На правах рукописи

ЩУЧКИН
Николай Алексеевич

ПОЛУАБЕЛЕВЫ n-ГРУППЫ

01.01.06 – Математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ульяновск, 2022

Работа выполнена на кафедре высшей математики и физики в ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-педагогический университет»

Официальные оппоненты: **Кожухов Игорь Борисович**,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», кафедра высшей математики № 1, профессор кафедры

Царев Андрей Валерьевич,
доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», кафедра алгебры, профессор кафедры

Кулаженко Юрий Иванович,
доктор физико-математических наук, доцент, УО «Белорусский государственный университет транспорта», ректор, профессор кафедры «Высшая математика»

Ведущая организация – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Защита состоится «25» мая 2022 года в 11^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.278.02, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ульяновский государственный университет», по адресу: г. Ульяновск, ул. Набережная реки Свияги, д. 106, корпус 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа — https://www.ulsu.ru, с авторефератом — на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации — https://vak.minobrnauki.gov.ru.

Автореферат разослан «__» ___ 2022 года

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 432970, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Ученый секретарь
диссертационного совета __________ Волков Максим Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования, степень ее разработанности

В математике многие хорошо известные и широко применяемые алгебраические структуры имеют различные естественные обобщения. Так В. Дернте[1] в 1929 году в своей статье впервые обобщил определение группы и ввел определение n-группы (другие названия — полиадической группы, обобщенной группы, n-арной группы), заменив бинарную операцию и ее ассоциативность и однозначную обратимость справа и слева на n-арную операцию и ее ассоциативность и обратимость на каждом месте. Так, можно считать, возникла новая область научных исследований под названием теория n-групп. К возникновению этой теории имеет отношение Э. Нетер, именно по ее инициативе В. Дернте воплотил в жизнь идею обобщения определения группы и опубликовал выше указанную статью, которая является частью его диссертации.

По настоящему фундаментальную роль в развитии теории n-групп сыграла работа Э. Поста[2], которая вышла в 1940 году. Именно в этой работе были получены важные результаты и предложены основополагающие идеи развития теории n-групп. Интересные и важные результаты по n-группам были опубликованы в работах Сушкевича А.К.[3], Бурбаки Н.[4], Брака Р.[5], Глускина Л. М.[6], Хоссу М.[7]. Во всех выше указанных работах прослеживается тесная взаимосвязь между группами и n-группами. А значит, богатая и хорошо изученная теория групп помогает успешно изучать свойства n-групп. Среди алгебраистов значительно возрос интерес к n-группам после выхода в свет работ А.Г. Куроша[8] и В.А. Артамонова[9], в которых были включены разделы, посвященные n-группам. Большой вклад в развитие теории n-групп внесли

---

[1]Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1929. – Bd. 29. – P. 1-19.

[2]Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208-350.

[3]Сушкевич, А.К. Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич. – Харьков; Киев: Хозтехиздат, 1937. – 176 с.

[4] Бурбаки, Н. Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра / Н. Бурбаки. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.

[5] Bruck, R.H. A survey of binary systems / R.H. Bruck. – Berlin-Helderberg-New York: Springer-Verlad, 1966. – 185 p.

[6] Глускин, Л.М. Позиционные оперативы / Л.М. Глускин // Мат. сборник. – 1965. – Т.68 (110), №3. – С. 444–472.

[7] Hosszu, M. On the explicit form of n-group operacions / M. Hosszu // Publ. Math. – 1963. – V.10, №1-4. – P. 88-92.

[8] Курош, А.Г. Обща алгебра, Лекции 1969-1970 уч. года / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1974. – 158 с.

[9] Артамонов, В.А. Универсальные алгебры / В.А. Артамонов // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1976. – С. 191-248.

польские алгебраисты Глазек К. и Глейхгевихт Б.[10, 11], Дудек В.[12] и другие. Систематизировали и оформили теорию n-групп в единое целое в своих монографиях белорусские алгебраисты Русаков С. А.[13, 14], Гальмак А. М.[16].

В настоящее время теория n-групп имеет богатое содержание, хотя значительно уступает теории групп. Это связано, по-видимому, с тем, что среди многих алгебраистов бытует мнение об отсутствии существенного различия между группами и n-группами при $n \geq 3$. Однако наряду с общими свойствами для групп и n-групп имеются многочисленные факты для n-групп, которые неверны для групп. Например, n-группа разбивается на смежные классы по подгруппе (как и группа), однако среди этих смежных классов могут быть больше чем одна подгруппы. Другой пример, среди всех классов конгруэнции на n-группе может отсутствовать подгруппа. Иранские математики Х. Ходабандех, М. Шахряри[17] описали простые n-группы.

Одной из главных задач в теории n-групп является изучение свойств, которые не выполнены в теории групп. Так, например, В.А. Артамоновым[18] установлено, что при $n \geq 6$ не все подгруппы свободной n-группы являются свободными. Однако среди основных направлений развития теории n-групп можно выделить изучение свойств n-групп ($n \geq 2$), которые при $n = 2$ являются хорошо известными в теории групп. Так, например, Э. Пост[2] в своей работе доказал n-арный аналог теоремы Силова, который устанавливает существование и сопряженность в конечной n-группе силовских подгрупп в случае, когда индекс этих подгрупп взаимно прост с $n-1$. Кроме того, Э. Постом[2] изучались n-арные подстановки как последовательности $n-1$ обычных подстановок, а Гальмаком А. М.[15,19] описаны косые элементы в n-группах специального вида.

---

[10] Gleichgewicht, B. Remarks on n-groups as abstract algebras / B Gleichgewicht, K. Glazek // Coll. Math. – 1967. – V.17. – P. 209–219.

[11] Glazek,K. Abelian n-groups / K. Glazek, B. Gleichgewicht // Proc. Congr. Vath. Soc. J. Bolyai. Esztergom. – 1977. – P. 321-329.

[12] Dudek, W.A. On some old and new problems in n-ary groups / W.A. Dudek // Quasigroups and Related Systems. – 2001. – V.8. – P. 15–36.

[13] Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск. Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

[14] Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков. – Минск. Беларуская навука, 1998. – 167 с.

[15]Гальмак, А. М. О косых элементах в полиадических группах специального вида / А.М. Гальмак. // *ПФМТ*. – 2020. – № 2(43). – С 64–68.

[16] Гальмак, А.М. n-Арные группы, Часть I. / А.М. Гальмак. – Гомель. Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. – 195 с.

[17] Ходабандех, Х. Простые полиадические группы /Х. Ходабандех, М. Шахряри // Сибирский математический журнал. – 2014. – Том 55, № 4. – С. 898-911.

[18]Артамонов, В.А. Свободные n-группы / В.А. Артамонов // Матем. заметки. – 1970. – Т.8, №4. – С. 499-507.

[19]Гальмак, А. М. О косых элементах в полиадических группах специального вида, определяемых циклической подстановкой / А.М. Гальмак. // *ПФМТ*. – 2020. – № 3(44). – С 55–60.

Иранские математики H. Khodabandeh, M. Shahryari[20] изучали представления и автоморфизмы n-групп.

Заметим, что при переходе от определения группы к определению n-группы и построении теории n-групп возникают несколько обобщений одного и того же группового понятия. Так в самом начале изучения n-групп n-арными аналогами групповой единицы являются нейтральная последовательность элементов n-группы, единица и идемпотент n-группы. В работе Селькина М.В. и др.[21] изучались различные виды косых элементов как аналог обратимости в n-группе. Кулаженко Ю.И., Гальмак АМ[22] изучали некоммутативные полиадические группоиды. Коммутативность в теории n-групп также имеет несколько обобщений групповой коммутативности. Основным обобщением групповой коммутативности, которую предложил Э. Пост[2] в своей работе, можно считать перестановочность двух элементов при действии n-арной операции, стоящих на первом и m-ном месте, где $m-1$ делит $n-1$. В этом случае n-группа называется m-полуабелевой. Если $m=2$, то n-группу называют абелевой, т.е. в этом случае переставлять можно первые два элемента. Если $m=n$, то n-группу называют полуабелевой, т.е. переставлять можно крайние элементы. При $n>2$ все эти типы n-групп будут разными, а при $n=2$ получим определение абелевой группы. Изучению полуабелевых n-групп посвящена данная диссертация.

Теория n-групп является классическим объектом общей алгебры. Необходимость изучения таких теорий отмечал А.Г. Курош[8]. Любая хорошо развитая теория имеет многочисленные научные публикации по этой теории, которые способствуют привлечению молодых и зрелых ученых к изучению данной теории. Выражаю надежду, что эта диссертация также внесет небольшой научный вклад в развитие теории n-групп.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является изучение строения алгебр в классе полуабелевых n-групп и эндоморфизмов этих алгебр. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие задачи:

– определить полуциклическую n-группу как n-арный аналог циклической группы и разработать метод построения различных видов полуциклических n-групп с точностью до изоморфизма;

---

[20] Khodabandeh, H. On the representations and automorphisms of polyadic groups / H. Khodabandeh, M. Shahryari // Commun. Algebra. – 2012. – V. 40. – P. 2199–2212.

[21] Гальмак, А.М. Косые элементы в полиадических группах специального вида / Гальмак А.М., Кулаженко Ю.И. Селькин М.В. // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – №6(117). – С. 186-188.

[22] Кулаженко, Ю.И. О не n-полуабелевых полиадических группоидах специального выда / Кулаженко Ю.И., Гальмак АМ. // Веснік Магілёускага дзяржаунага універсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаучыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. 2018. №2 (52). С. 55-61.

– развить теорию конечно порожденных полуабелевых n-групп и описать полностью строение конечно порожденных абелевых n-групп;

– изучить строение свободных абелевых n-групп, свободных полуабелевых n-групп и свободных m-полуабелевых n-групп;

– построить n-группу гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу и найти (n,2)-почтикольца, изоморфные (n,2)-почтикольцам эндоморфизмов полуциклических и коциклических n-групп;

– найти n-группы, изоморфные n-группам гомоморфизмов из полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу.

Объектом исследования является класс n-групп.

Предметами исследования являются класс полуабелевых n-групп и его подклассы полуциклических, m-полуабелевых и абелевых n-групп.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы состоит в разработке новых методов исследования алгебр из класса полуабелевых n-групп. Эти методы отличаются от известных тем, что они являются вариативными, учитывают изменяющиеся факты при исследовании алгебр из различных классов полуабелевых n-групп.

Теоретическая и практическая значимость работы

Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Найденные в диссертации методы построения полуциклических n-групп и конечно порожденных полуабелевых n-групп имеют приложения в аффинной геометрии, а именно, в построении аффинного пространства методом фундаментальных последовательностей векторов полуабелевой n-арной rs-группы (смотри Русаков С. А.[14]). Эти методы также позволяют представлять конечные полуабелевы n-группы n-мерными матрицами, которые могут быть использованы при шифровании в криптографии. Построенные в диссертации (n,m)-почтикольца эндоморфизмов полуциклических n-групп и (n,m)- кольца эндоморфизмов абелевых полуциклических n-групп указывают на применение полуабелевых n-групп в изучении эндоморфизмов алгебраических систем.

Диссертация содержит теоретические основы построения свободных алгебр в классах абелевых, полуабелевых и m-полуабелевых n-групп. Эти исследования расширяют теорию полуабелевых n-групп.

Диссертация выполнена в рамках следующих государственных бюджетных тем:

"Алгебраические системы и связанные с ними структуры” кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета. Тема входила в план важнейших научно исследовательских тем в области естествознания. Эта тема утверждена решением президиума РАН (номер регистрации 01.2.00100375). Тема выполнялась с 01.01.2001 г. по 31.12.2010 г.;

”Унарные алгебры и родственные им алгебраические структуры” кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета. Тема входила в план важнейших научно исследовательских тем в области естествознания. Эта тема утверждена решением президиума РАН (номер регистрации 01201068024). Тема выполняется с 01.01.2011 г. по настоящее время.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе теоретические результаты получены с использованием методов теории универсальных алгебр и теории групп, а также методов теории общей алгебры. При исследовании конечных и конечно порожденных полуабелевых n-групп применялись методы из теории конечно порожденных групп.

Положения, выносимые на защиту

1) Критерии изоморфизма абелевых и не абелевых полуциклических конечных и бесконечных n-групп, которые позволяют описать все типы полуциклических n-групп;

2) Критерий изоморфизма коциклической n-группы, который описывает строение конечной и бесконечной коциклической n-группы;

3) Полные системы инвариантов для полуабевых n-групп, с помощью которых описаны с точностью до изоморфизма все конечные абелевы n-группы, конечно порожденные абелевы n-группы, конечные полуабелевы n-группы;

4) Методы построение свободных алгебр в классе абелевых полуциклических n-групп, в классе абелевых n-групп, в классе полуабелевых n-групп и в классе m-полуабелевых n-групп;

5) (n,2)-Почтикольца, изоморфные (n,2)-почтикольцам эндоморфизмов конечных и бесконечных полуциклических n-групп;

6) (n,2)- Кольца, изоморфные (n,2)- кольцам эндоморфизмов конечных и бесконечных абелевых полуциклических n-групп и коциклических n-групп;

7) Полуабелевы n-группы, изоморфные n-группам гомоморфизмов из конечных и бесконечных абелевых и не абелевых полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу.

