклических групп по параметру l из типа полуциклической n-группы определяется класс абелевых полуциклических n-групп C_l, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$. Таких классов равно $\frac{n+1}{2}$, если n нечетно, либо $\frac{n}{2}$, если n четно. Класс C_1 — все циклические n-группы. Может так случиться, что конечная полуциклическая n-группа имеет тип $(k,1,n-1)$, в этом случае считаем, что такая n-группа входит в класс C_0, так как она изоморфна n-группе $der_{1_{(a)},0}(a)$ (теорема 68).

Порождающие множества абелевых полуциклических n-групп. Напомним, что в абелевой полуциклической n-группе $der_{1_{(a)},la}(a)$ n-арная операция f действует по правилу

$$f(s_1a,\ldots,s_na) = (s_1+\ldots+s_n+l)a. \tag{164}$$

Теорема 98 *(Теорема 2, [77]-A) Порождающими элементами абелевой полуциклической n-группы $der_{1_{(a)},la}(a)$ являются 0, a и $-a$.*

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что $\bar{0} = -la$.

Пусть sa — любая кратность порождающего элемента a циклической группы (a). Если $s \ge 0$, то применяем s раз операцию f к элементам a, 0 и $\bar{0}$, получим $f_{(s)}(\overset{(s)}{a}, \overset{(s(n-3)+1)}{0}, \overset{(s)}{\bar{0}}) = sa + s(-l)a + sla = sa$.

Если $s < 0$, то применяем $-s$ раз операцию f к элементам $-a$, 0 и $\bar{0}$, получим

$$f_{(-s)}(\overset{(-s)}{-a}, \overset{(-s(n-3)+1)}{0}, \overset{(-s)}{\bar{0}}) = (-1)(-s)a + (-s)(-l)a + (-s)la = sa.$$

Теорема доказана.

Следствие 71 *(Следствие 2, [77]-A) Порождающими элементами абелевой полуциклической n-группы* $der_{1_{(a)},la}(a)$ *являются* 0, *a*.

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что $\bar{a} = (-l-(n-2))a$. Тогда $f(\bar{a}, \overset{(n-3)}{a}, 0, 0) = (-l-(n-2)+n-3+l)a = -a$. Следствие доказано.

Следствие 72 *Циклическая n-группа* $der_{1_{(a)},a}(a)$ *порождаются элементом* 0.

Доказательство. При $l = 1$ имеем $a = f(\overset{(n)}{0})$. Следствие доказано.

Нахождение свободной абелевой полуциклической n-группы. Пусть $\Re$ — некоторый класс n-групп. Говорят, что n-группа $\langle F, f\rangle$ из класса $\Re$ есть свободная n-группа в классе $\Re$ со свободным порождающим множеством $\{x_i | i \in I\}$, если для любой n-группы $\langle G, f'\rangle$ из класса $\Re$ с порождающим множеством $\{g_i | i \in I\}$ отображение $x_i \to g_i$ продолжается до гомоморфизма из n-группы $\langle F, f\rangle$ в n-группу $\langle G, f'\rangle$.

Теорема 99 *(Теорема 4 из [77]-A) Бесконечная полуциклическая n-группа* $der_{1_{(a)},la}(a)$, *где* $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$ *и* $l \ne 1$, *является свободной в классе абелевых полуциклических n-групп* C_l *со свободным порождающим множеством* $\{0, a\}$.

Доказательство. Пусть $\langle G, f'\rangle$ — абелева полуциклическая n-группа из класса C_l и ретракт $ret_c\langle G, f'\rangle$ — циклическая группа (b). Согласно предложению 9, $\langle G, f'\rangle = der_{1_{(b)},l'b}(b)$, где НОД $(l, n-1, k) =$ НОД $(l', n-1, k)$, если $\langle G, f'\rangle$ — конечная n-группа порядка k (теорема 68), и $l \equiv l' \pmod{n-1}$ либо $l' \equiv -l \pmod{n-1}$, если $\langle G, f'\rangle$ — бесконечная n-группа (предложение 55). На циклической группе (b) строим еще одну n-группу $der_{1_{(b)},lb}(b)$. Тогда имеем изоморфизм ψ из n-группы $der_{1_{(b)},lb}(b)$ в n-группу $der_{1_{(b)},l'b}(b)$ (так как $\langle G, f'\rangle$ из класса C_l). Согласно следствию 71, n-группа $der_{1_{(b)},lb}(b)$ порождается элементами c, b, тогда n-группа $der_{1_{(b)},l'b}(b)$ порождается элементами $\psi(c)$ и $\psi(b)$.

Групповой гомоморфизм $\varphi : (a) \to (b)$, заданный по правилу $\varphi(sa) = sb$ для любого целого числа s, является гомоморфизмом из n-группы $der_{1_{(a)},la}(a)$ в n-группу $der_{1_{(b)},lb}(b)$ (проверяется непосредственно).

Задаем отображение $\tau_0 : \{0, a\} \to \{\psi(c), \psi(b)\}$ из порождающего множества n-группы $der_{1_{(a)},la}(a)$ в порождающее множествоn-группы $der_{1_{(b)},l'b}(b)$ по правилу $\tau_0(0) = \psi(c)$, $\tau_0(a) = \psi(b)$. Тогда гомоморфизм $\tau = \psi \circ \varphi$ из n-группы $der_{1_{(a)},la}(a)$ в n-группу $der_{1_{(b)},l'b}(b)$ является продолжением отображения τ_0. Теорема доказана.

Теорема 100 *Бесконечная циклическая n-группа* $der_{1_{(a)},a}(a)$ *является свободной в классе циклических n-групп* C_1 *со свободным порождающим множеством* $\{0\}$.

Доказательство. Пусть $\langle G, f'\rangle$ — циклическая n-группа и ретракт $ret_c\langle G, f'\rangle$ — циклическая группа (b). Согласно предложению 9, $\langle G, f'\rangle = der_{1_{(b)},l'b}(b)$, где НОД $(l', n-1, k) =$ НОД $(1, n-1, k) = 1$, если $\langle G, f'\rangle$ — конечная n-группа порядка k (теорема 68), и $l' \equiv 1 \pmod{n-1}$ либо $l' \equiv -1 \pmod{n-1}$, если $\langle G, f'\rangle$ — бесконечная n-группа (предложение 55). На циклической группе (b) строим еще одну циклическую n-группу $der_{1_{(b)},b}(b)$. Тогда имеем изоморфизм ψ из n-группы $der_{1_{(b)},b}(b)$ в n-группу $der_{1_{(b)},l'b}(b)$ (так как $\langle G, f'\rangle$ из класса C_1). Согласно теореме 56, n-группа $der_{1_{(b)},b}(b)$ порождается элементом c, тогда n-группа $der_{1_{(b)},l'b}(b)$ порождается элементом $\psi(c)$.

Групповой гомоморфизм $\varphi : (a) \to (b)$, заданный по правилу $\varphi(sa) = sb$ для любого целого числа s, является гомоморфизмом из n-группы $der_{1_{(a)},a}(a)$ в n-группу $der_{1_{(b)},b}(b)$ (проверяется непосредственно).

Задаем отображение $\tau_0 : 0 \to \psi(c)$ из порождающего множества n-группы $der_{1_{(a)},a}(a)$ в порождающее множествоn-группы $der_{1_{(b)},l'b}(b)$. Тогда гомоморфизм $\tau = \psi \circ \varphi$ из n-группы $der_{1_{(a)},a}(a)$ в n-группу $der_{1_{(b)},l'b}(b)$ является продолжением отображения τ_0. Теорема доказана.

Очевидно, n- группа $der_{1_Z,l}Z$, где Z — аддитивная группа целых чисел, $0 \leq l \leq [\frac{n-1}{2}]$ изоморфна бесконечной полуциклической n-группе $der_{1_{(a)},la}(a)$, где $0 \leq l \leq [\frac{n-1}{2}]$, которая является свободной в классе C_l. Поэтому можно сказать, что каждый класс C_l $(0 \leq l \leq [\frac{n-1}{2}])$ абелевых полуциклических n-групп имеет только одну (с точностью до изоморфизма) свободную n-группу $der_{1_Z,l}Z$.

Среди выше указанных классов C_l выделим C_1 — класс циклических n-групп, в котором свободными являются бесконечные циклические n-группы и только они (см., например, [19]), причем, все они изоморфны между собой (теорема 54). Поэтому класс циклических n-групп имеет только одну (с точностью до изоморфизма) свободную n-группу $der_{1_Z,1}Z$.

Из теоремы 99 следует, что бесконечные абелевы полуциклические тернарные группы $\langle (a), f\rangle$ $(n = 3)$, где $l = 0, 1$, и только они являются свободными в классе абелевых полуциклических тернарных групп. При $l = 0$ пример такой тернарной группы дает множество целых чисел с операцией $f(a, b, c) = a+b+c$, а при $l = 1$ - множество нечетных целых чисел с той же операцией. Таким образом, любая свободная абелева полуциклическая тернарная группа изоморфна одной из этих двух тернарных групп.

В заключении этого параграфа найдем группу автоморфизмов свободной абелевой полуциклической n-группы. Из следствия 28 имеем

Следствие 73 *(Теорема 5, [77]-А) Отображение ψ свободной абелевой полуциклической n-группы $\langle (a), f\rangle$ в себя является автоморфизмом тогда и только тогда, когда для некоторого автоморфизма σ циклической группы (a) верно равенство*

$$\sigma(la) = (n-1)\psi(0) + la.$$

А из следствия 73 имеем еще два следствия:

Следствие 74 *(Следствие 3, [77]-А) Пусть $\langle (a), f\rangle$ - свободная абелева полуциклическая n-группа, где $0 \leq l \leq [\frac{n-1}{2}]$. Тогда*

1) если $l = 0$, то в $\langle (a), f\rangle$ есть только два автоморфизма, которые совпадают с автоморфизмами группы (a);

2) если $l = \frac{n-1}{2}$ при нечетном n, то в $\langle (a), f\rangle$ есть только два автоморфизма: тождественный автоморфизм и автоморфизм $sa \to (-s-1)a$;

3) если $l \neq 0$ и $l \neq \frac{n-1}{2}$, то в $\langle (a), f\rangle$ имеется только тождественный автоморфизм.

Следствие 75 *(Следствие 4, [77]-А) Группа автоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической тернарной группы $\langle (a), f\rangle$ всегда двухэлементна и*

1) если $l = 0$, то она совпадает с группой автоморфизмов группы (a);

2) если $l = 1$, то она содержит автоморфизм $sa \to (-s-1)a$ и тождественный автоморфизм.

5.2 Свободные абелевы n-группы

Построение свободных абелевых n-групп. Рассмотрим прямую сумму $G^* = \sum_{\alpha \in I}(x_\alpha)$ бесконечных циклических групп, которая является свободной абелевой группой с системой свободных образующих $X = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Для каждого элемента $a = n_1 x_{\alpha_1} + \ldots + n_k x_{\alpha_k}$ из G^* определим число $|a|$ как остаток от деления $n_1 + \ldots + n_k$ на $n-1$.

Теорема 101 *(Теорема 1, [56]-A) Пусть $G^* = \sum_{\alpha \in I}(x_\alpha)$ — свободная абелева группа с свободным порождающим множеством $X = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Тогда*

1. множество $G = \{a \in G^* \mid |a| = 1\}$ с n-арной операцией f, действующей по правилу $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, является абелевой n-группой $\langle G, f\rangle$, для которой G^* будет универсальной обертывающей группой, а $G_0 = \{a \in G^* \mid |a| = 0\}$ — соответствующей группой;

2. $\langle G, f\rangle$ является свободной n-группой с свободным порождающим множеством X в классе абелевых n-групп;

3. Любая свободная абелева n-группа $\langle F, f\rangle$ с свободным порождающим множеством $Z = \{z_\alpha \mid \alpha \in I\}$ изоморфна $\langle G, f\rangle$.

Доказательство. 1. Непосредственная проверка показывает, что множество G_0 является подгруппой в G^*, факторгруппа по которой является циклической группой порядка $n-1$ с образующим элементом G. Значит, $\langle G, f\rangle$ — n-группа. Остальное очевидно.

2. Ясно, что X содержится в G. Докажем, что X порождает $\langle G, f\rangle$. Для каждого элемента $g = n_1 x_{\alpha_1} + \ldots + n_k x_{\alpha_k} \in G$ верно сравнение $\sum_{i=1}^{k} n_i \equiv 1 \pmod{n-1}$. Если $n_i < 0$, то

$$n_i x_{\alpha_i} = -n_i(-x_{\alpha_i}) = -n_i((n-3)x_{\alpha_i} - (n-2)x_{\alpha_i}) = -n_i((n-3)x_{\alpha_i} + \bar{x}_{\alpha_i})$$

и $-n_i(n-2) \equiv n_i \pmod{n-1}$. Значит, любой элемент из G можно представить в виде суммы элементов из X либо им косым, причем их количество при делении на $n-1$ дает в остатке 1, т.е. X порождает n-группу $\langle G, f\rangle$.

Пусть $\langle B, f\rangle$ — произвольная абелева n-группа и B^* — ее универсальная обертывающая группа. Отображение $\varphi : x_\alpha \to b_\alpha$ из X в B продолжается до гомоморфизма φ_1 из группы G^* в B^* по правилу

$$\varphi_1(n_1 x_{\alpha_1} + \ldots + n_k x_{\alpha_k}) = n_1 b_{\alpha_1} + \ldots + n_k b_{\alpha_k}.$$

Так как для любого элемента x_α из X имеем $\varphi_1(\bar{x}_\alpha) = \varphi_1(-(n-2)x_\alpha) = -(n-2)b_\alpha$ — решение уравнения $f(\overset{(n-1)}{b_\alpha}, x) = b_\alpha$, то $\varphi_1(\bar{x}_\alpha) = \bar{b}_\alpha$. Далее легко проверить, что ограничение φ_1 на G является гомоморфизмом из $\langle G, f\rangle$ в $\langle B, f\rangle$. Пусть теперь τ — любое другое гомоморфное продолжение отображения φ из X в B. Для любого элемента g из G имеем $g = f(y_1, \ldots, y_{k(n-1)+1})$, где каждое y_i является либо элементом из X, либо косым к элементу из X. Тогда $\tau(g) = \tau(f(y_1, \ldots, y_{k(n-1)+1})) = f(\tau(y_1), \ldots, \tau(y_{k(n-1)+1})) =$

$$= f(\varphi_1(y_1), \ldots, \varphi_1(y_{k(n-1)+1})) = \varphi_1(f(y_1, \ldots, y_{k(n-1)+1})) = \varphi_1(g).$$

Единственность гомоморфного продолжения отображения φ доказана.

3. Пусть теперь $\langle F, f\rangle$ - свободная абелева n-группа с свободным порождающим множеством $Z = \{z_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Тогда существует гомоморфизм ψ из $\langle F, f\rangle$ на n-группу $\langle G, f\rangle$, который продолжает отображение $z_\alpha \to x_\alpha$. С другой стороны, по доказанному выше, существует гомоморфизм τ из $\langle G, f\rangle$ на $\langle F, f\rangle$, продолжающий отображение $x_\alpha \to z_\alpha$. Значит,

отображение $\tau\psi$ оставляет на месте все элементы из Z, откуда следует биективность ψ. Теорема доказана.

На свободной абелевой группе $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ можно строить и другие свободные абелевы n-группы.

Теорема 102 *(Теорема 2, [56]-А) Пусть $G^* = \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ — свободная абелева группа. Тогда*

1. множество $G = \{a \in G^* \mid |a| = m\}$, где $1 < m \leq n-2$, m и $n-1$ взаимно просты, является абелевой n-группой $\langle G, f\rangle$ с n-операцией f, действующей по правилу $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, для которой G^* будет универсальной обертывающей группой, а $G_0 = \{a \in G^* \mid |a| = 0\}$ — соответствующей группой;

2. если $|I| > 1$, то $\langle G, f\rangle$ является свободной n-группой в классе абелевых n-групп;

3. (Предложение 6, Гл. IV, [21]) если $|I| = 1$, то $\langle G, f\rangle$ является свободной n-группой в классе абелевых n-групп только при $m = n-2$.

Доказательство. 1. Элементами факторгруппы G^*/G_0 будут множества $A_r = = \{a \in G^* \mid |a| = r\}$, где $r = 0, 1, \ldots, n-2$. А значит, образующим этой циклической группы порядка $n-1$ будет $G = A_m$, где m взаимно прост с $n-1$. Поэтому $\langle G, f\rangle$ будет n-группой. Остальное очевидно.

2. Найдем в группе G^* систему свободных образующих Y, лежащую в A_m. Так как m взаимно прост с $n-1$, то найдутся целые числа u и v такие, что $um + v(n-1) = 1$. Для фиксированных элементов x_α и x_β ($\alpha \neq \beta$) из X задаем $y_\alpha = (n-1+m-v+u)x_\alpha + (v-u)x_\beta$, $y_\beta = (m-v)x_\alpha + vx_\beta$. Строим множество $Y = \{y_\alpha\} \cup \{y_\beta\} \cup \{y_\gamma \mid y_\gamma = x_\gamma - m(u-1)x_\alpha,\ x_\gamma \in X\backslash\{x_\alpha, x_\beta\}\}$.

Непосредственная проверка показывает, что $Y \subseteq A_m$. Кроме того, элементы из X выражаются через элементы из Y следующим образом:

$$x_\alpha = vy_\alpha + (u-v)y_\beta,\ x_\beta = (v-m)y_\alpha + (n-1+m-v+u)y_\beta,$$

$$x_\gamma = y_\gamma + m(u-1)(vy_\alpha + (u-v)y_\beta), \qquad \text{где } x_\gamma \in X\backslash\{x_\alpha, x_\beta\}\}.$$

Для любого элемента $a = n_1x_\alpha + n_2x_\beta + n_3x_{\gamma_1} + \ldots + n_{k+2}x_{\gamma_k}$ из G^* имеем

$$a = n_1(vy_\alpha + (u-v)y_\beta) + n_2((v-m)y_\alpha + (n-1+m-v+u)y_\beta)+$$

$$+n_3(y_{\gamma_1} + m(u-1)(vy_\alpha + (u-v)y_\beta)) + \ldots + n_{k+2}(y_{\gamma_k} + m(u-1)(vy_\alpha + (u-v)y_\beta)) =$$

$$= (n_1v + n_2(v-m) + (n_3 + \ldots + n_{k+2})m(u-1)v)y_\alpha + (n_1(u-v) + n_2(n-1+m-v+u)+$$

$$+(n_3 + \ldots + n_{k+2})m(u-1)(u-v))y_\beta + n_3y_{\gamma_1} + \ldots + n_{k+2}y_{\gamma_k}.$$

Мы доказали, что Y порождает группу G^*. Аналогично, как и в доказательстве теоремы 101 пункт 2, доказывается, что n-группа $\langle A_m, f\rangle$ являются свободной в классе абелевых n-групп.

3. Если $|I| = 1$, то $G^* = (x_1)$ — бесконечная циклическая группа. В этом случае $A_0 = ((n-1)x_1)$, $G = mx_1 + ((n-1)x_1)$. Каждое порождающее множество n-группы порождает и ее обертывающую группу. А в бесконечной циклической группе (x_1) только два одноэлементных порождающих множества: $\{x_1\}$ и $\{-x_1\}$. Но $x_1 \notin G$, так как $m > 1$. Значит, $-x_1 \in G$, откуда $m = n-2$. Тогда, по теореме 101, $\langle G, f\rangle$ — свободная абелева n-группа с свободным порождающим множеством $\{-x_1\}$. Теорема доказана.

Разложение свободных абелевых n-групп. Рассмотрим вновь прямую сумму $G^* = \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ бесконечных циклических групп (x_α). На множестве $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ зададим действие n-арной операции f как сумму n элементов, т.е. если $g_i = n_{i1}x_{\alpha_1} + \ldots + n_{ik}x_{\alpha_k} \in \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$, $i = 1,\ldots,n$, то

$$f(g_1,\ldots,g_n) = g_1 + \ldots + g_n = (n_{11} + \ldots + n_{n1})x_{\alpha_1} + \ldots + (n_{1k} + \ldots + n_{nk})x_{\alpha_k}.$$

Получим n-группу $\langle\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha), f\rangle$, которая будет производной от группы G^*.

Теорема 103 *(Теорема 3, [56]-А) Любая свободная абелева n-группа изоморфна декартову произведению бесконечной циклической n-группы и производной n-группы от свободной абелевой группы. Подробнее, если $\langle G, f\rangle$ — свободная абелева n-группа с порождающим множеством $X = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$, x_γ — некоторый фиксированный элемент из X, $\langle(x_\gamma), f\rangle$ — бесконечная циклическая n-группа, $\langle\sum_{\beta\in I,\beta\neq\gamma}(x_\beta), f\rangle$ — производная n-группа от свободной абелевой группы $\sum_{\beta\in I,\beta\neq\gamma}(x_\beta)$, то $\langle G, f\rangle \cong \langle(x_\gamma), f\rangle \times \langle\sum_{\beta\in I,\beta\neq\gamma}(x_\beta), f\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\langle G, f\rangle$ — n-группа из теоремы 101 пункта 2 и $n_0x_\gamma + n_1x_{\beta_1} + \ldots + n_kx_{\beta_k} \in G$, где $n_0 + n_1 + \ldots + n_k = q(n-1)+1$ для некоторого целого числа q. Зададим отображение τ из $\langle G, f\rangle$ в $\langle(x_\gamma), f\rangle \times \langle\sum_{\beta\in I,\beta\neq\gamma}(x_\beta), f\rangle$ по правилу

$$\tau(n_0x_\gamma + n_1x_{\beta_1} + \ldots + n_kx_{\beta_k}) = ((q - (n_1 + \ldots + n_k))x_\gamma; n_1x_{\beta_1} + \ldots + n_kx_{\beta_k}).$$

Если $b = (sx_\gamma; n_1x_{\beta_1} + \ldots + n_kx_{\beta_k}) \in \langle(x_\gamma), f\rangle \times \langle\sum_{\beta\in I,\beta\neq\gamma}(x_\beta), f\rangle$, то

$$\tau(((s + n_1 + \ldots + n_k)(n-1) + 1 - (n_1 + \ldots + n_k))x_\gamma + n_1x_{\beta_1} + \ldots + n_kx_{\beta_k}) = b,$$

т.е. τ — сюръективное отображение. Если

$$\tau(n'_0x_\gamma + n'_1x_{\beta_1} + \ldots + n'_kx_{\beta_k}) = \tau(n''_0x_\gamma + n''_1x_{\beta_1} + \ldots + n''_kx_{\beta_k}),$$

где $n'_0 + n'_1 + \ldots + n'_k = q'(n-1)+1$. $n''_0 + n''_1 + \ldots + n''_k = q''(n-1)+1$, то $n'_1x_{\beta_1} + \ldots + n'_kx_{\beta_k} = n''_1x_{\beta_1} + \ldots + n''_kx_{\beta_k}$, откуда $n'_1 = n''_1, \ldots, n'_k = n''_k$, тогда, с учетом равенства $q' - (n'_1 + \ldots + n'_k) = q'' - (n''_1 + \ldots + n''_k)$, имеем $q' = q''$, а тогда и $n'_0 = n''_0$. Тем самым мы доказали инъективность τ, а значит, τ — биективное отображение.

Для $g_i = n_{i0}x_\gamma + n_{i1}x_{\beta_1} + \ldots + n_{ik}x_{\beta_k} \in G$, $i = 1,\ldots,n$, где $n_{i0} + n_{i1} + \ldots + n_{ik} = q_i(n-1)+1$, имеем $\tau(f(g_1,\ldots,g_n)) =$

$$= \tau((n_{10} + \ldots + n_{n0})x_\gamma + (n_{11} + \ldots + n_{n1})x_{\beta_1} + \ldots + (n_{1k} + \ldots + n_{nk})x_{\beta_k} =$$

$$= ((q_1 + \ldots + q_n + 1 - (\sum_{i=1}^n n_{i1} + \ldots + \sum_{i=1}^n n_{ik}))x_\gamma; (\sum_{i=1}^n n_{i1})x_{\beta_1} + \ldots + (\sum_{i=1}^n n_{ik})x_{\beta_k}) =$$

$$= (((q_1 - \sum_{i=1}^k n_{1i}) + \ldots + (q_n - \sum_{i=1}^k n_{ni}) + 1)x_\gamma; \sum_{i=1}^k n_{1i}x_{\beta_i} + \ldots + \sum_{i=1}^k n_{ni}x_{\beta_i}) =$$

$$= (f((q_1 - \sum_{i=1}^k n_{1i})x_\gamma, \ldots, (q_n - \sum_{i=1}^k n_{ni})x_\gamma); f(\sum_{i=1}^k n_{1i}x_{\beta_i}, \ldots, \sum_{i=1}^k n_{ni}x_{\beta_i})) =$$

$$= f(((q_1 - \sum_{i=1}^k n_{1i})x_\gamma; \sum_{i=1}^k n_{1i}x_{\beta_i}), \ldots, ((q_n - \sum_{i=1}^k n_{ni})x_\gamma; \sum_{i=1}^k n_{ni}x_{\beta_i})) =$$

$$= f(\tau(n_{10}x_\gamma + n_{11}x_{\beta_1} + \ldots + n_{1k}x_{\beta_k}), \ldots, \tau(n_{n0}x_\gamma + n_{n1}x_{\beta_1} + \ldots + n_{nk}x_{\beta_k})) =$$
$$= f(\tau(g_1), \ldots, \tau(g_n)).$$

Теорема доказана.

