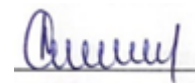


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



**Бейбалаев Ветлугин Джабраилович**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
ВО ФРАКТАЛЬНЫХ И ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

Специальность: 1.2.2 –  
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
доктор физико-математических наук  
Аливердиев Абутраб Александрович

Махачкала – 2024

## Оглавление

Введение.....	6
Глава I. Интегралы и производные дробного порядка. ....	22
§ 1. Некоторые специальные функции .....	22
§ 2. Дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля.....	28
2.1. Дробные интегралы и производные на отрезке ....	28
2.2. Дробные интегралы и производные на оси и полуоси.....	33
§ 3. Преобразования Лапласа дробных производных.....	44
Глава II. Численные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка.....	46
§ 1. Аппроксимация производных дробного порядка.....	47
1.1. Аппроксимация дробной производной Капуто ....	47
1.2. Аппроксимация дробной производной Римана–Лиувилля.....	50
§ 2. Численный метод решения задачи Коши для системы ОДУ с дробной производной Капуто .....	53
§ 3. Численные методы решения задачи Коши для системы ОДУ с дробной производной Римана–Лиувилля .....	58
Глава III. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с дробной производной .....	64
§ 1. Разностная схема с весами, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто.....	67
§ 2. Численный метод решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса .....	74
§ 3. Численный метод решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с производными дробного порядка Римана–Лиувилля.....	79
§ 4. Численный метод решения краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто .....	83

Глава IV. Исследование динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка .....	88
§ 1. Дробный осциллятор.....	92
§ 2. Вынужденные колебания дробного осциллятора.....	96
§ 3. Линейные однородные динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка.....	100
§ 4. Дробный «брюсселятор» .....	107
§ 5. Обобщенный нелинейный осциллятор Дуффинга.....	116
§ 6. Модель «хищник–жертва» в нелокальной постановке.....	122
§ 7. Хаотическое поведение динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка .....	130
§ 8. Фрактальные характеристики микроструктуры газоразрядных каналов и динамика электронов в них. ....	132
8.1. Экспериментальные результаты и их обсуждение .....	133
8.2. Описание движения электронов в динамической фрактальной структуре ветвящихся каналов .....	137
Глава V. Исследование процессов теплопроводности во фрактальных и пористых средах .....	145
§ 1. Исследование нелокальных процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с производной дробного порядка по времени.....	146
1.1. Математическая постановка задачи.. ..	146
1.2. Численное исследование математической модели .....	148
§ 2. Численное исследование процесса неизотермической фильтрации во фрактальных средах с памятью.....	152
2.1. Численный метод решения краевой задачи .....	154

2.2. Сходимость разностной схемы.....	157
§ 3. Исследование нелокальных процессов теплопроводности для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций.....	165
3.1. Математическая постановка задачи.....	166
3.2. Решение задачи.....	168
3.3. Результаты и обсуждение.....	170
§ 4. Исследование нелокальных процессов конвективного теплообмена с внешней средой для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти.....	173
4.1. Математическая постановка задачи.....	173
4.2. Решение задачи.....	175
4.3. Анализ решения.....	179
Глава VI. Исследование температурных и барических закономерностей изменения теплопроводности горных пород.....	183
§ 1. Исследование температурных и барических закономерностей изме- нения теплопроводности песчаников.....	184
1.1. Вклад водонасыщения в температурно-барическое поведение эф- фективной теплопроводности песчаника различной упорядоченности.....	191
§2. Исследование температурной и барической зависимости теплопро- водности гранитов.....	199
§3. Исследование температурной и барической зависимости теплопро- водности гранулитов.....	206
§4. Расчет теплопроводности газонасыщенных аргиллитов в зависимо- сти от давления и температуры.....	210
§5. Исследование температурной и барической зависимости теплопроводности известняка.....	213
§ 6. Исследование температурного поля горной породы одномерным нелинейным уравнением теплопроводности с дробной	

производной Капуто по времени .....	219
§ 7. Асимптотика прогрева горных пород добычной скважиной.....	222
Глава VII. Программная реализация алгоритмов численного моделирования динамических процессов в фрактальных и пористых средах.....	232
§ 1. Описание и структура комплекса программ моделирования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями.....	234
§ 2. Описание и структура комплекса программ компьютерного моделирования нелокальных процессов теплопереноса в фрактальных средах.....	237
§ 3. Описание и структура комплекса программ расчета теплопроводности горных пород.....	240
Заключение.....	244
Литература .....	246
Приложение 1 .....	268
Приложение 2.....	269
Приложение 3.....	270
Приложение 4.....	271

## Введение

Одним из перспективных подходов при описании многих физических процессов во фрактальных и пористых средах является использование математического аппарата интегралов и производных дробных порядков. Дробные степени в показателях размерностей очень часто возникают при моделировании различных процессов во фрактальных (разномасштабных, подобных целому) средах. Как показано в работе [108], дробный математический анализ является важнейшим методом для построения моделей теоретической физики, в которых интегро-дифференциальные операторы дробного порядка по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память, и пространственную нелокальность сложных сред, процессов и явлений.

Описание физических свойств систем с фрактальной структурой привело к развитию аналитических методов в концепции фрактала, которые основаны на использовании математического аппарата интегралов и производных дробного порядка. Математический аппарат дробных производных и интегралов имеет давнюю историю. В создании основ математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка участвовали известные математики Эйлер, Г.Лейбниц, Абель, Риман [14]. В настоящее время известны монографии по дробному исчислению как отечественных (Нахушева А.М. [85], Учайкина В.В. [115], Нахушевой В.А. [87], Мейланова Р.П. [75], Псху А.В. [97], Мамчуева М.О.[72], Самко С.Г., Килбас А.А., Маричева О.И. [103], Паровик Р.А. [92]) так и зарубежных (Капуто, Маинарди [211], Христова [166] и др.) авторов. Интерес к математическим методам, основанным на математическом аппарате дробного исчисления, за последнее время был вызван в связи с применением этих методов при решении различных задач прикладного характера. С началом развития концепции фрактала, методы дробного исчисления стали применять и при решении прикладных задач в теории тепломассопереноса, вычислительной математики, биофизики, теории информации и социологии [14].

Хотя сам математический аппарат интегродифференцирования дробного порядка достаточно развит, его применение для моделирования различных процессов в системах с фрактальной структурой начат сравнительно недавно [14]. Этому положено начало в работах Учайкина В.В. [115], Нахушевой В.А.[87;88], Нигматулина Р.Р.[89], Мейланова Р.П.[73-77], Сербиной Л.И [105], Паровика Р.А.[92], Головизина В.М [47-50], Джалаб Х.А [168], Христова Ж. [165;166] и др.

Диссертация посвящена разработке новых методов математического моделирования динамических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными. Разработку новых математических методов и высокоэффективных алгоритмов численного моделирования потребовали проблемы, связанные с исследованием нелокальных динамических процессов во фрактальных и пористых средах, так как в настоящее время понятие фрактала стало одним из парадигм современной физики, радиофизики, радиолокации, аппарат дробного исчисления- математической основой моделирования различных динамических процессов физики фракталов, геотермии и космической электродинамики [88;94].

**Актуальность темы диссертации.** При нахождении аналитических решений уравнений с производными дробного порядка часто возникают большие трудности. В связи с этим, наряду с аналитическими методами начали развиваться и численные методы решения начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. На актуальность разработки численных методов решения начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка обращено внимание в работах как отечественных [2], [38],[47], [48], [49], [50], [108], [118], так и зарубежных авторов [178], [181], [185], [186], [194] и др.

В настоящее время актуально исследование моделей, описывающих нелокальные процессы, которые протекают в динамических системах с фракталь-

ной структурой. Для многих таких систем на основе аппарата интегродифференцирования дробного порядка построены нелинейные модели, которые описывают их свойства. Однако эти уравнения часто настолько сложны, что для их исследования часто используют численное моделирование. В связи с этим, актуальными становятся методы, которые основаны на теории линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. Эти методы позволяют свести исходные задачи к более простым, для которых возможно получить аналитические результаты. Данный метод служит необходимым промежуточным шагом для анализа нелинейных моделей динамических систем, поскольку позволяет сделать выводы о фундаментальных свойствах решения нелинейной задачи [117].

Микроканальная структура разряда находит отражение и в характере его автографов – отпечатков канала на поверхности плоского электрода. Установлено, что автографы представляют собой скопление большого количества микрокластеров, а микроструктура автографов носит фрактальный характер [205]. Таким образом, наличие динамической ветвящейся фрактальной структуры требует учета ее влияния на протекающие газоразрядные процессы. Поскольку математическое описание процессов во фрактальных структурах обладает рядом специфических особенностей, становится весьма актуальным развитие соответствующих подходов при расчетно-теоретическом моделировании газовых разрядов. В работе [111] автор отметил, что для исследования таких процессов плодотворным может оказаться подход с использованием математического аппарата дробного интегродифференцирования [114]. На актуальность исследования динамики переноса электронов в ветвящихся системах газоразрядных каналов с использованием дифференциальных уравнений дробного порядка показывают и работы [112; 113; 127].

Как указано в многочисленных работах [6], [12], [75], [77], [85], [87], [89], [105], [115], [116], [190], при исследовании нелокальных процессов теплопереноса в средах с фрактальной структурой необходимо учитывать эффекты



памяти и пространственные корреляции. Учет нелокальных эффектов, оставаясь в рамках традиционных подходов, приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, ядро которого несет информацию о природе нелокальности [14]. В таких системах физические величины обычно имеют дробную размерность. Для исследования таких процессов актуальным является применение математического аппарата дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка в математических моделях.

Дробные степени в показателях размерностей очень часто возникают и при исследовании эффективной теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления. Как показывают многочисленные данные экспериментов по теплопроводности горных пород, температурная зависимость теплопроводности на всем барическом диапазоне меняется по степенному закону  $\lambda \sim T^n$  и при этом барическая зависимость растет по нелинейному закону до 100 Мпа. Такими являются горные породы, содержащие химические соединения, как с кристаллической, так и аморфной структурой. В неупорядоченных кристаллических твёрдых телах атомы занимают правильное положение в узлах кристаллической решётки, но порядок расположения атомов различных сортов не соблюдается. Таким образом, в неупорядоченных структурах массы атомов и их силовые константы беспорядочно меняются от узла к узлу, что вызывает дополнительное рассеяние тепловых волн (фононов) [120;121]. Изучение процессов теплопереноса и прогнозирование глубинных температур связаны с понятием теплопроводности горных пород при высоких температурах и давлениях. Практическая потребность знания теплопроводности горных пород в условиях естественного залегания делают актуальным исследование ее температурной и барической зависимости.

Исследование перечисленных проблем потребовало усовершенствования и развития новых методов изучения динамических процессов во фрактальных и пористых средах с учетом эффектов памяти и пространственных

корреляций, а также разработки эффективных алгоритмов численного моделирования нелокальных процессов теплопереноса и реализация этих методов в виде комплексов объектно-ориентированных программ.

Ключевые результаты диссертации опубликованы в ведущих журналах, входящих в список ВАК и Международные базы данных Scopus и WOS, как российских – «Математическое моделирование», «Вестник СамГТУ», «Известия РАН», «Нелинейный мир», так и зарубежных – «Thermal Science», «Journal of Thermal Analysis and Calorimetry», «Fractal Fractional», High Temperature.

Об актуальности темы свидетельствует также то, что все представленные в диссертации результаты были получены при выполнении проектов, поддержанных грантами: Проект по аналитической ведомственной целевой программе РНПВШ 2.1.1/2669; Программа №3 фундаментальных исследований отделения математических наук РАН "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач"; РФФИ 16-08-00067 «Развитие термодинамики в дробном исчислении и расчет теплофизических характеристик веществ, в том числе в экстремальных состояниях на основе фрактального уравнения состояния»; РФФИ 18-08-00059 «Экспериментальные и теоретические исследования теплопроводности диэлектриков и горных пород при высоких гидростатических давлениях и температурах»; РФФИ 20-08-00319 «Разработка математических моделей и программных пакетов, описывающих процессы теплопереноса в призабойной зоне нефтяных, газовых и геотермальных скважин на основе экспериментальных измерений эффективной теплопроводности горных пород в условиях, близких к пластовым».

**Целью диссертационной работы** является развитие новых математических методов исследования динамических процессов во фрактальных и пористых средах на основе математического аппарата интегралов и производных дробного порядка; разработка эффективных вычислительных методов для численного исследования динамических процессов в системах с памятью и

пространственными корреляциями; реализация этих методов в виде комплексов объектно-ориентированных программ.

В соответствии с целью работы были поставлены и реализованы следующие основные задачи:

- Построить вычислительные методы нахождения приближенного решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с дробными производными и реализовать эти методы в вычислительных алгоритмах при исследовании динамических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка.
- Построить вычислительные методы нахождения приближенного решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных дробных производных и реализовать эти методы в вычислительных алгоритмах при исследовании процессов тепломассопереноса в фрактальных и пористых средах.
- Получить аналитическое решение системы двух дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто. Провести исследование поведения фазовых траекторий линейной динамической системы, отображаемой системой двух дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто при различных значениях параметра дробной производной.
- Провести исследование поведения фазовых траекторий нелинейных динамических систем, которые описываются системой двух дифференциальных уравнений с дробными производными, методом линеаризации при различных значениях параметра дробной производной.
- Провести комплексное исследование фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамику электронов в них с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

- Провести комплексное исследование нелокальных процессов теплопроводности, описывающие сверхмедленные процессы в средах с фрактальной структурой с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций.
- На основании проведенных экспериментов по теплопроводности горных пород, развивать новые математические методы исследования температурных и барических зависимостей теплопроводности горных пород с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

**Методы исследования.** В работе были использованы методы, которые основаны на математическом аппарате интегралов и производных дробного порядка, аналитические и численные методы решения задачи Коши и краевых задач для дробных дифференциальных уравнений, методы численного исследования динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, непосредственное численное решение уравнений в частных производных дробного порядка. Для численного моделирования процессов теплопроводности горных пород использовался метод наименьших квадратов и статистические методы корреляционно-регрессионного анализа. Программная реализация выполнено на языке Delphi и в пакете Mathcad.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Разностные методы и алгоритмы нахождения приближенного решения задачи Коши для систем ОДУ с дробными производными и теоремы о сходимости этих разностных методов.
2. Разностные схемы и алгоритмы нахождения приближенного решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных дробных производных и теоремы об устойчивости и сходимости этих разностных схем.

3. Результаты качественного исследования поведения фазовых траекторий линейной однородной динамической системы, отображаемой системой двух дифференциальных уравнений с дробными производными в случае действительных корней характеристического уравнения.
4. Качественное исследование нелинейных динамических систем, описываемых системой дифференциальных уравнений с дробными производными и результаты анализа поведения фазовых траекторий методом линеаризации при различных значениях параметра дробной производной. Результаты численного исследования поведения фазовых траекторий нелинейной системы при больших отклонениях от положения равновесия.
5. Результаты численного моделирования фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамику электронов в них с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.
6. Результаты численного исследования нестационарных процессов промерзания и неизотермической фильтрации в средах с фрактальной структурой, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка.
7. Результаты комплексного исследования нестационарных процессов теплопроводности для полуограниченного тела, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка. Аналитическое решение начально-краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности с граничными условиями второго рода и результаты вычислительного эксперимента по анализу решения в зависимости от значений параметров дробных производных Капуто и Рисса.
8. Результаты комплексного исследования нелокальных процессов конвективного теплообмена с внешней средой с учетом эффектов памяти. Аналитическое решение начально-краевой задачи Робена для нестационарной теплопроводности дробной по времени производной Капуто в полубесконечной

области с конвективным теплообменом (закон Ньютона) на границе и результаты вычислительного эксперимента по анализу решения в зависимости от параметра дробной производной.

9. Эмпирические модели теплопроводности горных пород и результаты численного моделирования теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления с применением корреляционно-регрессионного анализа и вычислительного эксперимента на основе, полученных экспериментальных данных.
10. Комплексы объектно-ориентированных программ для численного исследования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, нелокальных процессов теплопроводности с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций и теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления.

#### **Научная новизна работы:**

- Разработаны разностные методы и алгоритмы нахождения приближенного решения задачи Коши для систем ОДУ с дробными производными, отличающиеся от известных разностных методов. Доказаны теоремы о сходимости этих разностных методов и получены условия для нахождения шага сетки в зависимости от параметра дробной производной.
- Разработаны разностные схемы и алгоритмы нахождения приближенного решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных дробных производных, отличающиеся от известных разностных схем. Доказаны теоремы об устойчивости и сходимости этих разностных схем.
- Проведено качественное исследование поведения фазовых траекторий динамической системы, описываемой системой двух дифференциальных уравнений с производной дробного порядка Капуто в случае действительных корней характеристического уравнения. Показано, что при переходе к

дробной производной в фазовой плоскости происходят топологические изменения.

- Впервые проведено качественное исследование динамической системы «брюсселятор», описываемой дробными дифференциальными уравнениями, методом линеаризации. Получено аналитическое решение линеаризованной системы и численное решение нелинейной системы. Показано, что при переходе к дробной производной в фазовой плоскости происходят топологические изменения.
- Впервые проведено качественное исследование нелинейной динамической системы «хищник-жертва», описываемой дробными дифференциальными уравнениями, методом линеаризации. Получено аналитическое решение линеаризованной системы и численное решение нелинейной системы. Показано, что при переходе к дробной производной в фазовой плоскости происходят топологические изменения.
- Впервые проведено численное исследование фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамику электронов в них с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента на основе аппарата интегродифференцирования дробного порядка, отличающиеся от существующих методов исследования.
- Впервые проведено численное исследование нестационарных процессов промерзания и неизотермической фильтрации в средах с фрактальной структурой, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка Капуто и Рисса и на основе, построенных вычислительных алгоритмов, проведено исследование нестационарных процессов промерзания и неизотермической фильтрации.
- Впервые получено аналитическое решение начально-краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности с граничными условиями второго рода. На основе полученного решения, проведено комплексное исследование

дование нестационарных процессов теплопроводности для полуограниченного тела, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка Капуто и Рисса.

