

На правах рукописи



КУВШИНОВА Анастасия Николаевна

**Параметрическая идентификация моделей  
конвективно-диффузионного переноса на основе  
рекуррентных алгоритмов дискретной  
фильтрации**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Ульяновск – 2022

Работа выполнена на кафедре высшей математики  
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Ульяновский государственный педагогический  
университет имени И. Н. Ульянова»

**Научный руководитель:**

*Цыганов Андрей Владимирович*, кандидат физико-математических наук, доцент

**Официальные оппоненты:**

*Ломов Андрей Александрович*, доктор физико-математических наук, доцент, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, старший научный сотрудник

*Иванов Дмитрий Владимирович*, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Самарский государственный университет путей сообщения», кафедра мехатроники, автоматизации и управления на транспорте, доцент кафедры

**Ведущая организация:**

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»

Защита состоится 21 сентября 2022 г. в 10:00 на заседании диссертационного совета Д 212.278.02 при ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» по адресу: г. Ульяновск, ул. Набережная р. Свияги, 106, корп. 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом диссертации можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа <https://www.ulsu.ru>, с авторефератом можно ознакомиться на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ <https://vak.minobrnauki.gov.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просьба направлять по адресу: 432970, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета



Волков Максим Анатольевич

# Общая характеристика работы

## Актуальность работы

Математические модели тепломассопереноса широко используются для описания различных природных и техногенных процессов<sup>1 2 3</sup>. На протяжении последних десятилетий в силу важности приложений для данных моделей актуальными являются задачи идентификации их параметров по результатам измерений значений искомой функции в рассматриваемой области. Такого рода задачи называются обратными и в общем случае они относятся к некорректно поставленным задачам математической физики<sup>4</sup>.

Традиционные методы, используемые для решения обратных задач, описаны в монографиях А. А. Самарского, О. В. Алифанова, А. Н. Тихонова и других авторов. Наряду с данными методами в работах отечественных и зарубежных авторов (Д. Ф. Симбирский, Ю. М. Мацевитый, J. K. Hodge и др.) были предложены методы параметрической идентификации, основанные на применении рекуррентных алгоритмов дискретной фильтрации.

Как показывает анализ литературы, данные методы чаще всего применяются для определения параметров моделей теплопереноса по экспериментальным данным и преимущественно основаны на использовании расширенного фильтра Калмана или его модификаций, а их практическое применение подразумевает широкое использование ЭВМ и численных методов. Результаты практического использования методов рекуррентной параметрической идентификации показывают их адекватность и устойчивость к наличию шумов в наблюдаемых данных<sup>5</sup>. Кроме того, использование рекуррентных алгоритмов идентификации в измерительных системах реального времени зачастую предпочтительнее по причине их более высокого быстродействия по сравнению с традиционными методами, требующими большого объема вычислений<sup>6</sup>.

Однако, как показывает практика решения различных прикладных задач, результаты использования программных реализаций алгоритмов калма-

---

<sup>1</sup> Кожин, И.А. Теория теплообмена. Учебник для вузов / И.А. Кожин, С.И. Исаев, А.И. Леонтьев. — 3-е изд. изд. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. — 624 с.

<sup>2</sup> Дерюгин, В.В. Теплообмен. Учебное пособие / В.В. Дерюгин, В.М. Уляшева, В.Ф. Васильев. — СПб.: Лань, 2018. — 240 с.

<sup>3</sup> Фарлоу, С.Д. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С.Д. Фарлоу. — М.: Мир, 1985. — 383 с.

<sup>4</sup> Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А.М. Денисов. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 208 с.

<sup>5</sup> Daouas, N. An extended version of the discrete Kalman filter applied to a nonlinear inverse heat conduction problem / N. Daouas, M.S. Radhouani // International Journal of Thermal Sciences. — 2000. — Vol. 39. — P. 191–212.

<sup>6</sup> Пилипенко, Н.В. Применение фильтра Калмана в нестационарной теплотометрии. Учебное пособие / Н.В. Пилипенко. — СПб.: Университет ИТМО, 2017. — 36 с.

новской фильтрации могут значительно отличаться от теоретически предсказанных. В работах ряда исследователей <sup>7 8</sup> отмечается, что это во многом обусловлено численной неустойчивостью классических алгоритмов калмановской фильтрации по отношению к ошибкам машинного округления. В связи с чем чрезвычайно важной является разработка новых робастных (то есть численно устойчивых к ошибкам машинного округления) методов дискретной фильтрации.

Среди других факторов, влияющих на качество оценок, получаемых фильтром Калмана, можно отметить <sup>9</sup>:

- неопределенность в значениях матричных параметров, поскольку наличие ошибок в модели не учитывается при выводе фильтра Калмана;
- большой диапазон значений матричных параметров, измерений или переменных состояния, что может привести к трудностям с выбором масштаба или единиц измерения;
- плохо обусловленные теоретические решения матричного уравнения Риккати, что при наличии ошибок численного решения может привести к ошибкам оценивания;
- большие размеры матриц, поскольку число арифметических операций возрастает пропорционально квадрату или кубу размерностей матриц и при каждой операции могут возникать ошибки округления;
- низкая машинная точность, увеличивающая ошибки округления.

В связи с этим применение рекуррентных методов параметрической идентификации требует проведения исследований в части устойчивости, сходимости и оценки погрешностей получаемых результатов, но теоретическое сравнение численной устойчивости различных методов может быть затруднительным. Хотя одни методы считаются более робастными, чем другие, на практике поведение методов зачастую зависит от свойств решаемой задачи. Поэтому важной является задача разработки программного обеспечения для проведения комплексных исследований свойств разрабатываемых методов.

Все вышесказанное обосновывает *актуальность* темы диссертационного исследования.

---

<sup>7</sup> Bierman, G. J. Numerical comparison of discrete Kalman filter algorithms: Orbit determination case study / Gerald J. Bierman, Catherine L. Thornton // 1976 IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptive Processes. — 1976. — P. 859–872.

<sup>8</sup> Verhaegen, M. Numerical aspects of different Kalman filter implementations / M. Verhaegen, P. Van Dooren // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1986. — Vol. 31, no. 10. — P. 907–917.

<sup>9</sup> Grewal, M.S. Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab / M.S. Grewal, A.P. Andrews. — New Jersey: Prentice Hall, 2001. — 401 p.

## Степень разработанности темы исследования

Первые применения рекуррентных методов параметрической идентификации для решения обратных задач теплопереноса содержатся в работах Д. Ф. Симбирского, Ю. М. Мацевитого, А. В. Мултановского, А. В. Олейника, J. K. Hodge, A. J. Chen, J. R. Hayes, N. Daouas, M. S. Radhouani, A. A. Карпова, Т. А. Тихоновой и ряда других авторов. Данные методы применялись при решении задач температурной диагностики двигателей и паровых турбин<sup>10 11</sup>, а в последствии при решении различных обратных задач теплопроводности<sup>12</sup> и нестационарной теплотметрии<sup>13</sup>.