Следствие 76 *(Следствие 1, [56]-A) Любая свободная абелева n-группа с конечным порождающим множеством X изоморфна декартову произведению одной бесконечной циклической n-группы и $|X| - 1$ производных n-групп от бесконечных циклических групп. Подробнее, если $\langle G, f\rangle$ — свободная абелева n-группа с свободным порождающим множеством $X = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$, $|X| = r$, для некоторого фиксированного элемента x_γ из X построена бесконечная циклическая n-группа $\langle (x_\gamma), f\rangle$ и $\langle (x_\beta), f\rangle$ — производные n-группы от бесконечных циклических групп (x_β) для всех $\beta \in I, \beta \neq \gamma$, то*

$$\langle G, f\rangle \cong \langle (x_\gamma), f\rangle \times \prod_{\beta \in I, \beta \neq \gamma} \langle (x_\beta), f\rangle.$$

Доказательство. Вновь $\langle G, f\rangle$ из теоремы 101 пункта 2 и $\langle \sum_{\beta \in I, \beta \neq \gamma} (x_\beta), f\rangle$ — производная n-группа от свободной абелевой группы $\sum_{\beta \in I \beta \neq \gamma} (x_\beta)$. Очевидно

$$\langle \sum_{\beta \in I, \beta \neq \gamma} (x_\beta), f\rangle \cong \prod_{\beta \in I, \beta \neq \gamma} \langle (x_\beta), f\rangle.$$

С учетом теоремы 103 имеем доказательство следствия.

В классе абелевых групп любая свободная группа конечного ранга r изоморфна прямой сумме r аддитивных групп целых чисел Z (см., например, предложение 2.2. из [22]). Для n-групп ситуация иная. В классе абелевых n-групп декартовы произведения бесконечных абелевых полуциклических n-групп (которые являются аналогами бесконечных циклических групп) не всегда будут свободными n-группами. Из теоремы 85 и следствия 76 имеем

Следствие 77 *Декартово произведение $\prod_{i=1}^{r} \langle G_i, f_i\rangle$ абелевых полуциклических n-групп $\langle G_i, f_i\rangle$ типов $(\infty, 1_{G_i}, l_i)$ является свободной n-группой в классе абелевых n-групп тогда и только тогда, когда $l_1 = 1$ при $r = 1$ либо НОД $(l_1, \ldots, l_r, n-1) = 1$ при $r \geq 2$.*

5.3 Свободные полуабелевы n-группы

В этом параграфе изучается строение свободных n-групп в классе полуабелевых n-групп.

Порождающие множества полуабелевых n-групп.

Предложение 60 *(Теорема 2, [75]-A) Для каждой полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ с порождающим множеством $X = \{x_\alpha | \alpha \in I\}$ при фиксированном элементе x_β из X абелева группа $ret_{x_\beta}\langle G, f\rangle$ порождается множеством $Y = \{f(\overset{(i-1)}{x_\beta}, x_\alpha, \overset{(n-i-1)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta) \mid \alpha \in I \diagdown \{\beta\}, i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{f(\overset{(n)}{x_\beta})\}$.*

Доказательство. Пусть полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$ порождается множеством $X = \{x_\alpha | \alpha \in I\}$. Фиксируем элемент $x_\beta \in X$. На $\langle G, f\rangle$ определяем ретракт $G = ret_{x_\beta}\langle G, f\rangle$, где сложение действует по правилу: $a + b = f(a, \overset{(n-3)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta, b)$ для фиксированного элемента x_β из X.

Тогда для элемента $d = f(\overset{(n)}{x_\beta})$ и автоморфизма $\varphi(x) = f(x_\beta, x, \overset{(n-3)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta)$ верны равенства (21), (22), (23). Элемент x_β является нулем в группе G. Непосредственная проверка показывает, что для любого элемента a из G верно $-a = f(x_\beta, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, x_\beta)$. Используя свойства косого элемента, для $s = 1, \ldots, n-2$ и любого элемента $x \in G$ получим

$$\varphi^s(x) = f(\overset{(s)}{x_\beta}, x, \overset{(n-2-s)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta). \tag{165}$$

Кроме того, для $s = 1, \ldots, n-2$ и любого элемента $x \in G$ верно

$$\varphi^s(\bar{x}) = \bar{x} - x + \varphi^s(x). \tag{166}$$

Действительно, из определения косого элемента имеем $f(\overset{(n-1)}{x}, \bar{x}) = x$, а тогда из (21) получим $x + \varphi(x) + \ldots + \varphi^{n-2}(x) + \bar{x} + d = x$, откуда $\bar{x} = -\varphi(x) - \ldots - \varphi^{n-2}(x) - d$, тогда $\varphi^s(\bar{x}) = \varphi^s(-\varphi(x) - \ldots - \varphi^{n-2}(x) - d) =$

$$= -\varphi^s(\varphi(x)) - \ldots - \varphi^s(\varphi^{n-2}(x)) - \varphi^s(d) =$$

$$= -\varphi^{s+1}(x) - \ldots - \varphi^{n-2}(x) - x - \varphi(x) - \ldots - \varphi^{s-1}(x) - d =$$

$$= -\varphi^{s+1}(x) - \ldots - \varphi^{n-2}(x) - \varphi(x) - \ldots - \varphi^{s-1}(x) - \varphi^s(x) - d - x + \varphi^s(x) =$$

$$= \bar{x} - x + \varphi^s(x).$$

Выбираем элемент g из G, для которого $g = f_{(k)}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{k(n-1)+1}})$, где $y_{\alpha_i} = x_{\alpha_i}$ либо $y_{\alpha_i} = \bar{x}_{\alpha_i}$ для $i = 1, \ldots, k(n-1)+1$, $x_{\alpha_i} \in X$ (смотри теорему 14). Тогда, согласно (21), получим

$$g = y_{\alpha_1} + \varphi(y_{\alpha_2}) + \ldots + \varphi^{n-2}(y_{\alpha_{n-1}}) + y_{\alpha_n} + \varphi(y_{\alpha_{n+1}}) + \ldots + \varphi^{n-2}(y_{\alpha_{2(n-1)}}) + y_{\alpha_{2(n-1)+1}} +$$

$$\ldots + y_{\alpha_{(k-1)(n-1)+1}} + \varphi(y_{\alpha_{(k-1)(n-1)+2}}) + \ldots + \varphi^{n-2}(y_{\alpha_{k(n-1)}}) + y_{\alpha_{k(n-1)+1}} + kd.$$

Из определения косого элемента для $x_{\alpha_i} \in X$ имеем $f(\overset{(n-1)}{x_{\alpha_i}}, \bar{x}_{\alpha_i}) = x_{\alpha_i}$, а тогда из (21) получим $x_{\alpha_i} + \varphi(x_{\alpha_i}) + \ldots + \varphi^{n-2}(x_{\alpha_i}) + \bar{x}_{\alpha_i} + d = x_{\alpha_i}$, откуда

$$\bar{x}_{\alpha_i} = -\varphi(x_{\alpha_i}) - \ldots - \varphi^{n-2}(x_{\alpha_i}) - d.$$

Для каждого $s = 1, \ldots, n-2$ и $j = 1, \ldots, k$ имеем $i = (j-1)(n-1)+1+s$. Если $y_{\alpha_i} = x_\beta$, то в выражении элемента g слагаемое с участием x_β исчезнет (x_β является нулем в группе G), а если $y_{\alpha_i} = \bar{x}_\beta$, то $y_{\alpha_i} = -d$, так как $\bar{x}_\beta = -d$. Далее, если $y_{\alpha_i} = x_{\alpha_i} \in X \diagdown \{x_\beta\}$, то, согласно (165), $\varphi^s(y_{\alpha_{(j-1)(n-1)+1+s}}) \in Y$, а если $y_{\alpha_i} = \bar{x}_{\alpha_i}$, $x_{\alpha_i} \in X \diagdown \{x_\beta\}$, то, согласно (166),

$$\varphi^s(\bar{x}_{\alpha_i}) = \bar{x}_{\alpha_i} - x_{\alpha_i} + \varphi^s(x_{\alpha_i}) =$$

$$= -\varphi(x_{\alpha_i}) - \ldots - \varphi^{s-1}(x_{\alpha_i}) - \varphi^{s+1}(x_{\alpha_i}) - \ldots - \varphi^{n-2}(x_{\alpha_i}) - d - x_{\alpha_i}.$$

Таким образом, в вырыжении элемента g участвуют элементы из множества Y либо им противоположные. Предложение доказано.

А теперь построим порождающее множество полуабелевой n-группы $der_{\varphi,d}G$, зная порождающее множество абелевой группы G.

Предложение 61 *(Теорема 3, [75]-A) Любая полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}G$, определенная на абелевой группе G с порождаюшим множеством $Z = \{z_\alpha | \alpha \in I\}$, порождается множеством $X = \{-d + z_\alpha | \alpha \in I\} \cup \{0\}$.*

Доказательство. n-Арная операция f действует по правилу $f(a_1^n) = a_1 + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d$, где $d = f(\overset{(n)}{0})$ и автоморфизм φ группы G действует по правилу $\varphi(x) = f(0, x, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0})$.

Пусть $g = n_1 z_{\alpha_1} + \ldots + n_k z_{\alpha_k}$ — любой элемент из G. Заметим, что $-d = \bar{0}$, так как $f(\overset{(n-1)}{0}, -d) = 0$. Для любых элементов a, b из G имеем $a + b = f(a, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, b)$. Тогда

$$g = f_{(k-1)}(n_1 z_{\alpha_1}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, n_2 z_{\alpha_2}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, \ldots, n_{k-1} z_{\alpha_{k-1}}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, n_k z_{\alpha_k}). \tag{167}$$

Очевидно, $z_{\alpha_i} = f(\overset{(n-1)}{0}, -d + z_{\alpha_i})$.

Если $n_i > 0$ $(1 \leq i \leq k)$, то, аналогично как в (167), имеем

$$n_i z_{\alpha_i} = f_{(n_i-1)}(z_{\alpha_i}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, z_{\alpha_i}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, \ldots, z_{\alpha_i}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, z_{\alpha_i}) =$$

$$= f_{(n_i-1)}(f(\overset{(n-1)}{0}, -d + z_{\alpha_i}), \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, \ldots, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, f(\overset{(n-1)}{0}, -d + z_{\alpha_i})). \tag{168}$$

Так как

$$-d + z_{\alpha_i} = f(-d + z_{\alpha_i}, \overline{-d + z_{\alpha_i}}, \overset{(n-2)}{-d + z_{\alpha_i}}) =$$
$$= -d + z_{\alpha_i} + \varphi(\overline{-d + z_{\alpha_i}}) + \varphi^2(-d + z_{\alpha_i}) + \ldots + \varphi^{n-2}(-d + z_{\alpha_i}) - d + z_{\alpha_i} + d,$$

то

$$-z_{\alpha_i} = \varphi(\overline{-d + z_{\alpha_i}}) + \varphi^2(-d + z_{\alpha_i}) + \ldots + \varphi^{n-2}(-d + z_{\alpha_i}) =$$
$$= -d + \varphi(\overline{-d + z_{\alpha_i}}) + \varphi^2(-d + z_{\alpha_i}) + \ldots + \varphi^{n-2}(-d + z_{\alpha_i}) + 0 + d =$$
$$= f(-d, \overline{-d + z_{\alpha_i}}, \overset{(n-3)}{-d + z_{\alpha_i}}, 0) = f(\bar{0}, \overline{-d + z_{\alpha_i}}, \overset{(n-3)}{-d + z_{\alpha_i}}, 0).$$

Если $n_i < 0$ $(1 \leq i \leq k)$, то, аналогично как в (167), получим

$$n_i z_{\alpha_i} = (-n_i)(-z_{\alpha_i}) =$$

$$= f_{(-n_i-1)}(-z_{\alpha_i}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, -z_{\alpha_i}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, \ldots, -z_{\alpha_i}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, -z_{\alpha_i}) =$$

$$= f_{(-n_i-1)}(f(\bar{0}, \overline{-d + z_{\alpha_i}}, \overset{(n-3)}{-d + z_{\alpha_i}}, 0), \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, f(\bar{0}, \overline{-d + z_{\alpha_i}}, \overset{(n-3)}{-d + z_{\alpha_i}}, 0), \overset{(n-3)}{0}, \bar{0},$$

$$\ldots, f(\bar{0}, \overline{-d + z_{\alpha_i}}, \overset{(n-3)}{-d + z_{\alpha_i}}, 0), \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, f(\bar{0}, \overline{-d + z_{\alpha_i}}, \overset{(n-3)}{-d + z_{\alpha_i}}, 0)).$$

Последнее равенство и (168) подставляем в (167), этим завершаем доказательство предложения.

Строение свободных полуабелевых n-групп. Для определения свободной n-группы в некотором классе n-групп воспользуемся универсальным определением свободной алгебры из [48], стр. 34. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс n-групп. n-Группа $\langle F, f\rangle$ из $\mathfrak{K}$ называется свободной в классе $\mathfrak{K}$ со свободным порождающим множеством X, если всякое отображение ψ_0 множества X в любую n-группу $\langle B, f\rangle$ из класса $\mathfrak{K}$ продолжается до гомоморфизма n-групп $\psi : \langle F, f\rangle \to \langle B, f\rangle$.

Рассмотрим множество $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Для каждого элемента x_α определим прямую сумму $A_\alpha = \sum_{j=1}^{n-1}(x_{\alpha j})$ бесконечных циклических групп $(x_{\alpha j})$. Рассмотрим прямую сумму $F = (a) + \sum_{\alpha\in I} A_\alpha$, где (a) — бесконечная циклическая группа. На каждой группе A_α выбираем автоморфизм φ_α, действующий по правилу: для любого элемента $t_1x_{\alpha 1} + t_2x_{\alpha 2} + \ldots + t_{n-1}x_{\alpha n-1} \in A_\alpha$ имеем

$$\varphi_\alpha(t_1x_{\alpha 1} + t_2x_{\alpha 2} + \ldots + t_{n-1}x_{\alpha n-1}) = t_{n-1}x_{\alpha 1} + t_1x_{\alpha 2} + \ldots + t_{n-2}x_{\alpha n-1}.$$

Тогда на группе F имеем автоморфизм φ, действующий по правилу: для любого элемента $sa + \sum_{i=1}^{k} z_{\alpha_i} \in F$ получим $\varphi(sa + \sum_{i=1}^{k} z_{\alpha_i}) = sa + \sum_{i=1}^{k}\varphi_{\alpha_i}(z_{\alpha_i})$. Очевидно, элемент $d = a$ и автоморфизм φ группы $\langle F, +\rangle$ удовлетворяют (22), (23), значит, на группе F определяем полуабелеву n-группу $\langle F, f\rangle = der_{\varphi,a}F$, где n-арная операция f действует по правилу (21).

Предложение 62 *(Предложение 1, [75]-А) n-Группа $\langle F, f\rangle$ порождается множеством*

$$X = \{-a + x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Абелева группа F порождается множеством

$$Z = \{a\} \cup \{x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{x_{\alpha 2} \mid \alpha \in I\} \cup \ldots \cup \{x_{\alpha n-1} \mid \alpha \in I\},$$

тогда n-арная группа $\langle F, f\rangle$ (согласно предложению 61) порождается множеством

$$T = \{0\} \cup \{-a + x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{-a + x_{\alpha 2} \mid \alpha \in I\} \cup \ldots \cup \{-a + x_{\alpha n-1} \mid \alpha \in I\}.$$

Отметим, что для любого $\alpha \in I$ и $j = 2, \ldots, n-1$ получим

$$-a + x_{\alpha j} = -a + \varphi_\alpha^{j-1}(x_{\alpha 1}) = \varphi^{j-1}(-a + x_{\alpha 1}) = f(\overset{(i-1)}{0}, -a + x_{\alpha 1}, \overset{(n-i-1)}{0}, \bar{0}),$$

$$\overline{-a + x_{\alpha j}} = \overline{f(\overset{(i-1)}{0}, -a + x_{\alpha 1}, \overset{(n-i-1)}{0}, \bar{0})} = f(\overset{(i-1)}{\bar{0}}, \overline{-a + x_{\alpha 1}}, \overset{(n-i-1)}{\bar{0}}, \bar{\bar{0}}) =$$

$$= f(\overset{(i-1)}{\bar{0}}, \overline{-a + x_{\alpha 1}}, \overset{(n-i-1)}{\bar{0}}, f_{(n-3)}(\overset{((n-2)^2)}{0})).$$

Предложение доказано.

Теорема 104 *(Теорема 3, [75]-А) n-Группа $\langle F, f\rangle$ является свободной в классе полуабелевых n-групп.*

Доказательство. Пусть $\langle B, f'\rangle$ — произвольная полуабелева n-группа и ψ_0 – отображение множества X в B. Полагаем $\psi_0(0) = c$ и $\psi_0(-a + x_{\alpha 1}) = y_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Выбираем подгруппу $\langle G, f'\rangle$ в n-группе $\langle B, f'\rangle$, которая порождается множеством $Y = \{c\} \cup \{y_\alpha | \alpha \in$

$I\}$. На $\langle G, f'\rangle$ определим абелеву группу $G = ret_c\langle G, f'\rangle$, порожденную (по предложению 60) множеством

$$U = \{f'(\overset{(i-1)}{c}, y_\alpha, \overset{(n-i-1)}{c}, \bar{c}) \mid \alpha \in I, i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{f'(\overset{(n)}{c})\}.$$

Заметим, что элемент $d' = f'(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi'(x) = f'(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ удовлетворяют (22), (23) и $\langle G, f'\rangle = der_{\varphi', d'}G$ (согласно предложению 9).

Задаем отображение $\sigma_0 : Z \to U$, полагая $\sigma_0(a) = d'$ и для всех $\alpha \in I$, $j = 1, \ldots, n-1$ пусть $\sigma_0(x_{\alpha j}) = f'(\overset{(j-1)}{c}, y_\alpha, \overset{(n-j-1)}{c}, \bar{c}) + d' = \varphi'^{j-1}(y_\alpha) + d'$, тогда отображение σ_0 продолжается до группового гомоморфизма $\sigma : F \to G$, для которого $\sigma(0) = c$ и $\sigma(-a + x_{\alpha 1}) = -\sigma(a) + \sigma(x_{\alpha 1}) = y_\alpha$.

Докажем, что σ является гомоморфизмом из n-группы $\langle F, f\rangle$ в n-группу $\langle B, f'\rangle$. Пусть $x = sa + \sum_{i=1}^{k} z_{\alpha_i} \in F$, причем, $z_{\alpha_i} = t_{i1}x_{\alpha_i 1} + t_{i2}x_{\alpha_i 2} + \ldots + t_{in-1}x_{\alpha_i n-1}$. Тогда

$$\varphi' \circ \sigma(x) = \varphi'(s\sigma(a) + \sum_{i=1}^{k}(t_{i1}\sigma(x_{\alpha_i 1}) + t_{i2}\sigma(x_{\alpha_i 2}) + \ldots + t_{in-1}\sigma(x_{\alpha_i n-1}))) =$$

$$= \varphi'(sd' + \sum_{i=1}^{k}(t_{i1}(y_{\alpha_i} + d') + t_{i2}(\varphi'(y_{\alpha_i}) + d') + \ldots + t_{in-1}(\varphi'^{n-2}(y_{\alpha_i}) + d'))) =$$

$$= sd' + \sum_{i=1}^{k}(t_{in-1}(y_{\alpha_i} + d') + t_{i1}(\varphi'(y_{\alpha_i}) + d') + \ldots + t_{in-2}(\varphi'^{n-2}(y_{\alpha_i}) + d'))).$$

С другой стороны,

$$\sigma \circ \varphi(x) = \sigma(sa + \sum_{i=1}^{k}\varphi_{\alpha_i}(t_{i1}x_{\alpha_i 1} + t_{i2}x_{\alpha_i 2} + \ldots + t_{in-1}x_{\alpha_i n-1})) =$$

$$= \sigma(sa + \sum_{i=1}^{k}(t_{in-1}x_{\alpha_i 1} + t_{i1}x_{\alpha_i 2} + \ldots + t_{in-2}x_{\alpha_i n-1})) =$$

$$= s\sigma(a) + \sum_{i=1}^{k}(t_{in-1}\sigma(x_{\alpha_i 1}) + t_{i1}\sigma(x_{\alpha_i 2}) + \ldots + t_{in-2}\sigma(x_{\alpha_i n-1}))) =$$

$$= sd' + \sum_{i=1}^{k}(t_{in-1}(y_{\alpha_i} + d') + t_{i1}(\varphi'(y_{\alpha_i}) + d') + \ldots + t_{in-2}(\varphi'^{n-2}(y_{\alpha_i}) + d'))).$$

Итак, мы доказали равенство $\sigma\circ\varphi(x) = \varphi'\circ\sigma(x)$ для любого элемента $x \in F$. Таким образом, нуль группы G (т.е. элемент c) и гомоморфизм σ удовлетворяют двум условиям (60), (60) из теоремы 42. Тогда, согласно теореме 42, σ является гомоморфизмом из n-группы $\langle F, f\rangle$ в n-группу $\langle B, f'\rangle$. Причем, σ является продолжением отображения $\psi_0 : X \to B$. Теорема доказана.

Теорема 105 *(Теорема 4, [75]-A) Свободная n-группа $\langle H, h\rangle$ в классе полуабелевых n-групп со свободным порождающим множеством $W = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \cup \{c\}$ изоморфна n-группе $\langle F, f\rangle$.*

Доказательство. Из условия теоремы следует существование гомоморфизма ψ из $\langle H, h\rangle$ на n-группу $\langle F, f\rangle$, который является продолжением отображения $c \to 0$, $x_\alpha \to -a + x_{\alpha 1}$, $\alpha \in I$. С другой стороны, по теореме 104, существует гомоморфизм τ из $\langle F, f\rangle$ в $\langle H, h\rangle$, который является продолжением отображения $0 \to c$, $-a + x_{\alpha 1} \to x_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Значит, отображение $\tau \circ \psi$ оставляет на месте все элементы из W. Кроме того, если $\bar{w}$ — косой к элементу w из W, то $\tau \circ \psi(\bar{w}) = \overline{\tau \circ \psi(w)} = \bar{w}$ (гомоморфизм n-групп сохраняет унарную операцию$^-$: $x \to \bar{x}$,), т.е. отображение $\tau \circ \psi$ оставляет на месте также все элементы, которые являются косыми к элементам из W.

Покажем биективность ψ. Пусть $u, v \in H$ и $\psi(u) = \psi(v)$. Полагаем

$$u = h_{(k)}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{k(n-1)+1}}), v = h_{(l)}(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_{l(n-1)+1}}),$$

где y_{α_i} и z_{α_j} – элементы из W, либо являются косыми к элементам из W. Тогда

$$\tau \circ \psi(u) = \tau \circ \psi(h_{(k)}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{k(n-1)+1}})) =$$
$$= \tau(f_{(k)}(\psi(y_{\alpha_1}), \ldots, \psi(y_{\alpha_{k(n-1)+1}}))) = h_{(k)}(\tau(\psi(y_{\alpha_1})), \ldots, \tau(\psi(y_{\alpha_{k(n-1)+1}}))) =$$
$$= h_{(k)}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{k(n-1)+1}}) = u.$$

Аналогично $\tau(\psi(v)) = v$. В силу однозначности τ имеем $u = v$. Инъективность ψ доказана. Покажем сюръективность ψ. Пусть $g \in F$. Вновь полагаем

$$g = f_{(k)}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{k(n-1)+1}}),$$

где y_{α_i} – элемент из X, либо является косым к элементу из X. Если y_{α_i} – элемент из X, то имеется элемент z_{α_i} из W такой, что $\psi(z_{\alpha_i}) = y_{\alpha_i}$, а если y_{α_i} является косым к элементу из X, то также найдется элемент z_{α_i}, который является косым к некоторому элементу из W и для которого $\psi(z_{\alpha_i}) = y_{\alpha_i}$. Тогда для $u = h_{(k)}(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_{k(n-1)+1}})$ имеем

$$\psi(u) = \psi(h_{(k)}(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_{k(n-1)+1}})) =$$
$$= f_{(k)}(\psi(z_{\alpha_1}), \ldots, \psi(z_{\alpha_{k(n-1)+1}})) = f_{(k)}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{k(n-1)+1}}) = g.$$

Сюръективность ψ доказана. Значит, ψ — биекция. Теорема доказана.

Свободные конечно порожденные полуабелевы n-группы. Рассмотрим строение свободной конечно порожденной полуабелевой n-группы. Для каждого элемента x_i из конечного множества $\{x_1, \ldots, x_k\}$ определим прямую сумму $A_i = \sum_{j=1}^{n-1}(x_{ij})$ бесконечных циклических групп (x_{ij}). Рассмотрим прямую сумму $F = (a) + \sum_{i=1}^{k} A_i$, где (a) — бесконечная циклическая группа. На каждой группе A_i выбираем автоморфизм φ_i, действующий по правилу: для любого $t_1 x_{i1} + t_2 x_{i2} + \ldots + t_{n-1} x_{in-1} \in A_i$ имеем

$$\varphi_i(t_1 x_{i1} + t_2 x_{i2} + \ldots + t_{n-1} x_{in-1}) = t_{n-1} x_{i1} + t_1 x_{i2} + \ldots + t_{n-2} x_{in-1}.$$

Тогда на группе F имеем автоморфизм φ, действующий по правилу: для любого $sa + \sum_{i=1}^{k} z_i \in F$ получим $\varphi(sa + \sum_{i=1}^{k} z_i) = sa + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(z_i)$. На группе F определяем полуабелеву n-группу $\langle F, f\rangle = der_{\varphi,a} F$. Доказано (теорема 104), что n-группа $\langle F, f\rangle$ является свободной в классе полуабелевых n-групп с порождающим множеством $X = \{-a + x_{i1} \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{0\}$.