- Впервые представлен анализ нелокальных процессов конвективного теплообмена с внешней средой с учетом эффектов памяти через дробную производную по времени. Проведено комплексное исследование процессов конвективного теплообмена с внешней средой для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти.
- Впервые на основе экспериментальных данных проведено численное моделирование теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента, основанной на корреляционно-регрессионном анализе.
- Разработаны комплексы объектно-ориентированных программ для численного исследования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, нелокальных процессов теплопроводности с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций и теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления.

**Теоретическая и практическая значимость работы** заключается в том, что результаты, которые получены в диссертационной работе, включающие в себя задачи исследования, разностные методы решения дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, теоремы об устойчивости и сходимости, внесет вклад в развитие фундаментальных основ математического моделирования нестационарных динамических процессов. Представленные разностные методы решения начальной задачи для систем дифференциальных уравнений дробного порядка и результаты качественного исследования линейных и нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, могут служить основой разра-



ботки и численного анализа дробно-дифференциальных моделей динамических систем. Представленные разностные схемы решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка и результаты комплексного исследования нестационарных процессов теплопроводности являются математической основой для разработки и численного анализа математических моделей нестационарных процессов теплопроводности во фрактальных и пористых средах. Результаты исследования нестационарных процессов неизотермической фильтрации, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка, и теплопроводности горных пород имеют прикладное значение. От решения данных проблем зависит возможность реализации различных процессов при нефтедобыче, функционировании геотермальных систем и прогнозировании глубинных температур, связанных с понятием теплопроводности горных пород при высоких температурах и давлениях.

По результатам исследований, проведенных в диссертации, автором разработаны программные комплексы для ЭВМ, которые использовались при выполнении трех проектов, поддержанных РФФИ, проекта по аналитической ведомственной целевой программе РНПВШ 2.1.1/2669, проекта по программе №3 фундаментальных исследований отделения математических наук РАН "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач".

Исследования по теме диссертации проводилось в рамках научно-исследовательских работ кафедры прикладной математики *Дагестанского государственного университета и Института Проблем геотермии и возобновляемой энергетики филиала ОИВТ РАН.*

**Обоснованность и достоверность** полученных в диссертационной работе результатов подтверждаются применением фундаментальных методов исследования динамических процессов, корректными постановками задач и

математической обоснованностью полученных решений. Полученные в работе результаты исследования динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, и нестационарных процессов теплопроводности обосновываются вычислительными экспериментами. Результаты численного моделирования теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления подтверждаются их адекватностью и согласованностью с экспериментальными данными.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации ежегодно докладывались на научных семинарах факультета математики и компьютерных наук Дагестанского государственного университета и института Проблем Геотермии и ВЭ, и прошла апробацию на следующих научных мероприятиях:

1. Международный Российско-Болгарский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик, 2010 г.)
2. VIII Всероссийская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2011 г.)
3. II Международный Российско-Казахский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик, 2011 г.)
4. II Международный Российско-Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик, 2012 г.)
5. XII Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 2015 г.)
6. XIII Международная конференция «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (Дивноморское, 2016 г.)
7. V Международная конференция «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы» (Махачкала, 2017 г.)

8. XII Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» (Махачкала, 2017 г.)
9. VII Российская национальная конференция по теплообмену (Москва, 2018 г.)
10. "XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter (ELBRUS 2017 г.)
11. IV Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик, 2018 г.)
12. XIV Международная научно-практическая конференция «Новые идеи в науках о земле» (Москва, 2019 г.)
13. XI Всероссийская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2019 г.)
14. XIII Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» (Махачкала, 2019 г.)
15. III Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы исследования нефтегазовых пластовых систем» (Москва, 2020 г.)
16. III Международная конференция «Современные проблемы теплофизики и энергетики» (Москва, 2020 г.)
17. XIV Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» (Махачкала, 2021 г.)
18. II Международном научно-практическом семинаре и выставке «Экспериментальные методы исследования пластовых систем: проблемы и решения» (ИПС-2023) (Развилка, Московская обл., 2023 г.)
19. XV Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» (Махачкала, 2023 г.)
20. VII Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2023 г.)

**Публикации.** По результатам диссертационной работы изданы 3 монографии и опубликованы 32 работы в научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов докторских диссертаций. В их число входит 20 работ, опубликованных в научных журналах, входящих в международные реферативные базы WOS и Scopus. Получены 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Полный список публикаций приводится в конце автореферата.

**Личный вклад автора.** Во всех работах, опубликованных в соавторстве, все математические расчеты, выводы относительно полученных результатов, доказательства теорем, алгоритмы и выводы уравнений получены лично автором.

В монографии [75] результаты двух глав принадлежат лично автору. Монография [15] без соавторов. В монографии [1] эмпирические модели расчета теплопроводности горных пород и результаты вычислительных экспериментов принадлежат автору. Работы [14;16;17;21;22;24;26] без соавторов. В работе [19] разработка численного метода решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с дробными производными и доказательство теоремы о сходимости получены лично автором. В работе [20] исследование поведения фазовых траекторий при различных значениях параметра дробной производной проведено лично автором. В работах [25;27] построение численных методов и доказательства теорем о сходимости принадлежат лично автору. В работе [28] аналитические решения линеаризованных систем и алгоритмы численного исследования нелинейных систем получены лично автором. В работе [29] численные алгоритмы решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка и доказательства теорем о сходимости получены лично автором. В работе [31] разработка алгоритма численного решения начально-краевой задачи и вычислительные эксперименты по анализу полученных решений принадлежат лично автору. В работе [33] разностная аппроксимация дробной произ-

водной Римана-Лиувилля второго порядка точности, численный метод решения задачи Коши для дифференциального уравнения дробного порядка и доказательство теоремы о сходимости принадлежат автору. В работе [35] разностный метод решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени построен лично автором. В работе [74] аналитическое решение осцилляторного уравнения с дробной производной получено автором. В работе [84] аналитические решения и результаты исследования поведения фазовых траекторий получены лично автором. В работах [113;114] численные решения дифференциальных уравнений и результаты вычислительных экспериментов получены автором. В работах [120-124] и [148-155] эмпирические модели расчета теплопроводности горных пород и результаты вычислительных экспериментов получены лично автором. В работах [135-138] разностные схемы решения начально-краевых задач и доказательства теорем о сходимости получены лично автором. В работах [139;140] аналитические решения начально-краевых задач для нестационарного уравнения теплопроводности, доказательства о единственности решений и результаты вычислительных экспериментов получены автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, списка литературы и 4 приложений. Объем работы 271 стр.

## Глава I. Интегралы и производные дробного порядка

В этой главе приведены основные определения и свойства некоторых специальных функций, дробных интегралов и производных из монографии [103], которые нам необходимы при дальнейшем изложении материала работы. А также в этой главе доказаны теоремы, устанавливающие связь производных дробного порядка с обычной производной.

### § 1. Некоторые специальные функции

Этот параграф посвящен определениям и свойствам некоторых специальных функций.

1. *Символ Похгаммера [103]*. Равенство вида

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (z)_0 \equiv 1, \quad (1.1)$$

где  $n$  – некоторое целое число, называется символом Похгаммера.

Для символа Похгаммера справедливы следующие представления:

$$(z)_n = (-1)^n (1-n-z)_n, \quad (1)_n = n! \quad (1.2)$$

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \quad (1.3)$$

2. *Гамма-функция [103]*. Определение Гамма-функции дается с помощью интеграла Эйлера второго рода. Следовательно, гамма-функцией будем называть функцию, определяемую в виде:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (1.4)$$

Если  $\forall z \in \mathbb{C}$ , имеет место условие  $\operatorname{Re} z > 0$ , то интеграл в правой части равенства (1.4) сходится. Для случая  $\operatorname{Re} z \leq 0$ ,  $z \neq 0, -1, -2, \dots$ , гамма-функция доопределяется, используя аналитическое продолжение этого интеграла. Проинтегрировав интеграл в правой части равенства (1.4) по частям получим следующую формулу понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (1.5)$$

При многократном применении интегрирования по частям получим равенство:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{Re} z > -n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

Формулу (1.6) можно использовать для аналитического продолжения в полуплоскость  $\operatorname{Re} z > -n$  при любом  $n$ . Из равенства (1.6) следует, что  $\Gamma(z)$  является аналитичной в комплексной плоскости всюду, кроме целых отрицательных значений  $z \neq 0, -1, -2, \dots$ , в которых она имеет простые полюса и разлагается по формуле

$$\Gamma(z) = (-1)^k [k!(z+k)]^{-1} [1 + O(z+k)],$$

$$z \rightarrow -k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Приведем некоторые равенства, которые имеют место для гамма-функции:

1)  $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \Gamma(1) = 1$

2) Обобщенные формулы понижения и повышения

$$\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z), \quad \Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n} \Gamma(z).$$

3) Формула дополнения

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

4) Формула удвоения (формула Лежандра) и более общая формула Гаусса–Лежандра

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-1/2}}{(2\pi)^{(m-1)/2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right), \quad m = 2, 3, \dots$$

**3. Биномиальные коэффициенты [103].** Биномиальные коэффициенты для нецелых значений параметра  $\alpha$  задаются равенством

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1}(-\alpha)_n}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}. \quad (1.8)$$

Если положить, что  $\alpha$  целое число, т. е.  $\alpha = m, m = 1, 2, \dots$ , то равенство (1.8) примет вид:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \text{ при } m \geq n \text{ и } \binom{m}{n} = 0 \text{ при } 0 \leq m < n.$$

А если  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные комплексные числа и  $\alpha \neq -1, -2, \dots$ , то для биномиальных коэффициентов имеет место равенство

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} = \frac{\sin(\beta-\alpha)\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\pi \cdot \Gamma(\beta+1)}. \quad (1.9)$$

Для биномиальных коэффициентов выполняются равенства [103]

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} = \binom{j-\alpha-1}{j},$$

$$\sum_{j=0}^k \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k-j} = \binom{\alpha+\beta}{k}.$$

4. **Гипергеометрическая функция Гаусса [103].** Функция, определяемая при  $|z| < 1$  как сумму гипергеометрического ряда

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (1.10)$$

где  $a, b, c$  и переменная  $z$  – в общем, являются комплексными числами, и  $c \neq 0, -1, -2$ , называется гипергеометрической функцией Гаусса. Ряд (1.10) является сходящимся при  $|z| < 1$  и  $|z| = 1, \operatorname{Re}(c - a - b) > 0$ . При остальных значениях гипергеометрическую функцию Гаусса можно доопределить как аналитическое продолжение этого ряда.

Рассмотрим некоторые основные свойства гипергеометрической функции (1.10).

$$1) \quad {}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z);$$



$$\begin{aligned}
2) \quad {}_2F_1(a, b; b; z) &= (1-z)^{-a}; \\
3) \quad {}_2F_1(a, b; c; 0) &= {}_2F_1(0, a; c; z) = 1; \\
4) \quad {}_2F_1(a, b; c; 1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \operatorname{Re}(c-a-b) > 0.
\end{aligned}
\tag{1.11}$$

5. **Функция Миттага–Леффлера [103].** Очень часто решения дифференциальных уравнений дробного порядка представляются через функцию Миттага–Леффлера, которая определяется в виде ряда:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

Функция Миттага–Леффлера в более общем виде задается равенством:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \tag{1.12}$$

На основе равенства (1.12) можно сделать вывод, что  $E_\alpha(z) = E_{\alpha, 1}(z)$ .

Рассмотрим некоторые интегральные соотношения для функции Миттага–Леффлера [103]:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(t^\alpha z) dt &= \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1. \\
\frac{1}{p(1-\lambda \cdot p^{-\alpha})} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha) dt, \operatorname{Re} p > 1, \\
\frac{1}{p^{1-\alpha}(1-\lambda \cdot p^{-\alpha})} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda t^\alpha) dt, \operatorname{Re} p > 1.
\end{aligned}
\tag{1.13}$$

Приведем доказательство одного равенства. Данным равенством будем часто пользоваться в работе при преобразовании функции Миттага–Леффлера.

Имеет место следующая лемма:

**Лемма 1.1.** Пусть  $\alpha > 0$  и  $t > 0$ . Тогда имеет место равенство

$$t^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(t^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} + E_{\alpha, 1}(t^\alpha). \tag{1.14}$$

**Доказательство.** Используя определение функции Миттаг–Леффлера, левую часть равенства (1.14) представим в виде:

$$t^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(t^\alpha) = t^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{cn}}{\Gamma(\alpha n + 1 - \alpha)}, \quad \alpha > 0. \quad (1.14.1)$$

В правой части равенства (1.14.1) сделаем замену  $n$  на  $n' + 1$ . Тогда получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} t^{-\alpha} \sum_{n'=-1}^{\infty} \frac{t^{cn'+\alpha}}{\Gamma(\alpha n' + \alpha + 1 - \alpha)} &= \sum_{n'=-1}^{\infty} \frac{t^{cn'}}{\Gamma(\alpha n' + 1)} = \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{t^{cn'}}{\Gamma(\alpha n' + 1)} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + E_{\alpha, 1}(t^\alpha). \end{aligned}$$

Имеет место представление функции Миттага–Леффлера через гипергеометрическую функцию Гаусса в виде [103]:

$$E_{1, 2-\alpha}(-z^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} {}_1F_1(1, 2-\alpha; -z^\alpha).$$

Действительно,

$$E_{2, \gamma}(-z^2) = \frac{1}{2^{\gamma-1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} {}_1F_2\left(1; \frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma+1}{2}; -\left(\frac{z}{2}\right)^2\right).$$

Из определения (1.12) следуют основные свойства функции Миттаг–Леффлера [103]:

$$E_{\alpha, \beta}(\pm z^\alpha) = E_{2\alpha, \beta}(z^{2\alpha}) \pm z^\alpha E_{2\alpha, \alpha+\beta}(z^{2\alpha}),$$

$$E_{\alpha, \beta}(\pm iz^\alpha) = E_{2\alpha, \beta}(-z^{2\alpha}) \pm iz^\alpha E_{2\alpha, \alpha+\beta}(-z^{2\alpha}).$$

При определенных значениях параметров  $\alpha, \beta$  функцию Миттаг–Леффлера можно выразить через известные функции:

$$E_{2, 1}(-z^2) = \cos(z),$$

$$E_{2, 2}(-z^2) = \sin(z)/z,$$

$$E_{1/2,1}(-z^{1/2}) = \exp(z) \left(1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})\right),$$

$$E_{1/2,1/2}(-z^{1/2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - z^{1/2} \exp(z) \operatorname{erf}(z^{1/2})\right),$$

Для функции Миттага-Леффлера (1.12) выполняется равенство:

$$E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=0}^{N^m-1} (-1)^n z^{n\alpha} E_{N^m\alpha, \alpha+n\alpha}(-z^{n\alpha}),$$

где  $N = 2, 3, \dots, N = 2, 3, \dots, N = 2, 3, \dots$

Если взять  $N = 2$  и  $m = 2$ , то это равенство примет вид:

$$E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=0}^3 (-1)^n z^{n\alpha} E_{4\alpha, \alpha+n\alpha}(-z^{n\alpha}).$$

6. **Бета-функция [103].** Функция, представимая в виде:

$$B(z, \xi) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{\xi-1} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} \xi > 0, \quad (1.15)$$

называется Бета-функцией.

Бета-функция представляется через гамма-функцию Эйлера в виде:

$$B(z, \xi) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(z+\xi)}.$$

Если  $x > y$ ,  $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1 - \operatorname{Re} \beta$  то для бета-функции выполняются следующие соотношения:

$$\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} (t-y)^{\beta-1} dt = (x-y)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, 1-\alpha-\beta),$$

$$\int_0^a x^{\alpha-1} (a-x)^{\beta-1} dx = a^{\beta-1+\alpha} B(\alpha, \beta),$$

$$\int_0^a (a-x)^{\beta-1} e^{-x} dx = B(1, \beta) a^\beta \cdot e^{-a} {}_1F_1(1-\alpha; 2-\alpha; a).$$

$$\int_0^a (a-x)^{\beta-1} \ln x dx = a^\beta B(\beta, 1) [\ln a + \psi(1) - \psi(\beta+1)],$$

где  ${}_1F_1(a; b; x)$  – гипергеометрическая функция Куммера,  $\psi(x)$  – пси-функция.

7. **Функция Райта [97;208].** Функция вида:

$$\phi(\mu, \eta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\mu k + \eta)} \quad (1.16)$$

называется функцией Райта [208;209].

Для функции Райта имеют место следующие утверждения [196;208]:

1. Если  $\eta > 0$ , то имеет место неравенство:

$$z^{\eta-1} \phi(\mu, \eta; -z^\mu) > 0, \quad y > 0.$$

2. Справедлива формула дифференцирования функции Райта:

$$\frac{d}{dz} \phi(\mu, \eta; z) = \phi(\mu, \eta + \mu; z).$$

3. Для любого  $\eta \in R$  имеет место равенство:

$$D_{0z}^\beta z^{\eta-1} \phi(\mu, \eta; -\lambda z^\mu) = z^{\eta-\beta-1} \phi(\mu, \eta - \beta; -\lambda z^\mu), \quad \lambda > 0.$$

4. Для функции Райта имеет место равенство [97]:

$$\sqrt{\pi} \phi(-1/2, 1/2; -z) = e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

## § 2. Дробные интегралы и производные

### Римана–Лиувилля

В этом параграфе рассмотрим основные определения и свойства интегралов и производных дробного порядка.

#### 2.1. Дробные интегралы и производные на отрезке

Для  $n$ -кратного интегрирования выполняется известное равенство [103]:

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (1.17)$$

Если воспользоваться равенством  $(n-1)! = \Gamma(n)$ , то, как видно из правой части равенства (1.17), правая часть имеет смысл и при нецелых значениях  $n$ .