В работах<sup>14 15</sup> приводятся примеры применения модификаций фильтра Калмана и фильтра частиц к решению обратных задач теплопереноса. В работе<sup>16</sup> фильтр Калмана и фильтр частиц применяются к решению обратных задач теплопереноса в трубопроводах. В работе<sup>17</sup> рассматривается применение трех модификаций фильтра частиц для решения обратных задач теплопереноса, возникающих при лечении онкологических заболеваний методом гипертермии, а в работе<sup>18</sup> — задача идентификации параметров математической модели теплопереноса с помощью сигма-точечного фильтра Калмана.

Рекуррентные методы параметрической идентификации применимы к широкому классу моделей динамических систем, для которых характерны про-

---

<sup>10</sup> Симбирский, Д.В. Температурная диагностика двигателей / Д.В. Симбирский. — Киев: Техника, 1976. — 208 с.

<sup>11</sup> Мацевитый, Ю.М. Идентификация параметров теплообмена методом оптимальной динамической фильтрации / Ю.М. Мацевитый, А.В. Мултановский // Теплофизика высоких температур. — 1979. — Т. 17(5). — С. 1053–1060

<sup>12</sup> Daouas, N. A new approach of the Kalman filter using future temperature measurements for nonlinear inverse heat conduction problems / N. Daouas, M.S. Radhouani // Numerical Heat Transfer Fundamentals. — 2004. — Vol. 45, no. 6. — P. 565–585.

<sup>13</sup> Пилипенко, Н.В. Методы параметрической идентификации в нестационарной теплотметрии. Учебное пособие / Н.В. Пилипенко. — СПб. : Университет ИТМО, 2016. — 79 с.

<sup>14</sup> Orlande, H.R.B. Application of Bayesian filters to heat conduction problem / H.R.B. Orlande, G.S. Dulikravich, M.J. Colaço // EngOpt 2008 – International Conference on Eng. Optimization, (ed: Herskovitz), June 1-5. — Rio de Janeiro, Brazil, 2008.

<sup>15</sup> A comparison of extended Kalman filter, ultrasound time-of-flight measurement models for heating source localization / M.R. Myers, A.B. Jorge, M.J. Mutton, D.J. Walker // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2012. — Vol. 20, no. 7. — P. 991–1016.

<sup>16</sup> Vianna, F. Prediction of the temperature field in pipelines with Bayesian filters and non-intrusive measurements / F. Vianna, H. Orlande, G. Dulikravich // In Proceedings of the 20th International Congress of Mechanical Engineering. — Gramado, RS, Brazil, 2009.

<sup>17</sup> State estimation in bioheat transfer: a comparison of particle filter algorithms / B. Lamien, L.A.B. Varon, H.R.B. Orlande, G.E. Elicabe // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. — 2017. — Vol. 27, no. 3. — P. 615–638.

<sup>18</sup> Prediction of the coupled heat radiation and conduction parameters and boundary condition using the unscented Kalman filter / S. Wen, H. Qi, Y. Ren, et al // Sci. China Technol. Sci. — 2020. — Vol. 63. — P. 422–433.

цессы конвекции (адвекции) и диффузии<sup>19</sup>. Например, в работах<sup>20 21</sup> описывается применение расширенного фильтра Калмана в сочетании с МНК для идентификации коэффициентов конвекции и диффузии одномерной модели конвективно-диффузионного переноса.

### **Объект и предмет исследования**

*Объектом* исследования являются математические модели конвективно-диффузионного переноса, представленные дискретными линейными стохастическими системами в пространстве состояний. *Предмет* исследования — методы идентификации неизвестных параметров рассматриваемых моделей на основе рекуррентных алгоритмов дискретной фильтрации.

### **Цель и задачи диссертационной работы**

*Целью* диссертационной работы является построение и исследование математических моделей конвективно-диффузионного переноса, описываемых дискретными линейными стохастическими системами в пространстве состояний, и разработка новых методов параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса по данным зашумленных измерений на основе рекуррентных алгоритмов дискретной фильтрации.

Для достижения поставленных целей решались следующие *задачи*:

1. Построение математических моделей конвективно-диффузионного переноса, описываемых дискретными линейными стохастическими системами в пространстве состояний.
2. Анализ свойств построенных моделей.
3. Разработка алгоритмов идентификации коэффициентов конвекции и диффузии уравнения конвективно-диффузионного переноса.
4. Разработка алгоритмов численной идентификации граничных условий моделей конвективно-диффузионного переноса.
5. Реализация разработанных методов в виде комплекса программ для исследования процессов параметрической идентификации математических

---

<sup>19</sup> Верификация процесса конвективной диффузии на основе анализа многомерных временных рядов / М.Г. Матвеев, Е.А. Сирота, М.Е. Семенов, А. В. Копытин // Труды XIX Международной конференции «Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных» (DAMDID/ RCDL'2017), Москва, Россия, 10–13 октября 2017 года. — Москва: Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, 2017. — С. 354–358.

<sup>20</sup> Матвеев, М. Г. Комбинированный метод идентификации параметров распределенной динамической модели / М.Г. Матвеев, А.В. Копытин, Е. А. Сирота // Сборник трудов IV международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2018), Самара, Россия, 24–27 апреля, 2018. — Самара: Новая техника, 2018. — С. 1651–1656.

<sup>21</sup> Копытин, А. В. Применение расширенного фильтра Калмана для идентификации параметров распределенной динамической системы / А.В. Копытин, Е.А. Копытина, М.Г. Матвеев // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 44–50.

моделей конвективно-диффузионного переноса.

### **Научная новизна**

Основные результаты, полученные в работе, являются новыми. В частности, построены и исследованы новые модели конвективно-диффузионного переноса, описываемые дискретными линейными стохастическими системами в пространстве состояний. Для построенных моделей разработаны новые методы идентификации коэффициентов конвекции и диффузии на основе рекуррентных алгоритмов дискретной фильтрации. Получены выражения для вычисления градиента критерия идентификации для моделей конвективно-диффузионного переноса на основе стандартного фильтра Калмана. Сформулирован критерий идентификации на основе SVD-модификации фильтра Калмана, обладающий улучшенными вычислительными свойствами по сравнению с критерием на основе стандартного фильтра Калмана. Разработаны методы идентификации граничных условий моделей конвективно-диффузионного переноса на основе алгоритмов одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий Гиллейнса – Де-Мора. Сформулирована квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора в ковариационной форме. Разработан комплекс программ для исследования процессов параметрической идентификации математических моделей конвективно-диффузионного переноса.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Математические модели конвективно-диффузионного переноса, описываемые дискретными линейными стохастическими системами в пространстве состояний.
2. Методы идентификации коэффициентов конвекции и диффузии с использованием безградиентных и градиентных алгоритмов минимизации критериев идентификации; градиент критерия идентификации для моделей конвективно-диффузионного переноса на основе стандартного фильтра Калмана; критерий идентификации на основе SVD-модификации фильтра Калмана.
3. Численные методы идентификации граничных условий моделей конвективно-диффузионного переноса на основе алгоритмов одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий Гиллейнса – Де-Мора; квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора в ковариационной форме.
4. Комплекс программ для исследования процессов параметрической идентификации математических моделей конвективно-диффузионного пере-

носа с реализацией разработанных методов на языке MATLAB.