Степень достоверности результатов диссертации

Достоверность и обоснованность результатов устанавливается строгими математическими доказательствами всех теоретических результатов, которые указаны в диссертации в виде теорем, следствий, предложений и свойств.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

— на научных семинарах кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета;

— на Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию Л.А. Шеметкова: классы групп, алгебр и их приложения — Гомель, Берарусь, ГГУ им. Ф. Скорины, 2007;

— на Международной алгебраической конференции, посвященной 100 - летию А.Г. Куроша. - Москва. МГУ. 2008;

— на Международной научной конференции, посвященной 100-летию В.В.Вагнера: современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. - Саратов. СГУ. 2008;

— на VIII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. 2011;

— на X Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Волгоград. 2012;

— на XI Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. 2013;

— на XII Международной конференции, посвященной 80-летию профессора В.Н. Латышева "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Тула. 2014;

— на XIV Международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. 2016;

— на VIII Международной научно-технической конференции ”Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование” в рамках Международного научного форума ДНР, ДонНТУ, Донецк, май 2017;

— на V Международной научно-технической конференции "Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях". ДонНТУ, Донецк, ноябрь 2017;

— на всероссийской конференции ”Алгебра и теория алгоритмов”, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук. ИвГУ, Иваново, март 2018;

— на Международной алгебраической конференции, посвященной 110 - летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша. Москва, МГУ, май 2018;

— на XV Международной конференции, посвященная 100-летию со дня рождения Н.М. Коробова "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения". Тула, 28-31 мая 2018 г.

— на XVI Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории", посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула, 13-18 мая 2019 г.

— на X Международной научно-технической конференции в рамках V Международного научного форума Донецкой Народной Республики. ДонНТУ, Донецк, 22-24 мая 2019 г.;

— на Международной научной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань, Казанский государственный университет, 24-28 июня 2019 г.

— на XI Международной научно-технической конференции в рамках VI Международного научного форума Донецкой Народной Республики. ДонНТУ, Донецк, 27-28 мая 2020 г.;

Публикации. По теме диссертации опубликовано 64 научные работы, из которых 14 работ опубликованы в рецензируемых научных изданиях, в том числе и в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных Web of Science и Scopus; 1 монография.

Личный вклад автора

Все результаты диссертации и разработанные в ней методы, приведенные в научных статьях [1] – [8], [10], [11], [13], [14], [16], [18] – [24], [26] – [28], [30], [35], [37] – [39], принадлежат соискателю, получены им самостоятельно. В совместных статьях [12], [31], [32], [33], [34] участие соискателя составляет 70%, а в совместных статьях [9], [17], [25], [29], [36] участие соискателя составляет 50%. В монографии [15] основные результаты глав 3,4,5 принадлежат автору.

Структура и объем диссертации

Диссертация содержит введение, общую характеристику работы, шесть глав основной части диссертации, заключение и библиографический список по порядку цитирования в количестве 114 наименований использованных источников, из них 64 наименований публикаций соискателя. Объем диссертации составляет 205 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации является вводной частью научных исследований диссертации. Базовым понятием диссертационной работы является понятие n-группы. Напомним, что n- полугруппой называют универсальную алгебру <A, f> с одной ассоциативной n-арной операцией f, а n-группой называют n-полугруппу <A, f>, у которой n-арная операция f однозначно обратима на i-ом месте для любого i = 1, 2, …, n.

В первом параграфе этой главы приводятся другие эквивалентные определения n- группы. Во втором параграфе мы знакомимся с n-арными аналогами групповых единицы и обратимости. В n-группе <A, f> для любого элемента a решение уравнения f(a,…,a,x)=a обозначают $\bar{a}$ и называют косым элементом для a.

Для каждой n-группы имеются сопутствующие ей бинарные группы, которые можно построить для заданной n-группы. В первой главе с такими группами мы познакомимся. Хорошо развитая и богатая содержанием теория групп активно помогает изучать n-группы.

Пусть A – группа с бинарной операцией. На A определим n-арную операцию f по правилу $f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ для любых элементов $a_1,a_2,\ldots,a_n\in A$. Очевидно, <A, f> – n-группа, ее называют производной от группы A. В следующей теореме заданная n-группа определяет бинарную группу и эта n-группа изоморфно вкладывается в производную n-группу от построенной группы.

Теорема 7 (Post[2]). Для любой n-группы <A, f> существует такая группа A* с бинарной операцией ·, что

1) A порождает группу A*;

2) для любых элементов $x_1,x_2,\ldots,x_n\in A$ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$;

3) в группе A* есть нормальная подгруппа A_0 такая, что фактор-группа A^*/A_0 будет циклической группой порядка n-1 с порождающим элементом A.

Группа B с бинарной операцией · называется обертывающей для n-группы <A, f>, если: 1) группа B порождается множеством A; 2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$ для любых элементов $x_1,x_2,\ldots,x_n\in A$. Для любой n-группы существует обертывающая группа (см. теорему 7).

Не сложно доказывается, что если B – обертывающая группа для n-группы <A, f>, то в B имеется нормальная подгруппа B_0 такая, что фактор-группа B/B_0 является циклической группой порядка, делящего n-1, с порождающим элементом A. Нормальную подгруппу B_0 из обертывающей группы B для n-группы <A, f> называют соответствующей группой для этой же n-группы. Обертывающая группа B для n-группы <A, f> называется универсальной, если фактор-группа B/B_0 является циклической группой порядка n-1. Из теоремы 7 имеем существование универсальной обертывающей группы.

Для n-группы кроме обертывающих групп можно построить и другие бинарные группы, которые также используются при изучении n-группы.

Теорема 10 (Глускин[6], Hossu[7]). На всякой n-группе <A, f> можно определить бинарную операцию $\cdot$ так, что A с этой операцией будет группой. Кроме того, найдутся автоморфизм φ и элемент d этой группы такие, что выполнены условия:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1\cdot\varphi(x_2)\cdot\ldots\cdot\varphi^{n-1}(x_n)\cdot d,\ x_1,x_2,\ldots,x_n\in A;\ \varphi(d)=d;\ \varphi^{n-1}(x)=d\cdot x\cdot d^{-1},\ \ x\in A.$$

В этой теореме для произвольного элемента c на множестве A определяется бинарная операция $\cdot$ по правилу: для любых элементов $a,b\in A$ $a\cdot b=f(a,c_1,\ldots,c_{n-2},b)$, где $f(x,c_1,\ldots,c_{n-2},c)=x$, $x\in A$. Элемент c будет единицей в группе A. Автоморфизм φ задается по правилу: $\varphi(x)=f(c,x,c_1,\ldots,c_{n-2})$, $x\in A$. Элемент d из теоремы 10 определяется по правилу $d=f(c,\ldots,c)$. Группу A из теоремы 10 обозначают $ret_c\langle A, f\rangle$ и называют ретрактом n-группы $\langle A, f\rangle$.

Теорема 11 (Глускин[6], Hossu[7]). В любой группе A с бинарной операцией $\cdot$ для выбранных автоморфизма φ и элемента d, для которых выполнены равенства $\varphi(d)=d$ и $\varphi^{n-1}(x)=d\cdot x\cdot d^{-1}$, $x\in G$, задается n-группа $\langle A, f\rangle$, где f действует по правилу $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1\cdot\varphi(x_2)\cdot\ldots\cdot\varphi^{n-1}(x_n)\cdot d$, $x_1,x_2,\ldots,x_n\in A$.

n-Группу $\langle A, f\rangle$ из теоремы 11 обозначают $der_{\varphi,d}$ A и называют (φ, d)-определенной на группе A.

В параграфе 5 первой главы рассматриваются подгруппы n-группы. Далее в этом параграфе изучаются порождающие множества.

Результат применения k раз ($k\geq1$) операции f к $k(n-1)+1$ одинаковым элементам, которые равны элементу a, называется неотрицательной k-той n-арной степенью элемента a и обозначается $a^{\langle k\rangle}$. Полагают $a^{\langle 0\rangle}.=a$. Отрицательную k-тую n-арную степень элемента a определяют как решение уравнения $f^{-k}(\underbrace{a,\ldots,a}_{-k(n-1)},x)=a$. Таким образом, при $k\geq0$ верно $a^{\langle k\rangle}=f^{k}(\underbrace{a,\ldots,a}_{k(n-1)+1})$, а при $k<0$ верно $f^{-k}(\underbrace{a,\ldots,a}_{-k(n-1)},a^{\langle k\rangle})=a$. Основные свойства n-арной степени можно найти в работах Post[2], Русаков[13], Гальмак[16], [1], с. 99. Для элемента a из n-группы множество $\langle a\rangle$ всех n-арных степеней этого элемента является подгруппой в этой n-группе, она называется циклической подгруппой n-группы, порожденной элементом a. Если все n-арные степени элемента a являются различными элементами, то a называется элементом бесконечного n-арного порядка. Если же среди n-арных степеней элемента a имеются равные, например, $a^{\langle k\rangle}= a^{\langle l\rangle}$ при $k>l$, то, $a^{\langle k-l\rangle}=a$, т.е.существуют положительные n-арные степени элемента a, равные этому элементу. Пусть k – наименьшая положительная n-арная степень элемента a, равная этому элементу, т.е.

1) $a^{\langle k\rangle}=a$, $k>0$,

2) если $a^{\langle l\rangle}=a$, $l>0$, то $l\geq k$.

В этом случае говорят, что a есть элемент конечного порядка, а именно порядка k. Обозначают $Ord_n a=k$. Если элемент a из n-группы имеет конечный n-арный порядок k, то все элементы a, $a^{\langle 1\rangle},\ldots, a^{\langle k-1\rangle}$ будут различными и всякая другая n-арная степень элемента a равна одному из элементов последовательности.

В 6-м параграфе первой главы изучаются прямые произведения n-групп.

Одним из инструментов измерения отклонения n-группы от коммутативности (как и в группах) служит коммутант n-группы. В работе [41] коммутант A' n-группы <A, f> определяется как конгруэнция, порожденная отношением вида $\{(f(a,b,a,\ldots,a,\bar{a}),b) \mid a,b\in A\}$.

Предложение 37 ([15], Предложение 63, с. 193). Коммутант n-группы является единичной конгруэнцией тогда и только тогда, когда эта n-группа является абелевой.

Более полную информацию о роли коммутанта несет следующая

Теорема 30 ([19], Следствие 1). Пусть <A, f> – n-группа. Тогда:

1) фактор-n-группа <A/A', f'> является абелевой;

2) если для некоторой конгруэнции σ в n-группе <A, f> фактор-n-группа <A/σ, f'> является абелевой, то $A'\subseteq\sigma$;

3) если $A'\subseteq\sigma$ для некоторой конгруэнции σ, то фактор-n-группа <A/σ, f'> является абелевой.

Во второй главе диссертации мы знакомимся с осовными определениями и фактами в классе полуабелевых n-групп. В первом параграфе данной главы исследуются абелевы n-группы. Если в n-группе верны тождества $f(x_1,\ldots,x_n)= f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma\in S_n$, то ее называют абелевой. Имеются несколько признаков абелевой n-группы. Перечислим их:

Теорема 32 (Русаков[13]). Любая n-группа является абелевой тогда и только тогда, когда в ней верно тождество $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=f(x_2,x_1,x_3,\ldots,x_n)$.

Теорема 33 ([15], Теорема 36, с. 122). Каждая n-группа будет абелевой тогда и только тогда, когда в ней верно тождество $f(x_1,x_2, \ldots,x_n)=f(x_2, \ldots,x_n, x_1)$.

Теорема 34 (Гальмак[16], Теорема 2.6.4). Любая n-группа будет абелевой тогда и только тогда, когда ее обертывающая группа Поста будет абелевой.

Если в n-группе верно тождество $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)=f(x_n,x_2,\ldots, x_{n-1},x_1)$, то ее называют полуабелевой. Очевидно, абелева n-группа будет полуабелевой.

Признаками полуабелевости n-группы служат следующии три факта.

Теорема 39 (Glasek[11]). Любая n-группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда в ней верно тождество

$f(f(x_{11},\ldots x_{1n}),\ldots,f(x_{n1},\ldots x_{nn}))= f(f(x_{11},\ldots x_{n1}),\ldots,f(x_{1n},\ldots x_{nn}))$.