Таким образом, можно определить интегрирование дробного порядка на основании (1.17).

Рассмотрим функцию  $f(x) \in L_1(a, b)$ , суммируемую на конечном отрезке  $[a, b]$ . Тогда интегралы вида:

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (1.18)$$

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \quad (1.19)$$

где  $\alpha > 0$ , называют интегралами дробного порядка  $\alpha$  Римана-Лиувилля [103]. В этом случае, интеграл, определяемый равенством (1.18), называют левосторонним, а интеграл, определяемый равенством (1.19), называют правосторонним. Операторы  $I_{a+}^{\alpha}$ ,  $I_{b-}^{\alpha}$  в левых частях равенств (1.18) и (1.19) называют операторами дробного интегрирования. Интегралы в правых частях равенств (1.18) и (1.19) имеют место для всех функций  $f(x)$ , суммируемых на отрезке  $[a, b]$  ( $f(x) \in L_1(a, b)$ ), и они существуют почти всюду.

Если выполняются условия  $\varphi(x) \in L_p$ ,  $\psi(x) \in L_q$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ ,

$p \geq 1, q \geq 1$ , но  $p \neq 1, q \neq 1$  в случае  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$ , то имеет место формула

дробного интегрирования по частям [103]:

$$\int_a^b \varphi(x) (I_{a+}^{\alpha} \psi)(x) dx = \int_a^b \psi(x) (I_{b-}^{\alpha} \varphi)(x) dx. \quad (1.20)$$

Для интегралов дробного порядка Римана-Лиувилля выполняется полугрупповое свойство [103]. Пусть функция  $\varphi(t) \in C([a, b])$ , тогда во всех точках отрезка  $[a, b]$  выполняются тождества [103]:

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} \varphi = I_{b-}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.21)$$

Тождества (1.21) имеют место почти всюду на отрезке  $[a, b]$ , если функция  $\varphi(t) \in L_1(a, b)$ , а если  $\alpha + \beta \geq 1$ , то для суммируемой функции  $\varphi(t) \in L_1(a, b)$  они справедливы во всех точках данного отрезка.

Понятие производной дробного порядка рассматривают как операцию, обратную дробному интегрированию [103].

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , заданную на конечном отрезке  $[a, b]$ . Тогда выражения, определяемые равенствами

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad (1.22)$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt \quad (1.23)$$

называют дробными производными Римана-Лиувилля порядка  $0 < \alpha < 1$ . При этом дробная производная, задаваемая равенством (1.22) называется левосторонней, а равенством (1.23) правосторонней дробной производной [103].

Имеет место следующее утверждение [85]:

Если функция  $f(x) \in AC([a, b])$ , то она имеет почти всюду производные дробного порядка  $D_{a+}^{\alpha} f$  и  $D_{b-}^{\alpha} f$  при  $0 < \alpha < 1$  и эти производные  $D_{a+}^{\alpha} f$  и  $D_{b-}^{\alpha} f$  принадлежат  $L_r(a, b)$ , где  $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$ , и для них выполняются равенства

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{a(x-t)^{\alpha}} dt \right], \quad (1.24)$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} + \int_x^b \frac{f'(t)}{x(t-x)^{\alpha}} dt \right]. \quad (1.25)$$

Теперь рассмотрим случай, когда параметр дробной производной  $\alpha \geq 1$ . Пусть  $[\alpha]$  - целая часть, а  $\{\alpha\}$  - дробная часть параметра  $\alpha$ . Тогда при выпол-

нении условий  $0 \leq \{\alpha\} < 1$  и  $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$  дробные производные высших порядков определяются равенствами [103]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (1.26)$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (1.27)$$

где  $n = [\alpha] + 1$ .

Пусть дана функция  $f(x) \in C^n([a, b])$ . Тогда производная от этой функции, определяемая равенством

$$\partial_{0r}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (1.28)$$

где  $n-1 < \alpha \leq n$ ,  $n=1, 2, \dots$  называется производной дробного порядка Капуто [85].

Имеет место следующая теорема о предельном отношении дробной производной Римана-Лиувилля.

**Теорема 1.1.** Пусть функция  $f(x) \in C^n([a, b])$  обладает достаточной гладкостью на отрезке  $\Omega = [a, b]$ . Тогда имеет место равенство:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha}} ds = \left(\frac{d}{dx} f\right)(x).$$

**Доказательство.** Согласно (1.22), дробная производная Римана-Лиувилля задается в виде:

$$\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha}} ds.$$

Разлагая функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора и подставляя в правую часть этого равенства, получим

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha}} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^\alpha} \left[ f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d^n f(s)/ds^n)_{s=x}}{n!} (s-x)^n \right] ds = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[ f(x) \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^\alpha} \right] + \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d^n f(s)/ds^n)_{s=x}}{n!} (s-x)^n = \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[ f(x) \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] + \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(d^n f(s)/ds^n)_{s=x}}{n!} \frac{d}{dx} \int_0^x (s-x)^{n-\alpha} ds = \\
&= \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d}{dx} f(x) + \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(x) + \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(d^n f(s)/ds^n)_{s=x}}{n!} x^{n-\alpha}
\end{aligned}$$

Перейдя к пределу в этом равенстве при  $\alpha \rightarrow 1$  и учитывая, что  $\Gamma(2-\alpha) \rightarrow \Gamma(1) = 1$ ,  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \rightarrow 0$ , окончательно получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left( D_0^\alpha f \right)(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^\alpha} ds = \left( \frac{d}{dx} f \right)(x).$$

Приведем некоторые примеры расчета производных дробного порядка.

$$D_{0+}^\alpha x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} x^{n-\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
D_{0+}^\alpha e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ ((1-\alpha)x^{-\alpha} - x^{1-\alpha} e^{-x}) {}_1F_1(1-\alpha; 2-\alpha; x) - \right. \\
\left. - x^{1-\alpha} e^{-x} {}_1F_1(2-\alpha; 3-\alpha; x) \right].
\end{aligned}$$

$$D_{0+}^\alpha \ln x = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot x^\alpha} + \frac{\ln x + \psi(1) - \psi(2-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha) x^\alpha}.$$



## 2.2. Дробные интегралы и производные на оси и полуоси

**Дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля.** Рассмотрим случаи полуоси и оси и дадим определения интегралов и производных дробного порядка.

Для суммируемой функции  $f(x) \in L_1(a, b)$  интеграл дробного порядка Римана–Лиувилля на полуоси задается в виде [103]:

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad 0 < x < \infty, \quad (1.29)$$

а на всей оси в виде [103]:

$$(I_+^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1.30)$$

$$(I_-^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.31)$$

Дробные производные Римана–Лиувилля для функции  $f(x) \in L_1(a, b)$  на всей оси определяются в виде:

$$(D_+^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad (1.32)$$

$$(D_-^{\alpha} f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt, \quad (1.33)$$

где  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 < \alpha < 1$  [103].

Если  $\Omega = (0, +\infty)$ , то дробные производные больших порядков задаются в виде [103]:

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (1.34)$$

$$(D_{0-}^{\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (1.35)$$

где  $n-1 < \alpha \leq n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Приведем без доказательства достаточное условие существования производной дробного порядка Римана–Лиувилля (1.26) [85].

Пусть функция  $f(t)$  непрерывна на  $[0, T]$  вместе со своими производными до порядка  $m - 1$  включительно, причем  $f^{(m)}(t) \in L[0, T]$ . Тогда для любого  $\alpha \in (0; m]$  производная  $D_{0t}^\alpha f(t)$  существует. Кроме того, если  $\alpha \in (n - 1; n]$ , то почти всюду на отрезке  $[0, T]$  имеет место представление

$$D_{0t}^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)} \cdot t^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds. \quad (1.36)$$

**Дробная производная Грюнвальда–Летникова.** Пусть дана функция  $g(x)$ , определенная на  $\Omega = (-\infty, +\infty)$ .

Тогда конечная разность, определенная равенством

$$\left(\Delta_h^\alpha g\right)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j \cdot g(x - jh), \quad \alpha > 0, \quad (1.37)$$

где  $q_j = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ ,  $\binom{\alpha}{j}$  – биномиальные коэффициенты (1.9), будем называть конечной разностью дробного порядка [103].

Введем обозначение  $r(\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} |q_j|$ . При выполнении неравенства  $r(\alpha) < +\infty$ , ряд в правой части (1.37) равномерно сходится, и эта сходимость абсолютная при всех  $\alpha > 0$ , если функция ограниченная. Для  $r(\alpha)$  имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= 2^\alpha \text{ при целом } \alpha, \\ r(\alpha) &\leq 2^{[\alpha]+1} \text{ при нецелом } \alpha. \end{aligned}$$

Конечные разности дробного порядка удовлетворяют следующим свойствам [103]:

**Свойство 1.**  $\left(\Delta_h^\beta \left(\Delta_h^\alpha g\right)\right)(x) = \left(\Delta_h^{\beta+\alpha} g\right)(x).$

**Свойство 2.** Пусть  $g \in X(X_{2\pi})$ , тогда имеет место равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^\alpha g\|_{X(X_{2\pi})} = 0.$$

**Свойство 3.**  $\|\Delta_h^{\alpha+\beta} g\|_{X(X_{2\pi})} \leq r(\alpha) \|\Delta_h^\beta g\|_{X(X_{2\pi})}$ .

Дробная производная Грюнвальда–Летникова определяется в виде [103]:

$$g_\pm^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_\pm^\alpha g)(x)}{h^\alpha}, \alpha > 0.$$

Пусть теперь задана функция  $g(x)$ , которая определена на конечном отрезке  $[a, b]$ . Тогда конечные разности дробного порядка (1.37) задаются в виде [103]:

$$(\Delta_h^\alpha g)(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} q_j \cdot g(x - jh), \quad x > a, \quad (1.38)$$

$$(\Delta_h^\alpha g)(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]} q_j \cdot g(x + jh), \quad x < b, \quad (1.39)$$

Производные дробного порядка Грюнвальда–Летникова задаются предельными равенствами [103]:

$$g_{a+}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} q_j g(x - jh), \quad (1.40)$$

$$g_{b-}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]} q_j g(x + jh). \quad (1.41)$$

**Дробная производная Рисса и ее свойства.** Часто при описании динамических процессов в средах с фрактальной структурой для учета пространственных корреляций пользуются дробной производной Рисса. В отличие от дробной производной Римана-Лиувилля, для дробной производной Рисса вы-

полняется полугрупповое свойство [76]. Рассмотрим некоторые определения и свойства дробной производной Рисса.

Пусть функция  $f(x)$  на всей оси. Дробный интеграл Рисса задается равенством [115]:

$$R^\alpha f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\pi\alpha / 2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s) ds}{|x-s|^{1-\alpha}}. \quad (1.42)$$

Тогда дробная производная Рисса, как операция обратная дробному интегрированию, задается в виде:

$${}^R D^\alpha f(x) = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha) \cos(\pi(1-\alpha) / 2)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s) ds}{|x-s|^\alpha}, \quad (1.43)$$

при  $0 < \alpha < 1$  и

$${}^R D^\beta f(x) = \frac{1}{2\Gamma(2-\beta) \cos\left(\frac{\pi}{2}(2-\beta)\right)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{|x-s|^{\beta-1}} ds, \quad (1.44)$$

при  $1 < \beta < 2$ .

Для дробной производной Рисса доказана теорема о полугрупповом свойстве.

**Теорема 1.2.** Пусть функция  $f(x) \in C(\Omega)$ , где  $\Omega = (-\infty, +\infty)$  и пусть  $f(x)$  на всей числовой прямой обладает достаточной гладкостью. Тогда имеет место равенство

$${}^R D^\alpha \left( {}^R D^\alpha (f(x)) \right) = {}^R D^\beta f(x), \quad (1.45)$$

где  $\beta = 2\alpha$ ,  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

**Доказательство.** Для доказательства (1.45) рассмотрим равенство

$${}^R D^\alpha \left( {}^R D^\alpha (f(x)) \right) = {}^R D^{1+\lambda} f(x), \quad (1.46)$$

где  $0 < \lambda < 1$ . Найдем значение  $\lambda$ , при котором равенство (1.46) выполняется. Имеем

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha} = \frac{A^2}{B} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)ds}{|x-s|^\lambda}. \quad (1.47)$$

Здесь  $A = 2\Gamma(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)$ ,  $B = 2\Gamma(2-\beta) \cos\left(\frac{\pi}{2}(2-\beta)\right)$ .

Рассмотрим соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \frac{d}{d\xi'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha} = \frac{A^2}{B} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)ds}{|x-s|^\lambda}, \quad (1.48)$$

из которого следует (1.47). Умножим выражение (1.48) на множитель  $|\xi-x|^\alpha$  и проинтегрируем по  $x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|\xi-x|^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha} = \frac{A^2}{B} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|\xi-x|^\alpha} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)ds}{|x-s|^\lambda}.$$

Введем следующие обозначения:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|\xi-x|^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)ds}{|x-s|^\alpha}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha}.$$

Найдем значения интегралов  $I_1, I_2$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|\xi-x|^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)ds}{|x-s|^\alpha} = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\tilde{\xi}} \frac{dx}{(\xi-x)^\alpha} + \int_{\tilde{\xi}}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^\alpha} \right\} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^\alpha} + \int_x^{\infty} \frac{f(s)ds}{x(s-x)^\alpha} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^\alpha} \int_{-\infty}^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^\alpha} + \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^\alpha} \int_x^{\infty} \frac{f(s)ds}{x(s-x)^\alpha} + \\ &\quad + \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^\alpha} \int_{-\infty}^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^\alpha} + \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^\alpha} \int_x^{\infty} \frac{f(s)ds}{x(s-x)^\alpha}. \end{aligned}$$

Представим интегралы в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^{\alpha}} \int_x^{\infty} \frac{f(s)ds}{x(s-x)^{\alpha}} = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(s-x)^{\alpha}} \int_x^{\xi} \frac{f(s)ds}{x(s-x)^{\alpha}} + \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^{\alpha}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{f(s)ds}{\xi(s-x)^{\alpha}}, \quad (1.49)$$

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^{\alpha}} \int_{-\infty}^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{\alpha}} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^{\alpha}} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{f(s)ds}{(x-s)^{\alpha}} + \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^{\alpha}} \int_{\xi}^x \frac{f(s)ds}{\xi(x-s)^{\alpha}}. \quad (1.50)$$

Подставляя (1.49), (1.50) в  $I_1$ , получим

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^{\alpha}} \int_{-\infty}^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{\alpha}} + \\ & + \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^{\alpha}} \int_x^{\xi} \frac{f(s)ds}{x(s-x)^{\alpha}} + \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^{\alpha}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{f(s)ds}{\xi(s-x)^{\alpha}} + \\ & + \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^{\alpha}} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{f(s)ds}{(x-s)^{\alpha}} + \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^{\alpha}} \int_{\xi}^x \frac{f(s)ds}{\xi(x-s)^{\alpha}} + \\ & + \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^{\alpha}} \int_x^{\infty} \frac{f(s)ds}{x(s-x)^{\alpha}} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Заменяя порядок интегрирования в первом слагаемом равенства (1.51), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^{\alpha}} \int_{-\infty}^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{\alpha}} &= \int_{-\infty}^{\xi} f(s)ds \int_s^{\xi} \frac{dx}{(\xi-x)^{\alpha} (x-s)^{\alpha}} = (t = x-s) = \\ &= \int_{-\infty}^{\xi} f(s)ds \int_0^{\xi-s} \frac{dt}{(\xi-s-t)^{\alpha} t^{\alpha}}. \end{aligned}$$

В полученном интеграле, производя замену  $t = (\xi-s)z$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\xi} f(s)ds \int_0^{\xi-s} \frac{dt}{(\xi-s-t)^{\beta} t^{\beta}} = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{f(s)ds}{(\xi-s)^{2\beta-1}} \int_0^1 (1-z)^{1-\beta-1} z^{1-\beta-1} dz =$$

$$= B(1-\beta, 1-\beta) \int_{-\infty}^{\xi} \frac{f(s)ds}{(\xi-s)^{2\beta-1}}.$$

Аналогично можно вычислить и остальные слагаемые. Тогда окончательно получим

$$I_1 = \tilde{B}(\alpha, \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)ds}{|\xi-s|^{\alpha+\alpha-1}}, \quad (1.52)$$

где  $\tilde{B}(\alpha, \gamma) = B(1-\alpha, 1-\alpha) + B(1-\alpha, 2\alpha-1) + B(1-\alpha, 2\alpha-1)$ .