### **Соответствие диссертации паспорту научной специальности**

Содержание диссертации соответствует п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» и п. 5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» паспорта специальности научных работников 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечена строгими математическими доказательствами теоретических результатов, корректным применением математического аппарата и численных методов, использованием современных методов разработки алгоритмов, сравнением результатов с результатами, полученными альтернативными методами, а также использованием при разработке программного комплекса апробированного лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения. Все теоретические положения подтверждены результатами вычислительных экспериментов.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Теоретическая значимость работы состоит в разработке новых методов и средств параметрической идентификации математических моделей процессов конвективно-диффузионного переноса. Практическая значимость работы заключается в возможности использования результатов диссертационного исследования для решения прикладных задач тепломассопереноса.

### **Методы исследования**

Теоретические результаты диссертации получены с применением методов вычислительной линейной алгебры, теории линейных дискретных динамических систем, теории адаптивной и оптимальной дискретной фильтрации, численных методов оптимизации. Для получения практических результатов использованы методы математического моделирования, математической статистики и современные технологии научного программирования.

### **Апробация результатов**

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях, семинарах и научных мероприятиях:

- Международная конференция «Дифференциальные уравнения, матема-



- тическое моделирование и вычислительные алгоритмы», Белгород, 25–29 октября 2021 г.
- Научно-техническая конференция «Интегрированные системы управления», Ульяновск, 18–19 мая 2021 г.
  - XXVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Ульяновск, 12–23 апреля 2021 г. (доклад «Адаптивное оценивание дискретной модели конвективно-диффузионного переноса на основе численно эффективных алгоритмов Калмановской фильтрации» удостоен диплома II степени).
  - Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Функциональный анализ и математическое образование» (ФАМО-2020), Ульяновск, 8–9 октября 2020 г.
  - VI международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2020), Самара, 26–29 мая 2020 г.
  - V международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019), Самара, 21–24 мая 2019 г. (доклад «Dynamic identification of boundary conditions for convective-diffusion transport model in the case of noisy measurements» удостоен диплома III степени в конкурсе «Best Paper Award»).
  - II Всероссийская научная конференция с международным участием «Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения», Тольятти, 22–24 апреля 2019 г.
  - Вторая международная научно-практическая конференция «Нечеткие системы и мягкие вычисления. Промышленные применения» (FTI-2018), Ульяновск, 23–25 октября 2018 г.

Исследования по теме диссертации частично поддержаны грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект: p\_a № 19-41-730009) и внутривузовским грантом УлГПУ им. И. Н. Ульянова (приказ № 133 от 31 мая 2019 г.).

### **Публикации**

По теме исследования опубликованы 16 печатных работ, в том числе 3 статьи в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ, 4 статьи в изданиях, индексируемых в международных системах цитирования Scopus и Web of Science, 3 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

## Личный вклад автора

Все основные теоретические результаты диссертационного исследования получены соискателем самостоятельно. Разработка программного комплекса осуществлялась совместно с научным руководителем. Постановка и проведение вычислительных экспериментов выполнены соискателем также самостоятельно. Анализ результатов осуществлялся совместно с научным руководителем.

## Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, списка иллюстративного материала, списка таблиц, списка алгоритмов и четырех приложений. Общий объём диссертации 152 страницы, включая 62 рисунка и 16 таблиц. Основной текст диссертации составляет 140 страниц. Список литературы состоит из 90 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** приводится обоснование актуальности темы исследования, формулируются цель, задачи, объект и предмет исследования, научная новизна, положения, выносимые на защиту; описываются теоретическая и практическая значимость работы, внедрение результатов, методология и методы исследования, степень достоверности полученных результатов; приводятся сведения об апробации работы и личном вкладе автора.

**Первая глава** посвящена построению и исследованию дискретных линейных стохастических моделей конвективно-диффузионного переноса в пространстве состояний.

В **разделе 1.1** приводится постановка задачи. Пусть дана одномерная математическая модель конвективно-диффузионного переноса, описываемая уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (1)$$

с начальным условием

$$c(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$c(a, t) = f(t), \quad c(b, t) = g(t) \quad (3)$$

или

$$c(a, t) = f(t), \quad \frac{\partial c(b, t)}{\partial x} = -\lambda[c(b, t) - g(t)], \quad (4)$$

где  $x \in [a; b]$  — пространственная координата;  $t \in [0; T]$  — время;  $c(x, t)$  — искомая функция, например, концентрация или температура некоторого вещества

в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $v$  — скорость конвекции;  $\alpha$  — коэффициент диффузии (единицы измерения величин зависят от типа решаемой задачи). Таким образом, рассматриваются модели либо с двумя граничными условиями первого рода (3), либо со смешанными граничными условиями первого и третьего рода (4).

В работе рассматриваются следующие задачи параметрической идентификации: 1) определение коэффициентов  $v$  и  $\alpha$  уравнения (1), 2) определение функций  $f(t)$  и  $g(t)$ , входящих в граничные условия (3) или (4), по данным зашумленных измерений значений функции  $c(x, t)$  в дискретные моменты времени. Для решения данных задач в работе используются методы теории оптимального оценивания для дискретных линейных стохастических систем в пространстве состояний следующего вида:

$$\begin{cases} c_k = F_{k-1}c_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, \\ z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

где (5) — уравнение (модель) объекта/процесса,  $c_k \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния системы,  $u_k \in \mathbb{R}^r$  — вектор входных воздействий (управления),  $w_k \in \mathbb{R}^q$  — шум в объекте,  $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — переходная матрица состояния,  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times r}$  — матрица управления,  $G_k \in \mathbb{R}^{n \times q}$  — передаточная матрица шума; (6) — уравнение (модель) зашумленных измерений,  $z_k \in \mathbb{R}^m$  — вектор измерений,  $\xi_k \in \mathbb{R}^m$  — шум в измерителе,  $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  — матрица измерений;  $c_0 \sim \mathcal{N}(\bar{c}_0, \Pi_0)$ ; шумы  $w_k$  и  $\xi_k$  образуют независимые нормально распределенные последовательности с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами  $Q_k \geq 0$  и  $R_k > 0$ .

Уравнение объекта в общем случае представляет собой дискретную линейную динамическую систему, записанную в матричном виде. В уравнении измерений матрица  $H_k$  отвечает за выбор измеряемых компонент вектора состояния. В зависимости от решаемой задачи параметрической идентификации вектор  $u_k$  является известным или неизвестным. Наряду с (5) также рассматривается уравнение объекта вида

$$c_k = F_{k-1}c_{k-1} + B_{k-1}^1 u_{k-1}^1 + B_{k-1}u_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, \quad (7)$$

в котором вектор входных воздействий  $u_k^1$  считается известным, а вектор  $u_k$  — неизвестным.