Теорема 39 (Гальмак[16]). Каждая n-группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда ее ретракт является абелевой группой.

Следствие 29 (Post[2]). Любая n-группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда ее соответствующая группа абелева.

Заметим, что множество всех единиц (если оно не пусто) образует подгруппу в любой (не обязательно полуабелевой) n-группе. А вот множество всех идемпотентов (если оно не пусто) может и не быть подгруппой в n-группе, которая не является полуабелевой. Однако для полуабелевых n-групп верно

Предложение 41 ([15], Предложение 45, с. 144). В полуабелевой n-группе множество всех идемпотентов (если оно не пусто) образует подгруппу.

Пусть <A, f> – n-группа, F_A – свободная полугруппа над алфавитом A, θ_A – отношение эквивалентности Поста[2], определенное на F_A по правилу: $(\alpha,\beta)\in\theta_A$ тогда и только тогда, когда найдутся последовательности γ, δ из F_A такие, что $f^k(\gamma,\alpha,\delta)=f^l(\gamma,\beta,\delta)$, где $k(n-1)+1$, $l(n-1)+1$ – длины последовательностей γ,α,δ, γ,β,δ соответственно. Очевидно, θ_A – конгруэнция на полугруппе F_A и фактор-полугруппа $A^*= F_A / \theta_A$ является группой.

Для любого индекса $i=1,\ldots,n-1$ определим множество

$A^{(i)}=\{\theta_A(\alpha) \mid \theta_A(\alpha)\in A^*,\ l(\alpha)=i\}$, где $\theta_A(\alpha)$ – класс конгруэнции θ_A, содержащий последовательность α; $l(\alpha)$ – длина последовательности α.

Для сокращения записей множество $A^{(n-1)}$ будем обозначать распостраненным в литературе по n-группам символом A_0, то есть $A^{(n-1)}= A_0$.

Если m-1 делит n-1, где $n\geq 3$, $m\geq 2$, то положим

$${}^mA=\{\theta_A(\alpha) \mid \theta_A(\alpha)\in A^*,\ l(\alpha) \text{ кратно } m-1\}.$$

При m=2 множество ${}^mA$ совпадает с универсальной обертывающей группой A^*, а при m=n множество ${}^mA$ совпадает с соответствующей группой A_0.

Теорема 43 ([36], Теорема 1). Пусть <A, f> –n-группа, $n=k(m-1)+1$. Тогда:

1) $A_0\subseteq {}^mA\subseteq A^*$;

2) ${}^mA$ – инвариантная подгруппа группы A^*;

3) ${}^mA/A_0$ – циклическая группа порядка k

4) $A^*/{}^mA$ – циклическая группа порядка m-1.

Э. Пост[2] объединил абелевость и полуабелевость общим понятием, назвав n-группу <A, f> m-полуабелевой, если m-1 делит n-1 и $(aa_1\ldots a_{m-2}b,\ ba_1\ldots a_{m-2}a)\in\theta_A$ для любых элементов $a,a_1,\ldots,a_{m-2},b\in A$. Докажем с помощью группы ${}^mA$ критерий m-полуабелевости n-группы.

Теорема 44 ([36], Теорема 2). n-Группа <A, f> будет m-полуабелевой тогда и только тогда, когда группа ${}^mA$ абелева.

В последнем параграфе второй главы изучается периодичность в полуабелевых n-группах. В абелевых группах верно тождество $a^k\cdot b^k=(a\cdot b)^k$ для любого целого числа k. Обобщением этого тождества на n-арный случай служит следующая

Теорема 45 ([7], Теорема 2). В полуабелевой n-группе <A, f> для любых элементов $a_1,\ldots,a_n\in A$ верно равенство $f(a_1,\ldots,a_n)^{<k>}= f(a_1^{<k>},\ldots,a_n^{<k>})$, где k – любое целое число.

Известно, что в абелевой группе множество всех элементов конечного порядка будет подгруппой, которая называется периодической частью группы. Обобщением этого результата на n-арный случай служит следующая

Теорема 46 ([7], Теорема 3). В полуабелевой n-группе множество всех ее элементов конечного n-арного порядка (периодическая часть n-группы) будет подгруппой.

Так как абелева n-группа является полуабелевой, то верно

Следствие 36 ([7], Следствие 1). В абелевой n-группе множество всех ее элементов конечного n-арного порядка будет подгруппой.

Фактор-группа любой абелевой группы по своей периодической части не имеет кручений, кроме нуля. Для полуабелевых n-групп ситуация почти аналогичная, т.е. верна

Теорема 47 ([7], Теорема 4). Фактор-n-группа <A/P, f'> полуабелевой n-группы <A, f> по своей периодической части <P, f> имеет один идемпотент P, а остальные элементы имеют бесконечный n-арный порядок.

Для абелевых n-групп, как и для абелевых групп, верно

Следствие 37 ([7], Следствие 2). Фактор-n-группа <A/P, f'> абелевой n-группы <A, f> по своей периодической части <P, f> имеет одну единицу P, а остальные элементы имеют бесконечный n-арный порядок.

В третьей главе мы рассмотрим строение полуциклических n-групп, изучим их подгруппы. Полиадическим аналогом циклической группы является полуциклическая n-группа, т.е. у этой n-группы ретракт является циклической группой (Гальмак А. М.[16], с. 128).

Начнем в первом параграфе с циклических n-групп.

Если n-группа <A, f> совпадает с одной из своих циклических подгрупп <<a>, f> для некоторого элемента a, то ее называют циклической с порождающим элементом a. Очевидно, любая циклическая n-группа является абелевой.

Примером бесконечной циклической n-группы служит n-группа <Z, f>=$der_{1,1}$Z, $(1_Z,1)$ -определенная на аддитивной группе целых чисел Z, где 1_Z – тождественный автоморфизм группы Z. Всякое целое число k является k-той n-арной степенью числа 0, т.е. 0 служит порождающим элементом рассматриваемой n-группы.

Пример конечной циклической n-группы порядка k это n-группа <Z/k, f>=$der_{1,1}$Z/k, $(1_{Z/k},1)$-определенная на аддитивной группе Z/k кольца классов вычетов по модулю k, где $1_{Z/k}$ – тождественный автоморфизм группы Z/k. Всякое число s из Z/k является s-той n-арной степенью числа 0, т.е. 0 служит порождающим элементом рассматриваемой n-группы.

Любые две циклические n-группы, бесконечные или конечные одного и того же порядка, изоморфны (Post[2]).

Известно, что в бинарном случае (n=2) каждая подгруппа бесконечной циклической группы является циклической. В n-арном случае при n>2 ситуация иная. Изучим все основные положения о подгруппах в бесконечной циклической n-группе.

Теорема 58 ([5], Теорема 7). Пусть (m) – подгруппа в аддитивной группе целых чисел Z. Класс смежности r+(m) по подгруппе (m), где 0≤r<m, является

подгруппой в циклической n-группе целых чисел <Z, f> тогда и только тогда, когда $r(n-1)+1 \equiv 0 \bmod m$. Кроме того,

1) если m и n-1 взаимно просты, то среди всех классов смежности по подгруппе (m) есть только одна подгруппа в <Z, f>;

2) если m и n-1 не взаимно просты, то среди всех классов смежности по подгруппе (m) нет подгрупп в n-группе <Z, f>.

Во втором параграфе третьей главы изучаются признаки полуцикличности n-групп. Доказывается признак полуцикличности для полуабелевых n-групп, который является аналогом признака цикличности для абелевых групп.

Предложение 46 ([15], Предложение 48). Полубелева n-группа <A, f> является полуциклической тогда и только тогда, когда найдется элемент $a \in A$ такой, что всякий гомоморфизм ψ из полуабелевой n-группы $<B, f_1>$ в <A, f>, удовлетворяющий условию $\psi(\varphi_1(x))=\varphi_2(\psi(x))$, где φ_1, φ_2 – автоморфизмы ретрактов $ret_{c1}<B, f_1>$ и $ret_{c2}<A, f>$ соответственно из торемы 10, и выполнено условие $a \cdot \psi(c1) \in Im\psi$ ($\cdot$ есть умножение в группе $ret_{c2}<A, f>$), является эпиморфизмом.

В третьем параграфе этой главы изучаются конечные полуциклические n-группы. Рассмотрим конечную циклическую группу (a) порядка k с бинарной операцией $\cdot$. Выберем тождественный автоморфизм e группы (a) и элемент $d=a^l$, где $0 \le l<k$. Обратная теорема Глускина-Хоссу (теорема 11) определяет полуциклическую n-группу $<(a), f>=der_{e,d}(a)$ с n-арной операцией

$$f(a^{s1},\ldots,a^{sn})=a^{s1+\ldots+sn+l}. \quad (1)$$

Выберем теперь на конечной циклической группе (a) порядка k любой автоморфизм φ, отличный от тождественного автоморфизма e, т.е. $\varphi(a)=a^m$, где $1<m<k$ и m взаимно прост с k. Понятно, что k>2, иначе для k=1,2 автоморфизм группы (a) только один – тождественный. Пусть $d=a^l$ – элемент группы (a) для которого lm \equiv l \pmod{k}. Требуем, чтобы показатель числа m по модулю k делил n-1. При выполнении перечисленных требований, накладываемых на m и l, на циклической группе(a) по обратной теореме Глускина-Хоссу (теорема 11) определяется полуциклическая n-группа $<(a), f>=der_{\varphi,d}(a)$ с n-арной операцией

$$f(a^{s1},a^{s2},a^{s3},\ldots,a^{s(n-1)},a^{sn})=a^{s_1+m\cdot s_2+m^2\cdot s_3+\cdots+m^{n-2}\cdot s_{n-1}+s_n+l}. \quad (2)$$

Доказана следующая

Теорема 67 ([16], Предложение 1). На циклической группе (a) порядка k определяется полуциклическая n-группа <(a), f> с n-арной операцией 1), где $0 \le l<k$, либо с n-арной операцией 2) при k>2, где $0 \le m,l<k$, $m \ne 1$, m взаимно прост с k, $lm \equiv l \bmod k$ и показатель m по модулю k делит n-1.

Назовем n-группу, построенную на конечной циклической группе одним из двух выше описанных способов, полуциклической типа (k,m,l) (m=1 в первом случае и $m \ne 1$ во втором случае). Заметим, что при m=1 имеем абелеву полуциклическую n-группу, а при $m \ne 1$ полуциклическая n-группа не будет абелевой. Среди полуциклических n-групп типа (k,m,l) могут быть изоморфные между собой n-группы. Следующая теорема является критерием изоморфизма полуциклических n-групп типа (k,m,l) для $m\neq 1$.

Теорема 69 ([16], Предложение 3). Полуциклические n-группы типов (k,m_1,l_1) и (k, m_2, l_2) , где $m_1\neq 1$, $m_2\neq 1$, изоморфны тогда и только тогда, когда $m_1=m_2$ и НОД$(l_1,\frac{m_1^{n-1}-1}{m_1-1},k)=$ НОД$(l_1,\frac{m_2^{n-1}-1}{m_2-1},k)$.

Доказывается, что все полуциклические n-группы типа (k,m,l) исчерпывают класс всех конечных полуциклических n-групп:

Теорема 70 ([16], Теорема 2). Конечная полуциклическая n-группа порядка k будет изоморфна полуциклической n-группе типа (k,1,l), где l|НОД(n-1,k), либо полуциклической n-группе типа (k,m,l) при $m\neq 1$, где l|НОД$(\frac{m^{n-1}-1}{m-1},k)$.

Предложение 49 ([16], Предложение 13). Конечная примарная полуциклическая n-группа не может быть изоморфна прямому произведению каких-нибудь нескольких n-групп.

Если же конечная полуциклическая n-группа не является примарной, то ситуация похожа на разложение конечной циклической группы в прямое произведение примарных циклических подгрупп.

Предложение 50 ([16], Предложение 14). Всякая конечная полуциклическая n-группа изоморфна декартову произведению примарных полуциклических n-групп.

В четвертом параграфе третьей главы рассматриваются бесконечные полуциклические n-группы. Выберем бесконечную циклическую группу (a), в которой всего два автоморфизма: тождественный e и φ, где $\varphi(a^s)=a^{-s}$ для любого элемента $a^s\in(a)$. Для e элемент d из обратной теоремы Глускина-Хоссу (теорема 11) может быть любым из группы (a). Тогда, согласно этой теореме, алгебра <(a), f> с операцией (1), где l – любое целое число, является полуциклической n-группой. Назовем такую n-группу полуциклической типа (∞,1,l). Следующее предложение является критерием изоморфизма бесконечных полуциклических n-групп типа (∞,1,l).