Свободная конечно порожденная полуабелева n-группа $\langle F, f\rangle$ построена на свободной абелевой группе $(a) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-1}(x_{ij})$ и построенный автоморфизм φ этой группы будет разложимым, а значит, и $\langle F, f\rangle$ будет разложимой (согласно теореме 96), т.е. верна

Теорема 106 *(Теорема 8, [88]-А) Свободная конечно порожденная полуабелева n-группа $\langle F, f\rangle$ изоморфна прямому произведению одной бесконечной циклической n-группы и k неразложимых полуабелевых n-групп, $(\varphi_i, 0)$-определенных на прямой сумме $n-1$ бесконечных циклических групп.*

Доказательство. На циклической группе (a) определяем циклическую n-группу $\langle (a), g\rangle = der_{1_{(a)},a}(a)$. На каждой прямой сумме $A_i = \sum_{j=1}^{n-1}(x_{ij})$ определяем полуабелеву n-группу $\langle A_i, h_i\rangle = der_{\varphi_i,0}A_i$. Очевидно, автоморфизм φ_i будет неразложимым, а значит, построенные n-группы $\langle A_i, h_i\rangle$ будут неразложимыми (согласно теореме 96).

Покажем, что отображение $\tau : F \to (a) \times \prod_{i=1}^{k} A_i$, построенное по правилу

$$\tau(sa + \sum_{i=1}^{k} z_i) = (sa, z_1, \ldots, z_k),$$

будет изоморфизмом n-группы $\langle F, f\rangle$ и прямого произведения

$$\langle (a), g\rangle \times \prod_{i=1}^{k}\langle A_i, h_i\rangle.$$

Действительно, для любых $s_j a + \sum_{i=1}^{k} z_{ij} \in F$, $j = 1, \ldots, n$, получим

$$\tau(f(s_1a + \sum_{i=1}^{k} z_{i1}, \ldots, s_na + \sum_{i=1}^{k} z_{in}))$$

$$= \tau(s_1a + \sum_{i=1}^{k} z_{i1} + \varphi(s_2a + \sum_{i=1}^{k} z_{i2}) + \ldots + \varphi^{n-2}(s_{n-1}a + \sum_{i=1}^{k} z_{in-1}) + s_na + \sum_{i=1}^{k} z_{in} + a)$$

$$= \tau(s_1a + \sum_{i=1}^{k} z_{i1} + s_2a + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(z_{i2}) + \ldots + s_{n-1}a + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^{n-2}(z_{in-1}) + s_na + \sum_{i=1}^{k} z_{in} + a)$$

$$= \tau((\sum_{j=1}^{n} s_ja + a) + \sum_{i=1}^{k}(z_{i1} + \varphi_i(z_{i2}) + \ldots + \varphi_i^{n-2}(z_{in-1}) + z_{in}))$$

$$= (g(s_1a, \ldots, s_na), h_1(z_{11}, \ldots, z_{1n}), \ldots, h_k(z_{k1}, \ldots, z_{kn})).$$

Теорема доказана.

5.4 Свободные m-полуабелевы n-группы

В этом параграфе изучается строение свободных n-групп в классе m-полуабе-левых n-групп.

Порождающие множества m-полуабелевых n-групп Зная порождающее множество m-полуабелевой n-группы, построим порождающее множество ее ретракта.

Предложение 63 *(Теорема 3, [76]-A) Для m-полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ с порождающим множеством $X = \{x_\alpha | \alpha \in I\}$ при фиксированном x_β из X абелева группа $ret_{x_\beta}\langle G, f\rangle$ порождается множеством*

$$Y = \{f(\overset{(i-1)}{x_\beta}, x_\alpha, \overset{(n-i-1)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta) \mid \alpha \in I\diagdown\{\beta\}, i = 1, \ldots, m-1\} \cup \{f(\overset{(n)}{x_\beta})\}.$$

Доказательство. На n-группе $\langle G, f\rangle$ определяем ретракт $G = ret_{x_\beta}\langle G, f\rangle$, где сложение действует по правилу: $a+b = f(a, \overset{(n-3)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta, b)$ для фиксированного элемента x_β из X. Тогда для элемента $d = f(\overset{(n)}{x_\beta})$ и автоморфизма $\varphi(x) = f(x_\beta, x, \overset{(n-3)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta)$ верны равенства (21), (22), (23). Элемент x_β является нулем в группе G. Из равенства $\varphi^{m-1}(x) = x$ для любого элемента $x \in G$ и из равенства (21) следует равенство

$$f(a_1^n) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2} \varphi^i(a_{j(m-1)+i+1}) + a_n + d, \quad a_1^n \in G. \tag{169}$$

Выбираем элемент g из G, для которого $g = f_{(t)}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{t(n-1)+1}})$, где $y_{\alpha_i} = x_{\alpha_i}$ либо $y_{\alpha_i} = \bar{x}_{\alpha_i}$ для $i = 1, \ldots, t(n-1)+1$, $x_{\alpha_i} \in X$. Пусть $n-1 = k(m-1)$ для некоторого натурального числа k. Тогда, согласно (169), получим

$$g = \sum_{s=0}^{t}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2} \varphi^i(y_{\alpha_{s(j(m-1)+i+1)}}) + y_{\alpha_{t(n-1)+1}} + td. \tag{170}$$

Из определения косого элемента для $x_\alpha \in X$ имеем $f(\overset{(n-1)}{x_\alpha}, \bar{x}_\alpha) = x_\alpha$, а тогда из (169) получим $\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2} \varphi^i(x_\alpha) + \bar{x}_\alpha + d = x_\alpha$, откуда

$$\bar{x}_\alpha = -\sum_{i=1}^{m-2} \varphi^i(x_\alpha) - \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2} \varphi^i(x_\alpha) - d. \tag{171}$$

Используя определение косого элемента, для $i = 1, \ldots, m-2$ и любого элемента $x_\alpha \in X$ получим

$$\varphi^i(x_\alpha) = f(\overset{(i)}{x_\beta}, x_\alpha, \overset{(n-2-i)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta). \tag{172}$$

Кроме того, для $r = 1, \ldots, m-2$ и любого $x_\alpha \in X$ верно

$$\varphi^r(\bar{x}_\alpha) = \bar{x}_\alpha - x_\alpha + \varphi^r(x_\alpha). \tag{173}$$

Действительно, из определения косого элемента имеем (171), тогда

$$\varphi^r(\bar{x}_\alpha) = \varphi^r(-\sum_{i=1}^{m-2} \varphi^i(x_\alpha) - \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2} \varphi^i(x_\alpha) - d) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m-2} \varphi^{i+r}(x_\alpha) - \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2} \varphi^{i+r}(x_\alpha) - \varphi^r(d) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m-r-2} \varphi^{i+r}(x_\alpha) - \sum_{i=0}^{r-1} \varphi^i(x_\alpha) - \sum_{j=1}^{k-1}(-\sum_{i=0}^{m-r-2} \varphi^{i+r}(x_\alpha) - \sum_{i=0}^{r-1} \varphi^i(x_\alpha)) - d =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m-2}\varphi^i(x_\alpha) - x_\alpha + \varphi^r(x_\alpha) - \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2}\varphi^i(x_\alpha) - d = \bar{x}_\alpha - x_\alpha + \varphi^r(x_\alpha).$$

Если в (170) $y_{\alpha_{s(j(m-1)+i+1)}} = x_\beta$, то в (170) слагаемое с участием x_β исчезнет (x_β является нулем в группе G), а если $y_{\alpha_{s(j(m-1)+i+1)}} = \bar{x}_\beta$, то $y_{\alpha_{s(j(m-1)+i+1)}} = -d$, так как $\bar{x}_\beta = -d$ (следует из (171)). Далее, если в (170) $y_{\alpha_{s(j(m-1)+i+1)}} = x_\alpha \in X\setminus\{x_\beta\}$, то, согласно (172), $\varphi^i(y_{\alpha_{s(j(m-1)+i+1)}}) \in Y$, а если $y_{\alpha_{s(j(m-1)+i+1)}} = \bar{x}_\alpha$, $x_\alpha \in X\setminus\{x_\beta\}$, то, согласно (173), $\varphi^i(y_{\alpha_{s(j(m-1)+i+1)}}) = \bar{x}_\alpha - x_\alpha + \varphi^s(x_\alpha)$ для всех $i = 1, \ldots, m-2$.

Таким образом, в выражении элемента g (170) участвуют элементы из множества Y либо им противоположные. Предложение доказано.

А теперь, зная порождающее множество абелевой группы G, построим порождающее множество m-полуабелевой n-арной группы $der_{\varphi,d}G$.

Предложение 64 *(Теорема 4, [76]-А) Любая m-полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}G$, определенная на абелевой группе G с порождаюшим множеством $Z = \{z_\alpha | \alpha \in I\}$, порождается множеством $X = \{-d + z_\alpha | \alpha \in I\} \cup \{0\}$.*

Доказательство. n-Арная операция f действует по правилу (169), где $d = f(\overset{(n)}{0})$ и автоморфизм φ группы G действует по правилу $\varphi(x) = f(0, x, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0})$.

Пусть $g = n_1 z_{\alpha_1} + \ldots + n_t z_{\alpha_t}$ — любой элемент из G. Заметим, что $-d = \bar{0}$, так как $f(\overset{(n-1)}{0}, -d) = 0$. Для любых элементов a, b из G имеем $a + b = f(a, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, b)$. Тогда

$$g = f_{(t-1)}(n_1 z_{\alpha_1}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, n_2 z_{\alpha_2}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, \ldots, n_{t-1} z_{\alpha_{t-1}}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, n_t z_{\alpha_t}). \tag{174}$$

Очевидно, $z_{\alpha_s} = f(\overset{(n-1)}{0}, -d + z_{\alpha_s})$, $s = 1, \ldots, t$.

Если $n_s > 1$ $(1 \leq s \leq t)$, то, аналогично как в (174), имеем

$$n_s z_{\alpha_s} = f_{(n_s-1)}(z_{\alpha_s}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, z_{\alpha_s}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, \ldots, z_{\alpha_s}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, z_{\alpha_s}) =$$

$$= f_{(n_s-1)}(f(\overset{(n-1)}{0}, -d + z_{\alpha_s}), \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, \ldots, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, f(\overset{(n-1)}{0}, -d + z_{\alpha_s})). \tag{175}$$

Далее, так как

$$-d + z_{\alpha_s} = f(-d + z_{\alpha_s}, \overline{-d + z_{\alpha_s}}, \overset{(n-2)}{-d + z_{\alpha_s}}) =$$

$$= -d + z_{\alpha_s} + \varphi(\overline{-d + z_{\alpha_s}}) + \sum_{i=2}^{m-2}\varphi^i(-d + z_{\alpha_s}) + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2}\varphi^i(-d + z_{\alpha_s}) + -d + z_{\alpha_s} + d,$$

то

$$-z_{\alpha_s} = \varphi(\overline{-d + z_{\alpha_s}}) + \sum_{i=2}^{m-2}\varphi^i(-d + z_{\alpha_s}) + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2}\varphi^i(-d + z_{\alpha_s}) =$$

$$= -d + \varphi(\overline{-d + z_{\alpha_s}}) + \sum_{i=2}^{m-2}\varphi^i(-d + z_{\alpha_s}) + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{m-2}\varphi^i(-d + z_{\alpha_s}) + 0 + d =$$

$$= f(-d, \overline{-d + z_{\alpha_s}}, \overset{(n-3)}{-d + z_{\alpha_s}}, 0) = f(\bar{0}, \overline{-d + z_{\alpha_s}}, \overset{(n-3)}{-d + z_{\alpha_s}}, 0).$$

Если $n_s < 0$ $(1 \le s \le t)$, то, аналогично как в (174), получим

$$n_s z_{\alpha_s} = (-n_s)(-z_{\alpha_s}) =$$

$$= f_{(-n_s-1)}(-z_{\alpha_s}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, -z_{\alpha_s}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, \ldots, -z_{\alpha_s}, \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, -z_{\alpha_s}) =$$

$$= f_{(-n_s-1)}(f(\bar{0}, \overline{-d+z_{\alpha_s}}, \overset{(n-3)}{-d+z_{\alpha_s}}, 0), \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, f(\bar{0}, \overline{-d+z_{\alpha_s}}, \overset{(n-3)}{-d+z_{\alpha_s}}, 0), \overset{(n-3)}{0}, \bar{0},$$

$$\ldots, f(\bar{0}, \overline{-d+z_{\alpha_s}}, \overset{(n-3)}{-d+z_{\alpha_s}}, 0), \overset{(n-3)}{0}, \bar{0}, f(\bar{0}, \overline{-d+z_{\alpha_s}}, \overset{(n-3)}{-d+z_{\alpha_s}}, 0)).$$

Последнее равенство и (175) подставляем в (174), этим завершаем доказательство предложения.

Строение свободных m-полуабелевых n-групп Приступаем к изучению свободных n-групп в классе m-полуабелевых n-групп. Рассмотрим множество $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Для каждого элемента x_α определим прямую сумму $A_\alpha = \sum_{j=1}^{m-1}(x_{\alpha j})$ бесконечных циклических групп $(x_{\alpha j})$. Рассмотрим прямую сумму $F = (a) + \sum_{\alpha \in I} A_\alpha$, где (a) — бесконечная циклическая группа. На каждой группе A_α выбираем автоморфизм φ_α, действующий по правилу: для любого элемента $t_1 x_{\alpha 1} + t_2 x_{\alpha 2} + \ldots + t_{m-1} x_{\alpha m-1} \in A_\alpha$ имеем

$$\varphi_\alpha(t_1 x_{\alpha 1} + t_2 x_{\alpha 2} + \ldots + t_{m-1} x_{\alpha m-1}) = t_{m-1} x_{\alpha 1} + t_1 x_{\alpha 2} + \ldots + t_{m-2} x_{\alpha m-1}.$$

Тогда на группе F имеем автоморфизм φ, действующий по правилу: для любого элемента $sa + \sum_{i=1}^{r} z_{\alpha_i} \in F$ получим $\varphi(sa + \sum_{i=1}^{r} z_{\alpha_i}) = sa + \sum_{i=1}^{r} \varphi_{\alpha_i}(z_{\alpha_i})$. Очевидно, элемент a и автоморфизм φ группы F удовлетворяют (22), (23) (при $d = a$), тогда на группе F определяем m-полуабелеву n-группу $\langle F, f \rangle = der_{\varphi,a} F$, где n-арная операция f действует по правилу (169).

Предложение 65 *(Предложение 1, [76]-А) n-Группа $\langle F, f \rangle$ порождается множеством $X = \{-a + x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{0\}$.*

Доказательство. Абелева группа F порождается множеством

$$Z = \{a\} \cup \{x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{x_{\alpha 2} \mid \alpha \in I\} \cup \ldots \cup \{x_{\alpha m-1} \mid \alpha \in I\},$$

тогда n-группа $\langle F, f \rangle$ (согласно предложению 64) порождается множеством

$$T = \{0\} \cup \{-a + x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{-a + x_{\alpha 2} \mid \alpha \in I\} \cup \ldots \cup \{-a + x_{\alpha m-1} \mid \alpha \in I\}.$$

Отметим, что для любого $\alpha \in I$ и $j = 2, \ldots, m-1$ получим

$$-a + x_{\alpha j} = -a + \varphi_\alpha^{j-1}(x_{\alpha 1}) = \varphi^{j-1}(-a + x_{\alpha 1}) = f(\overset{(j-1)}{0}, -a + x_{\alpha 1}, \overset{(n-j-1)}{0}, \bar{0}),$$

$$\overline{-a + x_{\alpha j}} = \overline{f(\overset{(j-1)}{0}, -a + x_{\alpha 1}, \overset{(n-j-1)}{0}, \bar{0})} = f(\overset{(j-1)}{\bar{0}}, \overline{-a + x_{\alpha 1}}, \overset{(n-j-1)}{\bar{0}}, \bar{\bar{0}}) =$$

$$= f(\overset{(j-1)}{\bar{0}}, \overline{-a + x_{\alpha 1}}, \overset{(n-j-1)}{\bar{0}}, f_{(n-3)}(\overset{((n-2)^2)}{0})).$$

Предложение доказано.

Теорема 107 *(Теорема 5, [76]-A) n-Группа $\langle F, f\rangle$ будет свободной в классе m-полуабелевых n-групп со свободным порождающим множеством $X = \{-a + x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $\langle B, f'\rangle$ — произвольная m-полуабелева n-группа и ψ_0 – отображение множества X в B. Полагаем $\psi_0(0) = c$ и $\psi_0(-a+x_{\alpha 1}) = y_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Выбираем подгруппу $\langle G, f'\rangle$ в n-группе $\langle B, f'\rangle$, которая порождается множеством $Y = \{c\} \cup \{y_\alpha | \alpha \in I\}$. На $\langle G, f'\rangle$ определим абелеву группу $G = ret_c\langle G, f'\rangle$, порожденную (по предложению 63) множеством

$$U = \{f'(\overset{(i-1)}{c}, y_\alpha, \overset{(n-i-1)}{c}, \bar{c}) \mid \alpha \in I, i = 1, \ldots, m-1\} \cup \{f'(\overset{(n)}{c})\}.$$

Заметим, что элемент $d' = f'(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi'(x) = f'(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ удовлетворяют (22), (23) и $\langle G, f'\rangle = der_{\varphi', d'}G$.

Задаем отображение $\sigma_0 : Z \to U$, полагая $\sigma_0(a) = d'$ и для всех $\alpha \in I$, $j = 1, \ldots, m-1$ пусть $\sigma_0(x_{\alpha j}) = f'(\overset{(j-1)}{c}, y_\alpha, \overset{(n-j-1)}{c}, \bar{c}) + d' = \varphi'^{j-1}(y_\alpha) + d'$, тогда отображение σ_0 продолжается до гомоморфизма $\sigma : F \to G$, для которого $\sigma(0) = c$ и $\sigma(-a + x_{\alpha 1}) = -\sigma(a) + \sigma(x_{\alpha 1}) = y_\alpha$.

Докажем, что σ является гомоморфизмом из n-группы $\langle F, f\rangle$ в n-группу $\langle B, f'\rangle$. Пусть $x = sa + \sum_{i=1}^r z_{\alpha_i} \in \langle F, +\rangle$, причем, $z_{\alpha_i} = t_{i1}x_{\alpha_i 1} + t_{i2}x_{\alpha_i 2} + \ldots + t_{im-1}x_{\alpha_i m-1}$. Тогда

$$\varphi' \circ \sigma(x) = \varphi'(s\sigma(a) + \sum_{i=1}^r (t_{i1}\sigma(x_{\alpha_i 1}) + t_{i2}\sigma(x_{\alpha_i 2}) + \ldots + t_{im-1}\sigma(x_{\alpha_i m-1}))) =$$

$$= \varphi'(sd' + \sum_{i=1}^r (t_{i1}(y_{\alpha_i} + d') + t_{i2}(\varphi'(y_{\alpha_i}) + d') + \ldots + t_{im-1}(\varphi'^{m-2}(y_{\alpha_i}) + d'))) =$$

$$= sd' + \sum_{i=1}^r (t_{im-1}(y_{\alpha_i} + d') + t_{i1}(\varphi'(y_{\alpha_i}) + d') + \ldots + t_{im-2}(\varphi'^{m-2}(y_{\alpha_i}) + d')).$$

С другой стороны,

$$\sigma \circ \varphi(x) = \sigma(sa + \sum_{i=1}^r \varphi_{\alpha_i}(t_{i1}x_{\alpha_i 1} + t_{i2}x_{\alpha_i 2} + \ldots + t_{im-1}x_{\alpha_i m-1})) =$$

$$= \sigma(sa + \sum_{i=1}^r (t_{im-1}x_{\alpha_i 1} + t_{i1}x_{\alpha_i 2} + \ldots + t_{im-2}x_{\alpha_i m-1})) =$$

$$= s\sigma(a) + \sum_{i=1}^r (t_{im-1}\sigma(x_{\alpha_i 1}) + t_{i1}\sigma(x_{\alpha_i 2}) + \ldots + t_{im-2}\sigma(x_{\alpha_i m-1})) =$$

$$= sd' + \sum_{i=1}^r (t_{im-1}(y_{\alpha_i} + d') + t_{i1}(\varphi'(y_{\alpha_i}) + d') + \ldots + t_{im-2}(\varphi'^{m-2}(y_{\alpha_i}) + d')).$$

Итак, мы доказали равенство $\sigma \circ \varphi(x) = \varphi' \circ \sigma(x)$ для любого $x \in F$. Таким образом, нуль группы G (т.е. элемент c) и гомоморфизм σ удовлетворяют двум условиям из теоремы 12. Тогда, согласно теореме 12, σ является гомоморфизмом из n-группы $\langle F, f\rangle$ в n-группу $\langle B, f'\rangle$. Причем, σ является продолжением отображения $\psi_0 : X \to B$. Теорема доказана.

Теорема 108 *(Теорема 6, [76]-A) Свободная n-группа $\langle H, h\rangle$ в классе m-полуабелевых n-групп со свободным порождающим множеством $W = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \cup \{c\}$ изоморфна n-группе $\langle F, f\rangle$.*

Доказательство. Доказывается аналогично как теорема 105.

6 Эндоморфизмы полуабелевых n-групп

Известно, что абелева группа тесно связана с кольцом всех ее эндоморфизмов. Мы уже говорили, что обобщением абелевой группы является полуабелева n-группа. Имеются и другие обобщения классических алгебр. Так например, обобщением определения почтикольца и кольца (алгебру $\langle A, +, \circ\rangle$ называют почтикольцом, если $\langle A, +\rangle$ — группа (не обязательно абелева), $\langle A, \circ\rangle$ — полугруппа и выполнен правый закон дистрибутивности (смотри, например, стр. 96 в [16])). Алгебру $\langle A, g, \circ\rangle$ с n-арной операцией g и бинарной операцией $\circ$ называют $(n, 2)$-почтикольцом ($(n, 2)$-кольцом) (смотри, например, [9]), если $\langle A, g\rangle$ является n-группой (абелевой n-группой), $\langle A, \circ\rangle$ является полугруппой и выполнен правый закон дистрибутивности

$$g(x_1^n) \circ y = g(x_1 \circ y, \dots, x_n \circ y) \tag{176}$$

(оба закона дистрибутивности: (176) и

$$y \circ g(x_1^n) = g(y \circ x_1, \dots, y \circ x_n) \quad). \tag{177}$$

По аналогии с абелевыми группами, каждую полуабелеву (абелеву) n-группу можно связать с $(n, 2)$-почтикольцом ($(n, 2)$-кольцом) ее эндоморфизмов (смотри ниже).

6.1 Гомоморфизмы из n-группы в полуабелеву n-группу

В 60-тые и 70-тые годы прошлого века в теории универсальных алгебр активно изучались абелевы алгебры (смотри, например, [49], [50], [9]). Универсальная алгебра A сигнатуры Ω называется абелевой (смотри [16], стр. 87), если гомоморфизмы в нее любой алгебры B этой же сигнатуры суммируемы, т.е. а) для любых гомоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_n : B \to A$ и любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geq 1$, отображение $\omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, заданное по правилу

$$\omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(b) = \omega(\varphi_1(b), \dots, \varphi_n(b)), \quad b \in B, \tag{178}$$

является гомоморфизмом; б) для любого $\omega \in \Omega_0$, где 0_ω — выделенный операцией ω элемент алгебры A, отображение $(\varphi_\omega) : B \to A$, заданное по правилу

$$\varphi_\omega(b) = 0_\omega, \quad b \in B, \tag{179}$$

является гомоморфизмом. Известно (смотри там же в [16]), что алгебра A сигнатуры Ω является абелевой тогда и только тогда, когда а) для любых $\omega \in \Omega_n$, $\omega' \in \Omega_m$, $n, m \geq 1$, в A верно тождество

$$\begin{gathered}\omega'(\omega(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, \omega(x_{m1}, \dots, x_{mn})) = \\ \omega(\omega'(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, \omega'(x_{1n}, \dots, x_{mn}));\end{gathered} \tag{180}$$

б) все $\omega \in \Omega_0$ отмечают в A один и тот же элемент, который является подалгеброй в A.

Одним из основных направлений в теории общей алгебры является описание всех абелевых алгебр в многообразиях классических алгебр и изучение этих алгебр. Так, например, в многообразии групп абелевыми алгебрами будут в точности абелевы группы. В многообразии n-групп абелевыми алгебрами будут в точности полуабелевы n-группы (см. теорема 3, [9]). В этом параграфе мы построим n-группу гомоморфизмов из фиксированной n-группы в фиксированную полуабелеву n-группу.

На множестве $Hom(G,C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ определим n-арную операцию g по правилу

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), x \in G. \tag{181}$$

Отметим, что множество $Hom(G,C)$ может быть пустым, в отличие от множества всех гомоморфизмов из группы в абелеву группу, в этом множестве, по крайней мере, есть нулевой гомоморфизм. Например, возмем производную n-группу $\langle G, f_1\rangle$ от группы G и абелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$, в которой элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ отличен от нуля в абелевой группе $ret_c\langle C, f_2\rangle$. Согласно теореме 12, для каждого гомоморфизма ψ из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$ найдутся гомоморфизм σ из группы G в группу $ret_c\langle C, f_2\rangle$ и элемент $u \in C$ такие, что верно равенство $\sigma(0) = (n-1)u + d_2$ (здесь $+$ — сложение в группе $ret_c\langle C, f_2\rangle$, другими словами, нуль группы $ret_c\langle C, f_2\rangle$ принадлежит классу смежности по подгруппе $H = \{(n-1)x | x \in C\}$, который, по условию, отличен от H. Такого не может быть. Значит, множество гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$ пусто.

Дальше в этом параграфе, если рассматривается множество всех гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу, то будем считать, что это множество не пусто.