Для  $I_2$  имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{|x-s|^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha} \right] - \left[ \frac{d}{ds} \frac{1}{|x-s|^\alpha} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Интеграл от первого слагаемого, равный подынтегральной функции, обращается в ноль. Во втором интеграле воспользуемся следующим соотношением:

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{|x-s|^\alpha} = -\alpha \frac{\text{sign}(x-s)}{|x-s|^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha} = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(x-s)ds}{|x-s|^{\alpha+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha}.$$

Этот интеграл вычислим аналогично интегралу  $I_1$ . Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)dz}{|s-z|^\alpha} = \alpha \cdot \tilde{\tilde{B}}(\alpha, \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(x-s)f(s)ds}{|x-s|^{2\alpha}}, \quad (1.53)$$

где  $\tilde{\tilde{B}}(\alpha, \alpha) = B(-\alpha, 2\alpha) - B(1-\alpha, 2\alpha) - B(-\alpha, 1-\alpha)$ ,  $\text{sign}(x)$  – знаковая функция. Подставляя соотношения (1.52), (1.53) в (1.50), окончательно получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \tilde{B}(\alpha, \alpha) \cdot (2\alpha - 1) \cdot \tilde{\tilde{B}}(2\alpha - 1, \alpha) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(\xi - x) f(x) dx}{|\xi - x|^{3\alpha - 1}} = \\
& = \frac{A^2}{B} \cdot \alpha \cdot \tilde{\tilde{B}}(\alpha, \lambda) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(\xi - x) f(x) dx}{|\xi - x|^{\alpha + \lambda}}.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Требую равенство интегралов в (1.54), получим  $3\alpha - 1 = \alpha + \lambda$ . Отсюда имеем  $\lambda = 2\alpha - 1$ . Учитывая это, равенство (1.54) примет вид:

$$\tilde{B}(\alpha, \alpha) \cdot (2\alpha - 1) \cdot \tilde{\tilde{B}}(2\alpha - 1, \alpha) = \frac{A^2}{B} \cdot \alpha \cdot \tilde{\tilde{B}}(\alpha, 2\alpha - 1). \tag{1.55}$$

Покажем, что соотношение (1.55) выполняется тождественно. Действительно, нетрудно показать, что имеет место равенство

$$(2\alpha - 1) \cdot \tilde{\tilde{B}}(2\alpha - 1, \alpha) = \alpha \cdot \tilde{\tilde{B}}(\alpha, 2\alpha - 1).$$

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
\alpha \tilde{\tilde{B}}(\alpha, \alpha) &= \alpha (B(-\alpha, \alpha + \alpha) - B(1 - \alpha, \alpha + \alpha) - B(-\alpha, 1 - \alpha)) = \\
&= \alpha \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \alpha \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)} - \alpha \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha - \alpha)} = \\
&= -\frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha - \alpha)} = \\
&= -\frac{\Gamma(\alpha + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} [\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) + \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)] + \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - 2\alpha)}.
\end{aligned}$$

Из полученного выражения следует

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \tilde{\tilde{B}}(\alpha, 2\alpha - 1) &= -\frac{\Gamma(3\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha - 1)} [\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) + \Gamma(2\alpha - 1)\Gamma(2 - 2\alpha)] + \\
&\quad + \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(2 - 2\alpha)}{\Gamma(2 - 3\alpha)},
\end{aligned}$$

$$(2\alpha - 1) \cdot \tilde{\tilde{B}}(2\alpha - 1, \alpha) = -\frac{\Gamma(3\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha - 1)} [\Gamma(2\alpha - 1)\Gamma(2 - 2\alpha) + \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)] +$$



$$+ \frac{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-3\alpha)}.$$

Из этих равенств следует, что

$$(2\alpha-1) \cdot \tilde{B}(2\alpha-1, \alpha) = \alpha \cdot \tilde{B}(\alpha, 2\alpha-1).$$

Тогда (1.55) принимает вид  $\tilde{B}(\alpha, \alpha) = \frac{A^2}{B}$ . Далее, для  $\tilde{B}(\alpha, \alpha)$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\alpha, \alpha) &= B(1-\alpha, 1-\alpha) + 2B(1-\alpha, 2\alpha-1) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} + \\ &+ 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} = 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\alpha, \alpha) &= B(1-\alpha, 1-\alpha) + 2B(1-\alpha, 2\alpha-1) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} + \\ &+ 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} = 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right] \end{aligned}$$

Используя соотношение  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin(\pi z)$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\alpha, \alpha) &= 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\sin(\pi(2\alpha-1))} \right) = \\ &= 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\sin(2\pi\alpha)} \right) = 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cos(\pi\alpha)} \right) = \\ &= 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} \frac{\sin^2(\pi\alpha/2)}{(-1)\cos(\pi\alpha)} = \frac{(2\Gamma(1-\alpha)\sin(\pi(1-\alpha)/2))^2}{2\Gamma(2-2\alpha)\cos(\pi(2-2\alpha)/2)}. \end{aligned}$$

Учитывая определения  $A$  и  $B$ , получим  $\tilde{B}(\alpha, \alpha) = \frac{A^2}{B}$ . Таким образом, при

$\lambda = 2\alpha - 1$  соотношение (1.55) превращается в тождество  $\frac{A^2}{B} = \frac{A^2}{B}$ . Подстав-

ля значение  $\lambda = 2\alpha - 1$  в (1.46), получим искомое равенство (1.45).

**Лемма 1.2.** Пусть функция  $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^2)$  и  $0 < \operatorname{Re} \gamma < 1$ , тогда имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x) dx = -|k|^\beta F(k), \quad (1.56)$$

где  $\beta = 2\gamma$ .

**Доказательство.** Докажем, что имеет место равенство (1.56). Введем

функцию  $\psi(x) = \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} f(x)$  и вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{1}{A} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dx} \left[ e^{-ikx} \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|} \right] + ik e^{-ikx} \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|} \right\} dx = \\ &= e^{-ikx} \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|} dx. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Первое слагаемое в равенстве (1.57) равно нулю. Вычислим интеграл во втором слагаемом

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|^\gamma} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \int_{-\infty}^x \frac{\psi(s)}{(x-s)^\gamma} ds dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx \int_x^{\infty} \frac{\psi(s)}{(s-x)^\gamma} ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds \int_s^{\infty} e^{-ikx} (x-s)^{-\gamma} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds \int_{-\infty}^s e^{-ikx} (s-x)^{-\gamma} dx. \end{aligned}$$

В первом интеграле сделаем замену  $z = x - s$ , а во втором интеграле вида  $z = s - x$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|^\gamma} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) e^{-iks} ds \int_0^{\infty} e^{-ikz} z^{-\gamma} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) e^{-iks} ds \int_0^{\infty} e^{ikz} z^{-\gamma} dz = \\ &= \psi(k) 2 \int_0^{\infty} z^{-\gamma} \cos(kz) dz. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \left\{ \frac{\sin(bx)}{\cos(bx)} \right\} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{|b|^\alpha} \left\{ \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\cos(\alpha\pi/2)} \right\}$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|^\gamma} = \psi(k) 2\Gamma(1-\gamma) \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\gamma)\right) \frac{1}{|k|^{1-\gamma}}$$

или же

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{|x-s|^\gamma} = 2\Gamma(1-\gamma) \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\gamma)\right) \frac{1}{|k|^{1-\gamma}} = \frac{A}{|k|^{1-\gamma}} \psi(k).$$

Следовательно, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} \psi(x) dx = ik \frac{1}{A} \cdot \frac{A}{|k|^{1-\gamma}} \psi(k) = i|k|^\gamma \text{sign}(k) \psi(k),$$

где  $\psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} f(x) dx = i|k|^\gamma \text{sign}(k) F(k)$ .

Таким образом, окончательно получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} f(x) = i^2 |k|^{2\gamma} (\text{sign}(k))^2 F(k) = -|k|^\beta F(k).$$

Что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

**Лемма 1.3.** Пусть  $f(x)$  достаточно гладкая функция и  $1 < \beta < 2$ , тогда имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x) dx = -k^2 \frac{1}{B} \cdot \frac{B}{|k|^{2-\beta}} F(k) = -|k|^\beta F(k). \quad (1.58)$$

Правые части равенств (1.56) и (1.58) равны. Следовательно, левые части тоже равны, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x) dx.$$

Следовательно,  $\frac{d^\gamma}{dx^\gamma} \left( \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} f(x) \right) = \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x)$ .

### § 3. Преобразования Лапласа дробных производных

Очень часто при нахождении аналитических решений дифференциальных уравнений дробного порядка пользуются интегральными преобразованиями. В этом параграфе рассмотрим преобразования Лапласа для дробных производных Римана-Лиувилля и Капуто, которые будут нужны для нахождения аналитических решений дифференциальных уравнений с производными дробного порядка.

**Определение 1.1.** Пусть функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям:

1.  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;
2. функция  $f(t)$  удовлетворяет условию Гельдера всюду на полуоси  $t > 0$  за исключением, быть может, отдельных точек, где оригинал может иметь разрыв первого рода (таких точек может быть конечное множество), т.е.  $\forall t > 0, \exists A > 0, \exists \beta > 0, 0 < \beta \leq 1$  и  $\exists \tau_0 > 0$  для которых имеет место неравенство  $|f(t + \tau) - f(t)| \leq A|\tau|^\beta$  при всех  $\tau$  удовлетворяющих условию  $|\tau| \leq \tau_0$ ;
3.  $\exists M > 0$  и  $\exists s_0 \geq 0$  для которых имеет место неравенство  $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ .

Тогда для комплекснозначной функции  $f(t)$  изображением Лапласа называется функция  $F(p)$  комплексной переменной  $p = s + i\sigma$ , определяемая равенством:  $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$ .

Если функция  $f(t)$  является непрерывной при  $t > 0$  и  $f'(t)$  является оригиналом, то

$$L(f'(t)) = pF(p) - f(0). \quad (1.65)$$

Свертке оригиналов соответствует произведение изображений:

$$f(t) \oplus g(t) = F(p) \cdot G(p). \quad (1.66)$$

Согласно определению Адамара, дробная производная задается в виде:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{\Gamma(n - \alpha + 1)} (t - t_0)^{n - \alpha}, \quad (1.67)$$

где  $0 < \alpha < 1$ .

Дробная производная Римана-Лиувилля (1.32) совпадает с дробной производной Адамара при  $t_0 = 0$ .

Пусть функция  $f(t)$  непрерывная в области  $t > 0$ . Тогда, если воспользуемся равенствами (1.65) и (1.66), то для изображения дробной производной Римана-Лиувилля (1.32) имеет место равенство [72]:

$$L(D_{0+}^\alpha f(t)) = \frac{pF(p)L(t^{-\alpha})}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (1.68)$$

Изображение  $L(t^{-\alpha})$  можно найти, воспользовавшись определением:

$$L(t^{-\alpha}) = \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{p^{1 - \alpha}}. \quad (1.69)$$

На основе равенств (1.68) и (1.69) окончательно можно записать:

$$L(D_{0+}^\alpha f(t)) = p^\alpha F(p). \quad (1.70)$$

Аналогичным образом для дробной производной Капуто получаем:

$$L(\hat{\partial}_{0+}^\alpha f(t)) = \frac{pF(p) - f(0)}{p^{1 - \alpha}} = p^\alpha F(p) - \frac{f(0)}{p^{1 - \alpha}}. \quad (1.71)$$

## **Глава II. Численные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка**

Как известно, в настоящее время для нахождения решений дробных дифференциальных уравнений применяют как аналитические, так и численные методы. При поиске аналитических решений дробных дифференциальных уравнений часто возникают большие трудности, а полученные решения имеют громоздкий вид. Численные алгоритмы упрощают исследование различных моделей, описываемых дробными дифференциальными уравнениями [2; 47–50; 92; 118; 157; 181; 185; 186].

### *Обзор численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с производной дробного порядка*

В работе [145] получена аппроксимация дробной производной Капуто ( $0 < \alpha < 2$ ,  $\alpha \neq 1$ ), который имеет порядок  $2 - \alpha$ , используя метод трапеций для вычисления интеграла в определении дробной производной. В работе [52] автор приводит разностные аппроксимации для дробной производной Римана-Лиувилля и Капуто ( $0 < \alpha < 1$ ), которые имеют первый порядок точности. В работе [142] автором получена трехточечная аппроксимация дробной производной Капуто порядка  $3 - \alpha$ . В работе [142] автор предлагает методы аппроксимации дробной производной, основанные на замене подынтегральной функции различными полиномами, с последующим численным вычислением интеграла с помощью квадратурных формул. При этом порядок, полученных аппроксимаций, меняются от 1 до  $3 - \alpha$  в зависимости от используемой квадратурной формулы. В монографии [133] приводится обширный обзор различных видов аппроксимации дробных производных Капуто и Римана-Лиувилля.

В работе [145] представлены некоторые алгоритмы численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто. Различные численные алгоритмы решения задачи Коши

для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка представлены и в работе [159;160].

Построению различных алгоритмов численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка посвящены и ряд авторских работ тоже. В работах [24;29] для конечной разности дробного порядка получена оценка  $|\Delta^\alpha u(t_m)| \leq C \cdot \tau^n$ , где  $C = const$ ,  $n-1 < \alpha < n$ , построены численные алгоритмы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка, доказаны теоремы о сходимости и получены условия для определения шага сетки в зависимости от параметра дробной производной. В работе [33] представлена разностная аппроксимация для дробной производной Римана-Лиувилля второго порядка точности. На основе этой разностной аппроксимации построены численные алгоритмы второго порядка точности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля и доказана теорема о сходимости. В [30] изложены численные методы и алгоритмы решения задачи Коши для ОДУ с производными дробного порядка.

## § 1. Аппроксимация производных дробного порядка

### 1.1. Аппроксимация дробной производной Капуто

Пусть  $x(t) \in C^n([0, T])$ . Рассмотрим на отрезке  $[0, T]$  производную дробного порядка в смысле Капуто от функции  $x(t)$  (1.28), где  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Для построения численного решения, на отрезке  $[0, T]$  введем равномерную сетку с шагом  $\tau$

$$\omega_\tau = \{t_m = m \cdot \tau, m = 0, 1, \dots, M, M \cdot \tau = T\}.$$

Для дробной производной Капуто, в точке  $t = t_m$  имеет место равенство

$$(\partial_{0t}^\alpha x(t))_{t=t_m} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{t_m} \frac{x^{(n)}(s)}{(t_m - s)^{\alpha-n+1}} ds. \quad (2.1)$$

Интеграл в правой части равенства (2.1), представляя как сумму интегралов по частичным отрезкам  $[t_{i-1}, t_i]$ , получим:

$$(\partial_{ot}^\alpha x(t))_{t=t_m} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{x^{(n)}(s)}{(t_m-s)^{\alpha-n+1}} ds. \quad (2.2)$$

В правой части равенства (2.2), заменяя  $x^{(n)}(s)$  разностным выражением

$$x^{(n)}(s) \approx \frac{\Delta^n x(t_i)}{\tau^n},$$

получим:

$$(\partial_{ot}^\alpha x(t))_{t=t_m} \approx \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{i=0}^m \frac{\Delta^n x(t_i)}{\tau^n} \cdot \frac{t_{m-i+1}^{n-\alpha} - t_{m-i}^{n-\alpha}}{n-\alpha},$$

где  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Равенство вида:

$$\Delta^\alpha x(t_m) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{i=0}^m (t_{m-i+1}^{n-\alpha} - t_{m-i}^{n-\alpha}) \Delta^n x(t_i) \quad (2.3)$$

называется конечной разностью дробного порядка  $\alpha$  в точке  $t = t_m$ .

Для конечной разности дробного порядка справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.1.** Пусть  $x(t) \in C^{(n)}(R^1)$  и  $\max_{0 \leq k \leq m} |x^{(n)}(t)| = M_m$  ограничена,

тогда

$$|\Delta^\alpha x(t_i)| \leq C \cdot \tau^n, \text{ где } C = \text{const}.$$

**Доказательство.** Согласно определению (2.3) имеем:

$$\Delta^\alpha x(t_m) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^m (t_{m-i+1}^{n-\alpha} - t_{m-i}^{n-\alpha}) \Delta^n x(t_i).$$

Так как



$$\max_{0 \leq i \leq m} |\Delta^n x(t_i)| \leq \tau^n \max_{0 \leq i \leq m} |x^{(n)}(t_i)| = M_m \tau^n,$$

то

$$\begin{aligned} |\Delta^\alpha x(t_m)| &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^m (t_{m-i+1}^{n-\alpha} - t_{m-i}^{n-\alpha}) |\Delta^n x(t_i)| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq k \leq m} |\Delta^n x(t_k)| \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^m (t_{m-i+1}^{n-\alpha} - t_{m-i}^{n-\alpha}) \leq \frac{M_m t_m^{n-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \tau^n = C \tau^n, \end{aligned}$$

где  $C = \frac{M_m t_m^{n-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ .

В случае  $n = 1$  получим

$$(\partial_{0t}^\alpha x(t))_{t=t_m} \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=0}^m \frac{\Delta x(t_k)}{\tau} \frac{t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

т. е.

$$\begin{aligned} (\partial_{0t}^\alpha x(t))_{t=t_m} &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{i=0}^m (x(t_{k+1}) - x(t_k))(t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha}) + O(\tau). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функцию  $x(t_{i+1}) = x(t_i + \tau)$  разлагая в ряд Тейлора по степеням  $\tau$ , подставляя в правую часть равенства (2.4) и учитывая равенство

$$\sum_{i=0}^n (t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha}) = t_{m+1}^{1-\alpha},$$

получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{i=0}^m (x(t_{i+1}) - x(t_i))(t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha}) = \\ &\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^m (x'(t_i) + \frac{x''(\xi_i)}{2} \tau)(t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=0}^m x'(t_i) \frac{(t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha})}{1-\alpha} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^m \frac{x''(\xi_i)}{2} \tau (t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha}) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=0}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{x'(s)}{(t_m - s)^\alpha} ds + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\tau}{2\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^m x''(\xi_i)(t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha}) = (\partial_{0t}^\alpha x(t))_{t=t_m} + O(\tau).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau} \sum_{i=0}^m (x_{i+1} - x_i)(t_{m-i+1}^{1-\alpha} - t_{m-i}^{1-\alpha}) = (\partial_{0t}^\alpha x(t))_{t=t_m} + O(\tau).$$

## 1.2. Аппроксимация дробной производной Римана–Лиувилля

Для функции  $u(t)$ , заданной на отрезке  $[0, T]$ , дробная производная Римана–Лиувилля задается выражением (1.34):

$$D_{0t}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds,$$

где  $n-1 < \alpha \leq n$ .