Предложение 55 ([16], Предложение 7). Полуциклические n-группы типов $(\infty,1,l_1)$ и $(\infty,1,l_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда

$$l_1\equiv l_2 \bmod (n-1) \text{ либо } l_1\equiv -l_2 \bmod (n-1).$$

Очевидно, полуциклические n-группы типа (∞,1,l) будут абелевыми, среди которых есть и циклические. Следующее предложение является критерием цикличности для полуциклических n-групп типа (∞,1,l).

Предложение 56 ([16], Предложение 8). Полуциклическая n-группа типа (∞,1,l) является циклической тогда и только тогда, когда $l\equiv 1 \bmod (n-1)$ либо $l\equiv -1 \bmod (n-1)$. Причем, циклическая n-группа <(a), f> типа (∞,1,l) порождается элементом $a^{\frac{1-l}{n-1}}$ в первом случае и $a^{\frac{-1-l}{n-1}}$ во втором случае.

Для не тождественного автоморфизма φ бесконечной циклической группы (a) из обратной теоремы Глускина-Хоссу мы получили в следующем предложении строение не абелевой бесконечной полуциклической n-группы.

Предложение 57 ([16], Предложение 9). На бесконечной циклической группе (a) можно задать полуциклическую n-группу <(a), f> для n=2k+1, k∈N, с n-арной операцией $f(a^{s1},\dots,a^{sn})=a^{s1-s2\dots+s\{2k-1\}-s\{2k\}+s\{2k+1\}\}}$.

Назовем n-группу из предложения 57 полуциклической типа (∞,-1,0). Доказывается, что изученные нами полуциклические n-группы типов (∞,1,l) и (∞,-1,0) исчерпывают класс всех бесконечных полуциклических n-групп.

Теорема 72 ([16], Теорема 3). Любая бесконечная полуциклическая n-груп-па будет изоморфна полуциклической n-группе типа (∞,1,l) либо типа (∞,-1,0), где 0≤l≤(n-1)/2.

В пятом параграфе третьей главы изучаются коциклические n-группы. Назовем абелеву n-группу <A, f> коциклической, если существует такая пара элементов c_1, c_2∈A, что всякий гомоморфизм ψ из <A, f> в абелеву n-группу <B, f_1>, где $(c_1,c_2)\notin$Kerψ, является мономорфизмом. Пару элементов (c_1,c_2) из определения коциклической n-группы назовем кообразующей n-группы <A, f>. Доказывается признак коцикличности абелевой n-группы.

Теорема 75 ([8], Предложение 2). Абелева n-группа является коциклической тогда и только тогда, когда ее ретракт является коциклической группой.

Описание коциклических n-групп доказано в следующем факте.

Следствие 56 ([8], Теорема 2). Абелева n-группа является коциклической тогда и только тогда, когда она изоморфна абелевой полуциклической n-группе <Z/p^k, f>=$der_{1_{Z/p^k,p^t}}$ Z/p^k, где p^t делит НОД(n-1,p^k), p – простое число, либо абелевой n-группе, 0-производной от квазициклической группы $Z(p^\infty)$.

В шестом параграфе третьей главы изучаются m-полуциклические n-группы. Пусть m-1 делит n-1. Если существуют такие элементы $a_1,\dots,a_{m-1}$∈A, что группа ^mA является циклической с порождающим элементом $\theta_A(a_1\dots a_{m-1})$, то n-группа <A, f> называется m-полуциклической. Последовательность элементов $a_1\dots a_{m-1}$ в этом случае называется порождающей для m-полуциклической n-группы <A, f>. Циклические и полуциклические n-группы являются m-полуциклических n-группами при m=2 и m=n соответственно.

Сформулируем теперь критерий m-полуцикличности для n-групп.

Теорема 75 ([36], Теорема 4.1). n-Группа <A, f> будет конечной (бесконечной) m-полуциклической с порождающей последовательностью элементов $a_1\dots a_{m-1}$ тогда и только тогда, когда k+1-группа <$A^{(m-1)}$, g> является конечной (бесконечной) циклической с порождающим элементом $\theta_A(a_1\dots a_{m-1})$.

Четвертая глава диссертации посвящена изучению конечно порожденных полуабелевых n-групп. В первом параграфе приводится строгое описание строения конечных абелевых примарных n-групп как прямое произведение абелевых полуциклических примарных n-групп с точностью до изоморфизма. Далее находятся инварианты конечной абелевой примарной n-группы. Используя это описание, рассматривается строение конечных абелевых n-групп в виде прямого произведения примарных абелевых полуциклических n-групп с точностью до изоморфизма и находится полная система инвариантов конечной абелевой n-группы.

Теорема 78 ([32], Теорема 2). Конечная абелева n-группа $<A, f>$ порядка $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ (p_i – различные простые числа), изоморфна декартову произведению $<A_1, f_1>\times<A_2, f_2>\times\ldots\times<A_k, f_k>$ p_i-n-групп $<A_i, f_i>$ порядков $p_i^{\alpha_i}$.

Важным дополнением к теореме 78 служит

Теорема 79 ([32], Теорема 3). Если конечная абелева n-группа $<A, f>$ порядка $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ (p_i – различные простые числа), изоморфна двум декартовым произведениям $<A_1, f_1>\times<A_2, f_2>\times\ldots\times<A_k, f_k>$, $<A'_1, f'_1>\times<A'_2, f'_2>\times\ldots\times<A'_k, f'_k>$ p_i-n-групп $<A_i, f_i>$ и $<A'_i, f'_i>$ порядков $|A_i|=|A'_i|=p_i^{\alpha_i}$, то $<A_i, f_i>\cong<A'_i, f'_i>$ для всех i=1,2,…,k.

Наша цель в этом параграфе заключается в том, чтобы доказать изоморфизм конечной абелевой n-группы и декартова произведения простейших n-групп, каковыми являются абелевы полуциклические n-группы.

Примарная абелева полуциклическая n-группа не может быть изоморфна декартову произведению каких-нибудь нескольких n-групп меньших порядков (Предложение 49). Именно такие неразложимые абелевы n-группы служат компонентами прямого разложения примарной абелевой n-группы, т.е. верна

Теорема 80 ([32], Теорема 8). Каждая конечная абелева p-n-группа изоморфна декартову произведению неразложимых абелевых полуциклических p-n-групп.

Если конечная абелева p-n-группа, согласно теореме 80, изоморфна декартову произведению

$$der_{1_{(a_1)},a_1^{l_1}}(a_1)\times\ldots\times der_{1_{(a_r)},a_r^{l_r}}(a_r) \tag{3}$$

абелевых полуциклических p-n-групп $der_{1_{(a_i)},a_i^{l_i}}(a_i)$ порядков p^{α_i}, i=1,…,r, то набор порядков $p^{\alpha_1},\ldots,p^{\alpha_r}$ не является полной системой инвариантов этой абелевой p-n -группы.

Для нахождения условий однозначности разложения (3) введем новое определение. Множители с равными порядками в разложении (3) расположим рядом и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей, входящих в эти подпрямые произведения. Получим разложение

$$\prod_{i=1}^{r_1} der_{1_{(a_{i1})},a_{i1}^{l_{i1}}}(a_{i1})\times\prod_{i=1}^{r_2} der_{1_{(a_{i2})},a_{i2}^{l_{i2}}}(a_{i2})\times\ldots\times\prod_{i=1}^{r_t} der_{1_{(a_{it})},a_{it}^{l_{it}}}(a_{it}) \tag{4}$$

и если $|(a_{ij})|=p^{m_j}$ для j=1,…,t каждый раз i=1,…,r_j, то $m_1>m_2>\ldots>m_t$. Для разложения (4) назовем определяющим набор $D_1,\ldots,D_t$ наибольших общих делителей, заданных по правилу

$$\begin{cases} D_1 = \text{НОД}(\mathrm{d}_1, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_1-\mathrm{m}_2}\mathrm{d}_2, \ldots, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_1-\mathrm{m}_t}\mathrm{d}_t, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_1}, \mathrm{n}-1) \\ D_2 = \text{НОД}(\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_2-\mathrm{m}_3}\mathrm{d}_3, \ldots, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_2-\mathrm{m}_t}\mathrm{d}_t, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_2}, \mathrm{n}-1) \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ D_{t-1} = \text{НОД}(\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_{t-1}, \ldots, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_{t-1}-\mathrm{m}_t}\mathrm{d}_t, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_{t-1}}, \mathrm{n}-1) \\ D_t = \text{НОД}(\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_{t-1}, \mathrm{d}_t, \mathrm{p}^{\mathrm{m}_t}, \mathrm{n}-1) \end{cases} \quad (5)$$

где $d_j = \text{НОД}\left(\mathrm{l}_{1\mathrm{j}}, \ldots, \mathrm{l}_{\mathrm{r_j j}}\right)$, для всех j=1,…,t. Теперь можно доказать теорему о единственности разложения конечной абелевой p-n-группы в прямое произведение абелевых полуциклических p-n-групп.

Теорема 81 ([6], Теорема 4). Если конечная абелева p-n-группа <A, f> изоморфна двум прямым произведениям абелевых полуциклических p-n-групп: (3) и

$$der_{1_{(b_1)},b_1^{l'_1}}(b_1) \times \ldots \times der_{1_{(b_s)},b_s^{l'_s}}(b_s) \quad (6)$$

то r=s, порядки $|(a_i)|$ совпадают с порядками $|(b_i)|$ при некотором упорядочении последних и определяющие наборы наибольших общих делителей для разложений (3) и (6) одинаковые.

Порядки p^{m_j} абелевых полуциклических прямых множителей и определяющий набор наибольших общих делителей $D_1,\ldots,D_t$ из разложения (4) назовем инвариантами абелевой n-группы <A, f> из теоремы 81.

Теорема 82 ([6], Теорема 5). Своими инвариантами абелева p-n-группа определяется с точностью до изоморфизма.

Опираясь на разложение конечной абелевой n-группы в прямое произведение примарных абелевых n-групп (теорема 78) и на его единственность (теорема 79), а также на теоремы 80 и 81, мы непосредственно приходим к следующему основному утверждению о конечных абелевых n-группах.

Теорема 83 ([6], Теорема 6). Всякая конечная абелева n-группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых полуциклических n-групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка и по каждому простому делителю порядка этой n-группы произведения примарных множителей в этих разложениях имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителе частными случаями й.

Во втором параграфе четвертой главы доказывается изоморфизм конечно порожденной абелевой n-группы и декартова произведения конечного числа неразложимых абелевых полуциклических n-групп, частью конечных примарных, частью бесконечных. Также найдена полная система инвариантов для конечно порожденных абелевых n-групп.

Известно, что конечная примарная и бесконечная абелевы полуциклические n-группы являются неразложимыми.

Теорема 84 Конечно порожденная абелева n-группа изоморфна декартову произведению конечного числа неразложимых абелевых полуциклических n-групп, которые являются бесконечными либо конечными примарными.

Следствие 83 ([32], Теорема 10). Конечная абелева n-группа изоморфна декартову произведению примарных абелевых полуциклических n-групп.

В разложение конечно порожденной абелевой n-группы из теоремы 84 входит декартово произведение бесконечных абелевых полуциклических n-групп. Найдем условия однозначности такого вхождения.

Для декартова произведения k бесконечных абелевых полуциклических n-групп (k≥2) верна

Теорема 85. Пусть $\langle A_i, f_i\rangle$, $\langle A'_i, f'_i\rangle$, i=1,…,k – абелевы полуциклические n-группы типов $(\infty,1,l_i)$, $(\infty,1,l'_i)$ соответственно, k≥2. Декартовы произведения $\prod_{i=1}^{k}\langle A_i, f_i\rangle$ и $\prod_{i=1}^{k}\langle A'_i, f'_i\rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда НОД$(l_1,\ldots,l_k,n-1)$=НОД$(l'_1,\ldots,l'_k,n-1)$.

Следствие 63. Число неизоморфных прямых произведений k бесконечных абелевых полуциклических n-групп (k≥2) равно τ(n-1) – количеству делителей числа n-1.

Из следствия 62 следует, что любая абелева конечная примарная (по простому числу p) n-группа <A, f> изоморфна прямому произведению

$$der_{1_{Z/p^{m_1}},l_1} Z/p^{m_1} \times \ldots \times der_{1_{Z/p^{m_r}},l_r} Z/p^{m_r} \tag{7}$$

абелевых полуциклических n-групп $der_{1_{Z/p^{m_i}},l_i} Z/p^{m_i}$. Множители с равными порядками в разложении (7) расположим рядом и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей, входящих в эти подпрямые произведения. Получим

$$\prod_{w_1=1}^{r_1} der_{1_{Z/p^{m_1}},l_{w_1}} Z/p^{m_1} \times \prod_{w_2=1}^{r_2} der_{1_{Z/p^{m_2}},l_{w_2}} Z/p^{m_2} \times \ldots$$
$$\ldots \times \prod_{w_t=1}^{r_t} der_{1_{Z/p^{m_t}},l_{w_t}} Z/p^{m_t}, \tag{8}$$

где $m_1>m_2>\ldots>m_t$. Для разложения (8) назовем определяющим набор $D_1,\ldots,D_t$ наибольших общих делителей, заданных по правилу (5) из предыдущего параграфа, где $d_j = \text{НОД}\left(l_{\sum_{i=0}^{j-1} r_i+1}, \ldots, l_{\sum_{i=0}^{j-1} r_i+r_j}\right)$ для всех j=1,…,t (здесь и дальше $r_0=0$).