Предложение 66 *Множество $Hom(G,C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g образует полуабелеву n-группу.*

Доказательство. Для любых элементов $x_1, \ldots, x_n$ из G, используя признак полуабелевости (теорема 39), получаем

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(f_1(x_1, \ldots, x_n)) =$$
$$= f_2(\varphi_1(f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, \varphi_n(f_1(x_1, \ldots, x_n))) =$$
$$= f_2(f_2(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_1(x_n)), \ldots, f_2(\varphi_n(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n))) =$$
$$= f_2(f_2(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_1)), \ldots, f_2(\varphi_1(x_n), \ldots, \varphi_n(x_n))) =$$
$$= f_2(g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_1), \ldots, g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_n)).$$

Значит, множество $Hom(G,C)$ замкнуто относительно действия n-арной операции g.

Докажем ассоциативность n-арной операции g. Выбираем $2n-1$ гомоморфизмов φ_j $(j = 1, \ldots, 2n-1)$ из $Hom(G,C)$ и фиксируем индекс i из набора индексов $2, \ldots, n$. Используя ассоциативность n-арной операции f_2, получаем ассоциативность операции g: для любого элемента $x \in G$ имеем

$$g(g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{2n-1})(x) =$$
$$= f_2(g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_{2n-1}(x)) =$$
$$= f_2(f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_{2n-1}(x)) =$$
$$= f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{i-1}(x), f_2(\varphi_i(x), \ldots, \varphi_{n+i-1}(x)), \varphi_{n+i}(x), \ldots, \varphi_{2n-1}(x)) =$$
$$= f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{i-1}(x), g(\varphi_i, \ldots, \varphi_{n+i-1})(x), \varphi_{n+i}(x), \ldots, \varphi_{2n-1}(x)) =$$
$$= g(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, g(\varphi_i, \ldots, \varphi_{n+i-1}), \varphi_{n+i}, \ldots, \varphi_{2n-1})(x).$$

Выбираем теперь n гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ из $Hom(G,C)$ и в n-полугруппе $\langle Hom(G,C), g\rangle$ рассмотрим уравнение

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, z) = \varphi_n \tag{182}$$

с переменной z. Для каждого элемента $x \in G$ выбираем элемент $y \in C$ как решение уравнения

$$f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), y) = \varphi_n(x). \tag{183}$$

Докажем, что отображение $\psi(x) = y$ является гомоморфизмом из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$. Действительно, для любых элементов $x_1, \ldots, x_n$ из G элемент $\psi(f_1(x_1, \ldots, x_n))$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} &f_2(\varphi_1(f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, \varphi_{n-1}(f_1(x_1, \ldots, x_n)), y) = \\ &= \varphi_n(f_1(x_1, \ldots, x_n)). \end{aligned} \tag{184}$$

С другой стороны, для каждого элемента x_i $(1 \leq i \leq n)$ верно равенство

$$f_2(\varphi_1(x_i), \ldots, \varphi_{n-1}(x_i), \psi(x_i)) = \varphi_n(x_i),$$

а тогда верно равенство

$$f_2(f_2(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1), \psi(x_1)), \ldots, f_2(\varphi_1(x_{n-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_{n-1}),$$

$$\psi(x_{n-1})), f_2(\varphi_1(x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_n), \psi(x_n))) = f_2(\varphi_n(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)).$$

Но n-группа $\langle G, f_2\rangle$ является полуабелевой, значит, используя признак полуабелевости (теорема 39), из последнего равенства имеем

$$f_2(f_2(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_1(x_{n-1}), \varphi_1(x_n)), \ldots, f_2(\varphi_{n-1}(x_1), \ldots, \varphi_{n-1}(x_{n-1}),$$

$$\varphi_{n-1}(x_n)), f_2(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_{n-1}), \psi(x_n))) = f_2(\varphi_n(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n))$$

или

$$\begin{aligned} f_2(\varphi_1(f_2(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, \varphi_{n-1}(f_2(x_1, \ldots, x_n)), f_2(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n))) = \\ = f_2(\varphi_n(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)). \end{aligned}$$

Но уравнение (184) имеет единственное решение, значит,

$$\psi(f_1(x_1, \ldots, x_n)) = f_2(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)).$$

Итак, $\psi \in Hom(G, C)$, тогда уравнение (182) разрешимо. Докажем единственность решения этого уравнения. Пусть уравнение (182) имеет два решения ψ_1 и ψ_2. Для каждого элемента $x \in G$ верны два равенства

$$f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \psi_1(x)) = \varphi_n(x),$$

$$f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \psi_2(x)) = \varphi_n(x).$$

В силу однозначной разрешимости уравнения (184) имеем $\psi_1(x) = \psi_1(x)$.

Итак, $\langle Hom(G, C), g\rangle$ — n-группа. Осталось доказать полуабелевость этой n-группы. Для любого элемента $x \in G$ получаем

$$g(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)) =$$

$$= f_2(\varphi_n(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_1(x)) = g(\varphi_n, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_1)(x).$$

Предложение доказано.

Заметим, что предложение 66 есть частный случай следствия 8 из [9].

Известно, что каждая абелева n-группа $\langle C, f_2\rangle$ является полуабелевой, а значит, множество всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в абелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g образует полуабелеву n-группу. Но оказывается, что эта n-группа гомоморфизмов будет даже абелевой, т.е. верно

Предложение 67 *Множество $Hom(G,C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в абелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g образует абелеву n-группу.*

Доказательство. Согласно предложению 66, $\langle Hom(G,C), g\rangle$ — полуабелева n-группа. Осталось доказать абелевость этой n-группы. Для любого элемента $x \in G$ и для любой подстановки $\sigma \in S_n$ получаем

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) =$$

$$= f_2(\varphi_{\sigma(1)}(x), \ldots, \varphi_{\sigma(n)}(x)) = g(\varphi_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi_{\sigma(n)})(x).$$

Предложение доказано.

В n-группе гомоморфизмов $\langle Hom(G,C), g\rangle$ каждый элемент имеет ему косой элемент. По какому закону действует этот косой элемент? На этот вопрос отвечает

Предложение 68 *Для каждого гомоморфизма φ в n-группе $\langle Hom(G,C), g\rangle$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ ему косой гомоморфизм $\bar{\varphi}$ действует по правилу $\bar{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}, x \in G$.*

Доказательство. Из равенства $g(\overset{(n-1)}{\varphi}, \bar{\varphi}) = \varphi$, согласно правилу (181), следует равенство $f_2(\overset{(n-1)}{\varphi(x)}, \bar{\varphi}(x)) = \varphi(x)$ для любого элемента $x \in G$. По определению косого элемента верно равенство $f_2(\overset{(n-1)}{\varphi(x)}, \overline{\varphi(x)}) = \varphi(x)$ также для любого элемента $x \in G$. Значит, $\bar{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}, x \in G$. Предложение доказано.

У изоморфных n-групп и изоморфных полуабелевых n-групп n-группы гомоморфизмов также изоморфны, более того, верна

Теорема 109 *Каждый изоморфизмы ψ_1 n-групп $\langle G, f_1\rangle$ и $\langle G', f_1'\rangle$ и ψ_2 полуабелевых n-групп $\langle C, f_2\rangle$ и $\langle C', f_2'\rangle$ индуцируют изоморфизм τ n-групп гомоморфизмов $\langle Hom(G,C), g\rangle$ и $\langle Hom(G',C'), g'\rangle$, который действует по правилу $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.*

Доказательство. Докажем вначале, что $\tau(\alpha) \in Hom(G', C')$. Действительно, если элементы $x_1, \ldots, x_n \in G'$, то

$$\tau(\alpha)(f_1'(x_1, \ldots, x_n)) = \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(f_1'(x_1, \ldots, x_n)) =$$

$$= \psi_2 \circ \alpha(\psi_1^{-1}(f_1'(x_1, \ldots, x_n))) = \psi_2(\alpha(f_1(\psi_1^{-1}(x_1), \ldots, \psi_1^{-1}(x_n)))) =$$
$$= \psi_2(f_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_1)), \ldots, \alpha(\psi_1^{-1}(x_n)))) =$$
$$= f_2'(\psi_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_1))), \ldots, \psi_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_n)))) =$$
$$= f_2'(\psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(x_1), \ldots, \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(x_n)).$$

Докажем теперь инъективность отображения τ. Пусть для некоторых гомоморфизмов α_1 и α_2 из $Hom(G,C)$ верно равенство $\tau(\alpha_1) = \tau(\alpha_2)$. Тогда для любого элемента $x \in G$ полагаем $y = \psi_1(x)$. Из выше указанного верного равенства получаем $\psi_2 \circ \alpha_1 \circ \psi_1^{-1}(y) = \psi_2 \circ \alpha_2 \circ \psi_1^{-1}(y)$ или $\psi_2 \circ \alpha_1(x) = \psi_2 \circ \alpha_2(x)$. Последнее равенство домножаем слева на ψ_2^{-1} и получаем $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$. Тем самым доказана инъективность отображения τ.

Настало время доказать сюръективность отображения τ. Пусть гомоморфизм $\beta \in Hom(G', C')$. Обозначим $\alpha = \psi_2^{-1} \circ \beta \circ \psi_1$, причем $\alpha \in Hom(G,C)$. Тогда $\tau(\alpha) = \tau(\psi_2^{-1} \circ \beta \circ \psi_1) = \psi_2 \circ \psi_2^{-1} \circ \beta \circ \psi_1 \circ \psi_1^{-1} = \beta$. Итак, отображение τ является биективным.

Осталось проверить сохранение действия n-арной операции при отображение τ. Для любых гомоморфизмов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $Hom(G, C)$ и любого элемента $x \in G'$ имеем

$$\tau(g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))(x) = \psi_2 \circ g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \circ \psi_1^{-1}(x) =$$

$$= \psi_2(f_2(\alpha_1(\psi_1^{-1}(x)), \ldots, \alpha_n(\psi_1^{-1}(x)))) =$$
$$= f_2'(\psi_2(\alpha_1(\psi_1^{-1}(x))), \ldots, \psi_2(\alpha_n(\psi_1^{-1}(x)))) =$$
$$= f_2'(\psi_2 \circ \alpha_1 \circ \psi_1^{-1}(x), \ldots, \psi_2 \circ \alpha_n \circ \psi_1^{-1}(x)) =$$
$$= f_2'(\tau(\alpha_1)(x), \ldots, \tau(\alpha_n)(x)) = g'(\tau(\alpha_1), \ldots, \tau(\alpha_n))(x).$$

Теорема доказана.

$(n, 2)$-Почтикольцо эндоморфизмов полуабелевой n-группы Перейдем теперь к изучению эндоморфизмов полуабелевой n-группы.

Теорема 110 *(Следствие 9 из [9]) Множество E всех эндоморфизмов полуабелевой n-группы $\langle G, f, \rangle$ является $(n, 2)$-почтикольцом $\langle E, g, \circ\rangle$ с единицей, где n-арная операция g действует по правилу (181) и $\circ$ — композиция эндоморфизмов.*

Для абелевых n-групп верна

Теорема 111 *(Следствие 10 из [9]) Множество E всех эндоморфизмов абелевой n-группы $\langle G, f, \rangle$ является $(n, 2)$-кольцом $\langle E, g, \circ\rangle$ с единицей, где n-арная операция g действует по правилу (181) и $\circ$ — композиция эндоморфизмов.*

Унарная операция $h : x \to \bar{x}$ является эндоморфизмом в полуабелевой (абелевой) n-группе.

Предложение 69 *Унарная операция $h : x \to \bar{x}$ в полуабелевой (абелевой) n-группе $\langle G, f, \rangle$ является косым элементом для тождественного автоморфизма 1_G в $(n, 2)$-почтикольце ($(n, 2)$-кольце) $\langle E, g, \circ\rangle$ всех эндоморфизмов этой n-группы.*

Доказательство. Для каждого элемента $x \in G$ имеем

$$g(\overset{(n-1)}{1_G}, h)(x) = f(\overset{(n-1)}{1_G(x)}, h(x)) = f(\overset{(n-1)}{x}, \bar{x}) = x,$$

значит, $\bar{1}_G = h$. Предложение доказано.

У изоморфных полуабелевых n-групп $(n, 2)$-почтикольца эндоморфизмов изоморфны, более того, верна

Теорема 112 *Пусть у полуабелевых n-групп $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ есть $(n, 2)$-почтикольца эндоморфизмов $\langle E_1, g_1, \circ\rangle$ и $\langle E_2, g_2, \circ\rangle$ соответственно. Изоморфизм ψ n-групп $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ индуцирует изоморфизм τ $(n, 2)$-почтиколец $\langle E_1, g_1, \circ\rangle$ и $\langle E_2, g_2, \circ\rangle$, который определяется по формуле*

$$\tau : \alpha \to \psi \circ \alpha \circ \psi^{-1}.$$

Доказательство. Докажем вначале, что $\tau(\alpha)$ является эндоморфизмом n-группы $\langle G_2, f_2\rangle$. Действительно, если элементы $x_1,\ldots,x_n \in G_2$, то

$$\tau(\alpha)(f_2(x_1,\ldots,x_n)) = \psi\circ\alpha\circ\psi^{-1}(f_2(x_1,\ldots,x_n)) =$$

$$= \psi\circ\alpha(\psi^{-1}(f_2(x_1,\ldots,x_n))) = \psi(\alpha(f_1(\psi^{-1}(x_1),\ldots,\psi^{-1}(x_n)))) =$$
$$= \psi(f_1(\alpha(\psi^{-1}(x_1)),\ldots,\alpha(\psi^{-1}(x_n)))) =$$
$$= f_2(\psi(\alpha(\psi^{-1}(x_1))),\ldots,\psi(\alpha(\psi^{-1}(x_n)))) =$$
$$= f_2(\psi\circ\alpha\circ\psi^{-1}(x_1),\ldots,\psi\circ\alpha\circ\psi^{-1}(x_n)).$$

Докажем теперь инъективность отображения τ. Пусть для некоторых эндоморфизмов α_1 и α_2 из E_1 верно равенство $\tau(\alpha_1)=\tau(\alpha_2)$. Тогда для любого элемента $x\in G_1$ полагаем $y=\psi(x)$. Из выше указанного верного равенства получаем $\psi\circ\alpha_1\circ\psi^{-1}(y)=\psi\circ\alpha_2\circ\psi^{-1}(y)$ или $\psi\circ\alpha_1(x)=\psi\circ\alpha_2(x)$. Последнее равенство домножаем слева на ψ^{-1} и получаем $\alpha_1(x)=\alpha_2(x)$. Тем самым доказана инъективность отображения τ.

Докажем сюръективность отображения τ. Пусть эндоморфизм $\beta\in E_2$. Обозначим $\alpha=\psi^{-1}\circ\beta\circ\psi$, причем $\alpha\in E_1$ (проверяется аналогично, как доказательство принадлежности $\tau(\alpha)\in E_2$, смотри начало доказательства настоящей теоремы). Тогда $\tau(\alpha)=\tau(\psi^{-1}\circ\beta\circ\psi)=\psi\circ\psi^{-1}\circ\beta\circ\psi\circ\psi^{-1}=\beta$. Итак, отображение τ является биективным.

Проверим сохранение действия n-арной операции при отображение τ. Для любых эндоморфизмов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ из E_1 и любого элемента $x\in G_2$ имеем

$$\tau(g_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))(x) = \psi\circ g_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\circ\psi^{-1}(x) =$$

$$= \psi(f_1(\alpha_1(\psi^{-1}(x)),\ldots,\alpha_n(\psi^{-1}(x)))) =$$
$$= f_2(\psi(\alpha_1(\psi^{-1}(x))),\ldots,\psi(\alpha_n(\psi^{-1}(x)))) =$$
$$= f_2(\psi\circ\alpha_1\circ\psi^{-1}(x),\ldots,\psi\circ\alpha_n\circ\psi^{-1}(x)) =$$
$$= f_2(\tau(\alpha_1)(x),\ldots,\tau(\alpha_n)(x)) = g_2(\tau(\alpha_1),\ldots,\tau(\alpha_n))(x).$$

Докажем, что отображение τ сохраняет композицию $\circ$ эндоморфизмов. Пусть $\alpha_1,\alpha_2\in E_1$. Тогда $\tau(\alpha_1\circ\alpha_2)=\psi\circ\alpha_1\circ\alpha_2\circ\psi^{-1}=\psi\circ\alpha_1\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\alpha_2\circ\psi^{-1}==\tau(\alpha_1)\circ\tau(\alpha_2)$. Теорема доказана.

У изоморфных абелевых n-групп $(n,2)$-кольца эндоморфизмов изоморфны, более того, верна

Следствие 78 *Пусть у абелевых n-групп $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ имеются $(n,2)$-кольца эндоморфизмов $\langle E_1, g_1,\circ\rangle$ и $\langle E_2, g_2,\circ\rangle$ соответственно. Изоморфизм ψ n-групп $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ индуцирует изоморфизм τ $(n,2)$-колец $\langle E_1, g_1,\circ\rangle$ и $\langle E_2, g_2,\circ\rangle$, который определяется по формуле*

$$\tau:\alpha\to\psi\circ\alpha\circ\psi^{-1}.$$

Обратное утверждение неверно, т.е. можно найти примеры неизоморфных полуабелевых n-групп с изоморфными $(n,2)$-почтикольцами эндоморфизмов.

Как и в теории абелевых групп, одной из основных проблем для полуабелевых n-групп, касающихся $(n,2)$-почтиколец эндоморфизмов, является нахождение $(n,2)$-почтиколец, которые были бы изоморфны $(n,2)$-почтикольцам эндоморфизмов некоторых полуабелевых n-групп. Дальше мы увидим, что такие $(n,2)$-почтикольца найдены.

6.2 $(n,2)$-Почтикольца эндоморфизмов полуциклических n-групп

В следующей теореме найдено $(n,2)$-кольцо, которое изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$.

Теорема 113 *(Теорема 3, [73]-А) Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$. В Z выделим множество $P = \{m|ml \equiv l \pmod{n-1}\}$ и на этом множестве определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1^n) = m_1 + \ldots + m_n$. Тогда алгебра $\langle P, h, \cdot\rangle$, где $\cdot$ — умножение целых чисел, будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$. Каждый эндоморфизм σ_m кольца целых чисел Z определяется однозначно образом единицы $\sigma_m(1) = m$, т.е. для любого целого числа z верно $\sigma_m(z) = mz$. В кольце целых чисел Z выделим подмножество $P = \{m|ml \equiv l \pmod{n-1}\}$. Для каждого эндоморфизма σ_m, где $m \in P$, находим u — частное от деления числа $l(m-1)$ на число $n-1$ и на аддитивной группе целых чисел Z определим отображение $\psi_m = \sigma_m + u$. Тогда $\psi_m(0) = u$ и отображение $\sigma_m = \psi_m - \psi_m(0)$ — эндоморфизм в Z, кроме того верны условия следствия 27. Согласно следствию 27, отображение ψ_m является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$. По этому же следствию для каждого эндоморфизма ψ полуабелевой n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ отображение $\sigma = \psi - \psi(0)$ является эндоморфизмом Z и, согласно первому равенству из условия следствия 27, имеем $\sigma(l) = (n-1)\psi(0) + l$. Если эндоморфизм σ определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = m$, то $\psi_m(0) = u$ — частное от деления числа $l(m-1)$ на число $n-1$. Таким образом, между всеми эндоморфизмами E полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ и множеством P имеется взаимно однозначное соответствие $\tau : \psi_m \to m$.

На множестве P определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1^n) = m_1 + \ldots + m_n$. Докажем замкнутость этой операции на множестве P. Для любых целых чисел $m_1^n \in P$ из сравнений $m_i l \equiv l \pmod{n-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ получим $(m_1 + \ldots + m_n)l \equiv nl \pmod{n-1}$ или $(m_1 + \ldots + m_n)l \equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $h(m_1^n) \in P$.

Очевидно $\langle P, h\rangle$ является n-полугруппой. Выбираем $m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i-1}, \ldots, m_n \in P$, где индекс i равен одному из чисел $1, \ldots, n$. Находим $z = m_0 - (m_1 + \ldots + m_{i-1} + m_{i-1} + \ldots + m_n)$, очевидно $z \in P$. Тогда $h(m_1^{i-1}, z, m_{i+1}^n) = m_0$. Единственность нахождения числа z также очевидна. Таким образом, n-полугруппа $\langle P, h\rangle$ является n-группой, кроме того, она будет абелевой.

Докажем замкнутость множества P относительно умножения целых чисел. Пусть целые числа $m_1, m_2 \in P$. Обе части верного сравнения $m_2 l \equiv l \pmod{n-1}$ домножаем на m_1, получаем $m_1 m_2 l \equiv m_1 l \pmod{n-1}$, но $m_1 l \equiv l \pmod{n-1}$, значит, $m_1 m_2 l \equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $m_1 \cdot m_2 \in P$.

Выполнимость обоих законов дистрибутивности для n-арной операции h и умножения целых чисел очевидна. Итак, $\langle P, h, \cdot\rangle$ — $(n,2)$-кольцо.

Докажем, что биективное отображение τ является изоморфизмом $(n,2)$-колец $\langle E, g, \circ\rangle$ и $\langle P, h, \cdot\rangle$. Так как для любых эндоморфизмов $\psi_{m_1}, \ldots, \psi_{m_n} \in E$ и для любого целого числа z получим

$$g(\psi_{m_1}, \ldots, \psi_{m_n})(z) = f_1(\psi_{m_1}(z), \ldots, \psi_{m_n}(z)) =$$

$$= f_1(\sigma_{m_1}(z) + \psi_{m_1}(0), \ldots, \sigma_{m_n}(z) + \psi_{m_n}(0)) =$$

$$= f_1(m_1 z + \frac{l(m_1-1)}{n-1}, \ldots, m_n z + \frac{l(m_n-1)}{n-1}) =$$

$$= m_1 z + \frac{l(m_1-1)}{n-1} + \ldots + m_n z + \frac{l(m_n-1)}{n-1} + l =$$

$$= (m_1 + \ldots + m_n)z + \frac{l}{n-1}(m_1 + \ldots + m_n - n) + l =$$

$$= (m_1 + \ldots + m_n)z + \frac{l(m_1 + \ldots + m_n - 1)}{n-1},$$

то $\tau(g(\psi_{m_1}, \ldots, \psi_{m_n})) = h(\tau(\psi_{m_1}), \ldots, \tau(\psi_{m_n}))$. Далее, так как для любых эндоморфизмов $\psi_{m_1}, \psi_{m_2} \in E$ и для любого целого числа z получим

$$\psi_{m_1} \circ \psi_{m_2}(z) = \psi_{m_1}(\sigma_{m_2}(z) + \psi_{m_2}(0)) = \psi_{m_1}(m_2 z + \frac{l(m_2-1)}{n-1}) =$$

$$= \sigma_{m_1}(m_2 z + \frac{l(m_2-1)}{n-1}) + \psi_{m_1}(0) = m_1(m_2 z + \frac{l(m_2-1)}{n-1}) + \frac{l(m_1-1)}{n-1} =$$

$$= m_1 m_2 z + \frac{m_1 m_2 l - l m_1 + l m_1 - l}{n-1} = m_1 m_2 z + \frac{l(m_1 m_2 - 1)}{n-1},$$

то $\tau(\psi_{m_1} \circ \psi_{m_2}) = \tau(\psi_{m_1}) \cdot \tau(\psi_{m_2})$. Теорема доказана.

Из следствия 78 и теоремы 113 имеем

Следствие 79 *(Следствие 2, [73]-А) Построенное в теореме 113* $(n,2)$*-кольцо* $\langle P, h, \cdot\rangle$ *изоморфно* $(n,2)$*-кольцу эндоморфизмов полуциклической* n*-группы типа* $(\infty, 1, l)$.

Доказательство. Согласно следствию 78, из изоморфизма полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$ и бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, следует изоморфизм $(n,2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 113. Следствие доказано.

Следствие 80 *(Следствие 3, [73]-А) Построенное в теореме 113* $(n,2)$*-кольцо* $\langle P, h, \cdot\rangle$ *при* $l = 1$ *изоморфно* $(n,2)$*-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической* n*-группы.*

Доказательство. По следствию 78, из изоморфизма бесконечной циклической n-группы и бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, 1}Z$ следует изоморфизм $(n,2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 113 при $l = 1$. Следствие доказано.

В теореме 113 найденное $(n,2)$-кольцо $\langle P, h, \cdot\rangle$ определяется на подмножестве целых чисел Z. Можно ли построить такое же $(n,2)$-кольцо на всем множестве целых чисел (по аналогии как в группах кольцо эндоморфизмов кольца целых чисел изоморфно кольцу целых чисел)? На этот вопрос положительно отвечает следующая

Теорема 114 *(Теорема 4, [73]-А) На абелевой полуциклической* n*-группе* $\langle Z, f_3\rangle = der_{1_Z, v}Z$, *где* $v =$ *НОД*$(n-1, l)$, $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, *определим бинарную операцию* $*$ *по правилу* $z_1 * z_2 = z_1 z_2 t + z_1 + z_2$, *где* $t = \frac{n-1}{v}$. *Тогда алгебра* $\langle Z, f_3, *\rangle$ *будет* $(n,2)$*-кольцом, которое изоморфно* $(n,2)$*-кольцу* $\langle P, h, \cdot\rangle$, *построенному в теореме 113.*

Доказательство. Проверим ассоциативность операции $*$. Если $z_1, z_2, z_3 \in Z$, то

$$(z_1 * z_2) * z_3 = (z_1z_2t + z_1 + z_2) * z_3 = (z_1z_2t + z_1 + z_2)z_3t + z_1z_2t + z_1 + z_2 + z_3 =$$

$$= z_1z_2z_3t^2 + z_1z_3t + z_2z_3t + z_1z_2t + z_1 + z_2 + z_3 =$$

$$= z_1(z_2z_3t + z_3 + z_2)t + z_1 + z_2z_3t + z_2 + z_3 = z_1 * (z_2z_3t + z_2 + z_3) = z_1 * (z_2 * z_3).$$

Пусть $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1} \in Z$. Проверим правую дистрибутивность операций f_3 и $*$.

$$f_3(z_1, \ldots, z_n) * z_{n+1} = (z_1 + \ldots + z_n + v)z_{n+1}t + z_1 + \ldots + z_n + v + z_{n+1} =$$

$$= z_1z_{n+1}t + \ldots + z_nz_{n+1}t + vz_{n+1}t + z_1 + \ldots + z_n + v + z_{n+1} =$$

$$= z_1z_{n+1}t + \ldots + z_nz_{n+1}t + (n-1)z_{n+1} + z_1 + \ldots + z_n + v + z_{n+1} =$$

$$= z_1z_{n+1}t + z_1 + z_{n+1} + \ldots + z_nz_{n+1}t + z_n + z_{n+1} + v = f_3(z_1 * z_{n+1}, \ldots, z_n * z_{n+1}).$$

Аналогично проверяется левая дистрибутивность операций f_3 и $*$. Таким образом, $\langle Z, f_3, *\rangle$ — $(n, 2)$-кольцо.