Рассмотрим случай  $n=2$ , то есть

$$D_{0t}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\alpha-1}} ds. \quad (2.5)$$

Для дробной производной Римана–Лиувилля (2.5) во многих работах [50;185;186] пользуются аппроксимацией вида:

$$D_{0t}^\alpha u(t) = \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} q_k u_{n-k+1} + O(\tau), \quad (2.6)$$

где

$$q_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Для функции  $u(t)$ , заданной на отрезке  $[0, T]$ , рассмотрим случай дробной производной Римана–Лиувилля, когда  $0 < \alpha < 1$ , то есть

$$D_{0t}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} ds.$$

Обозначая интеграл в правой части равенства через  $\bar{u}(t)$ , дробную производную Римана–Лиувилля можно представить в виде:

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) = \frac{d}{dt}\bar{u}(t),$$

$$\text{где } \bar{u}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds.$$

Введем на отрезке  $[0, T]$  равномерную сетку с шагом  $\tau$ :

$$\omega_{\tau} = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N, N = \frac{T}{\tau}\}.$$

Тогда

$$D_{0t}^{\alpha}u(t_{n+1/2}) = \frac{d}{dt}\bar{u}(t_{n+1/2}) = \frac{\bar{u}(t_{n+1}) - \bar{u}(t_n)}{\tau} + O(\tau^2). \quad (2.7)$$

Найдем выражения  $\bar{u}(t_{n+1})$  и  $\bar{u}(t_n)$ .

$$\begin{aligned} \bar{u}(t_{n+1}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{u(s)}{(t_{n+1}-s)^{\alpha}} ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \frac{u(s)}{(t_{n+1}-s)^{\alpha}} ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \left[ \frac{s-t_k}{-\tau} u(t_{k-1}) + \frac{s-t_{k-1}}{\tau} u(t_k) + O(\tau^2) \right] \frac{1}{(t_{n+1}-s)^{\alpha}} ds = \\ &= \tau \sum_{k=0}^n (p_k - kq_k) u(t_{n-k}) - \tau \sum_{k=0}^n (p_k - (k+1)q_k) u(t_{n-k+1}) + \psi_{n+1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{где } \psi_{n+1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{n+1} O(\tau^2) \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \frac{1}{(t_{n+1}-s)^{\alpha}} ds = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} O(\tau^{3-\alpha}),$$

и

$$\begin{aligned} \bar{u}(t_n) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_n} \frac{u(s)}{(t_n-s)^{\alpha}} ds + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \frac{u(s)}{(t_n-s)^{\alpha}} ds = \\ &= \tau \sum_{k=1}^n (p_{k-1} - (k-1)q_{k-1}) u(t_{n-k}) - \tau \sum_{k=1}^n (p_{k-1} - kq_{k-1}) u(t_{n-k+1}) + \psi_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $\psi_n = \frac{n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} O(\tau^{3-\alpha})$ ,

$$p_k = \frac{\tau^{-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[ (k+1)^{2-\alpha} - k^{2-\alpha} \right], \quad (2.10)$$

$$q_k = \frac{\tau^{-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[ (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \right]. \quad (2.11)$$

Подставим (2.8) и (2.9) в (2.7). Тогда получим

$$\begin{aligned} D_{0t}^\alpha u(t_{n+1/2}) &= \sum_{k=0}^n (p_k - kq_k)u(t_{n-k}) - \sum_{k=0}^n (p_k - (k+1)q_k)u(t_{n-k+1}) - \\ &- \sum_{k=1}^n (p_{k-1} - (k-1)q_{k-1})u(t_{n-k}) + \sum_{k=1}^n (p_{k-1} - kq_{k-1})u(t_{n-k+1}) + \\ &+ O(\tau^2) = \sum_{k=0}^n \rho_k u(t_{n-k+1}) + O(\tau^2), \end{aligned}$$

где  $\rho_0 = q_0 - p_0$ ,

$$\rho_1 = 2p_0 - p_1 + 2q_1 - q_0,$$

$$\rho_k = (-p_{k-2} + 2p_{k-1} - p_k) + (k-2)q_{k-2} - (2k-1)q_{k-1} - (k+1)q_k, \quad k \geq 2.$$

Если учесть, что

$$|\psi_{n+1}| \leq O(\tau^2) \text{ и } |\psi_n| \leq O(\tau^2),$$

то получим разностную аппроксимацию производной дробного порядка Римана–Лиувилля порядка точности  $O(\tau^2)$  при  $0 < \alpha < 1$ .

$$D_{0t}^\alpha u(t_{n+1/2}) = \sum_{k=0}^n \rho_k u(t_{n-k+1}) + O(\tau^2), \quad (2.12)$$

$$\rho_0 = q_0 - p_0 = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, \quad (2.12a)$$

$$\rho_1 = 2p_0 - p_1 + 2q_1 - q_0 = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} (2^{2-\alpha} - 3),$$

$$\rho_k = (-p_{k-2} + 2p_{k-1} - p_k) + (k-2)q_{k-2} - (2k-1)q_{k-1} - (k+1)q_k =$$

$$= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left[ (k+1)^{2-\alpha} - 3k^{2-\alpha} + 3(k-1)^{2-\alpha} - (k-2)^{2-\alpha} \right], \quad k \geq 2.$$

Покажем, что  $\sum_{k=0}^n \rho_k \leq 1$ .

Сумму коэффициентов  $\rho_k$  можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^n \rho_k = p_{n-1} - p_n - (n-1)q_{n-1} + (n+1)q_n. \quad (2.13)$$

Подставляя (2.10) и (2.11) в равенство (2.13), получим

$$\sum_{k=0}^n \rho_k = \frac{t_{n+1}^{2-\alpha} - 2t_n^{2-\alpha} + t_{n-1}^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) \cdot \tau^2}. \quad (2.14)$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^n \rho_k \leq 1. \quad (2.15)$$

## § 2. Численный метод решения задачи Коши для системы ОДУ с дробной производной Капуто

В области  $D = [0, T]$  рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто (1.28)

$$\begin{aligned} \partial_{ot}^\alpha u(t) &= f(t, u), t > 0, \\ u(0) &= u^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $f(t, u) = \{f_i(t, u_1, \dots, u_m)\}_{i=1}^m$ ,  $u(t) = \{u_i(t)\}_{i=1}^m$ ,  $t > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Пусть функции  $f_i, i = 1, 2, \dots, m$  непрерывны по всем аргументам в замкнутой области  $D$ . Тогда существует константа  $M = \text{const} > 0$ , что во всей области  $D$  имеют место неравенства  $|f_i| < M, i = 1, 2, \dots, m$ .

И пусть в области  $D$  для функций  $f_i$  выполняется условие Липшица по аргументам  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , то есть имеют место неравенства:

$|f_i(t, u'_1, u'_2, \dots, u'_m) - f_i(t, u''_1, u''_2, \dots, u''_m)| \leq L\{|u'_1 - u''_1| + |u'_2 - u''_2| + \dots + |u'_m - u''_m|\}$ . для всех точек  $(t, u'_1, u'_2, \dots, u'_m)$  и  $(t, u''_1, u''_2, \dots, u''_m)$  в области  $D$ .

При выполнении этих условий система (2.16) имеет единственное решение [85]

$$u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \dots, u_m = u_m(t).$$

Это решение определено при всех  $|t| \leq t_0 = \min(a, b/M)$  и принимает при  $t = 0$  заданные начальные значения.

Для построения численного решения задачи (2.16) в области  $D$  введем по переменной  $t$  равномерную сетку с шагом  $\tau > 0$ :

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N, N\tau = T\}.$$

Обозначим через  $u(t)$  точное решение задачи (2.16), а через  $y_n = y(t_n)$  – приближенное решение.

Воспользовавшись аппроксимацией (2.4), уравнение (2.16) заменим следующим разностным уравнением:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) - f(t_n, y_n) = 0, \quad (2.17)$$

$$y_0 = u_0, \\ n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Тогда численное решение задачи (2.16) можно найти по явным рекуррентным формулам

$$y_0 = u_0, \\ y_1 = y_0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha f(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n - \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha f(t_n, y_n), \quad (2.18) \\ n = 1, 2, \dots, N-1$$

Если принять  $\alpha = 1$ , то расчётные формулы (2.18) переходят в известные расчётные формулы Эйлера.

Приведем несколько определений из [102] о сходимости и порядке точности разностного метода.

**Определение 2.1.** Будем говорить, что метод (2.18) сходится в точке  $t_n$ , если  $|y_n - u(t_n)| \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

**Определение 2.2.** Разностный метод будет иметь  $p$ -тый порядок точности, если существует такое число  $p \geq 0$ , для которого имеет место равенство  $|y_n - u(t_n)| = O(\tau^p)$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

Говорят, что метод сходится на интервале  $(0, T]$ , если он сходится в каждой точке этого интервала.

Введем следующее обозначение, то есть обозначим через  $z_n = y_n - u(t_n)$ . Подставляя  $y_n = z_n + u_n$  в (2.17), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (z_{k+1} - z_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= f(t_n, z_n + u_n) - \\ &- \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Выражение в правой части уравнения (2.19) представим в виде суммы  $\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$ , где

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + f(t_n, u_n), \quad (2.20)$$

$$\psi_n^{(2)} = f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n).$$

Функция  $\psi_n^{(1)}$  называется погрешностью аппроксимации разностного уравнения (2.17) на решении исходного уравнения (2.16).

Покажем, что погрешность аппроксимации  $\psi_n^{(1)} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Функцию  $u(t_{k+1})$  разложим в ряд Тейлора

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \tau u'(t_k) + \frac{\tau^2}{2} u''(\xi_k).$$

Подставляя в (2.17), получим:

$$\begin{aligned}
\psi_n^{(1)} &= -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n \left( u(t_k) + \tau u'(t_k) + \frac{\tau^2}{2} u''(\xi_k) - u(t_k) \right) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + \\
&+ f(t_n, y_n) = -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n u'(t_k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) - \\
&- \frac{\tau}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n u''(\xi_k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + f(t_n, y_n) = \\
&= -\left( \partial_{0t}^\alpha u \right)_{t=t_n} + f(t_n, y_n) + O(\tau) = O(\tau).
\end{aligned}$$

Следовательно, разностный метод (2.17) аппроксимирует дифференциальную задачу Коши (2.16) с первым порядком аппроксимации.

Докажем сходимость разностного метода (2.17). Имеем

$$|\psi_n^{(2)}| \leq L |y_n - u_n| = L |z_n|.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\tau^{1-\alpha} z_{n+1} + (t_2^{1-\alpha} - 2t_1^{1-\alpha} + t_0^{1-\alpha}) \cdot z_n + \dots (t_{n+1}^{1-\alpha} - 2t_n^{1-\alpha} + t_{n-1}^{1-\alpha}) \cdot z_1 = \\
&= \tau \cdot \Gamma(2-\alpha) \psi_n^{(2)} + \tau \cdot \Gamma(2-\alpha) \psi_n^{(1)}.
\end{aligned}$$

то есть

$$z_{n+1} = -\sum_{k=1}^n \frac{t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}}{\tau^{1-\alpha}} \cdot z_k + \tau^\alpha \cdot \Gamma(2-\alpha) \psi_n^{(2)} + \tau^\alpha \cdot \Gamma(2-\alpha) \psi_n^{(1)}, \quad (2.21)$$

$n = 0, 1, \dots, N$ .

Преобразуем выражение под суммой в правой части равенства (2.21).

$$\begin{aligned}
&\frac{t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}}{\tau^{1-\alpha}} = \frac{(t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot \tau^2}{\tau^{1-\alpha} \cdot \tau^2} = \\
&= \frac{\tau^2 \left( (t_{n-k+1}^{1-\alpha})'' + O(\tau^2) \right)}{\tau^{1-\alpha}} = -\frac{\tau^{\alpha+1} \alpha (1-\alpha)}{t_{n-k+1}^{\alpha+1}} + O(\tau^{3+\alpha}) = \\
&= -\frac{\tau^{\alpha+1} \alpha (1-\alpha)}{\tau^{\alpha+1} (n-k+1)^{\alpha+1}} + O(\tau^{3+\alpha}) = -\frac{\alpha (1-\alpha)}{(n-k+1)^{\alpha+1}} + O(\tau^{3+\alpha}).
\end{aligned}$$

Пусть  $m \leq n$  то значение  $k$ , при котором достигается  $\max_{1 \leq k} |z_k|$ , тогда



$$|\psi_n^{(2)}| \leq L|y_n - u_n| = L|z_n| \leq L \max_{1 \leq k} |z_k| = L|z_m|,$$

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}}{\tau^{1-\alpha}} \right| \cdot |z_k| \leq |z_m| \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(1-\alpha)}{(n-k+1)^{\alpha+1}} + O(\tau^{2+\alpha}).$$

Следовательно,

$$|z_{n+1}| \leq (S + \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)L) |z_m| + \tau^\alpha \cdot \Gamma(2-\alpha) |\psi_n^{(1)}| + O(\tau^{2+\alpha}),$$

где

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(1-\alpha)}{(n-k+1)^{\alpha+1}} \leq \alpha(1-\alpha) + \int_1^n \frac{\alpha(1-\alpha)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha) - \frac{1-\alpha}{n^\alpha} \leq 1 - \alpha^2 < 1.$$

Тогда

$$|z_m| \leq q |z_m| + \tau^\alpha \cdot \Gamma(2-\alpha) \max_{0 \leq j \leq n} |\psi_j^{(1)}| + O(\tau^{2+\alpha})$$

или же

$$(1-q) |z_m| \leq \tau^\alpha \cdot \Gamma(2-\alpha) \max_{0 \leq j \leq n} |\psi_j^{(1)}| + O(\tau^{2+\alpha}),$$

где  $q = (1 - \alpha^2) + \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)L$ .

Полагая  $q < 1$ , т. е.  $\tau^\alpha < \frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)L}$ , получим

$$\|z\| \leq \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{1-q} \|\psi^{(1)}\| + O(\tau^{2+\alpha}),$$

где  $\|z\| = \max_{1 \leq k} |z_k|$ .

Таким образом, доказана теорема:

**Теорема 2.1.** Пусть правая часть уравнения (2.16) удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$  по второму аргументу, и пусть  $\psi_j^{(1)}$  – невязка,

определенная равенством (2.20). Тогда для погрешности метода при  $n\tau \leq a$  и

$$\tau^\alpha < \frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)L} \text{ справедлива оценка } \|y - u\| \leq \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{1-q} \|\psi^{(1)}\| + O(\tau^{2+\alpha}),$$

$$\text{где } q = (1 - \alpha^2) + \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)L.$$

### § 3. Численные методы решения задачи Коши для системы ОДУ с дробной производной Римана–Лиувилля

Рассмотрим в области  $D = [0, T]$  задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля

$$\begin{aligned} D_{0t}^\alpha u(t) &= f(t, u), t > 0 \\ D_{0t}^{\alpha-1} u(0) &= u^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $0 < \alpha < 1$ .

Для построения численного решения задачи (2.22) введем в области  $D = [0, T]$  по переменной  $t$  равномерную сетку с шагом  $\tau > 0$ :

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N, N\tau = T\}.$$

Обозначим через  $u(t_n)$  точное решение задачи (2.16), а через  $y_n = y(t_n)$  – приближенное решение.

Воспользовавшись аппроксимацией производной дробного порядка Римана–Лиувилля (2.6), дифференциальную задачу (2.22) заменим разностной задачей вида

$$\frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} q_k y_{n-k+1} - f(t_n, y_n) = 0, \quad (2.23)$$

$$I_{0+}^{1-\alpha} u(0) = u_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение этой задачи можно найти с помощью явных рекуррентных формул:

$$y_1 = \alpha y_0 + \tau^\alpha f(t_0, y_0),$$

$$y_{n+1} = \alpha y_n + \tau^\alpha f(t_n, y_n) - \sum_{k=2}^{n+1} q_k y_{n-k+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.24)$$

$$I_{0+}^{1-\alpha} u(0) = u_0.$$

Обозначим погрешность метода через  $z_n = y_n - u(t_n)$ . Подставим  $y_n = z_n + u_n$  в (2.23). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} q_k (z_{n-k+1} + u_{n-k+1}) &= f(t_n, z_n + u_n), \text{ то есть} \\ \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} q_k z_{n-k+1} &= f(t_n, z_n + u_n) - \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} q_k u_{n-k+1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Выражение в правой части равенства (2.25) представим в виде суммы  $\psi_n^1 + \psi_n^2$ , где

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} q_k u_{n-k+1} + f(t_n, u_n), \quad (2.26)$$

$$\psi_n^{(2)} = f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n). \quad (2.27)$$

Покажем, что невязка метода  $\psi_n^{(1)} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Для  $\psi_n^{(1)}$  имеет место предельное равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \psi_n^{(1)} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} q_k u(t_n - (k-1) \cdot \tau) + f(t_n, u_n) \right) = \\ &= -(D_{0t}^\alpha u(t))_n + f(t_n, u_n) = 0 \end{aligned}$$

т. е.  $\psi_n^{(1)} = -(D_{0t}^\alpha u(t))_n + O(\tau) + f(t_n, u_n) = O(\tau)$ .

Имеем

$$\begin{aligned} |\psi_n^{(2)}| &\leq L |y_n - u_n| = L |z_n|, \\ z_{n+1} &= \tau^\alpha \psi_n^{(2)} + \tau^\alpha \psi_n^{(1)} - \sum_{k=1}^{n+1} q_k z_{n-k+1}. \end{aligned}$$

Предположим,  $m \leq n$  то значение  $k$ , при котором погрешность достигает  $\max_{1 \leq k} |z_k|$ , тогда

$$|z_m| \leq \tau^\alpha \cdot L \cdot |z_m| + \tau^\alpha |\psi_n^{(1)}| + |z_m| \cdot \sum_{k=1}^{n+1} |q_k|.$$

Имеем

$$c(\alpha) = \sum_{k=0}^n |q_k| < 2 \text{ при } 0 < \alpha < 1, \text{ тогда } S = \sum_{k=1}^n |q_k| < 1.$$

Тогда

$$|z_m| \leq (S + \tau^\alpha L) \cdot |z_m| + \tau^\alpha \max_{0 \leq j \leq n} |\psi_j^{(1)}|,$$

или же

$$|z_m| \leq \frac{1}{1-q} \tau^\alpha \max_{0 \leq j \leq n} |\psi_j^{(1)}|.$$

Следовательно, окончательно получим оценку

$$\|z\| \leq \frac{\tau^\alpha}{1-q} \|\psi^{(1)}\|,$$

где  $q = S + \tau^\alpha L$ .