По теореме 84 любая конечно порожденная абелева n-группа <A, f> изоморфна прямому произведению

$$\prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}} \times \prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l_i} \mathrm{Z} \tag{9}$$

конечных примарных полуциклических n-групп $der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$, где $l_{\epsilon j}$|НОД(n-1,$p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$, p_ϵ – различные простые числа, и k бесконечных абелевых полуциклических n-групп $\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l_i}\mathrm{Z}$, где $0\le l_i\le(n-1)/2$. Найдем инварианты разложения (9).

Теорема 86. Если конечно порожденная абелева n-группа <A, f>

изоморфна двум декартовым произведениям: (9) и

$$\prod_{\mu=1}^{t}\prod_{w=1}^{v_\mu} der_{1_{Z/q_\mu^{m'_{\mu w}}},l'_{\mu w}} Z/q_\mu^{m'_{\mu w}} \times \prod_{i=1}^{h} der_{1_Z,l'_i}\mathrm{Z}, \qquad (10)$$

где $der_{1_{Z/q_\mu^{m'_{\mu w}}},l'_{\mu w}} Z/q_\mu^{m'_{\mu w}}$ – конечные примарные полуциклические n-группы, $l'_{\mu w}$|НОД(n-1,$q_\mu^{m'_{\mu w}}$, q_μ – различные простые числа, и $der_{1_Z,l'_i}\mathrm{Z}$ – бесконечные абелевы полуциклические n-группы, 0≤l'_i≤(n-1)/2, то k=h и $p_\epsilon^{m_{\epsilon j}} = q_\mu^{m'_{\mu w}}$ при соответствующей нумерации последних.

Таким образом, количество бесконечных абелевых полуциклических n-групп и совокупности порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (9) являются инвариантами конечно порожденной абелевой n-группы <A, f>, но эти инварианты не являются полной системой инвариантов для конечно порожденных абелевых n-групп.

Полную систему инвариантов для конечно порожденной абелевой n-группы <A, f>, изоморфной разложению (9), будем находить отдельно для k=1 и k>1. Заметим, что для конечной абелевой n-группы (случай k=0) полная система инвариантов уже найдена в предыдущем параграфе.

В случае k=1 в разложении (9) по каждому простому числу p_ϵ множители с равными порядками в разложении $\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$ расположим рядом и такие поддекартовы произведения расположим в порядке убывания порядков множителей. Получим разложение

$$der_{1_Z,l_0}Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}, \qquad (11)$$

где $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + w_j$, w_j=1,…,$r_{\epsilon j}$ при каждом j=1,…,t_ϵ (здесь и дальше $r_{\epsilon 0} = 0$) и $m_{\epsilon 1} > m_{\epsilon 2} > \cdots > m_{\epsilon t_\epsilon}$, p_ϵ – различные простые числа.

Теорема 87. Пусть даны $der_{1_Z,l_0}Z$ и $der_{1_Z,l'_0}Z$, где 0≤l_0,l'_0≤(n-1)/2, и $der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$, $der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l'_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$, $v = \sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i} + w_j$, w_j=1,…,$r_{\epsilon j}$ при каждом j=1,…,t_ϵ (здесь и дальше $r_{\epsilon 0} = 0$) и $m_{\epsilon 1} > m_{\epsilon 2} > \cdots > m_{\epsilon t_\epsilon}$, p_ϵ – различные простые числа, $\epsilon = 1, \dots, s$. Декартовы произведения (11) и

$$der_{1_Z,l'_0}Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l'_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}, \qquad (12)$$

изоморфны тогда и только тогда, когда l_0=l'_0 и для каждого $\epsilon = 1, \dots, s$ верно НОД (l_0,$D_{\varepsilon j}$)=НОД(l'_0,$D'_{\varepsilon j}$) для всех j=1,…,t, где $D_{\varepsilon j}$ и $D'_{\varepsilon j}$ – компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$ и $\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l'_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$ соответственно.

Теперь можно указать полную систему инвариантов для конечно порожденной абелевой n-группы <A, f>, в разложение которой входит одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа. Пусть <A, f> изоморфна декартову произведению

$$der_{1_Z,l_0}Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}} \qquad (13)$$

бесконечной абелевой полуциклической n-группы $der_{1_Z,l_0}Z$, где 0≤l_0≤(n-1)/2, и $u_1+\ldots+u_s$ конечных примарных абелевых полуциклических n-групп $der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$, где $l_{\epsilon j}$ делит НОД (n-1, $p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$). Число l_0 и совокупность порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (13) вместе с набором наибольших общих делителей НОД(l_0,$D_{\varepsilon i}$), где $D_{\varepsilon i}$ – компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$ для каждого индекса ε=1,…,s, назовем инвариантами n-группы <A, f>.

Следствие 64. Своими инвариантами конечно порожденная абелева n-группа, в разложение которой входит одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Пусть теперь конечно порожденная абелева n-группа <A, f> изоморфна декартову произведению (9) и k>1. Как и в случае, когда k=1, в разложении (9) по каждому простому числу p_ϵ множители с равными порядками в разложении $\prod_{j=1}^{u_\epsilon} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon j}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$ расположим рядом и такие поддекартовы произведения расположим в порядке убывания порядков множителей. Получим разложение

$$\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l_i} Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}, \qquad (14)$$

где 0≤l_i≤(n-1)/2, $v=\sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+w_j$, w_j=1,…,$r_{\epsilon j}$ при каждом j=1,…,t_ϵ (здесь и дальше $r_{\epsilon 0}=0$) и $m_{\epsilon 1}>m_{\epsilon 2}>\cdots>m_{\epsilon t_\epsilon}$, p_ϵ – различные простые числа.

Теорема 88. Пусть даны $der_{1_Z,l_i}Z$, $der_{1_Z,l'_i}Z$, где 0≤l_i,l'_i≤(n-1)/2, i=1,…,k, k>1, и $der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$, $der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l'_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$, $v=\sum_{i=0}^{j-1} r_{\epsilon i}+w_j$, w_j=1,…,$r_{\epsilon j}$ при каждом j=1,…,t_ϵ (здесь и дальше $r_{\epsilon 0}=0$) и $m_{\epsilon 1}>m_{\epsilon 2}>\cdots>m_{\epsilon t_\epsilon}$, p_ϵ – различные простые числа, ε=1,…,s. Декартовы произведения (14) и

$$\prod_{i=1}^{k} der_{1_Z,l'_i} Z \times \prod_{\epsilon=1}^{s}\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l'_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}, \qquad (15)$$

изоморфны тогда и только тогда, когда НОД(l_1,…,l_k,n-1)=НОД(l'_1,…,l'_k,n-1)=L и для каждого ε=1,…,s верно НОД(L,$D_{\varepsilon j}$)=НОД(L,$D'_{\varepsilon j}$) для всех индексов j=1,…,t_ε, где $D_{\varepsilon j}$ и $D'_{\varepsilon j}$ взяты из определяющих наборов наибольших общих делителей соответственно произведений $\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$ и $\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l'_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$.

Теперь можно указать полную систему инвариантов для конечно порожденной абелевой n-группы <A, f>, в разложение которой входит больше, чем одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа. Пусть <A, f> изоморфна декартову произведению (9), где k>1. Количество бесконечных абелевых полуциклических n-групп k в разложении (9) вместе с L=НОД(l_1,…,l_k,n-1) и совокупность порядков примарных абелевых полуциклических множителей в разложении (9) вместе с набором наибольших общих делителей НОД(L,$D_{\varepsilon i}$), где $D_{\varepsilon i}$ – компоненты определяющих наборов наибольших общих делителей произведений $\prod_{j=1}^{t_\epsilon}\prod_{w_j=1}^{r_{\epsilon j}} der_{1_{Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}},l_{\epsilon v}} Z/p_\epsilon^{m_{\epsilon j}}$ для каждого ε=1,…,s, назовем инвариантами n-группы <A, f>.

Следствие 65. Своими инвариантами конечно порожденная абелева n-группа, в разложение которой входит больше, чем одна бесконечная абелева полуциклическая n-группа, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Основная цель в третьем параграфе четвертой главы заключается в том, чтобы найти полную систему свойств (инвариантов) класса конечных полуабелевых n-групп, которая остается неизменной при изоморфизме n-групп в этом классе (по аналогии как в классе конечных абелевых групп инвариантами являются порядки элементов базиса конечной абелевой группы). Заметим, что ретракты изоморфных полуабелевых n-групп изоморфны. Обратно неверно, т.е. полуабелевы n-группы, имеющие изоморфные ретракты, могут быть и не изоморфными. Найдем условия изоморфизма полуабелевых n-групп, которые (φ, d)-определенны на одной и той же группе A.

Пусть <A, f>=$der_{\varphi,d}$A – полуабелева n-группа, где A – группа с операцией сложение. Для каждого автоморфизма φ’ группы A, сопряженного автоморфизму φ, на группе A рассмотрим эндоморфизм $\mu_{\varphi'}(x)=x+\varphi'(x)+\ldots+\varphi'^{n-2}(x)$. Обозначим через Im $\mu_{\varphi'}$ образ этого эндоморфизма. Пусть φ' получен из φ сопряжением с помощью автоморфизма τ, т.е. $\varphi'=\tau\circ\varphi\circ\tau^{-1}$. Тогда для каждого такого автоморфизма τ имеем смежный класс τ(d)+Im $\mu_{\varphi'}$ по подгруппе Im μ_{φ}. Набор

$$\{\tau(d)+\mathrm{Im}\,\mu_{\varphi'} \mid \tau\in \mathrm{Aut}\,A\} \qquad (15)$$

всех таких смежных классов назовем определяющим набором множеств для n-группы <A, f>.

Теорема 89 ([14], Теорема 2). Полуабелевы n-группы <A, f>=$der_{\varphi,d}$A и <A, f>=$der_{\psi,q}$A изоморфны тогда и только тогда, когда автоморфизмы φ и ψ сопряжены в группе автоморфизмов группы A и определяющие наборы множеств этих n-групп одинаковые с точностью до перестановки.

Как и для конечных абелевых n-групп (по аналогии с теорией абелевых групп), верна

Теорема 90 ([14], Теорема 3). Полуабелева n-группа <A, f> порядка $|A|=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ изоморфна декартову произведению <A_1, f_1>×<A_2, f_2>×…×<A_k, f_k> p_i-n-групп <A_i, f_i> порядков $|A_i|=p_i^{\alpha_i}$, где p_i –

различные простые числа.

Известно, что примарная полуциклическая n-группа не может быть изоморфна декартову произведению каких-нибудь нескольких n-групп меньшего порядка (Предложение 49), т.е. такие полуциклические n-группы являются неразложимыми. Но среди конечных полуабелевых n-групп имеются и другие неразложимые n-группы. Какие же конечные полуабелевы p-n-группы являются неразложимыми? На этот вопрос мы ответим в следующей теореме.

Автоморфизм ψ конечно порожденной абелевой группы A назовем разложимым, если группу A можно представить в виде прямой суммы $A=A_1+\ldots+A_k$ своих собственных подгрупп A_i (не обязательно циклических) так, чтобы ограничение ψ_{A_i} этого автоморфизма на каждую подгруппу A_i было бы автоморфизмом этой подгруппы. В противном случае назовем такой автоморфизм неразложимым.

Теорема 92 ([14], Теорема 5). Конечная полуабелева p-n-группа <A, f> является разложимой тогда и только тогда, когда автоморфизм φ ретракта $A=\mathrm{ret}_c$<A, f> этой n-группы, заданный по правилу $\varphi(x)=f(c,x,c,\ldots,c,\bar{c})$, сопряжен (в группе автоморфизмов этого ретракта) некоторому разложимому автоморфизму.