В разделах 1.2 и 1.3 выполняется дискретизация исходной модели и построение уравнений объекта для случаев граничных условий вида (3) и (4) соответственно. В рассматриваемой пространственно-временной области задается конечно-разностная сетка  $\{(x_i, t_k) | i = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, K\}$ , где

$x_i = a + i\Delta x$ ,  $t_k = k\Delta t$ ,  $\Delta x = (b - a)/N$ ,  $\Delta t = T/K$ . Используя трехточечную конечно-разностную схему, в случае граничных условий (3) получаем уравнение объекта

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{bmatrix}}_{c_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^{k-1} \end{bmatrix}}_{u_{k-1}}, \quad (8)$$

$k = 1, 2, \dots, K$ ,

а в случае граничных условий (4):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{bmatrix}}_{c_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_5 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^k \end{bmatrix}}_{u_{k-1}}, \quad (9)$$

$k = 1, 2, \dots, K$ ,

где  $a_1 = r_1 + r_2$ ,  $a_2 = 1 - 2r_2$ ,  $a_3 = r_2 - r_1$ ,  $r_1 = (v\Delta t)/(2\Delta x)$ ,  $r_2 = (\alpha\Delta t)/\Delta x^2$ ,  $a_4 = 1/(1 + \lambda\Delta x)$ ,  $a_5 = (\lambda\Delta x)/(1 + \lambda\Delta x)$ .

В (8) компоненты вектора состояния  $c_k$  соответствуют всем внутренним узлам пространственной сетки ( $n = N - 1$ ), а в (9) — всем внутренним узлам пространственной сетки и правой границе ( $n = N$ ), вектор входных воздействий  $u_k$  является двумерным ( $r = 2$ ), а матрицы  $F_k$  и  $B_k$  — постоянными.

В случае, когда одно из граничных условий известно, получается уравнение объекта вида (7). Например, если левое граничное условие известно, а правое неизвестно, то (9) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{bmatrix}}_{c_k} &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}^1} \underbrace{f^{k-1}}_{u_{k-1}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ a_5 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{g^k}_{u_{k-1}}, \\
k &= 1, 2, \dots, K.
\end{aligned} \tag{10}$$

К полученным уравнениям добавляется уравнение зашумленных измерений вида (6):

$$z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \tag{11}$$

где вид матрицы измерений  $H_k$  и характеристики шума  $\xi_k$  зависят от используемых сенсоров. В работе рассматриваются только постоянные матрицы измерений  $H_k$ . Таким образом, построенные системы являются дискретными инвариантными во времени линейными системами. Приводятся примеры построения дискретных моделей для различных граничных условий и схем измерений.

В разделе 1.4 проводится анализ свойств полной наблюдаемости и управляемости построенных дискретных моделей для матриц измерений вида

$$H = [e_{1,j_1}^T \mid e_{2,j_2}^T \mid \cdots \mid e_{m,j_m}^T]^T, \tag{12}$$

где  $e_{i,j_i} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$  —  $i$ -я строка матрицы с единицей на  $j_i$ -м месте.

Для автоматической проверки свойств полной управляемости и наблюдаемости разработаны скрипты для системы символьных вычислений Maple и приведены результаты их использования для различных моделей и матриц измерений вида (12). Рассматривается задача определения минимально необходимого количества сенсоров, при котором система остается полностью наблюдаемой. Полученные результаты сформулированы в виде утверждений 1.1, 1.2 и 1.3.

**Раздел 1.5** содержит краткие выводы по главе 1.

**Вторая глава** посвящена решению задачи идентификации коэффициентов конвекции и диффузии: *определить коэффициенты  $v$  и  $\alpha$  в уравнении (1) по результатам зашумленных измерений значений функции  $c(x, t)$  в отдельных точках рассматриваемого отрезка в последовательные моменты време-*

ни (функции  $\varphi(x)$ ,  $f(t)$ ,  $g(t)$  и коэффициент  $\lambda$ , входящие в начальное и граничные условия, предполагаются известными).

В разделе 2.1 приводится постановка задачи и выполняется ее формализация. Пусть  $\theta = [v, \alpha]^T$  — неизвестный векторный параметр, подлежащий идентификации. Перейдем от исходной непрерывной модели (1), (2), (3) или (1), (2), (4) к дискретной линейной стохастической системе в пространстве состояний (5), (6). Поскольку неизвестные коэффициенты уравнения  $v$  и  $\alpha$  входят в коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  матриц  $F_k$  и  $B_k$  дискретной системы, она будет иметь вид

$$\begin{cases} c_k = F_{k-1}(\theta)c_{k-1} + B_{k-1}(\theta)u_{k-1}, & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. & (14) \end{cases}$$

Задача параметрической идентификации состоит в нахождении неизвестного параметра  $\theta$  по известным входным воздействиям  $U_0^{K-1} = \{u_0, u_1, \dots, u_{K-1}\}$  и данным наблюдений  $Z_1^K = \{z_1, \dots, z_K\}$  в соответствии с выбранным критерием качества идентификации  $J(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1})$ . В этом случае задача оценки неизвестного параметра требует решения задачи нелинейного программирования

$$\hat{\theta}_{min} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} J(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}), \quad (15)$$

где  $\theta \in D(\theta)$  (область определения  $\theta$ ).

Одним из стандартных подходов к решению задач параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем вида (13), (14) является использование метода максимального правдоподобия, в котором в качестве критерия идентификации используется отрицательная логарифмическая функция правдоподобия

$$J_{CKF}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}) = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left\{ \ln[\det(\Sigma_{\nu,k})] + \nu_k^T \Sigma_{\nu,k}^{-1} \nu_k \right\}, \quad (16)$$

где вектор невязки  $\nu_k$  и его ковариационная матрица  $\Sigma_{\nu,k}^{-1}$  для заданного значения параметра  $\theta$  вычисляются из известных уравнений дискретного фильтра Калмана.

В разделе 2.2 формулируется правило вычисления критерия  $J_{CKF}$  для рассматриваемых моделей (алгоритм 2.2, утверждение 2.1), приводятся результаты численных экспериментов по идентификации коэффициентов  $v$  и  $\alpha$  с использованием безградиентных метаэвристических методов оптимизации `simulannealbnd` и `ga` модуля Optimization Toolbox в системе MATLAB.

В разделе 2.3 формулируется правило вычисления градиента критерия идентификации  $J_{CKF}$  (предложение 2.3), приводятся результаты численных

экспериментов по идентификации коэффициентов  $v$  и  $\alpha$  с использованием градиентного метода оптимизации `fminunc` в системе MATLAB.