Таким образом, мы получили следующий результат:

**Теорема 2.2.** Пусть правая часть уравнения (2.22) удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$  по второму аргументу, и пусть  $\psi_j^{(1)}$  – невязка, определенная равенством (2.26). Тогда для погрешности метода при  $n\tau \leq a$  и  $q < 1$  справедлива оценка

$$\|y - u\| \leq \frac{\tau^\alpha}{1-q} \|\psi^{(1)}\|. \quad (2.28)$$

Рассмотрим еще один численный метод второго порядка точности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля (2.22).

Для численного решения задачи (2.22) введем по переменной  $t$  равномерную сетку с шагом  $\tau > 0$ :

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Обозначим через  $u(t)$  точное решение задачи (11), а через  $y_n = y(t_n)$  – приближенное решение.

Уравнение (2.22) заменим, пользуясь аппроксимацией (2.12) и (2.12а), разностным уравнением

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} \sum_{k=0}^n \rho_k y_{n-k+1} - f(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}) = 0, \quad (2.29)$$

$$y_{n+1/2} = y_n + \Gamma(2-\alpha) \left(\frac{\tau}{2}\right)^\alpha f(t_n, y_n),$$

$$y_0 = u_0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение задачи можно найти в явном виде по рекуррентным формулам:

$$y_0 = u_0,$$

$$y_{n+1/2} = y_n + \Gamma(2-\alpha) \left(\frac{\tau}{2}\right)^\alpha \cdot f(t_n, y_n), \quad (2.30)$$

$$y_{n+1} = \frac{3-2^{2-\alpha}}{1-\alpha} y_n - (2-\alpha) \sum_{k=2}^n \rho_k y_{n-k+1} + \Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha f(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}),$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Докажем сходимость разностного метода (2.29). Обозначим через  $z_n = y_n - u(t_n)$ . Подставляя  $y_n = z_n + u_n$  в (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} \sum_{k=0}^n \rho_k z_{n-k+1} &= f(t_{n+1/2}, z_{n+1/2} + u_{n+1/2}) - \\ &- \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} \sum_{k=0}^n \rho_k u_{n-k+1} - u_k. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Правую часть уравнения (2.31) представим в виде суммы  $\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$ ,

где

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n \rho_k u_{n-k+1} + f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}), \quad (2.32)$$

$$\psi_n^{(2)} = f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2} + z_{n+1/2}) - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}).$$

Функция  $\psi_n^{(1)}$  называется погрешностью аппроксимации разностного уравнения (2.29) на решении исходного уравнения (2.22).

Покажем, что  $\psi_n^{(1)} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n \rho_k u_{n-k+1} + f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = -D_{0t}^\alpha u(t_{n+1/2}) + O(\tau^2) + \\ &+ f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = O(\tau^2). \end{aligned}$$

Таким образом, разностная схема (2.29) аппроксимирует задачу Коши (2.22) со вторым порядком.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_1(y) &= f(t_n, y_n), \quad k_1(u) = f(t_n, u_n), \\ k_2(y) &= f\left(t_{n+1/2}, y_n + \Gamma(2-\alpha)\left(\frac{\tau}{2}\right)^\alpha f(t_n, y_n)\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\psi_n^2| &\leq |k_2(y) - k_2(u)| \leq A(|y_n - u_n| + \Gamma(2-\alpha)(\tau/2)^\alpha |k_1(y) - k_1(u)|) \leq \\ &\leq A(1 + A(\tau/2)^\alpha \Gamma(2-\alpha)) \cdot |z_n| = Ac \cdot |z_n|, \end{aligned}$$

где  $|k_1(y) - k_1(u)| \leq A|y_n - u_n| = A|z_n|$ ,  $c = 1 + A(\tau/2)^\alpha \Gamma(2-\alpha)$ .

Имеем  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \cdot \tau^\alpha} \sum_{k=0}^n \rho_k z_{n-k+1} = \psi_n^1 + \psi_n^2$ ,  $Ac \rightarrow A$ , при  $\tau \rightarrow 0$ .

Пусть  $m \leq n$  то значение  $k$ , при котором достигается  $\max_{1 \leq k} |z_k|$ . Тогда

$$|\psi_n^{(2)}| \leq A|z_n| \leq A \max_{1 \leq k} |z_k| = A|z_m|, \quad \sum_{k=0}^n |\rho_k| \cdot |z_k| \leq |z_m| \sum_{k=1}^n |\rho_k|.$$

Следовательно,

$$|z_m| \leq A\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha |z_m| + \tau^\alpha \cdot \Gamma(1-\alpha) \left| \psi_n^{(1)} \right|.$$

Тогда

$$|z_m| \leq A \cdot \tau^\alpha \Gamma(1-\alpha) |z_m| + \tau^\alpha \cdot \Gamma(1-\alpha) \max_{0 \leq j \leq n} \left| \psi_j^{(1)} \right|,$$

или же

$$(1-q)|z_m| \leq \tau^\alpha \Gamma(1-\alpha) \max_{0 \leq j \leq n} \left| \psi_j^{(1)} \right|, \text{ где } q = A\Gamma(1-\alpha) \cdot \tau^\alpha.$$

Полагая  $q < 1$ , получим  $\|z\| \leq \frac{\tau^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{1-q} \|\psi^{(1)}\|$ , где  $\|z\| = \max_{1 \leq k} |z_k|$ .

Таким образом, мы получили следующий результат:

**Теорема 2.3.** Пусть правая часть уравнения (2.22) удовлетворяет условию Липшица с константой  $A$  по второму аргументу, и пусть  $\psi_j^{(1)}$  – невязка определена равенством (2.32). Тогда для погрешности метода при  $n\tau \leq a$  и  $q < 1$  справедлива оценка

$$\|y - u\| \leq \frac{\tau^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{1-q} \|\psi^{(1)}\|,$$

где  $q = A\tau^\alpha \Gamma(1-\alpha)$ .

### **Глава III. Численные методы решения краевых**

#### **задач для уравнения теплопроводности с дробной производной**

При решении дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка обычно появляются несобственные интегралы. Поэтому зачастую исследовать полученные решения и для наглядности построить их графики становится невозможно или же возникает необходимость численного вычисления несобственных интегралов, входящих в решение задач. Поэтому наряду с аналитическими методами разрабатываются и численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка.

Одним из часто используемых методов нахождения приближенного решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными является метод конечных разностей (или метод сеток). Результаты численного исследования математических моделей различных физических процессов при помощи метода конечных разностей дают хорошую сходимость с экспериментальными данными. Кроме того, они просты для разработки эффективных алгоритмов и создания программ.

Эта глава посвящена разработке численных алгоритмов решения краевых задач для уравнения теплопроводности с дробной производной.

#### *Обзор численных методов решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка*

В работе [2] проведено численное исследование краевой задачи для волнового уравнения с дробной производной Капуто, построена разностная, получены априорные оценки, доказана устойчивость и сходимость разностной схемы. В работе [48] рассмотрен метод Фурье, построены явные и частично неявные разностные схемы первого порядка аппроксимации. Также приведены простейшие методы идентификации параметров дробной диффузии. В работе [49] численно исследованы прямые задачи неклассического переноса радионуклидов в геологических формациях. В работе [50] для построения вычислительных алгоритмов, обладающих свойством консервативности, уравне-



ние дробной диффузии представили в потоковом виде. При этом, как отмечено автором, дробные потоки представляют собой соответствующие дробные производные степени  $(\alpha - 1)$  и вычисляются согласно определению дробной производной Грюнвальда-Летникова. В работе [59] автор рассматривает начально-краевые задачи для общего уравнения дробно-временной диффузии, обобщающего одно- и многочленные уравнения дробно-временной диффузии, а также уравнения дробно-временной диффузии распределенного порядка. В работе получены оценки для общих дробных по времени производных Римана-Лиувилля и Капуто в точке максимума и были использованы эти оценки, чтобы доказать слабый принцип максимума для общего уравнения теплопроводности с производной дробного порядка по времени, а также, используя принцип максимума доказал единственность как сильного, так и слабого решения задачи Дирихле. В работе [38] исследована третья краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто. В работе, используя метод энергетических неравенств, получены априорные оценки, доказана теорема о сходимости. В работах [64;93] исследуются вопросы численного решения дробно-дифференциальных уравнений, описывающих процессы аномальной диффузии. Представлены вычислительные алгоритмы решения начально-краевых задач для уравнений, содержащих дробные производные по времени и пространству, и проведен анализ устойчивости и порядка аппроксимации. В работе [172] доказаны теоремы о существовании и единственности решения дробно-временного уравнения диффузии с граничными условиями Робина на ограниченной области с границей Ляпунова в пространстве непрерывных функций вплоть до границы.

Очень часто при разработке разностных схем численного решения начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка используют аппроксимации дробных производных, основанные на определении дробной производной Грюнвальда-Летникова. В работе [186] при численном решении начально-краевой задачи для уравнения теплопро-

водности с дробной производной Римана-Лиувилля по пространственной переменной использовали аппроксимацию с опережением на шаблоне на основе определения дробной производной Грюнвальда-Летникова. В работе [185] рассмотрены некоторые практические численные методы решения класса дробных уравнений в частных производных с начальными граничными значениями с переменными коэффициентами в конечной области. В работе, используя аппроксимацию дробной производной с опережением на шаблоне, построены явные и неявные разностные схемы численного решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с двусторонней дробной производной по пространственной переменной, доказаны теоремы об устойчивости.

Численным методам решения начально-краевых для уравнений в частных производных дробного порядка посвящены и ряд работ автора. В работах [16;134] построены явные и неявные разностные схемы численного решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени и Римана-Лиувилля по пространственной переменной, доказаны теоремы об устойчивости. В случае, когда коэффициент теплопроводности константа, получено аналитическое решение задачи, доказана теорема о существовании и единственности решения. В работе [18] построен численный метод решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка. В работе [19] исследована начально-краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности. Построена разностная схема, аппроксимирующая начально-краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности с дробными производными, доказана теорема о сходимости и разработан алгоритм численного решения задачи. Работа [25] посвящена численному исследованию начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса по пространственной переменной. Построена разностная схема, доказана теорема об устойчивости и предложен алгоритм численного решения начально-краевой

задачи. В работах [26;135] построены разностные схемы численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона, получены оценки для погрешности методов, доказаны теоремы об устойчивости методов по правой части и граничным условиям. В работе [27] проведен анализ разностной схемы аналога волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования, разработан алгоритм численного решения задачи и проведен вычислительный эксперимент по анализу решения при различных значениях параметра дробной производной. В работе [31] построена разностная схема, аппроксимирующая начально-краевую задачу Стефана с дробной производной Капуто по времени и подвижной границей, разработан алгоритм численного решения задачи и проведены вычислительные эксперименты по анализу решения в зависимости от параметра дробной производной. Работы [34;138] посвящены исследованию нелокальных процессов неизотермической фильтрации. Для численного решения задачи построена разностная схема с весами, доказана теорема о сходимости, разработан алгоритм численного решения задачи и проведен вычислительный эксперимент по анализу решения в зависимости от параметра дробной производной. В работе [23;35;35] построены явные и неявные разностные схемы, аппроксимирующие начально-краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени, доказаны теоремы об устойчивости. В работе [136] построена конечно-разностная схема для решения уравнения тепловой диффузии-волны с производной дробного порядка и без начальных условий.

### **§ 1. Разностная схема с весами, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто**

В области  $D = \{(x, t) : 0 < x < R, 0 < t < T\}$  численно исследуем начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с производной дробного порядка Капуто вида [15;69;83]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t) = k(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \psi(x),$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(R, t) = \mu_2(t), \quad (3.2)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < c_0 \leq k(x, t) \leq c_1$ . Здесь  $u(x, t)$  – температура,  $f(x, t)$  – удельная плотность тепловыделения за счет внутренних источников.

**Численный метод решения краевой задачи.** Построим численный метод решения задачи (3.1), (3.2). Введем в области  $\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq R, 0 \leq t \leq T\}$  равномерную сетку с шагом  $h$  по пространственной переменной и  $\tau$  по времени:

$$\bar{W} = \{(x_m, t_n) : x_m = mh, t_n = n\tau, m = 0, 1, \dots, M, h = \frac{R}{M}, n = 0, 1, 2, \dots, N, \tau = \frac{T}{N}\}.$$

Для аппроксимации частной дробной производной Капуто воспользуемся равенством (2.4):

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t)\right)_n = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^n (t_{n-i+1}^{1-\alpha} - t_{n-i}^{1-\alpha}) \frac{u(x, t_{i+1}) - u(x, t_i)}{\tau} + O(\tau). \quad (3.3)$$

Для частной производной второго порядка по пространственной переменной  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  имеет место аппроксимация:

$$\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right)_m = \frac{u(x_{m+1}, t) - 2u(x_m, t) + u(x_{m-1}, t))}{h^2} + O(h^2). \quad (3.4)$$

Заменяя производные в уравнении (3.1) разностными выражениями (3.3) и (3.4), построим разностную схему с весами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n+1} (u_m^{k+1} - u_m^k) \left( (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right) = \\ = (\sigma \Lambda u_m^{n+1} + (1-\sigma) \Lambda u_m^n) + \varphi_m^n, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$u_m^0 = \psi(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, M,$$

$$u_0^n = \mu_1(t_n), u_m^n = \mu_2(t_n), n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.6)$$

где  $C_m^n = C(x_m, t_n)$ ,  $f_m^n = f(x_m, t_n)$ ,

$$\Lambda u_m^{n+1} = k_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}, \quad \Lambda u_m^n = k_m^n \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2},$$

$k_m^n \approx k(x_m, t_n)$ ,  $f_m^n \approx f(x_m, t_n)$ ,  $\sigma \geq 0$ - числовой параметр.

Разностное уравнение (3.5) представим в операторной форме:

$$(E + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha A) \cdot u^{n+1} = (B + (1-\sigma)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha A) \cdot u^n + \\ + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \varphi^n - \sum_{k=1}^{n-2} (u^{k+1} - u^k)((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}), \quad (3.7)$$

где  $u^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N-1}^n)$ ,  $\varphi^n = (\varphi_1^n, \varphi_2^n, \dots, \varphi_{N-1}^n)^T$ ,

$$u^0 = (u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_{N-1}))^T, \quad (Au)_m = -k_m \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} - r_m \frac{u_{m+1} - u_m}{h},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2-2^{1-\alpha} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2-2^{1-\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2-2^{1-\alpha} & \dots \end{pmatrix}.$$

**Устойчивость разностной схемы по начальным данным.** Уравнение (3.7) будет разрешимо относительно  $u^{n+1}$ , если оператор  $E + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha A$  обратим. При выполнении условия  $1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , где  $\lambda_k > 0$  – собственные числа, оператор  $A$  имеет обратный.

Для каждого значения  $n$  решение  $u_m^n = u(x_m, t_n)$  представимо в виде:

$$u(x_m, t_n) = \sum_{s=1}^{M-1} c_s(t_n) \mu_s(x_m). \quad (3.8)$$

Правую часть  $\varphi_m^n$  уравнения (3.5) также можно представить в виде ряда:

$$\varphi(x_m, t_n) = \sum_{s=1}^{M-1} \hat{\varphi}_s(t_n) \mu_s(x_m). \quad (3.9)$$

В равенствах (3.8) и (3.9)  $c_s(t_n)$  и  $\hat{\varphi}_s(t_n)$  являются коэффициентами Фурье функций  $u(x_m, t_n)$ ,  $\varphi(x_m, t_n)$  соответственно. Если разложения (3.8), (3.9) подставим в уравнение (3.7) и воспользуемся равенством  $(\mu_s(x))_{xx, m} = -\lambda_s \mu_s(x_m)$ , то получим

$$\sum_{s=1}^{M-1} \mu_s(x_m) \left[ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{c_s(t_{k+1}) - c_s(t_k)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left( (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right) + \sigma \lambda_s c_s(t_{n+1}) + (1-\sigma) \lambda_s c_s(t_n) - \hat{\varphi}_s(t_n) \right] = 0.$$

Так как функции  $\mu_s(x)$  линейно независимые, то получим:

$$\left( 1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s \right) c_s(t_{n+1}) - \left( (2-2^{1-\alpha}) + (1-\sigma)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s \right) c_s(t_n) + \sum_{k=1}^{n-2} (c_s(t_{k+1}) - c_s(t_k)) \left( (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right) - \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \hat{\varphi}_s(t_n) = 0, \quad (3.10)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1, S = 1, 2, \dots, M-1.$$

Таким образом, при каждом  $s$  получили разностное уравнение (3.10) относительно  $c^{(n)} = c_s(t_n)$ . Для нахождения единственного решения разностного уравнения (3.10) зададим начальное условие в виде:

$$c_s(0) = (u^0, \mu_s).$$

Если разрешить уравнение (3.10) относительно  $c_s(t_{n+1})$ , то получим

$$c_s(t_{n+1}) = \frac{(2-2^{1-\alpha}) - (1-\sigma)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s} c_s(t_n) + \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s} \hat{\varphi}_s(t_n) - \frac{1}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s} \sum_{k=1}^{n-2} (c_s(t_{k+1}) - c_s(t_k)) \left( (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right) \quad (3.11)$$

Тогда на основании равенств (3.7), (3.11), решение  $u_m^{n+1}$  задачи можно представить в виде:

$$u_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{M-1} \left[ p_s \cdot c_s(t_n) + q_s \cdot \hat{\phi}_s(t_n) - \frac{1}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha \lambda_s} \sum_{k=2}^{n+1} (\Delta_\tau^\alpha c_s(t_n)) \right] \mu_s(x_m),$$

$$\text{где } p_s = \frac{(2-2^{1-\alpha}) - (1-\sigma)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s}, \quad q_s = \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s},$$

$$\Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) = \sum_{k=1}^{n-2} (c_s(t_{k+1}) - c_s(t_k)) \left( (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right).$$