Пусть конечная полуабелева p-n-группа <A, f> (φ, d)-определена на абелевой p-группе A порядка $|A|=p^{\alpha_1}\cdot p^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p^{\alpha_r}$, которая разлагается в прямую сумму циклических групп, т.е. $A=(a_1)+(a_2)+\ldots+(a_r)$, где $|(a_i)|=p^{\alpha_i}$, $i=1,2,\ldots,r$. Выбираем прямую сумму $B=Z/p^{\alpha_1}+Z/p^{\alpha_2}+\cdots+Z/p^{\alpha_r}$ аддитивных групп Z/p^{α_i} колец классов вычетов по модулям p^{α_i} и изоморфизмы σ_i из (a_i) в Z/p^{α_i}, действующие по правилу $\sigma_i(sa_i)=s$, $0\le s\le p^{\alpha_i}-1$. Система изоморфизмов σ_i индуцирует изоморфизм σ: $\sigma(s_1a_1+s_2a_2+\ldots+s_ra_r)=s_1+s_2+\ldots+s_r$ между группами A и B. Изоморфизм σ, в свою очередь, индуцирует изоморфизм σ* из группы автоморфизмов Aut A в группу автоморфизмов Aut B, а именно: $\sigma^*:\psi\to\sigma\circ\psi\circ\sigma^{-1}$, $\psi\in$Aut A. При этом изоморфизме классу сопряженности {ψ | ψ сопряжен φ} из Aut A соответствует класс сопряженности

$$\{\sigma\circ\psi\circ\sigma^{-1} \mid \psi \text{ сопряжен } \varphi \text{ в Aut } A\} \text{ из Aut } B. \quad (17)$$

Очевидно, для полуабелевой n-группы <B, h>$=der_{\sigma\circ\varphi\circ\sigma^{-1},\sigma(d)}$B определяющий набор множеств совпадает с набором

$$\{\sigma(\theta(d)) + \mathrm{Im}\,\mu_{\sigma\circ\varphi'\circ\sigma^{-1}} \mid \theta, \varphi' \in \text{Aut } A, \varphi'=\theta\circ\varphi\circ\theta^{-1}\}. \quad (18)$$

Порядки $|(a_i)|=p^{\alpha_i}$ прямых слагаемых группы A, класс сопряженности (17) в группе автоморфизмов группы B и определяющий набор множеств (18) n-группы <B, h> назовем инвариантами конечной полуабелевой p-n-группы <A, f>, (φ, d)-определенной на абелевой p-группе A порядка $|A|=p^{\alpha_1}\cdot p^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p^{\alpha_r}$. Тогда из теоремы 89 имеем

Следствие 67([14], Следствие 5). Своими инвариантами конечная полуабелева p-n-группа <A, f>, (φ, d)-определенная на абелевой p-группе A порядка $|A|=p^{\alpha_1}\cdot p^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p^{\alpha_r}$ определяется с точностью до изоморфизма.

Опираясь на разложение конечной полуабелевой n-группы в декартово произведение примарных полуабелевых n-групп (теорема 90), а также на следствие 67, мы приходим к следующему основному утверждению о конечных полуабелевых n-группах.

Теорема 93 ([14], Теорема 6). Всякая конечная полуабелева n-группа изоморфна прямому произведению примарных полуабелевых n-групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей и примарные множители в этих разложениях по одному и тому же простому числу имеют одинаковые инварианты.

В четвертом параграфе четвертой главы изучаются неразложимые полуабелевы n-группы. Далее доказывается признак неразложимости полуабелевой n-группы и разложимость конечно порожденной полуабелевой n-группы в прямое произведение неразложимых конечно порожденных полуабелевых n-групп, частью бесконечных, частью конечных примарных.

Среди неразложимых полуабелевых n-групп, кроме бесконечных и конечных примарных полуциклических, имеются другие неразложимые n-группы. В этом параграфе приведен пример конечной неразложимой полуабелевой тернарной группы, которая не является полуциклической. Какие же конечно порожденные полуабелевы n-группы являются неразложимыми? На этот вопрос мы ответим в следующей теореме.

Теорема 96 ([38], Теорема 3). Конечно порожденная полуабелева n-группа <A, f> является разложимой тогда и только тогда, когда автоморфизм φ ретракта $A=\mathrm{ret}_c$<A, f> этой n-группы,заданный по правилу $\varphi(x)=f(c,x,c,\ldots,c,\bar{c})$, сопряжен (в группе автоморфизмов этого ретракта) некоторому разложимому автоморфизму.

Теорема 97 ([38], Теорема 4). Конечно порожденная полуабелева n-группа изоморфна декартову произведению неразложимых конечно порожденных полуабелевых n-групп, частью бесконечных, частью конечных примарных.

В первом параграфе пятой главы изучаются свободные абелевы полуциклические n-группы. На множестве C всех циклических групп по параметру l из типа полуциклической n-группы определяется класс абелевых полуциклических n-групп C_l, где $0\le l\le[(n-1)/2]$. Таких классов равно (n+1)/2, если n нечетно, либо n/2, если n четно. Класс C_1 – все циклические n-группы. Может так случиться, что конечная полуциклическая n-группа имеет тип (k,1,n-1), в этом случае считаем, что такая n-группа входит в класс C_0, так как она изоморфна n-группе $\mathrm{der}_{1,0}(a)$ (теорема 68).

Теорема 99 ([31], Теорема 4). Бесконечная полуциклическая n-группа $\mathrm{der}_{1,la}(a)$, где $0\le l\le[(n-1)/2]$ и $l\neq1$, является свободной в классе абелевых полуциклических n-групп C_l со свободным порождающим множеством {0,a}.

Теорема 100. Бесконечная циклическая n-группа $\mathrm{der}_{1,a}(a)$ является свободной в классе циклических n-групп C_1 со свободным порождающим множеством $\{0\}$.

Во втором параграфе пятой главы изучаются свободные абелевы n-группы. Рассмотрим прямую сумму $A^* = \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ бесконечных циклических групп, которая является свободной абелевой группой с системой свободных образующих $X=\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$. Для каждого элемента $a = n_1 \cdot x_{\alpha_1} + \dots + n_k \cdot x_{\alpha_k}$ из A^* определим число $|a|$ как остаток от деления $n_1+\ldots+n_k$ на n-1.

Теорема 101 ([18], Теорема 1). Пусть $A^* = \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ – свободная абелева группа с свободным порождающим множеством $X=\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$. Тогда

1. множество $A=\{a\in A^* \mid |a|=1\}$ с n-арной операцией f, действующей по правилу $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=a_1+a_2+\ldots+a_n$, является абелевой n-группой $\langle A, f\rangle$, для которой A^* будет универсальной обертывающей группой, а $A_0=\{a\in A^* \mid |a|=0\}$ – соответствующей группой;

2. $\langle A, f\rangle$ является свободной n-группой с свободным порождающим множеством X в классе абелевых n-групп;

3. Любая свободная абелева n-группа $\langle F, f\rangle$с свободным порождающим множеством $Z=\{z_\alpha \mid \alpha\in I\}$ изоморфна $\langle A, f\rangle$.

Рассмотрим вновь прямую сумму $A^* = \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ бесконечных циклических групп (x_α). На множестве $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ зададим действие n-арной операции f как сумму n элементов, т.е. если $g_i = n_{i1}x_{\alpha_1} + \dots + n_{ik}x_{\alpha_k} \in \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$, i=1,…,n, то

$$f(g_1,\dots,g_n) = g_1 + \dots + g_n = (n_{11} + \dots + n_{n1})x_{\alpha_1} + \dots + (n_{1k} + \dots + n_{nk})x_{\alpha_k}.$$

Получим n-группу $\langle \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha), f\rangle$, которая будет производной от группы A^*.

Теорема 103 ([18], Теорема 3). Любая свободная абелева n-группа изоморфна декартову произведению бесконечной циклической n-группы и производной n-группы от свободной абелевой группы. Подробнее, если $\langle A, f\rangle$ – свободная абелева n-группа с порождающим множеством $X=\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$, x_γ – некоторый фиксированный элемент из X, $\langle (x_\gamma),f\rangle$ – бесконечная циклическая n-группа, $\langle \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha), f\rangle$ – производная n-группа от свободной абелевой группы $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$, то $\langle A, f\rangle \cong \langle (x_\gamma),f\rangle \times \langle \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha), f\rangle$.

В третьем параграфе пятой главы изучается строение свободных n-групп в классе полуабелевых n-групп.

Рассмотрим множество $\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$. Для каждого элемента x_α определим прямую сумму $A_\alpha = \sum_{j=1}^{n-1}(x_{\alpha j})$ бесконечных циклических групп $(x_{\alpha j})$. Рассмотрим прямую сумму $F = (a) + \sum_{\alpha\in I} A_\alpha$, где (a) – бесконечная циклическая группа. На каждой группе A_α выбираем автоморфизм φ_α, действующий по правилу: для любого элемента $t_1x_{\alpha 1} + t_2x_{\alpha 2} + \dots + t_{n-1}x_{\alpha n-1} \in A_\alpha$ имеем $\varphi_\alpha(t_1x_{\alpha 1} + t_2x_{\alpha 2} + \dots + t_{n-1}x_{\alpha n-1}) = t_{n-1}x_{\alpha 1} + t_1x_{\alpha 2} + \dots + t_{n-2}x_{\alpha n-1}$. Тогда на группе F имеем автоморфизм φ, действующий по правилу: для любого элемента $sa + \sum_{i=1}^{k} z_{\alpha_i} \in F$ получим

$$\varphi\left(sa + \sum_{i=1}^{k} z_{\alpha_i}\right) = sa + \sum_{i=1}^{k} \varphi_{\alpha_i}\left(z_{z_i}\right).$$

На группе F определяем полуабелеву n-группу <F, f>=$der_{\varphi,a}F$.

Теорема 104 ([3], Теорема 3). n-Группа <F, f> является свободной в классе полуабелевых n-групп с порождащим множеством

$$X = \{-a + x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{0\}.$$

Теорема 105 ([3], Теорема 4). Свободная n-группа в классе полуабелевых n-групп со свободным порождающим множеством $A = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \cup \{c\}$ изоморфна n-группе <F, f>.

В теореме 106 ([37], Теорема 8) приведено строение свободной конечно порожденной полуабелевой n-группы.

В четвертом параграфе пятой главы описывается строение свободных n-групп в классе m-полуабелевых n-групп по аналогии, как в классе полуабелевых n-групп.

В шестой главе изучаются эндоморфизмы полуабелевых n-групп.

Известно, что абелева группа тесно связана с кольцом всех ее эндоморфизмов. Мы уже говорили, что обобщением абелевой группы является полуабелева n-группа. Имеются и другие обобщения классических алгебр. Так например, обобщением определения почтикольца и кольца (алгебру <A, +,°> называют почтикольцом, если <A, +> – группа (не обязательно абелева), <A, °> – полугруппа и выполнен правый закон дистрибутивности).

Алгебру <A, g,°> с n-арной операцией g и бинарной операцией ° называют (n,2)-почтикольцом ((n,2)-кольцом), если <A, g> является n-группой (абелевой n-группой), <A, °> является полугруппой и выполнен правый закон дистрибутивности $g(x_1,\ldots,x_n)\circ y=g(x_1\circ y,\ldots,x_n\circ y)$ (оба закона дистрибутивности: предыдущий и $y\circ g(x_1,\ldots,x_n)=g(y\circ x_1,\ldots,y\circ x_n)$).

По аналогии с абелевыми группами, каждую полуабелеву (абелеву) n-группу можно связать с (n,2)-почтикольцом ((n,2)-кольцом) ее эндоморфизмов (смотри ниже).

В первом параграфе шестой главы рассматриваются гомоморфизмы из n-группы в полуабелеву n-группу. На множестве Hom(A,C) всех гомоморфизмов из n-группы <A, f_1> в полуабелеву n-группу <C, f_2> определим n-арную операцию g по правилу

$$g(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)(x)=f_2(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)),\ x\in A. \tag{19}$$

Множество Hom(A,C) всех гомоморфизмов из n-группы <A, f_1> в полуабелеву n-группу <C, f_2> с n-арной операцией g образует полуабелеву n-группу.

Во втором параграфе шестой главы изучаются (n,2)-почтикольца эндоморфизмов полуабелевой n-группы. Известно (Glazek,K.[11]), что множество E всех эндоморфизмов полуабелевой n-группы <A, f> является (n,2)-почтикольцом <E,g,°> с единицей, где n-арная операция g действует по правилу (19) и ° – композиция эндоморфизмов. У изоморфных полуабелевых n-групп (n,2)-почтикольца эндоморфизмов изоморфны.

Как и в теории абелевых групп, одной из основных проблем для полуабелевых n-групп, касающихся (n,2)-почтиколец эндоморфизмов, является нахождение (n,2)-почтиколец, которые были бы изоморфны (n,2)-почтикольцам эндоморфизмов некоторых полуабелевых n-групп. Дальше мы увидим, что такие (n,2)-почтикольца найдены.

В следующей теореме найдено (n,2)-кольцо, которое изоморфно (n,2)-кольцу эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы $<Z,f_1>=der_{1,l}Z$, где $0\leq l\leq[(n-1)/2]$.