Докажем изоморфизм этого $(n, 2)$-кольца и $(n, 2)$-кольца $\langle P, h, \cdot\rangle$ из теоремы 9. Каждому целому числу z ставим в соответствие τ число $z\frac{n-1}{v} + 1$. Так как $(z\frac{n-1}{v} + 1)l \equiv l \pmod{n-1}$, то $z\frac{n-1}{v} + 1 \in P$, т.е. соответствие τ является отображением из Z в P. Если $\tau(z_1) = \tau(z_2)$ некоторых целых чисел z_1, z_2, то $z_1\frac{n-1}{v} + 1 = z_2\frac{n-1}{v} + 1$, откуда получим $z_1 = z_2$. Инъективность отображения τ доказана. Докажем сюръективность отображения τ. Пусть $m \in P$, тогда $ml \equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $(m-1)l = (n-1)q$ для некоторого целого числа q. Полагаем $l = l_1v$ и $n - 1 = n_1v$ для некоторых целых чисел l_1 и n_1. Тогда $(m-1)l_1 = n_1q$ и l_1, n_1 взаимно просты. Значит, $m - 1$ делится на n_1 и $\tau(\frac{m-1}{n_1}) = m$. Итак, отображение τ биективно.

Для $z_1, \ldots, z_n \in Z$ получим

$$\tau(f_3(z_1, \ldots, z_n)) = (z_1 + \ldots + z_n + v)\frac{n-1}{v} + 1 =$$

$$= (z_1\frac{n-1}{v} + 1) + \ldots + (z_n\frac{n-1}{v} + 1) = h(\tau(z_1), \ldots, \tau(z_n)),$$

кроме того, для $z_1, z_2 \in Z$ будем иметь

$$\tau(z_1 * z_2) = \tau(z_1z_2\frac{n-1}{v} + z_1 + z_2) = (z_1z_2\frac{n-1}{v} + z_1 + z_2)\frac{n-1}{v} + 1 =$$

$$= (z_1\frac{n-1}{v} + 1)(z_2\frac{n-1}{v} + 1) = \tau(z_1)\tau(z_2).$$

Теорема доказана

Следствие 81 *(Следствие 4, [73]-А) Построенное в теореме 114* $(n, 2)$*-коль-цо* $\langle Z, f_3, *\rangle$ *будет изоморфно* $(n, 2)$*-кольцу эндоморфизмов полуциклической* n*-группы типа* $(\infty, 1, l)$.

Доказательство. Достаточно учесть следствие 79 и теорему 114. Следствие доказано.

Следствие 82 *(Следствие 5, [73]-А) Пусть* $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n, 2)$*-кольцо эндоморфизмов бесконечной циклической* n*-группы. Тогда* $(n, 2)$*-кольцо* $\langle Z, f, *\rangle$*, где* $f(z_1^n) = z_1 + \ldots + z_n + 1$ *и* $z_1 * z_2 = z_1z_2(n-1) + z_1 + z_2$*, будет изоморфно* $\langle E, g, \circ\rangle$.

Доказательство. Достаточно учесть следствие 80 и теорему 114 при $l = 1$. Следствие доказано.

В следующей теореме найдено $(n, 2)$-почтикольцо, изоморфное $(n, 2)$-почти-кольцу эндоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число, $\varphi(z) = -z$, $z \in Z$.

Теорема 115 *(Теорема 5 из [73]-А) Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n, 2)$-почтикольцо эндоморфизмов бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Выбираем n-группу $\langle Z \times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ и на множестве $Z \times Z$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$(m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2) = (m_1m_2, m_1u_2 + u_1).$$

Тогда $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ будет $(n, 2)$-почтикольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим полуабелеву n-группу $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Для каждого эндоморфизма σ_m кольца целых чисел Z, который определяется однозначно образом единицы $\sigma_m(1) = m$, и для каждого целого числа u определим отображение $\psi_{(m,u)}$ на множестве целых чисел Z по правилу $\psi_{(m,u)}(z) = \sigma_m(z) + u = mz + u$. Тогда $\psi_{(m,u)}(0) = u$ и для σ_m и $\psi_{(m,u)}(0)$ верны условия следствия 31. Согласно следствию 31, отображение $\psi_{(m,u)}$ является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$. Далее, для любого эндоморфизма ψ полуабелевой n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, согласно следствию 31, определяем эндоморфизм σ аддитивной группы Z по правилу $\sigma = \psi + \psi(0)$. Но эндоморфизм σ определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = m$. Таким образом, между всеми эндоморфизмами E полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ и декартовым квадратом Z^2 имеется взаимно однозначное соответствие $\tau : \psi_{(m,u)} \to (m, u)$.

Выбираем n-группу $\langle Z \times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ и на множестве $Z \times Z$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу, указанному в теореме. Так как для любых трех пар целых чисел $(m_1, u_1), (m_2, u_2), (m_3, u_3)$ имеем

$$((m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2)) \diamond (m_3, u_3) = (m_1m_2, m_1u_2 + u_1) \diamond (m_3, u_3) =$$

$$= ((m_1m_2)m_3, m_1m_2u_3 + m_1u_2 + u_1) = (m_1(m_2m_3), m_1(m_2u_3 + u_2) + u_1) =$$

$$= (m_1, u_1) \diamond (m_2m_3, m_2u_3 + u_2) = (m_1, u_1) \diamond ((m_2, u_2) \diamond (m_3, u_3)),$$

то $\langle Z \times Z, \diamond\rangle$ является полугруппой.

Для любых пар целых чисел $(m_1, u_1), \ldots, (m_n, u_n), (m_{n+1}, u_{n+1})$ имеем

$$h((m_1, u_1), \ldots, (m_n, u_n)) \diamond (m_{n+1}, u_{n+1}) = (f_2(m_1^n), f_2(u_1^n)) \diamond (m_{n+1}, u_{n+1}) =$$

$$= ((m_1 - m_2 + \ldots + m_{n-2} - m_{n-1} + m_n)m_{n+1},$$

$$(m_1 - m_2 + \ldots + m_{n-2} - m_{n-1} + m_n)u_{n+1} + (u_1 - u_2 + \ldots + u_{n-2} - u_{n-1} + u_n)) =$$

$$= (m_1m_{n+1} - m_2m_{n+1} + \ldots + m_{n-2}m_{n+1} - m_{n-1}m_{n+1} + m_nm_{n+1}, m_1u_{n+1}+$$

$$+u_1 - m_2u_{n+1} - u_2 + \ldots + m_{n-2}u_{n+1} + u_{n-2} - m_{n-1}u_{n+1} - u_{n-1} + m_nu_{n+1} + u_n =$$

$$= h((m_1, u_1) \diamond (m_{n+1}, u_{n+1}), \ldots, (m_n, u_n) \diamond (m_{n+1}, u_{n+1})).$$

Итак, $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ — $(n, 2)$-почтикольцо.

Докажем, что биективное отображение τ является изоморфизмом $(n, 2)$-почтиколец $\langle E, g, \circ\rangle$ и $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$. Так как для любого целого числа z и для любых эндоморфизмов $\psi_{(m_1,u_1)}, \ldots, \psi_{(m_n,u_n)} \in E$ получим

$$g(\psi_{(m_1,u_1)}, \ldots, \psi_{(m_n,u_n)})(z) = f_2(\psi_{(m_1,u_1)}(z), \ldots, \psi_{(m_n,u_n)}(z)) =$$

$$= f_2(\sigma_{m_1}(z) + u_1, \ldots, \sigma_{m_n}(z) + u_n) = f_2(m_1 z + u_1, \ldots, m_n z + u_n) =$$

$$= m_1 z + u_1 - m_2 z - u_2 + \ldots + m_{n-2} z + u_{n-2} - m_{n-1} z - u_{n-1} + m_n z + u_n =$$

$$= (m_1 - m_2 + \ldots + m_{n-2} - m_{n-1} + m_n)z + u_1 - u_2 + \ldots + u_{n-2} - u_{n-1} + u_n =$$

$$= f_2(m_1^n)z + f_2(u_1^n),$$

то $\tau(g(\psi_{(m_1,u_1)}, \ldots, \psi_{(m_n,u_n)})) = h(\tau(\psi_{(m_1,u_1)}), \ldots, \tau(\psi_{(m_n,u_n)}))$. Далее, так как для любых эндоморфизмов $\psi_{(m_1,u_1)}, \psi_{(m_2,u_2)} \in E$ и для любого целого числа z получим

$$\psi_{(m_1,u_1)} \circ \psi_{(m_2,u_2)}(z) = \psi_{(m_1,u_1)}(\sigma_{m_2}(z) + \psi_{(m_2,u_2)}(0)) = \psi_{(m_1,u_1)}(m_2 z + u_2) =$$

$$= \sigma_{m_1}(m_2 z + u_2) + \psi_{(m_1,u_1)}(0) = m_1(m_2 z + u_2) + u_1 = m_1 m_2 z + m_1 u_2 + u_1,$$

то $\tau(\psi_{(m_1,u_1)} \circ \psi_{(m_2,u_2)}) = \tau(\psi_{(m_1,u_1)}) \diamond \tau(\psi_{(m_2,u_2)})$. Теорема доказана.

Из теорем 112 и 115 имеем

Следствие 83 *(Следствие 6, [73]-А) Построенное в теореме 115* $(n, 2)$*-по-чтикольцо* $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ *будет изоморфно* $(n, 2)$*-почтикольцу эндоморфизмов полуциклической* n*-группы типа* $(\infty, -1, 0)$.

Доказательство. Согласно теореме 112, из изоморфизма полуциклической n-группы типа $(\infty, -1, 0)$ и бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z, следует изоморфизм $(n, 2)$-почтиколец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 115. Следствие доказано.

Теперь приступим к изучению $(n, 2)$-почтиколец эндоморфизмов конечных полуциклических n-групп. Сначала изучим $(n, 2)$-почтикольцо эндоморфизмов конечной не абелевой полуциклической n-группы.

Теорема 116 *(Теорема 6 из [73]-А) Пусть* $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n, 2)$*-почтикольцо эндоморфизмов полуциклической* n*-группы* $der_{\varphi,l}Z_k$, *где* $\varphi(z) = mz$ *для любого элемента* $z \in Z_k$, $1 < m < k$, m *взаимно прост с* k, *число* m *удовлетворяет сравнению* $lm \equiv l \pmod k$, *показатель числа* m *по модулю* k *делит* $n-1$ *и* $l \mid$ *НОД* $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$. *В полуабелевой* n*-группе* $\langle P, h\rangle = der_{\varphi,l}Z_k \times der_{\varphi,0}Z_l$ *определим бинарную операцию* $\diamond$ *по правилу*

$$(u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (u_2 s_1 + u_1, v_2 s_1 + v_1)$$

где $s_1 \in Z_k$ *и* $s_1 - 1 = s_0 + v_1 \frac{k}{l}$, *где* s_0 — *решение сравнения* $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1} u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. *Тогда алгебра* $\langle P, h, \diamond\rangle$ — $(n, 2)$*-почтикольцо, изоморфное* $\langle E, g, \circ\rangle$.

Доказательство. Для каждого эндоморфизма $\psi \in E$ полагаем $\psi(0) = u$. Согласно теореме 4, отображение $\sigma = \psi - u$ является эндоморфизмом аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, который определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = s$, т.е. для любого целого числа $z \in Z_k$ верно $\sigma(z) \equiv sz \pmod k$. Кроме того, согласно первому равенству из условия следствия 31, верно сравнение $sl \equiv (1 + m + \ldots + m^{n-2})u + l \pmod k$, или, что то же самое, $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \equiv l(s-1) \pmod k$, а значит, целое число $s-1$ является решением сравнения $lx \equiv \frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \pmod k$. Так как $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$, то НОД $(l,k) = l$, а значит, $s - 1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0 \le v < l$. Заметим, что второе равенство из условия следствия 31 верно в силу коммутативности умножения в кольце Z_k.

Таким образом, мы имеем отображение $\tau : E \to P$, заданное по правилу $\tau(\psi) = (u, v)$, где $u = \psi(0)$, а v участвует в процессе вычисления образа единицы s при эндоморфизме $\psi - u$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, т.е. $s - 1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$.

Докажем инъективность отображения τ. Пусть $\tau(\psi_1) = \tau(\psi_2)$ для некоторых эндоморфизмов $\psi_1, \psi_2 \in E$ и $\tau(\psi_1) = (u_1, v_1)$, $\tau(\psi_2) = (u_2, v_2)$. Тогда $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$. Для каждого индекса $i = 1, 2$ находим образ единицы s_i при эндоморфизме $\psi_i - u_i$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k: $s_i - 1 = s_{0i} + v_i\frac{k}{l}$, где s_{0i} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Так как $u_1 = u_2$, то $s_{01} = s_{02}$, а так как $v_1 = v_2$, то $s_1 = s_2$. Каждый эндоморфизм ψ_i $(i = 1, 2)$ действует по правилу $\psi_i(z) = s_i z + u_i$ для любого целого числа $z \in Z_k$, значит, $\psi_1 = \psi_2$. Итак, τ — инъективное отображение.

Докажем сюръективность отображения τ. Пусть $(u, v) \in Z_k \times Z_l$. Находим s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ и $0 \le s_0 < \frac{k}{l}$. Далее, находим $s - 1 = s_0 + v\frac{k}{l}$ — решение сравнения $lx \equiv \frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \pmod k$. Эндоморфизм σ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, действующий по правилу $\sigma(z) = sz$ для любого целого числа $z \in Z_k$, удовлетворяет обоим условиям, а значит, согласно теореме 4, отображение $\psi = \sigma - u$ является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $der_{\varphi,l}Z_k$ и $\tau(\psi) = (u, v)$. Доказана сюръективность отображения τ.

Бинарная операция $\diamond$, заданная на множестве $Z_k \times Z_l$ в теореме, будет ассоциативной, так как для любых пар (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) из $Z_k \times Z_l$ получим $((u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2)) \diamond (u_3, v_3) = (u_2 s_1 + u_1, v_2 s_1 + v_1) \diamond (u_3, v_3) = (u_3 s' + u_2 s_1 + u_1, v_3 s' + v_2 s_1 + v_1)$, где $s_1 - 1 = s_{01} + v_1\frac{k}{l}$, s_{01} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ и $s' - 1 = s'_0 + (v_2 s_1 + v_1)\frac{k}{l}$, s'_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(u_2 s_1 + u_1)}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. С другой стороны,

$$(u_1, v_1) \diamond ((u_2, v_2) \diamond (u_3, v_3)) = (u_1, v_1) \diamond (u_3 s_2 + u_2, v_3 s_2 + v_2) =$$

$$= ((u_3 s_2 + u_2)s_1 + u_1, (v_3 s_2 + v_2)s_1 + v_1) = (u_3 s_1 s_2 + u_2 s_1 + u_1, v_3 s_1 s_2 + v_2 s_1 + v_1),$$

где $s_2 - 1 = s_{02} + v_2\frac{k}{l}$, s_{02} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_2}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Так как $s_2 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_2}{l} + v_2\frac{k}{l} \pmod k$, то, домножая обе части этого сравнения на s_1 и складывая с верным сравнением $s_1 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} + v_1\frac{k}{l} \pmod k$, получим

$$s_1 s_2 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(s_1 u_2 + u_1)}{l} + (s_1 v_2 + v_1)\frac{k}{l} \pmod k. \qquad (185)$$

Но $s'-1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(s_1u_2+u_1)}{l}+(s_1v_2+v_2)\frac{k}{l} \pmod k$, значит, $s' \equiv s_1s_2 \pmod k$. Из верности последнего сравнения следует $u_3s'+u_2s_1+u_1 \equiv u_3s_1s_2+u_2s_1+u_1 \pmod k$ и $s' \equiv s_1s_2 \pmod l$ (так как $l \mid k$), из верности последнего сравнения следует $v_3s'+v_2s_1+v_1 \equiv v_3s_1s_2+v_2s_1+v_1 \pmod l$. Мы доказали равенство

$$((u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2))\diamond(u_3,v_3)=(u_1,v_1)\diamond((u_2,v_2)\diamond(u_3,v_3)).$$

Итак, $\langle P,\diamond\rangle$ является полугруппой. Докажем, что для n-арной операции h и бинарной операции $\diamond$ выполнен правый закон дистрибутивности. Пусть $(u_i,v_i)\in Z_k\times Z_l$, $i=1,\ldots,n,n+1$. Тогда $h((u_1,v_1),\ldots,(u_n,v_n))\diamond(u_{n+1},v_{n+1})=$

$$=(u_1+mu_2+\ldots+m^{n-2}u_{n-1}+u_n+l,v_1+mv_2+\ldots+m^{n-2}v_{n-1}+v_n)\diamond(u_{n+1},v_{n+1})=$$

$$=(u_{n+1}s'+u_1+mu_2+\ldots+m^{n-2}u_{n-1}+u_n+l,v_{n+1}s'+v_1+mv_2+\ldots+m^{n-2}v_{n-1}+v_n),$$

где $s'-1=s'_0+(v_1+mv_2+\ldots+m^{n-2}v_{n-1}+v_n)\frac{k}{l}$, s'_0 — решение сравнения

$$x\equiv\frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(u_1+mu_2+\ldots+m^{n-2}u_{n-1}+u_n+l)}{l} \pmod{\frac{k}{l}}.$$

С другой стороны,

$$h((u_1,v_1)\diamond(u_{n+1},v_{n+1}),\ldots,(u_n,v_n)\diamond(u_{n+1},v_{n+1}))=$$

$$=h((u_{n+1}s_1+u_1,v_{n+1}s_1+v_1),\ldots,(u_{n+1}s_n+u_n,v_{n+1}s_n+v_n))=$$

$$=(u_{n+1}s_1+u_1+m(u_{n+1}s_2+u_2)+\ldots+m^{n-2}(u_{n+1}s_{n-1}+u_{n-1})+u_{n+1}s_n+u_n+l,$$
$$v_{n+1}s_1+v_1+m(v_{n+1}s_2+v_2)+\ldots+m^{n-2}(v_{n+1}s_{n-1}+v_{n-1})+v_{n+1}s_n+v_n),$$

где $s_i-1=s_{0i}+v_i\frac{k}{l}$, s_{0i} — решение сравнения $x\equiv\frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $i=1,\ldots,n$. Верные n сравнений $s_i-1\equiv\frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l}+v_i\frac{k}{l} \pmod k$ складываем, предварительно умножив каждое i-тое сравнение на m^{i-1} ($i=1,\ldots,n$), получим $s_1+ms_2+\ldots+m^{n-2}s_{n-1}+s_n-1-(1+m+\ldots+m^{n-2})\equiv\frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}}{l}\cdot$

$$\cdot(u_1+mu_2+\ldots+m^{n-2}u_{n-1}+u_n)+(v_1+mv_2+\ldots+m^{n-2}v_{n-1}+v_n)\frac{k}{l} \pmod k,$$

но $1+m+\ldots+m^{n-2}=\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$, тогда

$$s_1+ms_2+\ldots+m^{n-2}s_{n-1}+s_n-1\equiv\frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}}{l}(u_1+mu_2+\ldots+m^{n-2}u_{n-1}+u_n+l)+$$
$$+(v_1+mv_2+\ldots+m^{n-2}v_{n-1}+v_n)\frac{k}{l} \pmod k. \tag{186}$$

Заметим, что правая часть последнего сравнения также сравнима с целым числом $s'-1$, значит, $s_1+ms_2+\ldots+m^{n-2}s_{n-1}+s_n-1\equiv s' \pmod k$. Обе части последнего сравнения домножаем на целое число u_{n+1}, а затем прибавляем к обеим частям сравнения сумму $u_1+mu_2+\ldots+m^{n-2}u_{n-1}+u_n+l$, получим

$$u_{n+1}s_1+u_1+m(u_{n+1}s_2+u_2)+\ldots+m^{n-2}(u_{n+1}s_{n-1}+u_{n-1})+u_{n+1}s_n+u_n+l\equiv$$

$$\equiv u_{n+1}s' + u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l \pmod k.$$

Аналогично обе части последнего сравнения домножаем на целое число v_{n+1}, а затем прибавляем к обеим частям сравнения сумму $v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n$, получим

$$v_{n+1}s_1 + v_1 + m(v_{n+1}s_2 + v_2) + \ldots + m^{n-2}(v_{n+1}s_{n-1} + v_{n-1}) + v_{n+1}s_n + v_n \equiv$$

$$\equiv v_{n+1}s' + v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n \pmod k.$$

Из последних двух сравнений имеем верное равенство

$$h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}) =$$

$$= h((u_1, v_1) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}), \ldots, (u_n, v_n) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1})).$$

Итак, алгебра $\langle P, h, \diamond\rangle$ является $(n, 2)$-почтикольцом. Докажем, что биективное отображение τ сохраняет n-арную и бинарную операции. Пусть $\psi_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$, тогда для любого целого числа $z \in Z_k$ имеем $\psi_i(z) = s_i z + u_i$, где s_i — образ единицы при эндоморфизме $\psi_i - u_i$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k и $s_i - 1 = s_{0i} + v_i\frac{k}{l}$, s_{0i} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0 \leq v_i < l$. Тогда эндоморфизм $g(\psi_1^n)$ из E действует по правилу (для любого целого числа $z \in Z_k$)

$$g(\psi_1^n)(z) = \psi_1(z) + m\psi_2(z) + \ldots + m^{n-2}\psi_{n-1}(z) + \psi_n(z) + l =$$

$$= s_1z + u_1 + m(s_2z + u_2) + \ldots + m^{n-2}(s_{n-1}z + u_{n-1}) + s_nz + u_n + l =$$

$$= (s_1 + ms_2 + \ldots + m^{n-2}s_{n-1} + s_n)z + u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l.$$

Так как верно сравнение (186), то

$$\tau(g(\psi_1^n)) = (u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l, v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n).$$

С другой стороны, согласно правилу действия n-арной операции h, получим

$$h(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n)) = h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) =$$

$$= (u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l, v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n).$$

Значит, $\tau(g(\psi_1^n)) = h(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n))$. Пусть теперь $\psi_1, \psi_2 \in E$. Эндоморфизм $\psi_1 \circ \psi_2$ из E действует по правилу (для любого целого числа $z \in Z_k$)

$$\psi_1 \circ \psi_2(z) = \psi_1(s_2z + v_2) = s_1(s_2z + u_2) + u_1 = s_1s_2z + s_1u_2 + u_1.$$

Так как верно сравнение (185), то $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = (s_1u_2 + u_1, s_1v_2 + v_1)$. С другой стороны, согласно правилу действия бинарной операции $\diamond$, получим

$$\tau(\psi_1) \diamond \tau(\psi_2) = (u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (s_1u_2 + u_1, s_1v_2 + v_1).$$

Значит, $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = \tau(\psi_1) \diamond \tau(\psi_2)$. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 116 при построении n-группы $der_{\varphi,0}Z_l$ автоморфизм φ задается целым числом m, на которое накладываются условия, указанные в теореме 116. Но при определении n-группы $der_{\varphi,0}Z_l$ автоморфизм φ аддитивной группы кольца целых чисел Z_l должен задаваться целым числом m' таким, что $1 \leq m' < l$, m' взаимно прост с l, показатель числа m' по модулю l делит $n-1$. Поэтому m' выбирается как остаток от деления числа m на l. Понятно, что в этом случае $mz \equiv m'z \pmod{l}$ для любого целого числа $z \in Z_l$. Кроме того, m' взаимно прост с l, так как m взаимно прост с l в силу того, что $l \mid k$ и m взаимно прост с k. Далее, показатель числа m по модулю k делится на показатель этого числа по модулю l (так как $l \mid k$), значит, показатель числа m по модулю l делит $n-1$, так как показатель этого числа по модулю k делит $n-1$. Но показатели чисел m и m' по модулю l совпадают (так как $m \equiv m' \pmod{l}$), тогда показатель числа m' по модулю l делит $n-1$. Таким образом, задания автоморфизма φ целыми числами m и m' при построении n-группы $der_{\varphi,0}Z_l$ совпадают.

Из теорем 112 и 116 имеем

Следствие 84 *(Следствие 7, [73]-А) Построенное в теореме 116 $(n,2)$-почтикольцо $\langle P,h,\diamond\rangle$ будет изоморфно $(n,2)$-почтикольцо эндоморфизмов не абелевой полуциклической n-группы типа (k,m,l).*

Доказательство. Согласно теореме 112, из изоморфизма не абелевой полуциклической n-группы типа (k,m,l) и полуциклической n-группы $der_{\varphi,l}Z_k$, где $\varphi(z) = mz$ для любого элемента $z \in Z_k$, $1 < m < k$, m взаимно прост с k, число m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod{k}$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$, следует изоморфизм $(n,2)$-почтиколец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 116. Следствие доказано.