В разделе 2.4 рассматривается алгоритм численно устойчивой SVD-модификации фильтра Калмана (алгоритм 2.3), основанный на представлении ковариационной матрицы ошибок оценивания в виде  $P_k = \Theta_{P_k} D_{P_k} \Theta_{P_k}^T$ , где  $\Theta_{P_k}$  — ортогональная матрица и  $D_{P_k}$  — диагональная матрица, содержащая сингулярные значения матрицы  $P_k$ . Уравнения SVD-фильтра позволяют рекуррентно обновлять SVD-факторы  $\{\Theta_{P_k}, D_{P_k}\}$  матрицы  $P_k$  с помощью сингулярного разложения (процедуры SVD-факторизации). На основе SVD-фильтра записывается критерий идентификации

$$J_{SVD}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}) = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left\{ \ln[\det(D_{\Sigma_{\nu,k}})] + \bar{v}_k^T D_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1} \bar{v}_k \right\}, \quad (17)$$

где диагональная матрица  $D_{\Sigma_{\nu,k}}$  и вектор  $\bar{v}_k$  доступны на каждом шаге работы фильтра, и формулируется алгоритм вычисления критерия идентификации  $J_{SVD}$  (алгоритм 2.4, утверждение 2.2).

---

### Алгоритм 1 Вычисление критерия идентификации на основе SVD-модификации фильтра Калмана

---

**Вход:**  $\theta, Z_1^K, U_0^{K-1}, \bar{c}_0, \Pi_0$

- 1  $\hat{c}_0 = \bar{c}_0, [\Theta_{P_0}, D_{P_0}] = \text{svd}(\Pi_0), J_{SVD} = Km \ln(2\pi)$
- 2 **for**  $k = 1, 2, \dots, K$  **do**
- 3  $\begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}}^{1/2} \Theta_{P_{k|k-1}}^T F_{k-1}^T \\ \Theta_{P_{k|k-1}}^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{TU} \begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}}^{1/2} \\ \Theta_{P_{k|k-1}}^T \end{bmatrix}$
- 4  $\hat{c}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{c}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1}$
- 5  $[\Theta_{R_k}, D_{R_k}] = \text{svd}(R_k)$
- 6  $\begin{bmatrix} D_{R_k}^{1/2} \Theta_{R_k}^T \\ D_{P_{k|k-1}}^{1/2} \Theta_{P_{k|k-1}}^T H_k^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{MU}^{(1)} \begin{bmatrix} D_{\Sigma_{\nu,k}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{\Sigma_{\nu,k}}^T$
- 7  $\bar{K}_k = P_{k|k-1} H_k^T \Theta_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1}, K_k = \bar{K}_k D_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1} \Theta_{\Sigma_{\nu,k}}^T$
- 8  $\begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}}^{1/2} \Theta_{P_{k|k-1}}^T (I - K_k H_k)^T \\ D_{R_k}^{1/2} \Theta_{R_k}^T K_k^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{MU}^{(2)} \begin{bmatrix} D_{P_k}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{P_k}^T$
- 9  $\bar{v}_k = \Theta_{\Sigma_{\nu,k}}^T (z_k - H_k \hat{c}_{k|k-1}), \hat{c}_k = \hat{c}_{k|k-1} + \bar{K}_k D_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1} \bar{v}_k$
- 10  $J_{SVD} = J_{SVD} + \ln[\det(D_{\Sigma_{\nu,k}})] + \bar{v}_k^T D_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1} \bar{v}_k$
- 11 **end for**
- 12  $J_{SVD} = \frac{1}{2} J_{SVD}$

**Выход:**  $J_{SVD}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1})$

---

Обновление основных величин в SVD-фильтре выполняется при помощи ортогональных преобразований, применяемых к матричным массивам, содержащим все нужные для расчетов величины, а результаты вычислений также получаются в матричных массивах.

Численная устойчивость алгоритмов идентификации на основе критерия  $J_{SVD}$  демонстрируется на примере следующей модели

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (18)$$

$$c(x, 0) = 0, \quad (19)$$

$$c(0, t) = 4t |\sin \pi t|, \quad c(1, t) = t \quad (20)$$

или

$$c(0, t) = 4t |\sin \pi t|, \quad \frac{\partial c(1, t)}{\partial x} = -[c(1, t) - t], \quad (21)$$

где  $x \in [0; 1]$ ,  $t \in [0; 2]$ ,  $v = 2$ ,  $\alpha = 1$ .

Рассматривается пространственно-временная сетка с 6 узлами по оси  $Ox$  и 101 узлом по оси  $Ot$  ( $N = 5$ ,  $K = 100$ ,  $\Delta x = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.02$ ,  $n = 4$  для граничных условий (20),  $n = 5$  для граничных условий (21)). На рисунке 1 приведены графики решения прямой задачи с граничными условиями (20) и (21) соответственно.

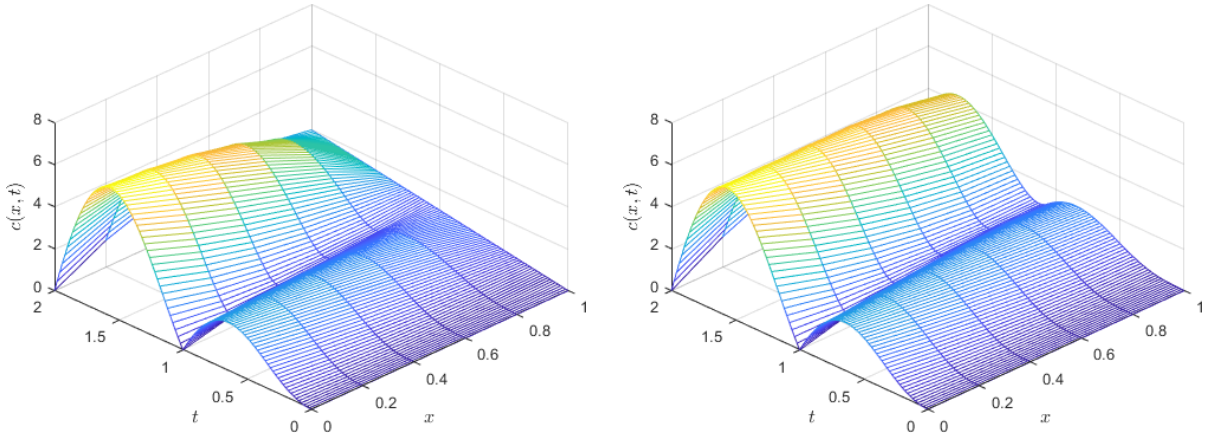


Рис. 1. Решение задачи с граничными условиями (20) и (21)

Зашумленные измерения производятся в двух узлах пространственной сетки, соответствующих первой и последней компонентам вектора состояния. Рассматриваются различные варианты ковариационной матрицы шума  $R_k$  в измерителе:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Показывается, что сначала для обоих критериев идентификации с увеличением точности измерений (уменьшении  $\delta$ ) средние значения идентифицированных параметров  $v$  и  $\alpha$  стремятся к истинным, а ошибки RMSE и MAPE уменьшаются, но, начиная со значения  $\delta = 10^{-14}$ , для граничных условий (20) и  $\delta = 10^{-13}$ , для граничных условий (21) ошибки идентификации на основе стандартного фильтра Калмана начинают быстро нарастать, вплоть до аварийного завершения работы функции минимизации, что обусловлено расходимостью стандартного фильтра Калмана (резким ухудшением обусловленности



ковариационной матрицы) и, как следствие, некорректным вычислением значений критерия идентификации (16). В то же время процедура идентификации на основе SVD-фильтра выполняется корректно для всех значений  $\delta$ .