Теорема 113 ([10], Теорема 3). Полагаем $<E,g,\circ>$ – (n,2)-кольцо всех эндоморфизмов в бесконечной абелевой полуциклической n-группе $<Z,f_1>=der_{1,l}Z$, где $0\leq l\leq[(n-1)/2]$. В Z выделим множество $P=\{m \mid ml \equiv l \bmod(n-1)\}$ и на этом множестве определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1,\ldots,m_n)=m_1+\ldots+m_n$. Тогда алгебра $<P,h,\cdot>$, где $\cdot$ – умножение целых чисел, будет (n,2)-кольцом, которое изоморфно $<E,g,\circ>$.

Следствие 79 ([10], Следствие 2). Построенное в теореме 113 (n,2)-кольцо $<P,h,\cdot>$ изоморфно (n,2)-кольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty,1,l)$.

Следствие 80 ([10], Следствие 3). Построенное в теореме 113 (n,2)-кольцо $<P,h,\cdot>$ при $l=1$ изоморфно (n,2)-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы.

В следующей теореме найдено (n,2)-почтикольцо, изоморфное (n,2)-почтикольцу эндоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы $<Z,f_2>=der_{\varphi,0}Z$, где n – нечетное натуральное число, $\varphi(z)=-z$, $z\in Z$.

Теорема 115 ([10], Теорема 5). Пусть $<E,g,\circ>$ – (n,2)-почтикольцо эндоморфизмов бесконечной полуциклической n-группы $<Z,f_2>=der_{\varphi,0}Z$, где n – нечетное натуральное число, $\varphi(z)=-z$, $z\in Z$. Выбираем n-группу $<Z\times Z,h>=<Z,f_2>\times<Z,f_2>$ и на множестве $Z\times Z$ определим бинарную операцию Δ по правилу $(m_1,u_1)\Delta(m_2,u_2)=(m_1m_2,m_1u_2+u_1)$. Тогда $<Z\times Z,h,\Delta>$ будет (n,2)-почтикольцом, которое изоморфно $<E,g,\circ>$.

Следствие 83 ([10], Следствие 6). Построенное в теореме 115 (n,2)-почтикольцо $<Z\times Z,h,\Delta>$ будет изоморфно (n,2)-почтикольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty,-1,0)$.

Теперь приступим к изучению (n,2)-почтиколец эндоморфизмов конечных полуциклических n-групп. Сначала изучим (n,2)-почтикольцо эндоморфизмов конечной не абелевой полуциклической n-группы.

Теорема 116 ([10], Теорема 6). Пусть $<E,g,\circ>$ – (n,2)-почтикольцо эндоморфизмов полуциклической n-группы $der_{\varphi,l}Z/k$, где $\varphi(z)=mz$ для любого элемента $z\in Z/k$, $1<m<k$, m взаимно прост с k, число m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \bmod(k)$, показатель числа m по модулю k делит n-1 и

$l|$НОД$((m^{n-1}-1)/(m-1),k)$. В полуабелевой n-группе $\langle P,h\rangle = der_{\varphi,l}Z/k \times der_{\varphi,0}Z/l$ определим бинарную операцию Δ по правилу $(u_1,v_1)\Delta(u_2,v_2)=(u_2s_1+u_1,v_2s_1+v_1)$ где $s_1 \in Z/k$ и $s_1-1=s_0+v_1(k/l)$, где s_0 – решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \bmod \frac{k}{l}$. Тогда алгебра $\langle P,h,\Delta\rangle$ – (n,2)-почтикольцо, изоморфное $\langle E,g,\circ\rangle$.

Следствие 84 ([10], Следствие 7). Построенное в теореме 116 (n,2)-почтикольцо $\langle P,h,\Delta\rangle$ будет изоморфно (n,2)-почтикольцо эндоморфизмов не абелевой полуциклической n-группы типа (k,m,l).

Теперь изучим (n,2)-кольцо эндоморфизмов конечной абелевой полуциклической n-группы.

Теорема 117 ([10], Теорема 7). Пусть $\langle E,g,\circ\rangle$ – (n,2)-кольцо эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы $der_{1,l}Z/k$, где $l|$НОД$(n-1,k)$. В абелевой n-группе $\langle P,h\rangle = der_{1,l}Z/k \times der_{1,0}Z/l$ определим бинарную операцию Δ по правилу $(u_1,v_1)\Delta(u_2,v_2)=(u_2s_1+u_1,v_2s_1+v_1)$, где $s_1 \in Z/k$ и $s_1-1=s_0+v_1(k/l)$, где s_0 – решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l}$ mod(k/l). Тогда алгебра $\langle P,h,\Delta\rangle$ будет (n,2)-кольцом, которое изоморфно $\langle E,g,\circ\rangle$.

Следствие 85 ([10], Следствие 8). Построенное в теореме 117 (n,2)-кольцо $\langle P,h,\Delta\rangle$ будет изоморфно (n,2)-кольцу эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы типа (k,1,l).

Изучим (n,2)-кольцо эндоморфизмов конечной циклической n-группы.

Следствие 86 ([10], Следствие 9). Полагаем $\langle E,g,\circ\rangle$ – (n,2)-кольцо всех эндоморфизмов в конечной циклической n-группе порядка k. В циклической n-группе $\langle Z/k,f\rangle = der_{1,1}Z/k$ определим бинарную операцию Δ по правилу $u_1\Delta u_2 = u_1\cdot u_2\cdot(n-1)+u_1+u_2$, где $\cdot$ – умножение по модулю k. Тогда алгебра $\langle Z/k,f,\Delta\rangle$ будет (n,2)-кольцом, которое изоморфно $\langle E,g,\circ\rangle$.

В четвертом параграфе последней главы изучаются (n,2)-кольца эндоморфизмов коциклических n-групп. Имеется прозрачная квалификация коциклических n-групп – это в точности конечные полуциклические n-группы типа $(p^k,1,p^t)$, p – простое число, p^t делит НОД$(n-1,p^k)$, и абелевы n-группы, 0-производные от квазициклической группы $Z(p^\infty)$ (см. следствие 56). Для этих коциклических n-групп найдены (n,2)-кольца эндоморфизмов в следствии 87 ([22], Предложение 3) и в предложении 70 ([17], Предложение 4).

В пятом параграфе последней главы изучаются полуабелевы n-группы с изоморфными (n,2)-почтикольцами эндоморфизмов.

У изоморфных полуабелевых (абелевых) n-групп (n,2)-почтикольца ((n,2)-кольца) эндоморфизмов изоморфны. Обратное утверждение неверно. В следующей теореме найдены условия изоморфизма (n,2)-колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полуциклических n-групп.

Теорема 118 ([29], Теорема 12). Две бесконечные абелевы полуциклические n-группы типов $(\infty,1,l_1)$ и $(\infty,1,l_2)$ имеют изоморфные (n,2)-

кольца эндоморфизмов тогда и только тогда, когда НОД(n-1,l_1)=НОД(n-1,l_2).

Для конечных абелевых полуциклических n-групп из изоморфизма (n,2)-колец эндоморфизмов следует изоморфизм самих n-групп. Отметим это в следующей теореме.

Теорема 119 ([33], Теорема 13). Две конечные абелевы полуциклические n-группы типов (k_1,1,l_1) и (k_2,1,l_2), имеющие изоморфные (n,2)-кольца эндоморфизмов, изоморфны.

Рассмотрим теперь коциклические n-группы.

Теорема 120 ([8], Теорема 3). Две коциклические n-группы с изоморфными (n,2)-кольцами эндоморфизмов изоморфны.

В шестом параграфе последней главы изучаются n-группы гомоморфизмов из полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу. Найдены в следствиях 89 и 94 ([11], следствия 1 и 6) полубелевы n-группы, изоморфные n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой и не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу соответственно. В следствиях 97 и 101 указаны полубелевы n-группы, изоморфные n-группе гомоморфизмов из конечной абелевой и не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу соответственно.

Заключение

Диссертация реализует исследовательскую программу по изучению теории полуабелевых n-групп. Укажем основные результаты из диссертации.

В первой главе в параграфе 1.3 найдено тождество, описывающее класс n-групп, в котором отображение "выбор косого элемента" в каждой n-группе является гомоморфизмом (теорема 4).

Во второй главе в параграфе 2.4 доказано, что периодическая часть полуабелевой n-группы будет подгруппой (теорема 46) и для конечно порожденной абелевой n-группы она будет конечной (теорема 51).

В третьей главе изучалось строение конечных и бесконечных полуциклических n-групп. Доказана неразложимость конечной примарной полуциклической n-группы (предложение 49) и разложение конечной полуциклической n-группы в произведение примарных полуциклических n-групп (предложение 50). Изучены подгруппы полуциклических n-групп.

В параграфе 3.5 определен новый тип n-групп – коциклические n-группы, изучено строение коциклических n-групп (следствие 56), доказана неразложимость коциклической n-группы (следствие 57).

В четвертой главе изучалось строение конечных и конечно порожденных полуабелевых и абелевых n-групп.

В параграфе 4.1 доказана основная теорема о строении конечных абелевых n-групп (теорема 82). Найдена полная система инвариантов конечной абелевой n-группы.

В параграфе 4.2 найдена полная система инвариантов конечно порожденной абелевой n-группы.

В параграфе 4.3 доказано разложение конечной полуабелевой n-группы в прямое произведение примарных полуабелевых n-групп (теорема 89) и однозначность этого разложения (теорема 90). Доказан признак неразложимости конечной полуабелевой примарной n-группы (теорема 91). Доказана основная теорема о строении конечных полуабелевых n-групп (теорема 92). Найдена полная система инвариантов конечной полуабелевой n-группы.

Для конечно порожденной полуабелевой n-группы в параграфе 4.4 доказан признак неразложимости (теорема 95). Доказано также разложение конечно порожденной полуабелевой n-группы в прямое произведение неразложимых полуабелевых n-групп, частью бесконечных, частью конечных примарных (теорема 96).

В пятой главе изучалось строение свободных n-групп в классах абелевых полуциклических, абелевых, полуабелевых и m-полуабелевых n-групп.

В параграфе 5.1 класс всех абелевых полуциклических n-групп разбивается на (n+1)/2 при нечетном n или на n/2 при четном n подкласса n-групп, в каждом из которых находится свободная n-групп, это в точности бесконечная n-группа из этого подкласса (теорема 98). В частности, в классе всех циклических n-групп свободной n-группой будет бесконечная циклическая n-группа (теорема 99).

В теореме 100 параграфа 5.2 на свободной абелевой группе строится свободная абелева n-группа, а затем доказывается в теореме 102, что только прямое произведение бесконечной циклической n-группы и производной n-группы от свободной абелевой группы является свободной n-группой в классе абелевых n-групп.

В теореме 103 параграфа 5.3 на прямой сумме бесконечной циклической группы и набора прямых сумм n-1 бесконечных циклических групп строится свободная полуабелева n-группа. Доказывается (теорема 104), что только так построенная n-группа будет свободной в классе полуабелевых n-групп.

В параграфа 5.3 на прямой сумме бесконечной циклической группы и набора прямых сумм m-1 бесконечных циклических групп, где m-1 делит n-1, строится свободная m-полуабелева n-группа (теорема 106). Доказывается (теорема 107), что только так построенная n-группа будет свободной в классе m-полуабелевых n-групп. В этом случае при m=n мы получим свободные полуабелевы n-группы, а при m=2 мы получим свободные абелевы n-группы.

В 6-ой главе изучались эндоморфизмы полуабелевых n-групп. В параграфе 6.3 построены (n,2)-кольца и (n,2)-почтикольца, изоморфные (n,2)-кольцам и (n,2)-почтикольцам эндоморфизмов различных полуциклических n-групп. Получены следующие основные результаты: а) построено (n,2)-кольцо, изоморфное (n,2)-кольцу эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы (теорема 113); б) построено (n,2)-почтикольцо, изоморфное (n,2)-почтикольцу эндоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы (теорема 115); в) построено (n,2)-кольцо, изоморфное (n,2)-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы (следствие 82); г) построено (n,2)-почтикольцо, изоморфное (n,2)-почтикольцу эндоморфизмов конечной не абелевой полуциклической n-группы (теорема 116); д) построено (n,2)-кольцо, изоморфное (n,2)-кольцу эндоморфизмов конечной абелевой полуциклической n-группы (теорема 117); е) построено (n,2)-кольцо, изоморфное (n,2)-кольцу эндоморфизмов конечной циклической n-группы (следствие 86). В параграфе 6.4 построены два (n,2)-кольца, изоморфные (n,2)-кольцам эндоморфизмов конечной и бесконечной коциклической n-группы (следствие 87 и предложение 70).

В параграфе 6.5 в теореме 118 приведены условия изоморфизма (n,2)-колец всех эндоморфизмов в бесконечных абелевых полуциклических n-группах. Здесь же параграфе показано, что из изоморфизма (n,2)-колец всех эндоморфизмов в конечной абелевой полуциклической n-группе вытекает изоморфизм n-групп (теорема 119). Здесь доказано также, что две конечные циклические n-группы с изоморфными (n,2)-кольцами эндоморфизмов изоморфны (следствие 88) и две конечные коциклические n-группы с изоморфными (n,2)-кольцами эндоморфизмов также изоморфны (теорема 120).