Теперь изучим $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов конечной абелевой полуциклической n-группы.

Теорема 117 *(Теорема 7 из [73]-А) Пусть $\langle E,g,\circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l \mid$ НОД $(n-1,k)$. В абелевой n-группе $\langle P,h\rangle = der_{1_{Z_k},l}Z_k \times der_{1_{Z_l},0}Z_l$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу $(u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2) = (u_2s_1+u_1, v_2s_1+v_1)$, где $s_1 \in Z_k$ и $s_1 - 1 = s_0 + v_1\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Тогда алгебра $\langle P,h,\diamond\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E,g,\circ\rangle$.*

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 116, для каждого эндоморфизма $\psi \in E$ полагаем $\psi(0) = u$. Согласно следствию 27, отображение $\sigma = \psi - u$ является эндоморфизмом аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, который определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = s$, т.е. для любого целого числа $z \in Z_k$ верно $\sigma(z) \equiv sz \pmod{k}$. Кроме того, согласно первому условию следствия 27, верно сравнение $sl \equiv (n-1)u + l \pmod{k}$, или, что то же самое, $(n-1)u \equiv l(s-1) \pmod{k}$, а значит, целое число $s-1$ является решением сравнения $lx \equiv (n-1)u \pmod{k}$. Так как $l \mid$ НОД $(n-1,k)$, то НОД $(l,k) = l$, а значит, $s-1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0 \le v < l$.

Таким образом, как и в доказательстве теоремы 116, мы имеем отображение $\tau : E \to P$, заданное по правилу $\tau(\psi) = (u,v)$, где $u = \psi(0)$, а v участвует в процессе вычисления образа единицы s при эндоморфизме $\psi - u$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, т.е. $s-1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Инъективность и сюръективность отображения τ доказывается так же, как при доказательстве этих свойств отображения τ в теореме 116, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$.

Бинарная операция $\diamond$, определенная на множестве $Z_k \times Z_l$ в теореме, является ассоциативной, доказывается так же, как в теореме 116, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Итак,

$\langle P, \diamond \rangle$ является полугруппой. Правый закон дистрибутивности для n-арной операции h и бинарной операции $\diamond$ вновь доказывается как в теореме 116, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Докажем левый закон дистрибутивности для этих операций. Пусть $(u_i, v_i), (u, v) \in Z_k \times Z_l$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$(u, v) \diamond h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) = (u, v) \diamond (u_1 + \ldots + u_n + l, v_1 + \ldots + v_n) =$$

$$= ((u_1 + \ldots + u_n + l)s + u, (v_1 + \ldots + v_n)s + v),$$

где $s - 1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. С другой стороны, $h((u,v)\diamond(u_1,v_1), \ldots, (u,v)\diamond(u_n,v_n)) = h((u_1s+u, v_1s+v), \ldots, (u_ns+u, v_ns+v)) = (u_1s+u+\ldots+u_ns+u+l, v_1s+v+\ldots+v_ns+v) = ((u_1+\ldots+u_n)s+nu+l, (v_1+\ldots+v_n)s+nv)$, но $(n-1)u+l \equiv sl \pmod{k}$ и $(n-1)v \equiv 0 \pmod{l}$ (так как $l \mid (n-1)$), значит, последнее выражение равно $((u_1 + \ldots + u_n + l)s + u, (v_1 + \ldots + v_n)s + v)$. Тогда $(u, v) \diamond h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) = h((u, v) \diamond (u_1, v_1), \ldots, (u, v) \diamond (u_n, v_n))$.

Итак, алгебра $\langle P, h, \diamond \rangle$ является $(n, 2)$-кольцом. Сохранение n-арной и бинарной операции при биективном отображении τ доказывается так же, как в доказательстве теоремы 116, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Теорема доказана.

Из теорем 112 и 117 имеем

Следствие 85 *(Следствие 8, [73]-А) Построенное в теореме 117* $(n, 2)$*-коль-цо* $\langle P, h, \diamond \rangle$ *будет изоморфно* $(n, 2)$*-кольцу эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы типа* $(k, 1, l)$.

Доказательство. Согласно теореме 112, из изоморфизма абелевой полуциклической n-группы типа $(k, 1, l)$ и полуциклической n-группы $der_{1_{Z_k}, l} Z_k$, где $l \mid$ НОД $(n-1, k)$, следует изоморфизм $(n, 2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 117. Следствие доказано.

Изучим $(n, 2)$-кольцо эндоморфизмов конечной циклической n-группы.

Следствие 86 *(Следствие 9, [73]-А) Пусть* $\langle E, g, \circ \rangle$ — $(n, 2)$*-кольцо эндоморфизмов конечной циклической n-группы порядка k. В циклической n-группе* $\langle Z_k, f \rangle = der_{1_{Z_k}, 1} Z_k$ *определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$u_1 \diamond u_2 = u_1 \cdot u_2 \cdot (n-1) + u_1 + u_2,$$

где $\cdot$ — умножение по модулю k. Тогда алгебра $\langle Z_k, f, \diamond \rangle$ *будет* $(n, 2)$*-кольцом, которое изоморфно* $\langle E, g, \circ \rangle$.

Доказательство. Заметим, что при $l = 1$ в теореме 117 n-группа $der_{1_{Z_l}, 1} Z_l$ будет одноэлементной, а операция $\diamond$ преобразуется в указанную операцию. Осталось применить теорему 117. Следствие доказано.

6.3 $(n, 2)$-Кольца эндоморфизмов коциклических n-групп

Имеется прозрачная квалификация коциклических n-групп — это в точности конечные полуциклические n-группы типа $(p^k, 1, p^t)$, p — простое число, p^t делит НОД $(n-1, p^k)$, и абелевы n-группы, 0-производные от квазициклической группы $Z(p^\infty)$ (см. следствие 56).

Для конечных абелевых полуциклических n-групп $(n, 2)$-кольцо эндоморфизмов найдено (см. теорему 117), а тогда для коциклических n-групп, которые являются конечными полуциклическими n-группами, верно

Следствие 87 *(Предложение 3 из [67]-А) Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов коциклической n-группы, которая является конечной полуциклические n-группой типа $(p^k, 1, p^t)$, p — простое число, p^t делит НОД $(n-1, p^k)$. В абелевой n-группе $\langle P, h\rangle = der_{1_{Z_{p^k}}, p^t} Z_{p^k} \times der_{1_{Z_{p^t}}, 0} Z_{p^t}$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу $(u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (u_2 s_1 + u_1, v_2 s_1 + v_1)$, где $s_1 \in Z_{p^k}$ и $s_1 - 1 = s_0 + v_1 p^{k-t}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{p^t} \pmod{p^{k-t}}$. Тогда алгебра $\langle P, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Для другой коциклической n-группы, которая является абелевой n-группой $\langle Z(p^\infty), f\rangle = der_{1_{Z(p^\infty)}, 0} Z(p^\infty)$, также найдено в следующем предложении $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов этой n-группы. Это $(n,2)$-кольцо строится следующим образом. Квазициклическая группа $Z(p^\infty)$ порождается элементами $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$, где $pc_1 = 0, pc_2 = c_1, \ldots, pc_{k+1} = c_k, \ldots$. Здесь порядок каждого элемента c_k равен p^k и всякий элемент из $Z(p^\infty)$ кратен некоторому элементу c_k. Каждый эндоморфизм ψ n-группы $\langle Z(p^\infty), f\rangle$ определяется (см. следствие 27) некоторыми эндоморфизмом φ и элементом u группы $Z(p^\infty)$ такими, что $(n-1)u = 0$, причем ψ действует по правилу

$$\psi(x) = \varphi(x) + u. \tag{187}$$

Эндоморфизм φ задается однозначно некоторым целым p-адическим числом

$$\pi = s_0 + s_1 p + \ldots + s_k p^k + \ldots$$

по правилу: если $x \in Z(p^\infty)$, то $x = tc_k$ для некоторых элемента c_k и целого числа t, тогда $\varphi(x) = t(s_0 + s_1 p + \ldots + s_{k-1} p^{k-1}) c_k$ (можно записать $\varphi(x) = t\pi c_k = \pi x$) (см. [40], стр.212). Группа $Z(p^\infty)$ является делимой, а значит, уравнение $(n-1)x = 0$ в $Z(p^\infty)$ разрешимо. Через U обозначим множество решений этого уравнения. Очевидно, U – собственная подгруппа в $Z(p^\infty)$, а значит, она является циклической и порождается элементом c_r, где $n - 1 = p^r q$ и p не делит q. Рассмотрим абелеву n-группу $\langle J_p, f_1\rangle \times \langle U, f\rangle$, где $\langle J_p, f_1\rangle = der_0 J_p$, J_p — группа целых p-адических чисел, $\langle U, f\rangle = der_0 U$. На n-группе $\langle J_p, f_1\rangle \times \langle U, f\rangle$ строим $(n,2)$-кольцо, введя на множестве $J_p \times U$ бинарную операцию $\diamond$ по правилу: если $(\pi_1, u_1), (\pi_2, u_2) \in J_p \times U$, то $(\pi_1, u_1) \diamond (\pi_2, u_2) = (\pi_1 \cdot \pi_2, \pi_1 u_2 + u_1)$, где $\cdot$ есть умножение целых p-адических чисел. Непосредственная проверка показывает, что $\langle\langle J_p, f_1\rangle \times \langle U, f\rangle, \diamond\rangle$ является $(n,2)$-кольцом.

Предложение 70 *(Предложение 4, [67]-А) Пусть коциклическая n-группа имеет вид $\langle Z(p^\infty), f\rangle = der_{1_{Z(p^\infty)}, 0} Z(p^\infty)$. Тогда $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов n-группы $\langle Z(p^\infty), f\rangle$ изоморфно $(n,2)$-кольцу $\langle\langle J_p, f_1\rangle \times \langle U, f\rangle, \diamond\rangle$.*

Доказательство. Определим соответствие τ из $(n,2)$-кольца $\langle End\langle Z(p^\infty), f\rangle, w, \circ\rangle$ в $(n,2)$-кольцо $\langle\langle J_p, f_1\rangle \times \langle U, f\rangle, \diamond\rangle$ по правилу: если $\psi \in End\langle Z(p^\infty), f\rangle$, то ψ действует по правилу (187), а эндоморфизм φ задается однозначно некоторым целым p-адическим числом π, тогда эндоморфизму ψ ставим в соответствие τ пару (π, u) из $J_p \times U$. Согласно рассуждениям перед эти предложением, τ является всюду определенным соответствием. Докажем однозначность τ. Пусть эндоморфизму ψ соответствуют при τ две пары (π_1, u_1) и (π_2, u_2), где

$$\pi_1 = s_{01} + s_{11} p + \ldots + s_{k1} p^k + \ldots, \quad \pi_2 = s_{02} + s_{12} p + \ldots + s_{k2} p^k + \ldots.$$

Из (187) следует, что эндоморфизм ψ действует по двум правилам: $\psi(x) = \pi_1 x + u_1$ и $\psi(x) = \pi_2 x + u_2$. Тогда $\psi(0) = u_1 = u_2$. Кроме того, $\psi(c_1) = \pi_1 c_1 + u_1 = \pi_2 c_1 + u_2$, откуда

$s_{01}c_1 = \pi_1 c_1 = \pi_2 c_1 = s_{02}c_1$, а значит, $s_{01} = s_{02}$. Далее, $\psi(c_2) = \pi_1 c_2 + u_1 = \pi_2 c_2 + u_2$, откуда $(s_{01} + s_{11}p)c_2 = \pi_1 c_2 = \pi_2 c_2 = (s_{02} + s_{12}p)c_2$, а значит, $s_{11} = s_{12}$. Продолжая так дальше, получим $s_{k1} = s_{k2}$ для любого целого неотрицательного числа k. Тогда $\pi_1 = \pi_2$. Однозначность соответствия τ доказана. Итак, τ — отображение.

Докажем биективность τ. Пусть $(\pi, u) \in J_p \times U$. С помощью π находим эндоморфизм φ группы $Z(p^\infty)$. По равенству (187) находим эндоморфизм ψ n-группы $\langle Z(p^\infty), f\rangle$. Кроме этого, такой эндоморфизм находится однозначно. Итак, τ является биективным отображением.

Докажем сохранение n-арной операции при отображении τ. Пусть $\psi_i \in End\langle Z(p^\infty), f\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, и $\tau(\psi_i) = (\pi_i, u_i)$. Тогда, используя (187), получим $w(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = f(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = \psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) =$

$$= \varphi_1(x) + u_1 + \ldots + \varphi_n(x) + u_n = \pi_1 x + u_1 + \ldots + \pi_n x + u_n =$$

$$= (\pi_1 + \ldots + \pi_n)x + u_1 + \ldots + u_n = f_1(\pi_1, \ldots, \pi_n)x + f(u_1, \ldots, u_n).$$

Таким образом, эндоморфизм $w(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ n-группы $\langle Z(p^\infty), f\rangle$ определяется эндоморфизмом $\varphi_1 + \ldots + \varphi_n$ (который, в свою очередь, определяется целым p-адическим числом $f_1(\pi_1, \ldots, \pi_n)$) и элементом $f(u_1, \ldots, u_n)$ из U. Тогда

$$\tau(w(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = (f_1(\pi_1, \ldots, \pi_n), f(u_1, \ldots, u_n)),$$

т.е. доказали сохранение n-арной операции при действии τ.

Докажем равенство $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = \tau(\psi_1) \diamond \tau(\psi_2)$. Пусть $\psi_i \in End\langle Z(p^\infty), f\rangle$, $\tau(\psi_i) = (\pi_i, u_i)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\psi_1 \circ \psi_2(x) = \psi_1(\psi_2(x)) = \pi_1(\pi_2 x + u_2) + u_1 = (\pi_1 \cdot \pi_2)x + \pi_1 u_2 + u_1.$$

Таким образом, эндоморфизм $\psi_1 \circ \psi_2$ n-группы $\langle Z(p^\infty), f\rangle$ определяется (см. теорему 1) эндоморфизмом $\varphi_1 \circ \varphi_n$ (который, в свою очередь, определяется целым p-адическим числом $\pi_1 \cdot \pi_2$) и элементом $\pi_1 u_2 + u_1$ из U. Тогда

$$\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = (\pi_1 \cdot \pi_2, \pi_1 u_2 + u_1) = (\pi_1, u_1) \diamond (\pi_2, u_2) = \tau(\psi_1) \diamond \tau(\psi_2).$$

Предложение доказано.

6.4 Полуабелевы n-группы с изоморфными $(n, 2)$-почтикольцами эндоморфизмов

У изоморфных полуабелевых (абелевых) n-групп $(n, 2)$-почтикольца ($(n, 2)$-кольца) эндоморфизмов изоморфны, смотри теорему 112 (следствие 78). Обратное утверждение неверно. В следующей теореме найдены условия изоморфизма $(n, 2)$-колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полуциклических n-групп.

Теорема 118 *(Теорема 12, [80]-A) Две бесконечные абелевы полуциклические n-группы типов $(\infty, 1, l_1)$ и $(\infty, 1, l_2)$ имеют изоморфные $(n, 2)$-кольца эндоморфизмов тогда и только тогда, когда НОД $(n - 1, l_1) =$ НОД $(n - 1, l_2)$.*

Доказательство. Полуциклическая n-группа типа $(\infty, 1, l_1)$ изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l_1} Z$, где $(0 \leq l_1 \leq [\frac{n-1}{2}])$ (см. теорему 72). Согласно теореме 112, $(n, 2)$-кольца эндоморфизмов этих n-групп изоморфны и, согласно теореме 114, изоморфны $(n, 2)$-кольцу $\langle Z, f_3, *\rangle$, где n-арная операция f_3 действует по правилу $f_3(x_1^n) = x_1 + \ldots + x_n + v_1$, где $v_1 =$ НОД$(n-1, l_1)$, и бинарная операция $*$ задана по правилу $z_1 * z_2 = z_1 z_2 t_1 + z_1 + z_2$, где $t_1 = \frac{n-1}{v_1}$. Аналогично вторая полуциклическая n-группа типа $(\infty, 1, l_2)$ изоморфна n-группе $\langle Z, f_2\rangle = der_{1_Z, l_2} Z$, где $(0 \leq l_2 \leq [\frac{n-1}{2}])$, и их $(n, 2)$-кольца эндоморфизмов изоморфны $(n, 2)$-кольцу $\langle Z, f_3', *'\rangle$, где n-арная операция f_3' действует по правилу $f_3'(x_1^n) = x_1 + \ldots + x_n + v_2$, где $v_2 =$ НОД$(n-1, l_2)$, и бинарная операция $*'$ задана по правилу $z_1 *' z_2 = z_1 z_2 t_2 + z_1 + z_2$, где $t_2 = \frac{n-1}{v_2}$.

Если имеем изоморфизм $(n, 2)$-колец $\langle Z, f_3, *\rangle$ и $\langle Z, f_3', *'\rangle$, то их абелевы n-группы также изоморфны, т.е. $\langle Z, f_3\rangle \cong \langle Z, f_3'\rangle$, откуда в силу их полуцикличности и согласно предложению 55, верно одно из сравнений $v_1 \equiv v_2 \pmod{n-1}$ либо $v_1 \equiv -v_2 \pmod{n-1}$, а это верно только если $v_1 = v_2$. Необходимость доказана.

Если $v_1 = v_2$, то действия n-арных операций f_3 и f_3' совпадают, кроме того, совпадают и бинарные операции $*$ и $*'$, так как $t_1 = t_2$. Тогда $(n, 2)$-кольца $\langle Z, f_3, *\rangle$ и $\langle Z, f_3', *'\rangle$ совпадают. Теорема доказана.

Для конечных абелевых полуциклических n-групп из изоморфизма $(n, 2)$-колец эндоморфизмов следует изоморфизм самих n-групп. Отметим это в следующей теореме.

Теорема 119 *(Теорема 13, [80]-А) Две конечные абелевы полуциклические n-группы типов $(k_1, 1, l_1)$ и $(k_2, 1, l_2)$, имеющие изоморфные $(n, 2)$-кольца эндоморфизмов, изоморфны.*

Доказательство. Полуциклическая n-группа типа $(k_1, 1, l_1)$ изоморфна n-группе $\langle Z_{k_1}, f_1\rangle = der_{1_{Z_{k_1}}, l_1} Z_{k_1}$, где $l_1 \mid$ НОД $(n-1, k_1)$. (см. теорему 70). Согласно теореме 112, $(n, 2)$-кольца эндоморфизмов этих n-групп изоморфны и, согласно теореме 117, изоморфны $(n, 2)$-кольцу $\langle P, h, \diamond\rangle$, где $\langle P, h\rangle = der_{1_{Z_{k_1}}, l_1} Z_{k_1} \times der_{1_{Z_{l_1}}, 0} Z_{l_1}$, бинарная операция $\diamond$ задана по правилу $(u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (u_2 s_1 + u_1, v_2 s_1 + v_1)$, где $s_1 \in Z_{k_1}$ и $s_1 - 1 = s_0 + v_1 \frac{k_1}{l_1}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l_1} \pmod{\frac{k_1}{l_1}}$. Аналогично вторая полуциклическая n-группа типа $(k_2, 1, l_2)$ изоморфна n-группе $\langle Z_{k_2}, f_2\rangle = der_{1_{Z_{k_2}}, l_2} Z_{k_2}$, где $l_2 \mid$ НОД $(n-1, k_2)$, и их $(n, 2)$-кольца эндоморфизмов изоморфны $(n, 2)$-кольцу $\langle P', h', \diamond'\rangle$, где $\langle P', h'\rangle = der_{1_{Z_{k_2}}, l_2} Z_{k_2} \times der_{1_{Z_{l_2}}, 0} Z_{l_2}$, бинарная операция $\diamond'$ задана по правилу $(u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (u_2 s_2 + u_1, v_2 s_2 + v_1)$, где $s_2 \in Z_{k_2}$ и $s_2 - 1 = s_0' + v_1 \frac{k_2}{l_2}$, где s_0' — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l_2} \pmod{\frac{k_2}{l_2}}$.

Если имеем изоморфизм $(n, 2)$-колец $\langle P, h, \diamond\rangle$ и $\langle P', h', \diamond'\rangle$, то их n-группы также изоморфны, т.е. $der_{1_{Z_{k_1}}, l_1} Z_{k_1} \times der_{1_{Z_{l_1}}, 0} Z_{l_1} \cong der_{1_{Z_{k_2}}, l_2} Z_{k_2} \times der_{1_{Z_{l_2}}, 0} Z_{l_2}$. У n-групп $der_{1_{Z_{k_1}}, l_1} Z_{k_1} \times der_{1_{Z_{l_1}}, 0} Z_{l_1}$ и $der_{1_{Z_{k_2}}, l_2} Z_{k_2} \times der_{1_{Z_{l_2}}, 0} Z_{l_2}$ ретрактами будет соответственно прямые суммы $Z_{k_1} + Z_{l_1}$ и $Z_{k_2} + Z_{l_2}$. У изоморфных n-групп ретракты изоморфны, значит, имеем изоморфизм конечных абелевых групп $Z_{k_1} + Z_{l_1} \cong Z_{k_2} + Z_{l_2}$. Согласно условию, $l_1 \mid k_1$ и $l_2 \mid k_2$, тогда, в силу однозначной разложимости конечной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических групп, получим $Z_{k_1} \cong Z_{k_2}$ и $Z_{l_1} \cong Z_{l_2}$, а тогда $k_1 = k_2$ и $l_1 = l_2$. Откуда следует изоморфизм n-групп $\langle Z_{k_1}, f_1\rangle$ и $\langle Z_{k_2}, f_2\rangle$. Значит, рассматриваемые в теореме абелевы полуциклические n-группы изоморфны. Теорема доказана.

Следствие 88 *(Следствие 2, [80]-А) Две конечные циклические n-группы с изоморфными $(n, 2)$-кольцами эндоморфизмов изоморфны.*

Рассмотрим теперь коциклические n-группы.

Теорема 120 *(Теорема 3, [67]-A) Коциклические n-группы с изоморфными $(n,2)$-кольцами эндоморфизмов изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\langle A, f'\rangle$, $\langle B, f''\rangle$ – две коциклические n-группы, имеющие изоморфные $(n,2)$-кольца эндоморфизмов. Согласно следствию 56, любая коциклическая n-группа это в точности конечная полуциклическая n-группа типа $(p^k, 1, p^t)$, p — простое число, p^t делит НОД $(n-1, p^k)$, либо абелева n-группа, 0-производная от квазициклической группы $Z(p^\infty)$.

Пусть $\langle A, f'\rangle$ и $\langle B, f''\rangle$ будут абелевыми полуциклическими n-группами типов $(p_1^{k_1}, 1, p_1^{t_1})$ и $(p_2^{k_2}, 1, p_2^{t_2})$ соответственно, их $(n,2)$-кольца эндоморфизмов изоморфны (согласно следствию 87) $(n,2)$-кольцам $\langle\langle Z_{p_1^{k_1}}, f\rangle \times \langle Z_{p_1^{t_1}}, f_1\rangle, \bullet\rangle$ и $\langle\langle Z_{p_2^{k_2}}, f^*\rangle \times \langle Z_{p_2^{t_2}}, f_1^*\rangle, \bullet\rangle$ соответственно, где имеем $\langle Z_{p_1^{k_1}}, f\rangle = der_{1_{Z_{p_1^{k_1}}}, p_1^{t_1}} Z_{p_1^{k_1}}$, $\langle Z_{p_1^{t_1}}, f_1\rangle = der_{1_{Z_{p_1^{t_1}}}, 0} Z_{p_1^{t_1}}$ и $\langle Z_{p_2^{k_2}}, f^*\rangle = der_{1_{Z_{p_2^{k_2}}}, p_2^{t_2}} Z_{p_2^{k_2}}$, $\langle Z_{p_2^{t_2}}, f_1^*\rangle = der_{1_{Z_{p_2^{t_2}}}, 0} Z_{p_2^{t_2}}$.

Из условия теоремы имеем изоморфизм

$$\langle\langle Z_{p_1^{k_1}}, f\rangle \times \langle Z_{p_1^{t_1}}, f_1\rangle, \bullet\rangle \cong \langle\langle Z_{p_2^{k_2}}, f^*\rangle \times \langle Z_{p_2^{t_2}}, f_1^*\rangle, \bullet\rangle,$$

тогда $\langle Z_{p_1^{k_1}}, f\rangle \times \langle Z_{p_1^{t_1}}, f_1\rangle \cong \langle Z_{p_2^{k_2}}, f^*\rangle \times \langle Z_{p_2^{t_2}}, f_1^*\rangle$. У n-группы $\langle Z_{p_1^{k_1}}, f\rangle \times \langle Z_{p_1^{t_1}}, f_1\rangle$ ретрактом будет прямая сумма $Z_{p_1^{k_1}} + Z_{p_1^{t_1}}$ (проверяется непосредственно для $c = (0,0)$), тогда $\langle Z_{p_1^{k_1}}, f\rangle \times \langle Z_{p_1^{t_1}}, f_1\rangle = der_{1_{Z_{p_1^{k_1}} + Z_{p_1^{t_1}}}, p_1^{t_1}}(Z_{p_1^{k_1}} + Z_{p_1^{t_1}})$. Так же $\langle Z_{p_2^{k_2}}, f^*\rangle \times \langle Z_{p_2^{t_2}}, f_1^*\rangle = der_{1_{Z_{p_2^{k_2}} + Z_{p_2^{t_2}}}, p_2^{t_2}}(Z_{p_2^{k_2}} + Z_{p_2^{t_2}})$. Тогда имеем $Z_{p_1^{k_1}} + Z_{p_1^{t_1}} \cong Z_{p_2^{k_2}} + Z_{p_2^{t_2}}$. Согласно условию, $p_1^{t_1} \mid p_1^{k_1}$ и $p_2^{t_2} \mid p_2^{k_2}$, тогда, в силу однозначной разложимости конечной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических групп, получаем $Z_{p_1^{k_1}} \cong Z_{p_2^{k_2}}$ и $Z_{p_1^{t_1}} \cong Z_{p_2^{t_2}}$, т.е. $p_1 = p_2$, $k_1 = k_2$ и $t_1 = t_2$. Значит, n-группы $\langle Z_{p_1^{k_1}}, f\rangle$ и $\langle Z_{p_2^{k_2}}, f^*\rangle$ совпадают. Тогда абелевы полуциклические n-группы $\langle A, f'\rangle$ и $\langle B, f''\rangle$ изоморфны.