**Раздел 2.5** содержит краткие выводы по главе 2.

**Третья глава** посвящена решению задачи численной идентификации граничных условий моделей конвективно-диффузионного переноса: *определить функции  $f(t)$  и  $g(t)$ , входящие в граничные условия (3) или (4), по результатам зашумленных измерений значений функции  $c(x, t)$  в отдельных точках рассматриваемого отрезка в последовательные моменты времени (коэффициенты  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  предполагаются известными).*

В **разделе 3.1** приводится формулировка задачи, для решения которой предлагается использовать алгоритм Гиллейнса – Де-Мора <sup>22</sup> для дискретных линейных стохастических систем вида (5), (6). Отличительными особенностями данного алгоритма являются: 1) одновременное оценивание векторов состояния и входных воздействий, 2) отсутствие априорной информации о динамике входных воздействий.

В **разделе 3.2** рассматриваются две модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора (алгоритмы 3.1 и 3.2), различающиеся этапом обновления оценки вектора состояния по измерениям, и приводятся результаты численных экспериментов их применения для случаев, когда оба граничных условия неизвестны и когда одно из граничных условий известно.

В **разделе 3.3** формулируется квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора в ковариационной форме (алгоритм 3.3) и доказывается теорема 3.1 об алгебраической эквивалентности построенной модификации исходному алгоритму, что подтверждается результатами численных экспериментов.

Основная идея квадратно-корневых модификаций алгоритмов дискретной фильтрации калмановского типа заключается в представлении положительно полуопределенных матриц, в частности, ковариационной матрицы ошибок оценивания, в виде  $P_k = S_k S_k^T$ , где  $S_k$  – “квадратный корень” матрицы  $P_k$ , являющийся нижней треугольной матрицей. На каждом этапе квадратно-корневого алгоритма обновление основных величин фильтра выполняется при помощи ортогональных преобразований, применяемых к матричным массивам, содержащим все нужные для расчетов величины, а результаты вычислений также получаются в матричных массивах. На этапе инициализации и в

---

<sup>22</sup> Gillijns, S. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discretetime systems / S. Gillijns, B.D. Moor // Automatica. — 2007. — Vol. 43. — P. 111–116.

основном цикле построенного алгоритма разложение матриц  $\Pi_0$ ,  $Q_{k-1}$  и  $R_k$  осуществляется с помощью алгоритма Холецкого.

---

**Алгоритм 2** Квадратно-корневой ковариационный алгоритм оценивания состояния и входных воздействий

---

**Вход:**  $\bar{c}_0, \Pi_0$

- 1  $\hat{c}_0 = \bar{c}_0, S_{P_0} = \text{chol}(\Pi_0)$  // Инициализация
- 2 **for**  $k = 1, 2, \dots, K$  **do**
- // Прогноз оценки вектора состояния
- 3  $\hat{c}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{c}_{k-1}$
- 4  $S_{Q_{k-1}} = \text{chol}(Q_{k-1})$
- 5  $\begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 \begin{bmatrix} S_{P_{k-1}}^T & F_{k-1}^T \\ S_{Q_{k-1}}^T \end{bmatrix}$
- // Оценка вектора входных воздействий
- 6  $S_{R_k} = \text{chol}(R_k)$
- 7  $\begin{bmatrix} S_{\bar{R}_k}^T & \bar{K}_k^T \\ 0 & S_{P_k^*}^T \end{bmatrix} = Q_2 \begin{bmatrix} S_{R_k}^T & 0 \\ S_{P_{k|k-1}}^T & H_k^T & S_{P_{k|k-1}}^T \end{bmatrix}$
- 8  $\begin{bmatrix} S_{D_{k-1}}^{-T} \end{bmatrix} = Q_3 \begin{bmatrix} S_{\bar{R}_k}^{-T} & H_k & B_{k-1} \end{bmatrix}$
- 9  $M_k = S_{D_{k-1}} S_{D_{k-1}}^T B_{k-1}^T H_k^T S_{\bar{R}_k}^{-T} S_{\bar{R}_k}^{-1}$
- 10  $\hat{u}_{k-1} = M_k(z_k - H_k \hat{c}_{k|k-1})$
- // Коррекция оценки вектора состояния
- 11  $K_k = \bar{K}_k S_{\bar{R}_k}^{-1}$
- 12  $\hat{c}_k^* = \hat{c}_{k|k-1} + B_{k-1} \hat{u}_{k-1}$
- 13  $\hat{c}_k = \hat{c}_k^* + K_k(z_k - H_k \hat{c}_k^*)$
- 14  $\begin{bmatrix} S_{P_k}^T \\ 0 \end{bmatrix} = Q_4 \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T \\ S_{D_{k-1}}^T & B_k^T & (I_n - K_k H_k)^T \end{bmatrix}$
- 15 **end for**

**Выход:**  $\hat{c}_k, S_{P_k}, \hat{u}_{k-1}, S_{D_{k-1}}, k = 1, 2, \dots, K$

---

К преимуществам разработанного алгоритма можно отнести: сохранение симметричности и положительной определенности ковариационных матриц ошибок оценивания векторов состояния и входных воздействий; возможность экономии памяти за счет работы с треугольными факторами; удобную форму для реализации параллельной схемы вычислений.

В качестве примера рассматривается процесс идентификации граничного условия на левом конце отрезка, при известном правом граничном условии, с помощью квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора для следующей модели

$$\frac{\partial c}{\partial t} + 2 \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (23)$$

$$c(x, 0) = 10x(1 - x), \quad c(0, t) = t, \quad c(1, t) = 0, \quad x \in [0; 1], \quad t \in [0; 1]. \quad (24)$$

На рисунках 2 и 3 приведены результаты моделирования процесса идентификации на сетке с 9 пространственными узлами для 100 измерений с од-

ним сенсором в точке, соответствующей первой компоненте вектора состояния ( $\Delta x = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $R_k = 0.001$ ).