В параграфе 6.6 построены n-группы, изоморфные n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой (не абелевой) полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу (теорема 121 (теорема 122)), n-группе гомоморфизмов из конечной абелевой (не абелевой) полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу (теорема 123 (теорема 124)).

Автор выражает глубокую благодарность и признательность доктору физико-математических наук Артамонову В.А. за консультации и внимание, оказанное им при написании данной диссертации.

Основные публикации по теме диссертации.

Публикации в рецензируемых научных изданиях, включенных в перечень ВАК РФ, международные реферативные базы данных Scopus и Web of Science

1. Shchuchkin, N. A. Subgroups of semicyclic n-ary groups / N. A. Shchuchkin // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – T. 167. – P. 870–877. DOI: 10.1007/s10958-010-9967-0 [Scopus]

2. Shchuchkin, N. A. The structure of finite abelian n-ary groups / N. A. Shchuchkin // Discrete Mathematics and Applications. – 2015. – T. 25, № 1. – P. 47-58. DOI: 10.1515/dma-2015-0005 [Scopus, Web of Science]

3. Shchuchkin, N. A. Free semiabelian n-ary groups / N. A. Shchuchkin // Quasigroups and Related Systems. – 2015. – V. 23. – P. 309-317. [Scopus]

4. Shchuchkin, N.A. Automorphisms of abelian n-ary groups / N. A. Shchuchkin // Qusigroups and Related Systems. – 2013. – Vol. 21, V. 2, – P. 255-272. [Scopus]

5. Щучкин, Н.А. Подгруппы в полуциклических n-арных группах / Н.А. Щучкин // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т.15 (2). – С. 211-222. [ВАК, Scopus]

6. Щучкин, Н.А. Строение конечных абелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Дискретная математика. – 2014. – Т.26 (3). – С. 144-159. [ВАК]

7. Щучкин, Н.А. Периодичность в полуабелевых n-арных группах / Н.А. Щучкин // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2012. – № 6, Часть 2. – С. 254-259. [ВАК]

8. Щучкин, Н.А. Коциклические n-группы. / Н.А. Щучкин // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 10. – С. 89-93. DOI: 10.3103/S1066369X17100115 [ВАК, Scopus, Web of Science]

9. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги коммутанта группы / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2012. – № 6(50), Часть 2. – С. 68-72. [ВАК]

10. Щучкин, Н.А. Эндоморфизмы полуциклических n-групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2021. – Т.22, Выпуск 1. – С. 353-369. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-1-353-369 [ВАК, Scopus]

11. Щучкин, Н. А. Гомоморфизмы из бесконечных полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2021. – Т.22, Выпуск 1. – С. 340-352. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-1-340-352 [ВАК, Scopus]

12. Кусов, В.М. Группа автоморфизмов элементарной n-арной группы / В.М. Кусов, Н.А. Щучкин // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2012. –№ 6, Часть 2. – С. 130-136. [ВАК]

13. Щучкин, Н. А. Конечно порожденные нильпотентные алгебры / Н.А. Щучкин // Вестник МГУ. М.: Мех.- мат. – 1992. – Вып. 2. – С. 3-7. [ВАК]

14. Щучкин, Н.А. Строение конечных полуабелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2016. – Т. 17, Выпуск 1. – С. 254-269. [ВАК]

Монография:

15. Щучкин, Н.А. Введение в теорию n-групп: монография / Н.А. Щучкин. – Волгоград. Изд. ООО «ПРИНТ», 2019. – 234 с.

В прочих научных изданиях:

16. Щучкин, Н.А. Полуциклические n-арные группы / Н.А. Щучкин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – Т.3 (54). – С. 186-194 .

17. Гальмак, А.М. Циклические n-арные группы и их обобщения / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – Т.2 (19). – С. 46-53.

18. Щучкин, Н.А. Свободные абелевы n-арные группы / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2011. – Т.12 (2). – С. 163-170.

19. Щучкин, Н.А. Биективность косого отображения в n-группах / Н.А. Щучкин // Труды института матем. – 2008. – Т.16, \No 1. – С. 106-111.

20. Shchuchkin, N.A. Skew endomorphisms on n-ary groups / N.A. Shchuchkin // Quasigroups and Related Systems. – 2006. – V. 14. – P. 217-226.

21. Щучкин, Н.А. Взаимосвязь n-групп и групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2003. – Т.4, Выпуск 1(5). – С. 125-141.

22. Щучкин, Н.А. Прямое произведение n-арных групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2014. – Т.15, Выпуск 2. – С. 101-121.

23. Щучкин, Н.А. Условия конечности для нильпотентных алгебр: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Щучкин Николай Алексеевич. – М., 1991. – 83 с.

24. Щучкин, Н.А. Разрешимые и нильпотентные n-группы / Н.А. Щучкин // Межвуз. сб. науч. работ "Алгебраические системы". Изд-во Волг. пед. ин-та. Волгоград. – 1989. – С. 133-139.

25. Гальмак, А.М Порождающие множества n-арных групп / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2014. – Т.15, Выпуск 1. – С. 89-109.

26. Щучкин, Н.А. Порождающие множества подалгебр n-арных групп / Н.А. Щучкин // Весник МДУ имя А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 46-53.

27. Щучкин, Н.А. Циклические n-группы / Н.А. Щучкин // Труды междунар. сем. "Универсальная алгебра и ее приложения". Волгоград. Перемена. – 2000. – С. 295-304.

28. Щучкин, Н.А. Периодичность в абелевых n-арных группах / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2013. – Т. XIV, Выпуск 4(48). – С. 205-212.

29. Гальмак, А.М. n-Арные аналоги коммутанта группы / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2009. – Т. X, Выпуск 2(30). – С. 4-9.

30. Щучкин, Н. А. Свободные m-полуабелевы n-арные группы / Н.А. Щучкин // Электронные информационные системы. – 2018. – № 4, Выпуск 19. – С. 97-109.

31. Кусов, В.М. Свободные абелевы полуциклические n-арные группы / В.М. Кусов, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2011. – Т.12, Выпуск 2. – С. 68-76.

32. Бощенко, А.П. Конечные абелевы n-арные группы / А.П. Бощенко, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2011. – Т.12, Выпуск 2. – С. 5-14.

33. Кусов, В.М. Эндоморфизмы абелевых полуциклических n-групп / В.М. Кусов, Н.А. Щучкин // Информатика и кибернетика. Д.: ДонНТУ. – 2018. – № 1(11). – С. 65-75.

34. Dudek, W. A. and Shchuchkin N. A. Skew endomorphisms on some n-ary groups / W. A. Dudek, N. A. Shchuchkin // Quasigroups and Related Systems. – 2009. – V. 17. – P. 205-228.

35. Щучкин, Н.А. Подгруппы свободной абелевой n-арной группы / Н.А. Щучкин // Известия ГГУ. Гомель, Беларусь. ГГУ им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 94-103.

36. Гальмак, А.М. К теореме Поста о смежных классах / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2014. – Т. XV. Выпуск 2(50). – С. 6-20.

37. Щучкин, Н.А. Свободные алгебры в классе полуабелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Межвуз. сб. науч. трудов "Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство Саратовского университета. – 2016. – Выпуск 8. – С. 111-113.

38. Щучкин, Н.А. Конечно порожденные полуабелевы n-группы / Н.А. Щучкин // Сборник материалов VIII международной научно-технической конференции, ДонНТУ, Донецк. – 2017. – С. 26-31.

39. Щучкин, Н.А. Свободные алгебры в классе полуабелевых n-групп / Н.А. Щучкин // В сборнике: Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование (ИУСМКМ-2019). Материалы X Международной научно-технической конференции в рамках V Международного Научного форума Донецкой Народной Республики. – 2019. – С. 42-45.

<u>*В сборниках трудов и материалов конференций и семинаров*</u>:

40. Щучкин, Н.А. Нильпотентные n-группы / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. VI-й Всесоюз. школы: Теория многообразий алгебраических систем. Магнитогорск: МагГу. – 1990. – С. 34-35.

41. Щучкин, Н.А. К определению n-арной группы. / Н.А. Щучкин // Материалы XII Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", посвященной 80-летию проф. В.Н. Латышева. 21-25 апреля. – 2014. – С. 143-145.

42 Щучкин, Н.А. Коммутант n-группы / Н.А. Щучкин // Междунар. конф. Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тез. докл. Саратов. – 2004. – С. 130-131.

43. Щучкин, Н.А. Сопряженность элементов в обобщенных группах / Н.А. Щучкин // Сборник тезисов Междунар. конф. "Алгебра и ее приложения". Краснодар. 5-9 августа. – 2002. – С. 156-157.

44. Щучкин, Н.А. Периодичность в нильпотентных n-группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. конф. памяти А.Г. Куроша: Алгебра и теория чисел. Москва: МГУ. – 1998. – С. 90-91.

45. Щучкин, Н.А. Две дистрибутивные решетки конгруэнций для n-групп / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. семинара памяти Л.А. Скорнякова: Универсальная алгебра и ее приложения. Волгоград: Перемена. – 1999. – С. 76-

77.
46. Щучкин, Н. А. Обобщенные циклические группы / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. конф.: Универсальные алгебры. Сумы: СПУ. – 2001. – С. 75-76.
47. Щучкин, Н.А. Обратимость, нейтральность и разложимость в циклических n-группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. алг.конф. памяти З.И.Боревича. С-Петербург: 17-23 сентября. – 2002. – С. 215-216.
48 .Щучкин, Н.А. n-Подгруппы в n-группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. док. Междунар. конф.: Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тула, 19-24 мая. – 2003. – С. 256-257.
49. Щучкин, Н.А. Порождающие множества n-подгрупп / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докладов Международной алгебраической конференции, посв. 100-летию со дня рождения П.Г. Конторовича и 70-летию Л.Н. Шеврина. Екатеринбург: Изд-во УрГУ. – 2005. – С. 147-148.
50. Щучкин, Н.А. Косое отображение в n-группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию Л.А. Шеметкова: классы групп, алгебр и их приложения. Гомель, Беларусь. ГГУ им. Ф. Скорины. – 2007. – С. 139-140.
51. Щучкин, Н. А. Конечные полуциклические n-группы / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию А.Г. Куроша. Москва. МГУ. – 2008. – С. 267-268.
52. Щучкин, Н. А. Полуциклические тернарные группы / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Международной научной конференции, посвященной 100-летию В.В. Вагнера: современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Саратов. СГУ. – 2008. – С. 142-143.
53. Щучкин, Н. А. Строение свободных абелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. – 2011. – С. 126-127.
54. Кусов, В.М. Элементарная n-арная группа / В.М. Кусов, Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Волгоград. – 2012. – С. 40-41.
55. Щучкин, Н. А. Периодическая часть полуабелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Волгоград. – 2012. – С. 75-76.
56. Щучкин, Н.А. О периодичности в n-арных группах / Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. – 2013. – С. 91-93.
57. Гальмак, А.М. К теореме Поста о смежных классах / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // Сб. тез. докл. Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Саратов. – 2013. – С. 18-19.
58. Щучкин, Н. А. Конечные полуабелевы n-арные группы. / Н.А. Щучкин // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложния. Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея

Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого. – 2015. – С. 139-142.

59. Щучкин, Н. А. Эндоморфизмы бесконечных полуциклических n-групп / Н.А. Щучкин // Сборник материалов всероссийской конференции "Алгебра и теория алгоритмов", посвященная 100-летию факультета математики и компьют. наук. ИвГУ, Иваново, Изд-во ИвГУ. – 2018. – С. 132-135.

60. Щучкин, Н. А. Инварианты конечно порожденной абелевой n-группы / Н.А. Щучкин // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша. Тезисы докладов. Москва, МГУ. – 2018. – С. 215-217.

61. Щучкин, Н. А. Эндоморфизмы полуабелевых n-групп / Н.А. Щучкин // Сборник материалов XV Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", посвященная 100-летию со дня рождения Н.М. Коробова. Тула, 28-31 мая. – 2018. – С. 125-127.

62. Щучкин, Н. А. Полиадическая группа гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу / Н.А. Щучкин // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза, Тула, 13-18 мая. – 2019. – С. 118-122.

63. Гальмак, А.М. Некоторые неравенства в полиадических группоидах специального вида. / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. – 2019. – С. 56-59.

64. Щучкин, Н. А. Гомоморфизмы из n-группы в полуабелеву n-группу / Н.А. Щучкин // Сборник материалов Международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения", г. Казань, 24-28 июня. – 2019. – С. 183-184.