Пусть теперь $\langle A, f'\rangle$ и $\langle B, f''\rangle$ — абелевы n-группы, изоморфные n-группам $\langle Z(p_1^\infty), f\rangle = der_{1_{Z(p_1^\infty)}, 0} Z(p_1^\infty)$ и $\langle Z(p_2^\infty), f\rangle = der_{1_{Z(p_2^\infty)}, 0} Z(p_2^\infty)$ соответственно, их $(n,2)$-кольца эндоморфизмов изоморфны $(n,2)$-кольцам $\langle\langle J_{p_1}, f_1\rangle \times \langle U_1, f\rangle, \diamond\rangle$ и $\langle\langle J_{p_2}, f_1^*\rangle \times \langle U_2, f^*\rangle, \diamond\rangle$ соответственно(по предложению 70). По условию теоремы $\langle\langle J_{p_1}, f_1\rangle \times \langle U_1, f\rangle, \diamond\rangle \cong \langle\langle J_{p_2}, f_1^*\rangle \times \langle U_2, f^*\rangle, \diamond\rangle$.

Тогда имеем изоморфизм n-групп $\langle J_{p_1}, f_1\rangle \times \langle U_1, f\rangle \cong \langle J_{p_2}, f_1^*\rangle \times \langle U_2, f^*\rangle$, где U_1, U_2 – множества решений уравнения $(n-1)x = 0$ в группах $Z(p_1^\infty)$ и $Z(p_2^\infty)$ соответственно. Как было отмечено перед предложением 70, множества U_1 и U_2 являются циклическими подгруппами с порождающими элементами c_{r_1} и c_{r_2} соответственно, где $n - 1 = p_1^{r_1} q_1$, $n - 1 = p_2^{r_2} q_2$ и p_1 не делит q_1,p_2 не делит q_2. Элементы c_{r_1} и c_{r_2} имеют порядки $p_1^{r_1}$ и $p_2^{r_2}$ соответственно.

У n-группы $\langle J_{p_1}, f_1\rangle \times \langle U_1, f\rangle$ ретрактом будет прямая сумма $J_{p_1} + U_1$ (проверяется непосредственно для $c = (0,0)$), тогда $\langle J_{p_1}, f_1\rangle \times \langle U_1, f\rangle = der_{(0,0)}(J_{p_1} + U_1)$. Так же $\langle J_{p_2}, f_1^*\rangle \times \langle U_2, f^*\rangle = der_{(0,0)}(J_{p_2} + U_2)$. Тогда имеем $J_{p_1} + U_1 \cong J_{p_2} + U_2$. Пусть σ – указанный изоморфизм из $J_{p_1} + U_1$ в $J_{p_2} + U_2$. При этом изоморфизме образ $\sigma(c_{r_1})$ порождающего элемента c_{r_1} циклической подгруппы U_1 принадлежит циклической подгруппе U_2 (иначе этот образ будет иметь бесконечный порядок, так как J_{p_2} является группой без кручения). Значит, порядок $\sigma(c_{r_1})$ делит $p_2^{r_2}$, с другой стороны, этот порядок делит $p_1^{r_1}$ (порядок образа c_{r_1} делит порядок c_{r_1}). Значит, $p_1 = p_2$. Тогда квазициклические группы $Z(p_1^\infty)$ и

$Z(p_2^\infty)$ изоморфны. Применяем теорему 12, полагая $d_1 = d_2 = u = 0$, получаем изиморфизм n-групп $\langle A, f' \rangle$ и $\langle B, f'' \rangle$. Теорема доказана.

6.5 n-Группы гомоморфизмов из полуциклических n-групп

n-Группа гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z,C), g \rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1 \rangle = der_{1_Z,l} Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2 \rangle$. На n-группе $\langle C, f_2 \rangle$ строим ретракт $C = ret_c \langle C, f_2 \rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, нулем этой группы будет элемент c, причем, имеются элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C, которые удовлетворяют равенствам

$$f_2(x_1^n) = x_1 + \varphi_2(x_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(x_{n-1}) + x_n + d_2, \ x_1, \ldots, x_n \in C; \tag{188}$$

$$\varphi_2(d_2) = d_2; \tag{189}$$

$$\varphi_2^{n-1}(x) = x, \quad x \in C. \tag{190}$$

В группе C для фиксированного целого числа l выделим множество P_1 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют равенству

$$la = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u), \tag{191}$$

где $\widetilde{\varphi}_2(x) = x + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(x), x \in C$ — эндоморфизм группы C, а для первой компоненты этих пар верно равенство

$$\varphi_2(a) = a. \tag{192}$$

На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу

$$h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n)).$$

Проверим замкнутость этой операции на множестве P_1. Пусть $(a_i, u_i) \in P_1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда с учетом очевидного равенства $\varphi_2(d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u)) = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u)$, используя равенства (189) и (188), получаем $\quad l(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = la_1 + la_2 + \ldots + la_{n-1} + la_n =$

$$= d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_1) + d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_2) + \ldots + d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_{n-1}) + d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_n) =$$

$$= d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_1) + \varphi_2(d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_2)) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_{n-1})) + d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_n) + d_2 - d_2 =$$
$$= f_2(d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_1), d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_2), \ldots, d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_{n-1}), d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_n)) - d_2.$$

Но для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, n-1, n$ верно равенство $d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_i) = f_2(\overset{(n-1)}{u_i}, c)$. Продолжая последнюю цепочку равенств с использованием признака полуабелевости n-группы (теорема 2.6.13 из [15]), получаем $\quad l(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) =$

$$= f_2(f_2(\overset{(n-1)}{u_1}, c), f_2(\overset{(n-1)}{u_2}, c), \ldots, f_2(\overset{(n-1)}{u_{n-1}}, c), f_2(\overset{(n-1)}{u_n}, c)) - d_2 =$$

$$= f_2(\overset{(n-1)}{f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)}, f_2(\overset{(n)}{c})) - d_2 =$$

$$= f_2(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n) + \varphi_2(f_2(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n)) + \dots$$
$$\dots + \varphi_2^{n-2}(f_2(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n)) + d_2 + d_2 - d_2 =$$
$$= d_2 + \widetilde{\varphi_2}(f_2(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n)).$$

Доказана замкнутость операции h_1 на множестве P_1.

Теперь можно утверждать, что $\langle P_1, h_1\rangle$ — полуабелева n-группа.

Теорема 121 *(Теорема 3, [74]-А) Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l}Z$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Доказательство. Каждое отображение $\psi : Z \to C$ является гомоморфизмом из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l}Z$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x (здесь $+$ — сложение в группе C) и выполнены условия

$$\sigma(l) = u + \varphi_2(u) + \dots + \varphi_2^{n-2}(u) + d_2, \tag{193}$$
$$\sigma(x) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \text{для всех целых чисел} \;\; x. \tag{194}$$

Каждый гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = a$ и действует по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$ (смотри, например, [40], стр. 212). Тогда из равенства (193) следует $la = d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u)$, а из равенства (194) при $x = 1$ получим равенство (192). Таким образом, каждому гомоморфизму ψ из n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$ однозначно соответствует упорядоченная пара элементов (a, u) из P_1. Обозначим это соответствие (которое будет отображением) через τ. Верно и обратно, для каждой пары элементов (a, u) из P_1 однозначно определяется гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C, действующий по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$, из равенства (191) следует равенство (193), используя равенство (192), для любого целого числа x получим $\varphi_2(\sigma(x)) = \varphi_2(xa) = x\varphi_2(a) = xa = \sigma(x)$, т.е. верно равенство (194). Таким образом, каждая пара элементов (a, u) из P_1 однозначно определяет гомоморфизм ψ из n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$, действующий по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$, $x \in Z$. Итак, τ — биективное отображение из n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ в n-группу $\langle P_1, h_1\rangle$.

Докажем сохранение n-арной операции при отображении τ. Выбираем $\psi_1, \dots, \psi_n \in Hom(Z, C)$ и $\tau(\psi_i) = (a_i, u_i)$, $i = 1, \dots, n$, где $\psi_i(x) = \sigma_i(x) + u_i$ для любого целого числа x, $\sigma_i(1) = a_i$. Действуем n-арной операцией g на гомоморфизмы $\psi_1, \dots, \psi_n$ (здесь $x \in Z$), а затем используем (188) и (194):

$$g(\psi_1, \dots, \psi_n)(x) = f_2(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)) = f_2(\sigma_1(x) + u_1, \dots, \sigma_n(x) + u_n) =$$
$$= \sigma_1(x) + u_1 + \varphi_2(\sigma_2(x) + u_2) + \dots + \varphi_2^{n-2}(\sigma_{n-1}(x) + u_{n-1}) + \sigma_n(x) + u_n + d_2 =$$
$$= \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \dots + \sigma_{n-1}(x) + \sigma_n(x) + u_1 + \varphi_2(u_2) + \dots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) + u_n + d_2.$$

Обозначим $\sigma_g = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ и $u_g = u_1 + \varphi_2(u_2) + \dots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) + u_n + d_2 = f_2(u_1, \dots, u_n)$. С учетом этих обозначений гомоморфизм $g(\psi_1, \dots, \psi_n)$ действует по правилу

$$g(\psi_1, \dots, \psi_n)(x) = \sigma_g(x) + u_g \quad \text{для любого целого числа} \;\; x, \tag{195}$$

причем гомоморфизм σ_g и элемент u_g удовлетворяют равенствам (193), (194).

С учетом правила (195) и вычисления $\sigma_g(1) = (\sigma_1 + \ldots + \sigma_n)(1) = \sigma_1(1) + \ldots + \sigma_n(1) = a_1 + \ldots + a_n$, получаем $\tau(g(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n)) = h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = h_1(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n))$. Теорема доказана.

Из теоремы 121 имеем

Следствие 89 *(Следствие 1, [74]-A) Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Для бесконечных циклических n-групп верно

Следствие 90 *(Следствие 2, [74]-A) Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$, построенная при $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Теперь рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, A), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l}Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$. На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ также строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, причем, имеется элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$, а автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, кроме того, верно равенство

$$f_2(x_1^n) = x_1 + \ldots + x_n + d_2,\ x_1, \ldots, x_n \in A; \tag{196}$$

В группе A для фиксированного целого числа l выделим множество R_1 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют равенству

$$la = d_2 + (n-1)u. \tag{197}$$

На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу

$$h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, u_1 + \ldots + u_n + d_2).$$

Так как каждая абелева n-группа является полуабелевой, то, согласно выше приведенным рассуждениям перед теоремой 121, можно утверждать, что $\langle R_1, h_1\rangle$ — абелева n-группа. Из теоремы 121 получаем

Следствие 91 *(Следствие 3, [74]-A) Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l}Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

Из следствия 91 имеем

Следствие 92 *(Следствие 4, [74]-A) Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

Если при построении абелевой n-группы $\langle R, h_1\rangle$ положить $l = 1$, то из следствия 91 получаем

Следствие 93 *(Следствие 5, [74]-A) Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$, построенная для $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов $\langle Hom(G, A), g\rangle$ из бесконечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

n-Группа гомоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу Пусть n — нечетное число и $n > 1$. Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$. Элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C удовлетворяют равенствам (188), (189) и (190).

В группе C выделим множество H таких элементов a, для которых верно равенство $\varphi_2(a) = -a$, т.е. $H = \{a \in C \mid \varphi_2(a) = -a\}$. Очевидно H подгруппа в C и ограничение автоморфизма φ_2 на H будет автоморфизмом подгруппы H. На подгруппе H определим полуабелеву n-группу $\langle H, h\rangle = der_{\varphi_2,0}H$, где h действует по правилу

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = a_1 + \varphi_2(a_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in H$.

Далее, обозначим через T множество всех таких элементов u из C, что образ этих элементов при эндоморфизме $\widetilde{\varphi_2} = 1_C+\varphi_2+\ldots+\varphi_2^{n-2}$ группы C (этот эндоморфизм нам уже встречался перед теоремой 121) равен $-d_2$, т.е. $T = \{u \in C \mid \widetilde{\varphi_2}(u) = -d_2\}$. Заметим, что элемент u является идемпотентом тогда и только тогда, когда верно равенство $\widetilde{\varphi_2}(u) = -d_2$ (проверяется непосредственно). Значит, T — множество всех идемпотентов полуабелевой n-группы $\langle C, f_2\rangle$. Согласно предложению 44 из [51], $\langle T, f_2\rangle$ — подгруппа n-группы $\langle C, f_2\rangle$, если $T \neq \emptyset$.

Теорема 122 *(Теорема 4, [74]-А) Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T.*

Доказательство. Каждое отображение $\psi : Z \to C$ является гомоморфизмом из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x (здесь $+$ — сложение в группе C) и выполнены условия

$$\sigma(0) = u + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u) + d_2, \tag{198}$$

$$\sigma(-x) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \text{для всех целых чисел } x. \tag{199}$$

Среди всех гомоморфизмов σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C, которые определяются однозначно образом единицы $\sigma(1) = a$ и действуют по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$, выбираем такие гомоморфизмы, для которых $\sigma(1) \in H$. Для каждого такого гомоморфизма σ и для каждого элемента $u \in T$ определим отображение $\psi : Z \to C$ по правилу:

$$\psi(z) = \sigma(z) + u = za + u, \quad z \in Z.$$

Так как $\sigma(0) = 0$ и $\widetilde{\varphi_2}(u) = -d_2$, то для выбранных гомоморфизма σ и элемента u группы C верно равенство (198). Кроме того, для всех целых чисел x имеем $\sigma(-x) = -xa$ и $\varphi_2(\sigma(x)) = \varphi_2(xa) = x\varphi_2(a) = -xa$, значит, верно равенство (199). Построенное выше отображение

ψ будет гомоморфизмом из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

Верно и обратно, для каждого гомоморфизма ψ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x и выполнены условия (198) и (199). Из (198) следует $u \in T$. Если положить $\sigma(1) = a$, то из (199) при $x = 1$ получаем $\varphi_2(a) = \varphi_2(\sigma(1)) = \sigma(-1) = -a$, т.е. $\sigma(1) \in H$.

Таким образом, между множествами $Hom(Z, C)$ и $H \times T$ имеется взаимно однозначное соответствие $\tau : \psi \to (a, u)$, где $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x, $\sigma(1) = a \in H$ и $u \in T$. Докажем сохранение n-арной операции при соответствии τ. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Hom(Z, C)$ и $\tau(\psi_i) = (a_i, u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\psi_i(x) = \sigma_i(x) + u_i$ для любого целого числа x, $\sigma_i(1) = a_i$ и $u_i \in T$. Действуем n-арной операцией g на гомоморфизмы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (здесь $x \in Z$), а затем используем (188) и (194):

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = f_2(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = f_2(xa_1 + u_1, \ldots, xa_n + u_n) =$$
$$= xa_1 + u_1 + \varphi_2(xa_2 + u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(xa_{n-1} + u_{n-1}) + xa_n + u_n + d_2 =$$
$$= x(a_1 + \varphi_2(a_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n) + u_1 + \varphi_2(u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) +$$
$$+ u_n + d_2 = xh(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) + f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n).$$

Значит, $\tau(g(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = (h(a_1, \ldots, a_n), f_2(u_1, \ldots, u_n))$. Теорема доказана.

Из теоремы 122 имеем

Следствие 94 *(Следствие 6, [74]-A) Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T.*

Заметим, что если в полуабелевой n-группе нет идемпотентов, то нет и гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в эту n-группу.

Для нечетного числа $n > 1$ рассмотрим теперь n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, A), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$. Автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, n-арная операция f_2 удовлетворяет равенству

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + d_2, \quad x_1, \ldots, x_n \in A,$$

где $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$.

В группе A выбираем множество M таких элементов a, для которых верно равенство $a = -a$, т.е. $M = \{a \in A \mid a = -a\}$. Очевидно M подгруппа в A. На подгруппе M определим абелеву n-группу $\langle M, h\rangle = der_{1_M,0}M$, где h действует по правилу $h(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n$, $a_1, \ldots, a_n \in M$.

Далее, обозначим через E множество всех таких элементов u из A, для которых верно равенство $(n-1)u = -d_2$, т.е. $E = \{u \in A \mid (n-1)u = -d_2\}$. Все элементы из E будут идемпотентами и каждый идемпотент n-группы $\langle A, f_2\rangle$ принадлежит E (проверяется непосредственно). Кроме того, в абелевой n-группе каждый идемпотент является единицей. Значит, E — множество всех единиц абелевой n-группы $\langle A, f_2\rangle$. Согласно [54], $\langle E, f_2\rangle$ — подгруппа n-группы $\langle A, f_2\rangle$, если $E \neq \emptyset$.

Из теоремы 122 получаем

Следствие 95 *(Следствие 7, [74]-А) Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение абелевых n-групп $\langle M, h\rangle \times \langle E, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$ с не пустым множеством единиц E.*

Из следствия 94 имеем

Следствие 96 *(Следствие 8, [74]-А) Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение абелевых n-групп $\langle M, h\rangle \times \langle E, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$ с не пустым множеством единиц E.*

Вновь заметим, что если в абелевой n-группе нет единиц, то нет и гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в эту n-группу.

n-Группа гомоморфизмов из конечной абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z_k, C), g\rangle$ из конечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{1_{Z_k},l}Z_k$ (Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k, l | НОД $(n-1,k)$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, причем имеются элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C, которые удовлетворяют условиям (188) — (190).

Рассмотрим подгруппу $C[k]$ всех элементов x группы C, для которых верно равенство $kx = c$, где c — нуль группы C. В группе C для фиксированного целого числа l выделим множество P_2 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют условию (191) и первая компонента a таких пар принадлежит подгруппе $C[k]$ и удовлетворяет равенству (192).

На этом множестве определим n-арную операцию h_2 по правилу

$$h_2((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n)).$$

Очевидно, если $(a_i, u_i) \in P_2$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $\varphi_2(a_1+\ldots+a_n) = a_1+\ldots+a_n$ и $a_1+\ldots+a_n \in C[k]$. Равенство $l(a_1 + \ldots + a_n) = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(f_2(u_1, \ldots, u_n))$ проверяется также, как перед теоремой 121. Теперь можно утверждать, что $\langle P_2, h_2\rangle$ — полуабелева n-группа.

Теорема 123 *Полуабелева n-группа $\langle P_2, h_2\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{1_{Z_k},l}Z_k$ (Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k, l | НОД $(n-1,k)$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Доказательство. Для каждого гомоморфизма ψ из конечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{1_{Z_k},l}Z_k$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ найдутся гомоморфизм σ из Z_k в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x из Z_k (здесь $+$ — сложение в группе C) и выполнены условия (193), (194). Гомоморфизм σ определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = a$, действует по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z_k$ и выполнено равенство $ka = c$, т.е. $a \in C[k]$ (смотри, например, [40], стр. 212). Тогда из равенства (193) следует равенство (191), а из равенства (194) следует равенство (192). Таким образом, каждому гомоморфизму ψ из n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$ однозначно соответствует упорядоченная пара элементов (a, u) из P_2. Значит, имеется отображение $\tau : Hom(Z_k, C) \to P_2$, заданное правилом $\tau(\psi) = (a, u)$, где $\psi(x) = \sigma(x) + u$, $x \in Z_k$ и $\sigma(1) = a$.

Далее, если пара элементов (a, u) выбрана из P_2, то первая компонента a этой пары однозначно определяет гомоморфизм σ из Z_k в абелеву группу C, действующий по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z_k$, кроме того, из равенства (191) следует равенство (193), из равенства (192) для любого целого числа $x \in Z_k$ получим равенство (194). Таким образом, каждая пара элементов (a, u) из P_2 (согласно теореме 4) однозначно определяет гомоморфизм ψ из n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$, действующий по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$, $x \in Z_k$. Значит, τ — биективное отображение из n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z_k, C), g\rangle$ в n-группу $\langle P_2, h_2\rangle$.

Сохранение n-арной операции при отображении τ доказывается также, как в доказательстве теоремы 121. Теорема доказана.

Из теоремы 123 имеем

Следствие 97 *Полубелева n-группа $\langle P_2, h_2\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(k, 1, l)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Для конечных циклических n-групп верно

Следствие 98 *Полубелева n-группа $\langle P_2, h_2\rangle$, построенная при $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ порядка k в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Рассмотрим теперь n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z_k, C), g\rangle$ из конечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{1_{Z_k}, l} Z_k$ (Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k, $l \mid$ НОД $(n-1, k)$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, причем имеется элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$, а автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, кроме того, верно равенство (196).

Рассмотрим подгруппу $A[k]$ всех элементов x группы A, для которых верно равенство $kx = c$. В группе A для фиксированного целого числа l выделим множество R_2 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют условию (197) и первая компонента a таких пар принадлежит подгруппе $A[k]$.

На этом множестве определим n-арную операцию h_2 по правилу

$$h_2((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, u_1 + \ldots + u_n + d_2).$$

Очевидно, если $(a_i, u_i) \in R_2$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $a_1 + \ldots + a_n \in C[k]$. Равенство $l(a_1 + \ldots + a_n) = d_2 + (n-1)(u_1 + \ldots + u_n + d_2)$ проверяется непосредственно с учетом равенств $la_i = d_2 + (n-1)u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Теперь можно утверждать, что $\langle R_2, h_2\rangle$ — абелева n-группа. Из теоремы 123 получаем

Следствие 99 *Абелева n-группа $\langle R_2, h_2\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{1_{Zk},l}Z_k$ (Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k, $l \mid$ НОД $(n-1,k)$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

Из следствия 99 имеем

Абелева n-группа $\langle R_2, h_2\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(k,1,l)$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

Для конечных циклических n-групп верно

Следствие 100 *Абелева n-группа $\langle R_2, h_2\rangle$, построенная при $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ порядка k в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

n-Группа гомоморфизмов из конечной не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z_k, C), g\rangle$ из конечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{\varphi_1,l}Z_k$ (Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k, $\varphi_1(1) = m$, $m \neq 1$, m взаимно прост с k, $lm \equiv l \pmod k$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

Вновь на n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, с элементом $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизмом $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C, которые удовлетворяют условиям (188) — (190).

В группе C для фиксированного целого числа l выделим множество P_3 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют условию (191), а первая компонента a таких пар принадлежит подгруппе $C[k]$ и удовлетворяет равенству

$$\varphi_2(a) = ma. \tag{200}$$

На этом множестве определим n-арную операцию h_3 по правилу

$$h_3((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n)).$$

Очевидно, если $(a_i, u_i) \in P_3$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $a_1 + \ldots + a_n \in C[k]$ и $\varphi_2(a_1 + \ldots + a_n) = m(a_1 + \ldots + a_n)$. Равенство $l(a_1 + \ldots + a_n) = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(f_2(u_1, \ldots, u_n))$ проверяется также, как перед теоремой 121. Теперь можно утверждать, что $\langle P_3, h_3\rangle$ — полуабелева n-группа.

Теорема 124 *Полуабелева n-группа $\langle P_3, h_3\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{\varphi_1,l}Z_k$ (Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k, $\varphi_1(1) = m$, $m \neq 1$, m взаимно прост с k, $lm \equiv l \pmod k$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Доказательство. В доказательстве теоремы 123 заменим равенство (192) на равенство (200) и получим доказательство данной теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 124 имеем

Следствие 101 *Полубелева n-группа $\langle P_3, h_3\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа (k, m, l) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Рассмотрим теперь n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z_k, C), g\rangle$ из конечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{\varphi_1,l}Z_k$ из теоремы 124 в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

Строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$ с той же операцией сложение, что и в предыдущем пункте, причем имеется элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$, а автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, кроме того, верно равенство (196)

В группе A для фиксированного целого числа l выделим множество R_3 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют условию (197) и первая компонента a таких пар принадлежит подгруппе $A[k]$ и удовлетворяет равенству $a = ma$.

На этом множестве определим n-арную операцию h_3 по правилу

$$h_3((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, u_1 + \ldots + u_n + d_2).$$

Очевидно, если $(a_i, u_i) \in R_3$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $a_1 + \ldots + a_n \in C[k]$. Равенство $l(a_1 + \ldots + a_n) = d_2 + (n-1)(u_1 + \ldots + u_n + d_2)$ проверяется непосредственно с учетом равенств $la_i = d_2 + (n-1)u_i$, $i = 1, \ldots, n$, а равенство $a_1 + \ldots + a_n = m(a_1 + \ldots + a_n)$ проверяется непосредственно с учетом равенств $a_i = ma_i$, $i = 1, \ldots, n$. Теперь можно утверждать, что $\langle R_3, h_3\rangle$ — абелева n-группа. Из теоремы 124 получаем

Следствие 102 *Абелева n-группа $\langle R_3, h_3\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{\varphi_1,l}Z_k$ (Z_k — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k, $\varphi_1(1) = m$, $m \neq 1$, m взаимно прост с k, $lm \equiv l \pmod k$), показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

Из следствия 102 имеем

Следствие 103 *Абелева n-группа $\langle R_3, h_3\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из конечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа (k, m, l) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

Заключение

Основные научные результаты диссертации

В диссертации реализована исследовательская программа по развитию теории полуабелевых n-групп. Перечислим основные результаты диссертации.