Обозначая

$$\bar{u}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{M-1} [p_s \cdot c_s(t_n)] \mu_s(x_m), \quad \tilde{u}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{M-1} [q_s \cdot \hat{\phi}_s(t_n)] \mu_s(x_m),$$

$$u_m^{n+1} = - \sum_{s=1}^{M-1} \frac{1}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s} \cdot \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \cdot \mu_s(x_m),$$

получим, что

$$u_m^{n+1} \leq \bar{u}_m^{n+1} + \tilde{u}_m^{n+1} + u_m^{n+1}.$$

В силу ортонормированности базиса  $\{\mu_s\}$  получаем

$$\|\bar{u}^{n+1}\|^2 = \sum_{m=1}^{M-1} (\bar{u}_m^{n+1})^2 h = \sum_{s=1}^{M-1} p_s^2 \cdot (c_s(t_n))^2.$$

Следовательно,

$$\|\bar{u}^{n+1}\| \leq \left( \sum_{s=1}^{M-1} (c_s(t_n))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \max |p_s| = \|u^n\| \max_{1 \leq s \leq M-1} |p_s|.$$

Потребуем выполнения условия

$$|p_s| = \left| \frac{(2-2^{1-\alpha}) - (1-\sigma)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s} \right| \leq 1, s = 1, 2, \dots, M-1. \quad (3.12)$$

Из условия (3.12) получим оценку:

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{3-2^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s}. \quad (3.13)$$

Преобразуя неравенство (3.13) для всех  $s = 1, 2, \dots, M-1$ , получим:

$$1 + \sigma \cdot \Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda_s \geq \frac{\Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda_s}{2} + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{2} > 0.$$

Следовательно, при выполнении неравенства (3.13), имеет место оценка:

$$\left\| \bar{u}^{n+1} \right\| \leq \left\| u^n \right\|. \quad (3.14)$$

Если в разностном уравнении  $\varphi_m^n = 0$ , то  $u_m^{n+1} = \bar{u}_m^{n+1}$ . Тогда на основе неравенства (3.14) получим  $\left\| u^{n+1} \right\| \leq \left\| u^n \right\| \leq \left\| u^{n-1} \right\| \leq \dots \leq \left\| u^0 \right\|$ . Таким образом, выполнение оценки (3.14) означает устойчивость разностной схемы по началь-

ным данным в норме  $\left\| u \right\| = \left( \sum_{m=1}^{M-1} h u_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Устойчивость по правой части и сходимость.** Теперь докажем устойчивость разностной схемы по правой части. Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{M-1} [q_s \hat{\varphi}_s(t_n)] \mu_s(x_m). \quad (3.15)$$

Для оценки функции (3.15) перепишем в виде:

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{(1 - \varepsilon)(3 - 2^{1-\alpha})}{\tau^\alpha \Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda_{N-1}}, \quad (3.16)$$

где  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $s = 1, 2, \dots, M - 1$ . Преобразуя неравенство (3.16), получим

$$\begin{aligned} 1 + \sigma \cdot \Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda_s &\geq \frac{\Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda_s}{2} + 1 - \frac{(1 - \varepsilon)(3 - 2^{1-\alpha}) \lambda_s}{2 \lambda_{N-1}} > \\ &> 1 - \frac{(1 - \varepsilon)(3 - 2^{1-\alpha})}{2} > 1 - \frac{(1 - \varepsilon) \cdot 2}{2} = \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Тогда на основе равенства (3.15) имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{u}^{n+1} \right\|^2 &\leq \sum_{s=1}^{M-1} \left[ (q_s)^2 (\hat{\varphi}_s(t_n))^2 \right] \leq \\ &\leq \left( \frac{\Gamma(2 - \alpha) \tau}{(x_2^{1-\alpha} - x_1^{1-\alpha}) + (3x_1^{1-\alpha} - x_2^{1-\alpha}) \varepsilon} \right)^2 \sum_{s=1}^{M-1} (\hat{\varphi}_s(t_n))^2 \leq \left( \frac{\tau}{\varepsilon} \right)^2 \sum_{s=1}^{M-1} (\hat{\varphi}_s(t_n))^2. \end{aligned}$$



Следовательно,

$$\|\tilde{u}^{n+1}\| \leq \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi^n\|. \quad (3.17)$$

Теперь получим оценку для функции  $\bar{u}_m^{n+1}$ . Имеем:

$$\bar{u}_m^{n+1} = - \sum_{s=1}^{M-1} \frac{1}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha \lambda_s} \cdot \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \cdot \mu_s(x_m).$$

Тогда

$$\|\bar{u}^{n+1}\|^2 \leq \sum_{s=1}^{M-1} \left( \frac{1}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha \lambda_s} \right)^2 \cdot \left( \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \right)^2,$$

то есть

$$\|\bar{u}^{n+1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|\Delta_\tau^\alpha c_s(t_n)\|,$$

где

$$\begin{aligned} \|\Delta_\tau^\alpha c_s(t_n)\| &\leq \sum_{k=1}^{n-2} \|(c_s(t_{k+1}) - c_s(t_k))\| \left( (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right) \leq \\ &\leq \rho \cdot \tau \sum_{k=1}^{n-2} \left( (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right) \leq \rho \cdot \tau \cdot (n^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}) \leq \rho \cdot \tau \cdot n^{1-\alpha} = \\ &= \rho \cdot \tau \cdot \left( \frac{T}{\tau} \right)^{1-\alpha} = \rho \cdot T^{1-\alpha} \cdot \tau^\alpha = g \cdot \tau^\alpha. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho = \max |c'_s(t)| = const$ ,  $g = \rho \cdot T^{1-\alpha} = const$ .

Таким образом, получаем оценку:

$$\|\bar{u}^{n+1}\| \leq \frac{g \tau^\alpha}{\varepsilon}. \quad (3.18)$$

Если воспользуемся свойствами нормы

$$\|u^{n+1}\| \leq \|\bar{u}^{n+1}\| + \|\tilde{u}^{n+1}\| + \|\bar{u}^{n+1}\|$$

и полученными оценками (3.14), (3.17) и (3.18), то получим следующее неравенство

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi^n\| + \frac{g\tau^\alpha}{\varepsilon}. \quad (3.19)$$

Неравенство (3.19) имеет место для всех значений  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Производя суммирование неравенства (3.19) по  $n$ , получим:

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^0\| + \frac{\tau}{\varepsilon} \sum_{j=0}^n \|\varphi^j\| + \frac{g\tau^\alpha}{\varepsilon}. \quad (3.20)$$

Согласно введенной сетке  $m \leq T$ . Тогда неравенство (3.20) можно переписать в виде:

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^0\| + \frac{T}{\varepsilon} \max_{0 \leq j \leq n} \|\varphi^j\| + \frac{g\tau^\alpha}{\varepsilon}. \quad (3.21)$$

Следовательно, доказана теорема:

**Теорема 3.1.** Пусть разностная схема (3.5), (3.6) аппроксимирует начально-краевую задачу (3.1) и (3.2) и пусть имеет место неравенство

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^0\| + \frac{T}{\varepsilon} \max_{0 \leq j \leq n} \|\varphi^j\| + \frac{g\tau^\alpha}{\varepsilon}, \quad \rho = \max |c'_s(t)| = const, \quad g = \rho \cdot T^{1-\alpha} = const, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

тогда разностная схема (3.5), (3.6) будет устойчива по начальным данным и по правой части.

## § 2. Численный метод решения краевой задачи

### для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса

Рассмотрим в области  $\bar{D} = \{(x, t) : -L \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$  краевую задачу для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка Рисса.

**Задача.** Найти решение  $u(x, t) \in C^2(D)$  уравнения:

$$u_t(x, t) = C(x, t) {}^R D^\beta u(x, t) + f(x, t), \quad (3.22)$$

где  $1 < \beta \leq 2$ ,  $C(x, t) \geq 0$ , удовлетворяющее начальному условию  $u(x, 0) = \varphi(x)$  и граничным условиям  $u(-L, t) = \mu_1(t)$  и  $u(L, t) = \mu_2(t)$ . Здесь  ${}^R D^\beta u(x, t)$  – частная дробная производная Рисса (1.43).

Используя выражение

$${}^R D^\beta u(x,t) = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{(2-\beta) \cdot \pi}{2}\right)} \left( {}^{RL} D_{0-}^\beta u(x,t) + {}^{RL} D_{0+}^\beta u(x,t) \right), \quad (3.23)$$

уравнение (3.22) примет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{C(x,t)}{2 \cos\left(\frac{(2-\beta) \cdot \pi}{2}\right)} \left( {}^{RL} D_{0+}^\beta u(x,t) + {}^{RL} D_{0-}^\beta u(x,t) \right) + f(x,t), \quad (3.24)$$

Краевую задачу для уравнения (3.22) будем решать численным методом.

Для этого в области  $\bar{D} = \{(x,t) : -L < x < +L, 0 \leq t \leq T\}$  введем сетку:

$$\varpi_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_n) : x_i = -L + ih, t_n = n\tau, i = 0, 1, \dots, K, h = \frac{2L}{K}, n = 0, 1, \dots, N, \tau = \frac{T}{N} \right\}$$

с шагом  $h$  по  $x$  и  $\tau$  по  $t$ .

Согласно теореме Летникова [85], если  $f \in C^2(D)$  то производная Грюнвальда–Летникова совпадает с производной Римана–Лиувилля.

Используя определение Грюнвальда–Летникова дробной производной по пространству (1.40), (1.41), дробные производные по координате в правой части заменим разностными выражениями

$$\left( D_+^\beta u \right)_i = \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{i+1} q_k u_{i-k+1} + O(h^2) = \Lambda_+^\beta u_i + O(h^2), \quad (3.25)$$

$$\left( D_-^\beta u \right)_i = \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k u_{i+k-1} + O(h^2) = \Lambda_-^\beta u_i + O(h^2). \quad (3.26)$$

Для производной  $\frac{\partial u}{\partial t}$  в точке  $t_n$  имеет место разностная аппроксимация

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_n \sim \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}. \quad (3.27)$$

С учетом соотношений (3.25), (3.26) и (3.27) получим следующую разностную схему с весами

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{C_i^{n+1}}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)h^\beta} \left[ \sigma(\Lambda_+^\beta u_i^{n+1} + \Lambda_-^\beta u_i^{n+1}) + (1-\sigma)(\Lambda_+^\beta u_i^n + \Lambda_-^\beta u_i^n) \right] + f_i^{n+1},$$

$$i = 1, 2, \dots, K-1, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, K,$$

$$u_0^n = \mu_1(t_n), \quad u_K^n = \mu_2(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где  $C_i^{n+1} \approx C(x_i, t_n)$ ,  $f_i^{n+1} \approx f(x_i, t_n)$ .

В случае  $\sigma = 1$  получаем неявную разностную схему с опережением на шаблоне

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{C_i^{n+1}}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)h^\beta} \left[ \sum_{k=0}^{i+1} q_k u_{i-k+1}^{n+1} + \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k u_{i+k-1}^{n+1} \right] + f_i^{n+1}, \quad (3.28)$$

$$i = 1, 2, \dots, K-1, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, K,$$

$$u_0^n = \mu_1(t_n), \quad u_K^n = \mu_2(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

**Теорема 3.2.** Разностная схема (3.28) безусловно устойчива.

**Доказательство.** После элементарных преобразований (3.28) примет

вид

$$u_i^{n+1} - \xi_i \sum_{k=0}^{i+1} q_k u_{i-k+1}^{n+1} - \xi_i \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k u_{i+k-1}^{n+1} = u_i^n + \tau \cdot f_i^{n+1},$$

$$i = 1, 2, \dots, K-1, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, K,$$

$$u_0^n = \mu_1(t_n), \quad u_K^n = \mu_2(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

где  $\xi_i = \frac{C_i^{n+1}\tau}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)h^\beta}$ .

Система уравнений в матричной форме примет вид

$$AU^{n+1} = U^n + \tau \cdot f^{n+1}, \text{ где } U^n = [u_0^n, u_1^n, \dots, u_K^n]^T, f^n = [0, f_1^n, \dots, f_{K-1}^n, 0]^T.$$

Матрица коэффициентов имеет вид

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - 2\xi_i q_1, & \text{если } j = i, \\ -\xi_i(q_2 + q_0), & \text{если } j = i - 1, \\ -\xi_i(q_2 + q_0), & \text{если } j = i + 1, \\ -\xi_i q_{i-j+1}, & \text{если } j < i - 1, \\ -\xi_i q_{j-i+1}, & \text{если } j > i + 1. \end{cases}$$

Здесь  $a_{00} = 1, a_{0j} = 0$ , если  $j = 1, 2, \dots, K$ ,  $a_{KN} = 1$  и  $a_{Kj} = 0$ , если

$$j = 0, 1, \dots, K - 1, q_1 = -\beta, -q_1 \geq \sum_{k=0, k \neq 1}^K q_k.$$

Согласно теореме [102] собственные значения матрицы  $A$  находятся в соединении  $K$  кругов с центрами в  $a_{ii}$  и с радиусами

$$r_i = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0, k \neq i}^{i+1} \xi_i q_k + \sum_{k=0, k \neq i}^{K-i+1} \xi_i q_k < 2\xi_i \beta. \quad (3.29)$$

$$a_{ii} = 1 - 2\xi_i q_1 = 1 - 2\xi_i \beta > 1. \quad (3.30)$$

Из неравенств (3.29) и (3.30) следует, что собственные значения матрицы  $A$  больше 1. Тогда собственные значения матрицы  $A^{-1}$  положительны и меньше 1. Следовательно, разностная схема (3.28) безусловно устойчива сходится.

А в случае  $\sigma = 0$  получаем явную разностную схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{C_i^n}{2\Gamma(\beta) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) h^\beta} \left[ \sum_{k=0}^{i+1} q_k u_{i-k+1}^n + \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k u_{i+k-1}^n \right] + f_i^n, \quad (3.31)$$

$$i = 1, 2, \dots, K - 1, n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, K,$$

$$u_0^n = \mu_1(t_n), u_K^n = \mu_2(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

После элементарных преобразований разностная схема (3.31) примет вид

$$u_i^{n+1} = (1 + 2q_1\xi_i)u_i^n + \xi_i \left[ q_0(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + \sum_{k=0}^{i+1} q_k u_{i-k+1}^n + \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k u_{i+k-1}^n \right] + \tau \cdot f_i^n, \quad (3.32)$$

$$i = 1, 2, \dots, K-1, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, K,$$

$$u_0^n = \mu_1(t_n), u_K^n = \mu_2(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

**Теорема 3.3.** Разностная схема (3.32) устойчива, если  $\frac{\tau}{h^\beta} \leq \frac{1}{2\beta C_{\max}}$ .

*Доказательство.* Уравнение в конечных разностях (3.32) можно привести к системе уравнений  $U^{n+1} = AU^n + \tau \cdot f^n$ ,

где  $U^n = [u_0^n, u_1^n, \dots, u_K^n]^T$ ,  $f^n = [0, f_1^n, \dots, f_{K-1}^n, 0]^T$ ,  $A = (a_{ij}), i, j = 0, 1, \dots, K$ .

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \geq i + 2, \\ 1 + 2q_1\xi_i, & \text{если } j = i, \\ \xi_i(q_2 + q_0), & \text{если } j = i - 1, \\ \xi_i(q_2 + q_0), & \text{если } j = i + 1, \\ \xi_i q_{i-j+1}, & \text{если } j < i + 1, \\ \xi_i q_{j-i+1}, & \text{если } j > i + 1. \end{cases}$$

Здесь  $a_{00} = 1, a_{0j} = 0$ , если  $j = 1, 2, \dots, K, a_{KN} = 1$  и  $a_{Kj} = 0$ , если  $j = 0, 1, \dots, K-1, q_1 = -\beta$ , а для  $1 < \beta \leq 2$  и  $i \neq 1$  мы имеем  $q_i \geq 0$ . Согласно известной теореме [90] собственные значения матрицы  $A$  находятся в соединении  $K$  кругов с центрами в  $a_{ii}$  и радиусами

$$r_i = \sum_{k=0, k \neq i}^K a_{ik}.$$

Имеем

$$a_{ii} = 1 + 2q_1\xi_i = 1 - 2\beta\xi_i, \quad (3.33)$$

$$r_i = \sum_{k=0, k \neq i}^K a_{ik} = \xi_i \left( \sum_{k=0, k \neq i}^{i+1} q_k + \sum_{k=0, k \neq i}^{K-i+1} q_k \right) < 2\beta \xi_i. \quad (3.34)$$

Из неравенств (3.33) и (3.34) следует, что в случае, когда  $1 - 4\beta \xi_i > -1$ , т. е.  $\frac{\tau}{h^\beta} \leq \frac{1}{2\beta C_{\max}}$ , все собственные значения матрицы  $A$  по модулю меньше 1.

Следовательно, разностная схема устойчива, если  $\frac{\tau}{h^\beta} \leq \frac{1}{2\beta C_{\max}}$ .

### § 3. Численный метод решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с производными дробного порядка Римана–Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона с производными дробного порядка в области  $D = \{(x, t) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ .

**Задача.** Найти решение  $u(x, y)$  уравнения

$$D_{0x+}^\beta u(x, y) + D_{0y+}^\beta u(x, y) = -f(x, y), \quad (3.35)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{\partial D} = \psi(x, y), \quad (3.36)$$

где  $1 < \beta \leq 2$ .