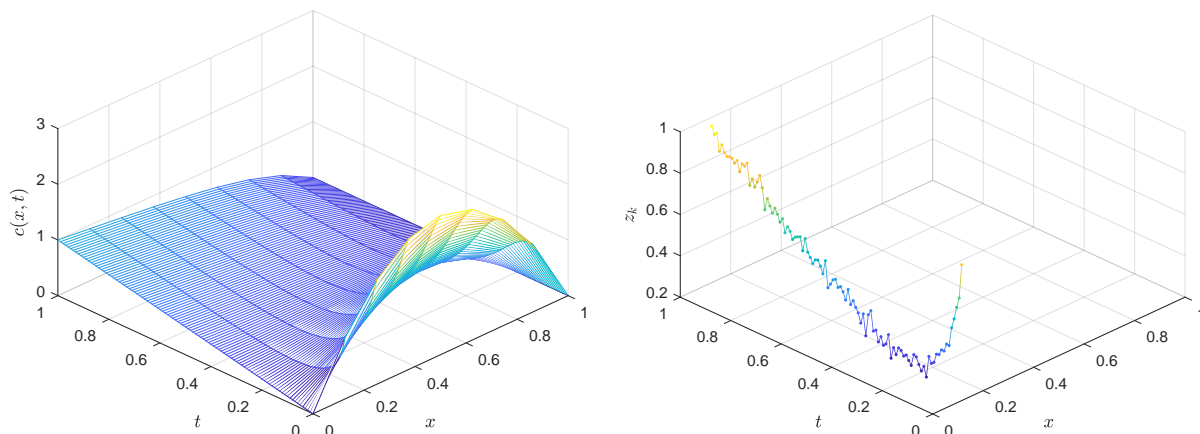


Рис. 2. Решение задачи и зашумленные измерения

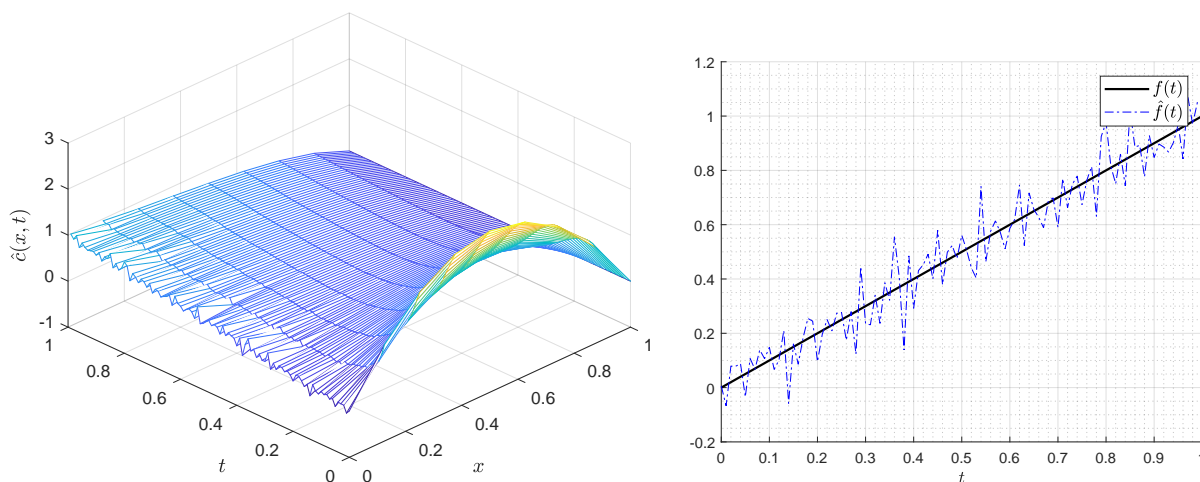


Рис. 3. Оценка решения и граничного условия

**Раздел 3.4** содержит краткие выводы по главе 3.

**Четвертая глава** посвящена описанию программного комплекса, предназначенного для компьютерного моделирования процессов параметрической идентификации математических моделей конвективно-диффузионного переноса. Программный комплекс реализован в виде скриптов и функций на языке MATLAB и состоит из набора компонентов, позволяющих решать следующие задачи: 1) описание исходной модели, 2) построение конечно-разностной сетки и дискретизация непрерывной модели, 3) моделирование экспериментальных данных, 4) идентификация коэффициентов конвекции и диффузии, 5) идентификация граничных условий, 6) визуализация полученных результатов, 7) проведение численных экспериментов.

В разделе 4.1 описывается структура программного комплекса, состав его компонентов, основные структуры данных и функции; приводятся блок-схемы процессов параметрической идентификации. На рисунке 4 перечислены компоненты и приведена структурная схема программного комплекса.

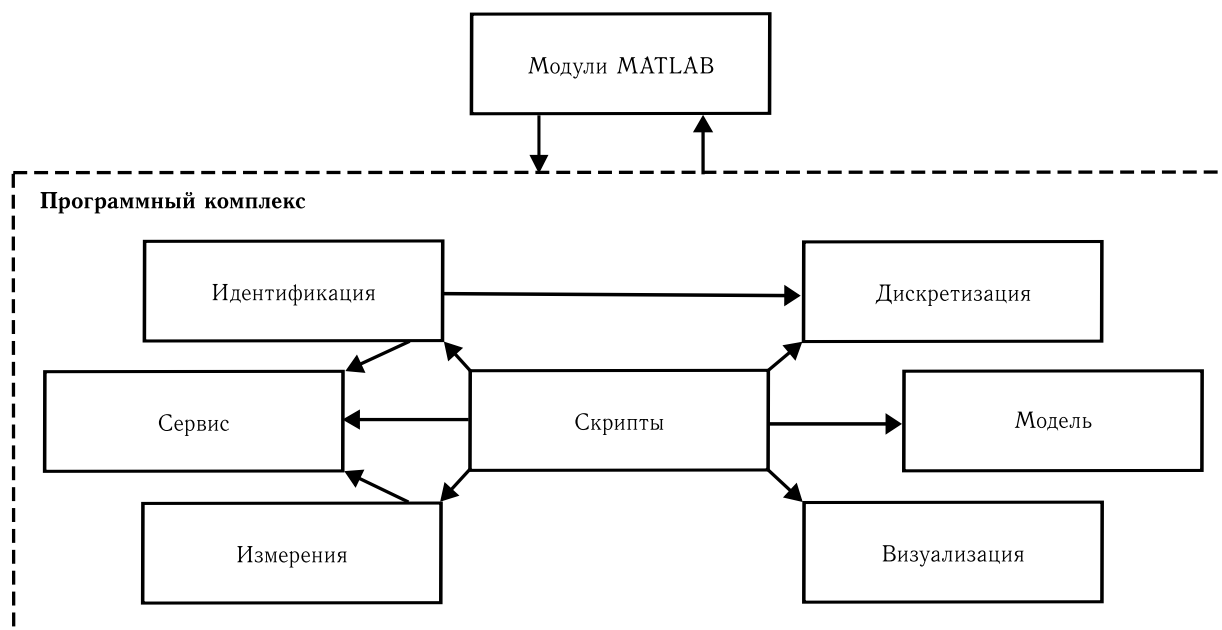


Рис. 4. Структура программного комплекса

В разделе 4.2 рассматриваются примеры решения задач параметрической идентификации при помощи программного комплекса.

Раздел 4.3 содержит краткие выводы по главе 4.

В заключении перечисляются полученные в диссертации новые научные результаты, на основании которых сделаны общие выводы и указываются возможные направления дальнейших исследований.

Приложения содержат скрипты Maple для автоматической проверки свойств полной наблюдаемости и полной управляемости, формулировки мета-эвристических алгоритмов оптимизации, а также свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

## Результаты и выводы

В диссертации разработаны новые методы параметрической идентификации математических моделей процессов конвективно-диффузионного переноса на основе рекуррентных алгоритмов дискретной фильтрации.