В первой главе в параграфе 1.3 найдено тождество, описывающее класс n-групп, в котором отображение "выбор косого элемента" в каждой n-группе является гомоморфизмом (теорема 4).

Во второй главе в параграфе 2.4 доказано, что периодическая часть полуабелевой n-группы будет подгруппой (теорема 46) и для конечно порожденной абелевой n-группы она будет конечной (теорема 51).

В третьей главе изучалось строение конечных и бесконечных полуциклических n-групп. Доказана неразложимость конечной примарной полуциклической n-группы (предложение 49) и разложение конечной полуциклической n-группы в произведение примарных полуциклических n-групп (предложение 50). Изучены подгруппы полуциклических n-групп.

В параграфе 3.5 определен новый тип n-групп — коциклические n-группы, изучено строение коциклических n-групп (следствие 56), доказана неразложимость коциклической n-группы (следствие 57).

В четвертой главе изучалось строение конечных и конечно порожденных полуабелевых и абелевых n-групп.

В параграфе 4.1 доказана основная теорема о строении конечных абелевых n-групп (теорема 82). Найдена полная система инвариантов конечной абелевой n-группы.

В параграфе 4.2 найдена полная система инвариантов конечно порожденной абелевой n-группы.

В параграфе 4.3 доказано разложение конечной полуабелевой n-группы в прямое произведение примарных полуабелевых n-групп (теорема 89) и однозначность этого разложения (теорема 90). Доказан признак неразложимости конечной полуабелевой примарной n-группы (теорема 91). Доказана основная теорема о строении конечных полуабелевых n-групп (теорема 92). Найдена полная система инвариантов конечной полуабелевой n-группы.

Для конечно порожденной полуабелевой n-группы в параграфе 4.4 доказан признак неразложимости (теорема 95). Доказано также разложение конечно порожденной полуабелевой n-группы в прямое произведение неразложимых полуабелевых n-групп, частью бесконечных, частью конечных примарных (теорема 96).

В пятой главе изучалось строение свободных n-групп в классах абелевых полуциклических, абелевых, полуабелевых и m-полуабелевых n-групп.

В параграфе 5.1 класс всех абелевых полуциклических n-групп разбивается на $\frac{n+1}{2}$ при нечетном n или на $\frac{n}{2}$ при четном n подкласса n-групп, в каждом из которых находится свободная n-групп, это в точности бесконечная n-группа из этого подкласса (теорема 98). В частности, в классе всех циклических n-групп свободной n-группой будет бесконечная циклическая n-группа (теорема 99).

В теореме 100 параграфа 5.2 на свободной абелевой группе строится свободная абелева n-группа, а затем доказывается в теореме 102, что только прямое произведение бесконечной циклической n-группы и производной n-группы от свободной абелевой группы является свободной n-группой в классе абелевых n-групп.

В теореме 103 параграфа 5.3 на прямой сумме бесконечной циклической группы и набора прямых сумм $n-1$ бесконечных циклических групп строится свободная полуабелева n-группа. Доказывается (теорема 104), что только так построенная n-группа будет свободной в классе полуабелевых n-групп.

В параграфа 5.3 на прямой сумме бесконечной циклической группы и набора прямых сумм $m-1$ бесконечных циклических групп, где $m-1$ делит $n-1$, строится свободная m-полуабелева n-группа (теорема 106). Доказывается (теорема 107), что только так построенная n-группа будет свободной в классе m-полуабелевых n-групп. Заметим, что в этом случае при $m=n$ мы получим свободные полуабелевы n-группы, а при $m=2$ мы получим свободные абелевы n-группы.

В 6-ой главе изучались эндоморфизмы полуабелевых n-групп. В параграфе 6.3 построены $(n,2)$-кольца и $(n,2)$-почтикольца, изоморфные $(n,2)$-кольцам и $(n,2)$-почтикольцам эндоморфизмов различных полуциклических n-групп. Получены следующие основные результаты: а) построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы (теорема 113); б) построено $(n,2)$-почтикольцо, изоморфное $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы (теорема 115); в) построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы (следствие 82); г) построено $(n,2)$-почтикольцо, изоморфное $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов конечной не абелевой полуциклической n-группы (теорема 116); д) построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов конечной абелевой полуциклической n-группы (теорема 117); е) построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов конечной циклической n-группы (следствие 86).

В параграфе 6.4 построены два $(n,2)$-кольца, изоморфные $(n,2)$-кольцам эндоморфизмов конечной и бесконечной коциклической n-группы (следствие 87 и предложение 70).

В параграфе 6.5 в теореме 118 найдены условия изоморфизма $(n,2)$-колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полуциклических n-групп. В этом же параграфе доказано, что из изоморфизма $(n,2)$-колец эндоморфизмов конечных абелевых полуциклических n-групп следует изоморфизм этих n-групп (теорема 119). Здесь доказано также, что две конечные циклические n-группы с изоморфными $(n,2)$-кольцами эндоморфизмов изоморфны (следствие 88) и две конечные коциклические n-группы с изоморфными $(n,2)$-кольцами эндоморфизмов также изоморфны (теорема 120).

В параграфе 6.6 построены n-группы, изоморфные n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой (не абелевой) полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу (теорема 121 (теорема 122)), n-группе гомоморфизмов из конечной абелевой (не абелевой) полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу (теорема 123 (теорема 124)).

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории n-групп, проводимых в Волгоградском государственном социально-педагогичес-ком университете, в Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины (республика Беларусь), в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Все основные результаты диссертации опубликованы либо в англоязычных ([58]-A, [72]-A, [71]-A, [75]-A, [82]-A, [83]-A)), либо русских ([53]-A, [55]-A, [56]-A, [59]-A, [60]-A, [62]-A, [63]-A, [65]-A, [66]-A, [67]-A, [68]-A, [69]-A, [70]-A, [73]-A, [74]-A, [76]-A, [77]-A, [78]-A, [79]-A, [81]-A, [85]-A, [86]-A, [87]-A) и беларусских

([52]-A, [54]-A, [57]-A, [64]-A, [84]-A) переводимых на английский язык журналах, а также трех журналах Донецкой народной республики ([80]-A, [88]-A, [89]-A). Эти публикации являются доступными для использования в научных исследованиях.

Результаты диссертации могут быть использованы при изучении топологических n-групп, n-полугрупп, n-квазигрупп и других близких к n-группам универсальных алгебр, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

Список литературы

Список использованных источников

[1] Dörnte, W. Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Zeitshcr. — 1929. — Bd.29. — P. 1–19.

[2] Post, E.L. Poluadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 48. — P. 208–350.

[3] Сушкевич, А.К. Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич. — Харьков; Киев: Хозтехиздат, 1937. — 176 с.

[4] Бурбаки, Н. Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра / Н. Бурбаки. М: Физматгиз, 1962. — 516 с.

[5] Bruck, R.H. A survey of binary systems / R.H. Bruck. Berlin-Helderberg-New York: Springer-Verlad, 1966. — 185 p.

[6] Глускин, Л.М. Позиционные оперативы / Л.М. Глускин // Мат. сборник. — 1965. — Т.68 (110), №3. — С. 444–472.

[7] Hosszú, M. On the explicit form of n-group operacions / M. Hosszú // Publ. Math. — 1963. — V.10, №1-4. — P. 88–92.

[8] Gleichgewicht, B. Remarks on n-groups as abstract / B. Gleichgewicht, K. Glazek // Coll. Math. — 1967. — V.17, №2. — P. 209–219.

[9] Glazek, K. Abelian n-groups / K. Glazek, B. Gleichgewicht // Proc. Congr. Vath. Soc. J. Bolyai. Esztergom. — 1977. — P. 321–329.

[10] Dudek, W.A. On some old and new problems in n-ary groups / W.A. Dudek // Quasigroups and Related Systems. — 2001. — V.8. — P. 15–36.

[11] Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. — Минск: Навука і техніка, 1992. — 245 с.

[12] Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков. — Минск: Беларуская навука, 1998. — 167 с.

[13] Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. — Минск: "Беларуская навука 1999. — 181 с.

[14] Гальмак, А.М. n-Арные группы, Часть I. / А.М. Гальмак. — Гомель: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. — 195 с.

[15] Гальмак, А.М. n-Арные группы, Часть 2. / А.М. Гальмак. — Минск: Издательский центр БГУ, 2007. — 323 с.

[16] Курош, А.Г. Обща алгебра, Лекции 1969-1970 уч. года / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1974. — 158 с.

[17] Артамонов, В.А. Универсальные алгебры / В.А. Артамонов // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1976. — С. 191–248.

[18] Dudek, W.A. A note on the axioms of n-groups / W.A. Dudek, K. Glazek, B. Gleichgewicht // Colloquia Math. Soc. J.Bolyai. — 1977. — V.29. — P. 195-202.

[19] Артамонов, В.А. Свободные n-группы / В.А. Артамонов // Матем. заметки. — 1970. — Т.8, №4. — С. 499–507.

[20] Артамонов, В.А. О шрайеровых многообразиях n-групп и n-полугрупп / В.А. Артамонов // Труды семинара им. Г.И. Петровского. — 1979. — Вып. 5. — С. 193–202.

[21] Артамонов, В.А. Подгруппы свободных групп и свободных произведений групп в некоторых классах обобщенных групп: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Артамонов Вячеслав АлексаАртамоновндрович. — М., 1970. — 80 с.

[22] Артамонов, В.А. Лекции по алгебре, III семестр, мех-мат МГУ / В.А. Артамонов. — М.: МГУ, 2000. — 56 с.

[23] Гальмак, А.М. Полиадические аналоги теорем Кэли и Биркгофа / А.М. Гальмак // Известия ВУЗов. Математика. — 2001. — Т.2 (465). — С 13–18 .

[24] Glazek, K. I. On evaluation of some polyadic groups / K. Glazek, J. Michalski, I. SierockiA // Contributions to General Algebra. — 1985. — V.3. — P. 159–171.

[25] Timm, J. Kommutative n-Gruppen: Diss. / Timm J. — Hamburg, 1967. — 67 pp.

[26] Ušan, J. n-Groups in the light of the neutral operations / J. Ušan. — Math. Morav.: Special Vol.: Monograph, 2003, — 162 pp.

[27] Sioson, F.M. On Free Abelian n-Groups I / F.M. Sioson // Proc. Japan Acad. — 1967. — Vol.43. — P. 876–879.

[28] Sioson, F.M. On Free Abelian n-Groups II / F.M. Sioson // Proc. Japan Acad. — 1967. — Vol.43. — P. 880–883.

[29] Sioson, F.M. On Free Abelian n-Groups III / F.M. Sioson // Proc. Japan Acad. — 1967. — Vol.43. — P. 884–888.

[30] Khodabandeh, H. On the representations and automorphisms of polyadic groups / H. Khodabandeh, M. Shahryari // Commun. Algebra. — 2012. — V. 40. — P. 2199–2212.

[31] Dudek, W.A. Jn n-ary group with jnly one skew element / W.A. Dudek // Radovi Matematicki (Sarajevo). — 1990. — Vol.7. — P. 171–175.

[32] Dudek, W.A. On retracts of polyadic groups / W.A. Dudek, J. Michalski // Demonstratio Math. — 1984. — V.17. — P. 281–301.

[33] Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

[34] Кон, П. Универсальная алгебра / П. Кон. — М.: Мир, 1968. — 351 с.

[35] Гальмак, А.М. О решетке конгруэнций n-арной группы / А.М. Гальмак // Весник ВДУ. — 2000. — №3(17). — С. 60–62.

[36] Коксетер, Г.С.М. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г.С.М.Коксетер, У.О.Дж. Мозер. — М.: Наука, 1980. — 240 с.

[37] Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. — М.: Наука, 1982. — 288 с.

[38] Dudek, I.M. On skew elements in n-groups / I.M. Dudek, W.A. Dudek // Demonstratio Math. — 1981. — Vol. XIV, №4. — P. 827–833.

[39] Серпинский, В. 250 задач по элементарной теории чисел / В. Серпинский. — М.: Просвещение, 1968. — 160 с.

[40] Фукс, Л. Бесконечные абелевы группы Т.1. / Л. Фукс. — М.: "Мир 1974. — 335 с.

[41] Фукс, Л. Бесконечные абелевы группы Т.2. / Л. Фукс. — М.: "Мир". 1977. — 415 с.

[42] Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. — Минск: "Вышейшая школа 2006. — 206 с.

[43] Гальмак, А.М. Полуабелевы n-арные группы с идемпотентами / А.М. Гальмак // Весник ВДУ iм П.М. Машэрава. — 1999. — №2(12). — С. 56–60.

[44] Курош, А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1953. — 467 с.

[45] Воробьев, Г.Н. О полусопряженности n-арных подгрупп / Г.Н. Воробьев // Вопросы алгебры. — 1997. — Вып. 10. — С. 157–163.

[46] Колесников, О.В. Разложение n-групп / О.В. Колесников // Мат. исслед. Квазигруппы и лупы. Кишинев: Штиинца. — 1979. — Вып. 51. — С. 88–92.

[47] Кострикин, А.И. Введение в алгебру / А.И. Кострикин. — М.: Наука, 1977. — 495 с.

[48] Смирнов, Д.М. Многообразия алгебр / Д.М. Смирнов. — Новосибирск: ВО "Наука 1992. — 207 с.

[49] Алиев, И.Ш. О наименьшем многообразии симметрическиз алгебр / И.Ш. Алиев // Алгебра и логика (семинар). — 1966. — 5. №6. — С. 5–14.

[50] Чакань, Б. Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр / Б. Чакань // Acta scient. math. — 1964. — 25. — С. 202–208.

Список опубликованных работ автором

Монография

[51] Щучкин, Н.А. Введение в теорию n-групп: монография / Н.А. Щучкин. — Волгоград. Изд. ООО "ПРИНТ", 2019. — 234 с.

Статьи в журналах

[52] Щучкин, Н.А. Полуциклические n-арные группы / Н.А. Щучкин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. — 2009. — Т.3 (54). — С. 186–194 .

[53] Щучкин, Н.А. Подгруппы в полуциклических n-арных группах / Н.А. Щучкин // Фундаментальная и прикладная математика. — 2009. — Т.15 (2). — С. 211–222.

[54] Гальмак, А.М. Циклические n-арные группы и их обобщения / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Проблемы физики, математики и техники. — 2014. — Т.2 (19). — С. 46–53.

[55] Щучкин, Н.А. Строение конечных абелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Дискретная математика. — 2014. — Т.26 (3). — С. 144–159.

[56] Щучкин, Н.А. Свободные абелевы n-арные группы / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2011. — Т.12 (2). — С. 163–170.

[57] Щучкин, Н.А. Биективность косого отображения в n-группах / Н.А. Щучкин // Труды института матем. — 2008. — Т.16, №1. — С. 106–111.

[58] Shchuchkin, N.A. Skew endomorphisms on n-ary groups / N.A. Shchuchkin // Quasigroups and Related Systems. — 2006. — V. 14. — P. 217–226.

[59] Щучкин, Н.А. Взаимосвязь n-групп и групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2003. — Т.4, Выпуск 1(5). — С.125–141.

[60] Щучкин, Н.А. Прямое произведение n-арных групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2014. — Т.15, Выпуск 2. — С. 101–121.

[61] Щучкин, Н.А. Условия конечности для нильпотентных алгебр: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Щучкин Николай Алексеевич. — М., 1991. — 83 с.

[62] Щучкин, Н.А. Разрешимые и нильпотентные n-группы / Н.А. Щучкин // Межвуз. сб. науч. работ "Алгебраические системы". — 1989. — Изд-во Волг. пед. ин-та. Волгоград. — С. 133–139.

[63] Гальмак, А.М. Порождающие множества n-арных групп / А.М.Гальмак, Н. А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2014. — Т.15, Выпуск 1. — С. 89–109.

[64] Щучкин, Н.А. Порождающие множества подалгебр n-арных групп / Н.А. Щучкин // Весник МДУ имя А.А. Куляшова. — 2010. — №1 (35). — С. 46–53.

[65] Щучкин, Н.А. Циклические n-группы / Н.А. Щучкин // Труды междунар. сем. "Универсальная алгебра и ее приложения". — 2000. — Волгоград. Перемена. — С. 295–304.

[66] Щучкин, Н.А. Периодичность в полуабелевых n-арных группах / Н.А. Щучкин // Ученые записки орловского университета. — 2012. — №6, Часть 2. — С. 254–259.

[67] Щучкин, Н.А. Коциклические n-группы / Н.А. Щучкин // Известия вузов. Математика. — 2017. — №10. — С. 89–93.

[68] Щучкин, Н.А. Периодичность в абелевых n-арных группах / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2013. — Т. XIV, Выпуск 4(48). — С. 205–212.

[69] Гальмак, А.М. n-Арные аналоги коммутанта группы / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2009. — Т. X, Выпуск 2(30). — С. 4–9.

[70] Гальмак, А.М. Полиадические аналоги коммутанта группы / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Ученые записки орловского университета. — 2012. — №6(50), Часть 2. — С. 68–72.

[71] Shchuchkin, N. A. Subgroups of semicyclic n-ary groups / N. A. Shchuchkin // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — T. 167. — P. 870–877

[72] Shchuchkin, N. A. The structure of finite abelian n-ary groups / N. A. Shchuchkin // Discrete Mathematics and Applications. — 2015. — T. 25, №1. — P. 47–58

[73] Щучкин, Н.А. Эндоморфизмы полуциклических n-групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2021. — Т.22, Выпуск 1. — С. 353–369.

[74] Щучкин, Н. А. Гомоморфизмы из бесконечных полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2021. — Т.22, Выпуск 1. — С. 340–352.

[75] Shchuchkin, N. A. Free semiabelian n-ary groups / N. A. Shchuchkin // Quasigroups and Related Systems. — 2015. — V. 23. — P. 309–317.

[76] Щучкин, Н. А. Свободные m-полуабелевы n-арные группы / Н.А. Щучкин // Электронные информационные системы. — 2018. — №4, Выпуск 19. — С. 97–109.

[77] Кусов, В.М. Свободные абелевы полуциклические n-арные группы / В.М. Кусов, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2011. — Т.12, Выпуск 2. — С. 68–76.

[78] Бощенко, А.П. Конечные абелевы n-арные группы / А.П. Бощенко, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2011. — Т.12, Выпуск 2. — С. 5–14.

[79] Кусов, В.М. Группа автоморфизмов элементарной n-арной группы / В.М. Кусов, Н.А. Щучкин // Ученые записки орловского университета. — 2012. — №6, Часть 2. — С. 130–136.

[80] Кусов, В.М. Эндоморфизмы абелевых полуциклических n-групп / В.М. Кусов, Н.А. Щучкин // Информатика и кибернетика. Д.: ДонНТУ. — 2018. — №1(11). — С. 65–75.

[81] Щучкин, Н. А. Конечно порожденные нильпотентные алгебры / Н.А. Щучкин // Вестник МГУ. М.: Мех.- мат. — 1992. — Вып. 2. — С. 3–7.

[82] Dudek, W. A. and Shchuchkin N. A. Skew endomorphisms on some n-ary groups / W. A. Dudek, N. A. Shchuchkin // Quasigroups and Related Systems. — 2009. — V. 17. — P. 205–228.

[83] Shchuchkin, N.A. Automorphisms of abelian n-ary groups / N. A. Shchuchkin // Qusigroups and Related Systems. — 2013. — Vol. 21, V. 2. — P. 255–272.

[84] Щучкин, Н.А. Подгруппы свободной абелевой n-арной группы / Н.А. Щучкин // Известия ГГУ. Гомель, Беларусь. ГГУ им. Ф. Скорины — 2013. — №6 (81). — С. 94–103.

[85] Гальмак, А.М. К теореме Поста о смежных классах / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2014. — Т. XV, Выпуск 2(50). — С. 6–20.

[86] Щучкин, Н.А. Свободные алгебры в классе полуабелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Межвуз. сб. науч. трудов "Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство Саратовского университета. — 2016. — Выпуск 8. — С. 111–113.

[87] Щучкин, Н.А. Строение конечных полуабелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. — 2016. — Т. 17, Выпуск 1. — С. 254–269.

[88] Щучкин, Н.А. Конечно порожденные полуабелевы n-группы // Сборник материалов VIII международной научно-технической конференции, ДонНТУ, Донецк, 2017. С. 26–31.

[89] Щучкин Н.А. Свободные алгебры в классе полуабелевых n-групп / Н.А. Щучкин // В сборнике: Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование (ИУСМКМ-2019). Материалы X Международной научно-технической конференции в рамках V Международного Научного форума Донецкой Народной Республики. — 2019. — С. 42-45.

Тезисы

[90] Щучкин, Н.А. Нильпотентные n-группы / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. VI-й Всесоюз. школы: Теория многообразий алгебраических систем. Магнитогорск: МагГу. — 1990. — С. 34–35.

[91] Щучкин, Н.А. К определению n-арной группы. / Н.А. Щучкин // Материалы XII междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной 80-летию проф. В.Н. Латышева. 21-25 апреля. Тула. — 2014. — С. 143–145.

[92] Щучкин, Н.А. Коммутант n-группы / Н.А. Щучкин // Междунар. конф. Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тез. докл. Саратов. — 2004. — С. 130–131.

[93] Щучкин, Н.А. Сопряженность элементов в обобщенных группах / Н.А. Щучкин // Сборник тезисов междунар. конф. "Алгебра и ее приложения". Краснодар. 5-9 августа. — 2002. — С. 156–157.

[94] Щучкин, Н.А. Периодичность в нильпотентных n-группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. конф. памяти А.Г. Куроша: Алгебра и теория чисел. Москва: МГУ. — 1998. — С. 90–91.

[95] Щучкин, Н.А. Две дистрибутивные решетки конгруэнций для n-групп / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. семинара памяти Л.А. Скорнякова: Универсальная алгебра и ее приложения. Волгоград: Перемена. — 1999. — С. 76–77.

[96] Щучкин, Н. А. Обобщенные циклические группы / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. конф.: Универсальные алгеб-ры. Сумы: СПУ. — 2001. — С. 75–76.

[97] Щучкин, Н.А. Обратимость, нейтральность и разложимость в циклических n-группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. алг.конф. памяти З.И.Боревича.С-Петербург: 17-23 сентября. — 2002. — С. 215–216.

[98] Щучкин, Н.А. n-Подгруппы в n-группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. конф.: Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тула, 19-24 мая. — 2003 — С. 256–257.

[99] Щучкин, Н.А. Порождающие множества n-подгрупп / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докладов Международной алгебраической конференции, посв. 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина. Екатеринбург: Изд-во УрГУ. — 2005. — С. 147–148.

[100] Щучкин, Н.А. Косое отображение в n-группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию Л.А.Шеметкова: классы групп, алгебр и их приложения. Гомель, Беларусь. ГГУ им. Ф. Скорины. — 2007. — С. 139–140.

[101] Щучкин, Н. А. Конечные полуциклические n-группы / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию А.Г. Куроша. Москва. МГУ. — 2008. — С. 267–268.

[102] Щучкин, Н. А. Полуциклические тернарные группы / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Международной научной конференции, посвященной 100-летию В.В.Вагнера: современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Саратов. СГУ. — 2008. — С. 142–143.

[103] Щучкин, Н. А. Строение свободных абелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. — 2011. — С. 126–127.

[104] Кусов, В.М. Элементарная n-арная группа / В.М. Кусов, Н. А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Волгоград. — 2012. — С. 40–41.

[105] Щучкин, Н. А. Периодическая часть полуабелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Волгоград. — 2012. — С. 75–76.

[106] Щучкин, Н.А. О периодичности в n-арных группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. — 2013. — С. 91–93.

[107] Гальмак, А.М. К теореме Поста о смежных классах / А.М. Гальмак, Н. А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. — 2013. — С. 18–19.

[108] Щучкин, Н. А. Конечные полуабелевы n-арные группы / Н.А. Щучкин // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложния. Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого. — 2015. — С. 139-142.

[109] Щучкин, Н. А. Эндоморфизмы бесконечных полуциклических n-групп / Н.А. Щучкин // Сборник материалов всероссийской конференции "Алгебра и теория алгоритмов посвященная 100-летию факультета мат-ки и компьют. наук. ИвГУ, Иваново, Изд-во ИвГУ. — 2018. — С. 132–135.

[110] Щучкин, Н. А. Инварианты конечно порожденной абелевой n-группы / Н.А. Щучкин // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша. Тезисы докладов. Москва, МГУ. — 2018. — С. 215–217.

[111] Щучкин, Н. А. Эндоморфизмы полуабелевых n-групп / Н.А. Щучкин // Сборник материалов XV Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения посвященная 100-летию со дня рождения Н.М. Коробова. Тула, 28-31 мая. — 2018. — С. 125–127.

[112] Щучкин, Н. А. Полиадическая группа гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу / Н.А. Щучкин // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза, Тула, 13-18 мая. — 2019. — С. 118–122.

[113] Гальмак, А.М. Некоторые неравенства в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак, Н. А. Щучкин // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящчнной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. — 2019. — С. 56–59.

[114] Щучкин, Н. А. Гомоморфизмы из n-группы в полуабелеву n-группу / Н.А. Щучкин // Сборник материалов Международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения г. Казань, 24-28 июня. — 2019. — С. 183–184.