В работе получены новые научные **результаты**:

1. Построены дискретные линейные стохастические модели конвективно-диффузионного переноса в пространстве состояний. Проанализированы свойства полной наблюдаемости и управляемости полученных моделей.

2. Сформулированы алгоритмы вычисления критериев идентификации неизвестных коэффициентов уравнения конвекции-диффузии на основе стандартного фильтра Калмана и его SVD-модификации. Получены формулы для вычисления градиента критерия идентификации на основе стандартного фильтра Калмана.

3. Сформулированы алгоритмы численной идентификации граничных условий на основе алгоритмов Гиллейнса—Де-Мора и приведены примеры их применения для случаев, когда оба граничных условия неизвестны и когда одно из граничных условий известно. Сформулирована квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса—Де-Мора в ковариационной форме и доказана ее алгебраическая эквивалентность исходному алгоритму.

4. Разработан комплекс программ на языке MATLAB для компьютерного моделирования процессов параметрической идентификации математических моделей конвективно-диффузионного переноса.

**Выводы** из полученных в диссертации результатов:

1. Переход от непрерывных моделей конвективно-диффузионного переноса к моделям, описываемым дискретными линейными стохастическими системами в пространстве состояний, позволяет решать задачи параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений.

2. При программной реализации методов параметрической идентификации предпочтительнее использовать алгоритмы на основе численно устойчивых к ошибкам машинного округления рекуррентных алгоритмов дискретной фильтрации.

3. Результаты численного моделирования подтверждают работоспособность предложенных подходов.

## **Основные публикации по теме диссертации**

### **Публикации в рецензируемых научных изданиях, включенных в перечень ВАК РФ, международные реферативные базы данных Scopus и Web of Science**

1. Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport model / A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, A. N. Kuvshinova, H. R. Tapia Garza // Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference “Fuzzy Technologies in the Industry — FTI 2018”, Ulyanovsk, Russia, October 23–25, 2018. — CEUR-WS.org, 2018. — P. 188–196. — URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2258/paper24.pdf>. (Scopus)
2. Tsyganov, A. V. Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model subject to noisy measurements / A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, A. N. Kuvshinova // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1368. — P. 042029. — DOI: 10.1088/1742-6596/1368/4/042029 (Scopus)

3. Кувшинова, А. Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений / А. Н. Кувшинова // Журнал Средневолжского Математического Общества. — 2019. — Т. 21, № 4. — С. 469–479. — DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.469-479 (BAK)
4. Parameter identification algorithm for convection-diffusion transport model / A. N. Kuvshinova, A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, H. R. Tapia Garza // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1745. — P. 012110. — DOI: 10.1088/1742-6596/1745/1/012110 (Scopus)
5. Кувшинова, А. Н. Программный комплекс для компьютерного моделирования процессов параметрической идентификации математических моделей конвективно-диффузионного переноса / А. Н. Кувшинова, А. В. Цыганов // Программные продукты и системы. — 2021. — Т. 34, № 4. — С. 639–648. — DOI: 10.15827/0236-235X.136.639-648 (BAK)
6. Кувшинова, А. Н. Математическое моделирование процесса параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса с применением SVD-фильтра Калмана / А. Н. Кувшинова, А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2021. — Т. 25, № 4. — С. 716–737. — DOI: 10.14498/vsgtu1876 (BAK, WoS, Scopus)

### Публикации в других изданиях

7. Кувшинова, А. Н. Анализ наблюдаемости дискретной линейной стохастической модели конвективно-диффузионного переноса / А. Н. Кувшинова // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения. Сборник научных статей II Всероссийской научной конференции с международным участием: 22–24 апреля 2019 г. В двух частях. Ч. 1. — Тольятти : Издатель Качалин Александр Васильевич, 2019. — С. 244–248.
8. Цыганов, А. В. Динамическая идентификация граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. Н. Кувшинова // Сборник трудов V международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019), Самара, Россия, 21–24 мая, 2019. — Т. 3. — Самара : Новая техника, 2019. — С. 169–177.
9. Кувшинова, А. Н. Анализ дискретной линейной стохастической модели конвективно-диффузионного переноса / А. Н. Кувшинова // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. — 2019. — № 1. — С. 65–69.
10. Алгоритм численной идентификации параметров в модели конвективно-диффузионного переноса / А. Н. Кувшинова, А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, У. Р. Тапия Гарса // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2020). Сборник трудов по материалам VI Международной конференции и молодежной школы (г. Самара, 26–29 мая): в 4 т. / Самар. нац.-исслед. ун-т им. С. П. Королева (Самар. ун-т), Ин-т систем. обраб. изобр. РАН-фил. ФНИЦ "Кристаллография и фотоника"РАН; [под ред. В. А. Соболева]. — Т. 3. Математическое моделирование физико-технических процессов и систем. — Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2020. — С. 825–832.
11. Кувшинова, А. Н. Адаптивное оценивание дискретной модели конвективно-диффузионного переноса на основе численно эффективных алгоритмов Калмановской фильтрации / А. Н. Кувшинова // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова. [Электронный ресурс]. — Москва : МАКС Пресс, 2021.
12. Кувшинова, А. Н. Об алгоритме дискретной фильтрации для линейных стохастических систем с неизвестными входными воздействиями / А. Н. Кувшинова // Интегрированные системы управления: сб. науч. тр. науч.-технич. конф., Ульяновск, 18–19 мая 2021 г. / отв. за вып. А. Л. Савкин. — Ульяновск : ФНПЦ АО «НПО «Марс», 2021. — С. 90–95.
13. Кувшинова, А. Н. Численная идентификация граничных условий модели конвективно-диффузионного переноса на основе алгоритма Гиллийнса-Мура / А. Н. Кувшинова // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы :

сборник материалов международной конференции, Белгород, 25–29 октября 2021 г. / под ред. В. Б. Васильева, И. С. Ломова. — Белгород : ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. — С. 143–145.

### **Свидетельства о регистрации программ**

14. Цыганова, Ю. В. Динамическая идентификация граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса v1.0 / Ю. В. Цыганова, А. В. Цыганов, А. Н. Кувшинова // РОСПАТЕНТ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019616886 от 30.05.2019 г.
15. Кувшинова, А. Н. Программа для идентификации параметров модели конвективно-диффузионного переноса v1.0 / А. Н. Кувшинова, А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова // РОСПАТЕНТ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020619321 от 17.08.2020 г.
16. Кувшинова, А. Н. Программный комплекс для моделирования процессов параметрической идентификации математических моделей конвективно-диффузионного переноса v1.0 / А. Н. Кувшинова, А. В. Цыганов // РОСПАТЕНТ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021664064 от 17.08.2021 г.

*Научное издание*

КУВШИНОВА Анастасия Николаевна

### **АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук  
«Параметрическая идентификация моделей конвективно-диффузионного переноса на основе  
рекуррентных алгоритмов дискретной фильтрации»

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