Введем в области  $D$  равномерную сетку  $\varpi_{h,l}$  с шагом  $h$  по переменной  $x$  и с шагом  $l$  по переменной  $y$

$$\Omega_{h,l} = \left\{ (x_n, y_m) : x_n = n \cdot h, n = 0, 1, \dots, N, y_m = m \cdot l, m = 0, 1, \dots, M, N = \frac{a}{h}, M = \frac{b}{l} \right\}$$

Используя определение Грюнвальда–Летникова дробной производной по пространству (1.40), дробные производные по координате в точке  $(x_n, y_m)$  сетки заменим разностными выражениями:

$$\left( D_{0x+}^\beta u \right)_n = \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{n+1} q_k u(x_{n-k+1}, y_m) + O(h^2), \quad (3.37)$$

$$\left(D_{0y+u}^\beta\right)_i = \frac{1}{l^\beta} \sum_{p=0}^{m+1} q_p u(x_n, y_{m-p+1}) + O(h^2), \quad (3.38)$$

где

$$q_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!},$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = -\beta < 0, \quad q_k > 0, \quad k = 2, 3, \dots, n+1.$$

Воспользовавшись равенствами (3.37), (3.38), запишем разностную схему для краевой задачи (3.35), (3.36)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{n+1} q_k u(x_{n-k+1}, y_m) + \frac{1}{l^\beta} \sum_{p=0}^{m+1} q_p u(x_n, y_{m-p+1}) = \\ = -f(x_n, y_m), \quad (x_n, y_m) \in \omega, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$u(x_n, y_m) = \psi(x_n, y_m), \quad (x_n, y_m) \in \gamma, \quad (3.40)$$

где  $\omega, \gamma$  – множество внутренних и граничных узлов сетки  $\Omega$  соответственно.

Для дальнейшего исследования удобно записать уравнение (3.39) в виде, разрешенном относительно  $u_{n,m} \approx u(x_n, y_m)$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta}{h^\beta} + \frac{\beta}{l^\beta}\right) u_{n,m} = \frac{1}{h^\beta} \left( u_{n+1,m} + \sum_{k=2}^{n+1} q_k u_{n-k+1,m} \right) + \\ + \frac{1}{l^\beta} \left( u_{n,m+1} + \sum_{p=2}^{m+1} q_p u_{n,m-p+1} \right) + f(x_n, y_m). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Обозначим через  $z$  точку  $z_{n,m} = (x_n, y_m)$  – центральную точку шаблона, на котором аппроксимируется уравнение (3.35), а через  $\mathcal{I}(x)$  – весь этот шаблон, т. е. совокупность точек  $z_{n-k+1,m}, k = 0, 1, \dots, n+1,$   $z_{n,m-p+1}, p = 0, 1, \dots, m+1$ . Обозначим через  $\mathcal{I}'(x)$  все точки шаблона за исключением точки  $z_{n,m} = (x_n, y_m)$ . Тогда уравнение (3.41) можно записать в виде

$$L^\beta(z)u(z) = A(z)u(z) - \sum_{\xi \in \mathcal{I}'(x)} B(z, \xi)u(\xi) = F(z),$$



где

$$A(z) = \frac{\beta}{h^\beta} + \frac{\beta}{l^\beta} > 0, \quad B(z, z_{n+1, m}) = \frac{1}{h^\beta} > 0, \quad B(z, z_{n, m+1}) = \frac{1}{l^\beta} > 0,$$

$$B(z, z_{n-k+1, m}) = \frac{q_k}{h^\beta} > 0, k = 2, \dots, n+1, \quad B(z, z_{n, m-p+1}) = \frac{q_p}{l^\beta} > 0, p = 2, \dots, m+1,$$

$F(z) = f(x_n, y_m)$ , а краевую задачу (3.35), (3.36) в виде

$$L^\beta(z)u(z) = F(z), z \in \omega, \quad u(z) = \psi(z), z \in \gamma. \quad (3.42)$$

Представим решение  $u(z)$  краевой задачи (3.42) в виде суммы

$u(z) = \tilde{u}(z) + \bar{u}(z)$ , где  $\tilde{u}(z)$  – решение однородного уравнения с неоднородным граничным условием

$$L^\beta(z)\tilde{u}(z) = 0, z \in \omega, \quad \tilde{u}(z) = \psi(z), z \in \gamma, \quad (3.43)$$

а  $\bar{u}(z)$  – решение неоднородного уравнения с однородным граничным условием

$$L^\beta(z)\bar{u}(z) = F(z), z \in \omega, \quad \bar{u}(z) = 0, z \in \gamma. \quad (3.44)$$

Для задачи (3.42) выполняются все условия принципа максимума, следовательно,

$$\left\| \tilde{u} \right\|_{C(\Omega)} \leq \|\psi\|_{C(\Omega)}, \quad (3.45)$$

где  $\left\| \tilde{u} \right\|_{C(\Omega)} = \max_{z \in \Omega} |u(z)|$ ,  $\|\psi\|_{C(\Omega)} = \max_{z \in \gamma} |\psi(z)|$ . После элементарных преобразо-

ваний получим

$$u_{n, m} = \frac{1}{\beta(h^\beta + l^\beta)} \left( l^\beta \cdot \left( u_{n+1, m} + \sum_{k=2}^{n+1} q_k u_{n-k+1, m} \right) + h^\beta \cdot \left( u_{n, m+1} + \sum_{p=2}^{m+1} q_p u_{n, m-p+1} \right) + h^\beta l^\beta f(x_n, y_m) \right).$$

Докажем устойчивость разностной задачи (3.42) по правой части и по начальным данным. Для этого построим мажорантную функцию для решения задачи (3.44) и применим теорему сравнения. В качестве мажорантной функции рассмотрим функцию

$$Y(z) = K(a^2 + b^2 - x^\beta - y^\beta), \quad (3.46)$$

где  $K$  – произвольная пока константа. Как видно,  $Y(z) \geq 0$  при всех  $z \in \Omega$ .

Обозначим через  $D(z) = A(z) - \sum_{\xi \in \mathcal{I}'(x)} B(z, \xi)$ ,

и вычислим

$$L^\beta Y(z) = D(z)Y(z) + \sum_{\xi \in \mathcal{I}'(x)} B(z, \xi)(Y(z) - Y(\xi)),$$

при всех  $z \in \omega$ . По построению  $LY(z)$  имеет вид

$$LY(z) = D_{0x+}^\beta Y + D_{0y+}^\beta Y.$$

Согласно определению дробной производной по Риману–Лиувиллю при  $1 < \beta \leq 2$  нетрудно показать, что

$$D_{0x+}^\beta Y = K\Gamma(\beta + 1), \quad D_{0y+}^\beta Y = K\Gamma(\beta + 1).$$

Отсюда следует, что  $Y(z)$  является решением краевой задачи, то есть

$$LY(z) = 2K\Gamma(\beta + 1), \quad z \in \omega, \quad Y(z) = \overline{\psi}(z), \quad z \in \gamma,$$

где  $\overline{\psi}(z) \geq 0$  – значение функции (3.50) при  $z \in \gamma$ .

Если возьмем  $K = \frac{\|F\|_{C(\omega)}}{2\Gamma(\beta + 1)}$ , то относительно задач (3.43) и (3.44) выполнены все условия теоремы сравнения [102]. Из этой теоремы следует оценка:

$$\left\| \overline{u}(z) \right\|_{C(\omega)} \leq \max_{x \in \Omega} Y(z) \leq K(a^2 + b^2). \quad (3.47)$$

Если учитывать выбор константы  $K$ , оценка (3.47) примет вид

$$\left\| \bar{u}(z) \right\|_{C(\omega)} \leq \frac{(a^2 + b^2)}{2\Gamma(\beta + 1)} \|F\|_{C(\omega)}.$$

Воспользовавшись неравенством треугольников и оценкой (3.45), полу-

чим оценку: 
$$\|z\|_{C(\omega)} \leq \frac{(a^2 + b^2)}{2\Gamma(\beta + 1)} \|F\|_{C(\omega)} + \|\psi\|_{C(\omega)}. \quad (3.48)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

**Теорема 3.4.** Пусть разностная схема (3.39), (3.40) аппроксимирует дифференциальную задачу (3.35), (3.36), тогда для погрешности метода справедлива оценка:

$$\|z\|_{C(\omega)} \leq \frac{(a^2 + b^2)}{2\Gamma(\beta + 1)} \|F\|_{C(\omega)} + \|\psi\|_{C(\omega)},$$

где  $a$  и  $b$  постоянные не зависящие от шагов сетки. Следовательно, разностная схема (3.39), (3.40) устойчива по правой части и по граничным условиям.

#### § 4. Численный метод решения краевой задачи

для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной

##### Капуто

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени.

**Задача.** Найти в области  $D = \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t \leq T\}$  решение уравнения

$$\partial_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) + f(u), \quad (3.49)$$

удовлетворяющее начальному условию  $u(x, 0) = \varphi(x)$  и граничным условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t) \text{ и } u(L, t) = \mu_2(t), \quad (3.50)$$

где  $\partial_{0t}^\alpha u(x, t)$  – частная дробная производная Капуто,  $0 < \alpha < 1$ ,  $k(u)$ ,  $f(u)$  – достаточно гладкие функции и  $0 < c_1 \leq k(u) \leq c_2$ .

Чтобы найти численное решение задачи (3.49), (3.50), в области

$$\overline{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$$

введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_{hr} = \left\{ (x_m, t_n) : x_m = mh, t_n = n\tau, m = 0, 1, \dots, M, h = \frac{L}{M}, n = 0, 1, \dots, N, \tau = \frac{T}{N} \right\}$$

с шагом  $h$  по  $x$  и  $\tau$  по  $t$ .

Для частной дробной производной Капуто в случае, когда  $0 < \alpha < 1$  воспользуемся аппроксимацией (2.4)

$$\left( \partial_{0t}^\alpha u(x, t) \right)_n = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^n \left( t_{n-i+1}^{1-\alpha} - t_{n-i}^{1-\alpha} \right) \frac{u(x, t_{i+1}) - u(x, t_i)}{\tau} + O(\tau). \quad (3.51)$$

Введем следующие обозначения. Через  $u(x_m, t_n)$  обозначим точное решение краевой задачи (3.49), (3.50), а через  $y_m^n = y(x_m, t_n)$  – приближенное решение задачи в точке  $(x_m, t_n), n = 0, 1, \dots, N, m = 0, 1, \dots, M$ .

Дифференциальное выражение

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} u(x, t) \right) \quad (3.52)$$

при каждом фиксированном  $t$  аппроксимируем в точке  $(x_m, t_n)$  разностным отношением [102]:

$$\Lambda(t)y_m = \frac{1}{h} \left( k_{m+1/2} \frac{y_{m+1} - y_m}{h} - k_{m-1/2} \frac{y_m - y_{m-1}}{h} \right), \quad (3.53)$$

где  $k_{m+1/2} = \frac{k(y_m) + k(y_{m+1})}{2}$ ,  $k_{m-1/2} = \frac{k(y_{m-1}) + k(y_m)}{2}$

Воспользовавшись (3.51) и (3.53), для уравнения (3.49) получим неявную, линейную относительно  $y_m^{n+1}, m = 1, 2, \dots, M-1, n = 0, 1, \dots, N-1$ , разностную схему:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^n \frac{y_m^{i+1} - y_m^i}{\tau} \left( t_{n-i+1}^{1-\alpha} - t_{n-i}^{1-\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \left( k_{m+1/2}^n \frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2}^n \frac{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + f(y_m^n). \quad (3.54)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$y_m^0 = \varphi(x_m), m = 0, 1, 2, \dots, M,$$

$$y_0^n = \mu_1(t_n), y_M^n = \mu_2(t_n), n = 1, 2, \dots, N.$$

Разностную схему (3.54) можно свести к наиболее общему виду:

$$A_m \cdot y_{m+1}^{n+1} - B_m \cdot y_m^{n+1} + C_m y_{m-1}^{n+1} = F_m, \quad (3.55)$$

где  $A_m = \frac{k_{m+1/2}^n}{h^2}$ ,  $C_m = \frac{k_{m-1/2}^n}{h^2}$ ,  $B_m = \frac{k_{m+1/2}^n + k_{m-1/2}^n}{h^2} + \frac{(t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau}$ ,

$$F_m = -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \left( y_m^n (t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}) - \sum_{i=0}^{n-1} (y_m^{i+1} - y_m^i) (t_{n-i+1}^{1-\alpha} - t_{n-i}^{1-\alpha}) \right) - f(y_m^n).$$

**Теорема 3.5.** Неявная разностная схема (3.54) безусловно устойчива.

*Доказательство.* Уравнение (3.54) можно записать в виде:

$$A y^{n+1} = y^n + \Gamma(2-\alpha)\tau \cdot f(y^n).$$

Тогда  $S = A^{-1}$  – оператор перехода с одного временного слоя на другой.

Условием устойчивости по начальным данным разностной схемы (3.54) является  $\|S\| \leq 1$ . Действительно  $\|y^{n+1}\| = \|S y^n\| \leq \|S\| \cdot \|y^n\|$  или  $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\| \leq \dots \leq \|y^0\|$ .

Следовательно, начальные возмущения затухают. Условие  $\|S\| \leq 1$  есть условие того, что спектр оператора  $S$  лежит внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости. Это означает, что  $\max_i |\lambda_i| < 1$ , где  $\lambda_i$  – собственные числа оператора перехода  $S$ .

Для нахождения собственных значений оператора перехода решение  $y_m^n$  представим в виде возмущения

$$y_m^n = \lambda^n e^{i\omega m h} \quad (3.56)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\lambda$  – собственные числа оператора перехода. В результате подстановки (3.56) в (3.54) получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^{i+1} e^{i\omega h} - \lambda^i e^{i\omega h}}{\Gamma(2-\alpha)\tau} (t_{n-i+1}^{1-\alpha} - t_{n-i}^{1-\alpha}) = \\ & = \frac{1}{h} \left[ k_{m+1/2}^n \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega h(m+1)} - \lambda^{n+1} e^{i\omega h}}{h} - k_{m-1/2}^n \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega h} - \lambda^{n+1} e^{i\omega(m-1)h}}{h} \right], \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda^{n+1} - \lambda^n)(t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\tau} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda^{i+1} - \lambda^i)(t_{n-i+1}^{1-\alpha} - t_{n-i}^{1-\alpha}) = \\ & = \frac{1}{h} \left[ k_{m+1/2}^n \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega h} - \lambda^{n+1}}{h} - k_{m-1/2}^n \frac{\lambda^{n+1} - \lambda^{n+1} e^{-i\omega h}}{h} \right]. \end{aligned}$$

Из этого равенства получим для оценки собственных значений оператора перехода выражение

$$\lambda \leq \left[ 1 + \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau}{t_n^{1-\alpha} h^2} (k_{m+1/2}^n (1 - e^{i\omega h}) + k_{m-1/2}^n (1 - e^{-i\omega h})) \right]^{-1}.$$

Так как  $0 < c_1 \leq k(T) \leq c_2$ , то получим

$$\lambda \leq \left[ 1 + \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau c_1}{t_n^{1-\alpha} h^2} (2 - e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) \right]^{-1},$$

то есть

$$\lambda \leq \left[ 1 + \frac{2\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha c_1 n^{\alpha-1}}{h^2} (1 - \cos \omega h) \right]^{-1}.$$

Учитывая, что  $1 - \cos \omega h = 2 \sin^2 \frac{\omega h}{2}$ , окончательно получим оценку

$$|\lambda| \leq \left[ 1 + \frac{4\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha c_1 n^{\alpha-1}}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right]^{-1}. \quad (3.57)$$

Из неравенства (3.57) следует, что  $|\lambda| < 1$ , т. е.  $\|S\| \leq \rho < 1$ , то есть разностная схема равномерно устойчива по начальным данным, следовательно устойчива и по правой части.

Решение  $y_m^{n+1}, m = 1, 2, \dots, M - 1, n = 0, 1, \dots, N - 1$  разностной задачи

$$\frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{i=0}^n \frac{y_m^{i+1} - y_m^i}{\tau} \cdot (t_{n-i+1}^{1-\alpha} - t_{n-i}^{1-\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{h} \left( k_{m+1/2}^n \frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2}^n \frac{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + f(y_m^n),$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1, n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$y_m^0 = u_0, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$y_0^n = \mu_1(t_n), \quad y_M^n = \mu_2(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

можно найти методом прогонки.

## **Глава IV. Исследование динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка**

При исследовании различных процессов в природе используют качественный или количественный подходы, которые взаимно дополняют друг друга. При проведении качественного анализа выделяются важные свойства изучаемого объекта для перехода к простому объекту, отражающему основные свойства исходного объекта. При этом имеет огромное значение то, что это дает толчок развитию количественного анализа на основе математического аппарата. При количественном анализе получаем различные уравнения, описывающие основные свойства объекта. В результате этого разрабатывается количественная модель для исследования данного объекта.

Исключительная важность создания адекватной математической модели заключается в том, что она инициирует как развитие более глубокого качественного понимания природы изучаемого явления, так и выяснение путей создания новых количественных моделей. Последнее, в свою очередь, требует развития математического аппарата, используемого при создании количественной модели. Современные достижения в естествознании обусловлены именно созданием математических моделей изучаемых процессов [14].

Важные результаты при разработке количественных моделей были получены при исследовании динамических систем. Как известно, для всех динамических систем характерно наличие колебательного процесса. Общие свойства, присущие колебательным процессам в динамических системах, которые имеют различную природу (физическую, химическую, биологическую и т. д.), стали разделом науки, получившее название: «теория колебаний» [9; 13;39;40; 42; 44;55;57;67; 70].

Первый этап развития колебательных процессов в динамических системах был связан с линейными колебаниями. После исследователи проявили ин-



терес к новому классу колебательных процессов в динамических системах – нелинейные колебания [39; 42;58; 67; 68;70]. При описании нелинейных колебательных процессов часто пользуются дифференциальными и разностными уравнениями. Как известно, нахождение аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений является трудной задачей. В связи с этим, огромное значение имеет развитие вычислительных методов решения начальных и краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений. Следовательно, развитие нелинейной динамики дало сильный толчок развитию вычислительных методов. Начало развитию математических методов исследования нелинейных динамических систем было положено в Пуанкаре и Ляпунова [42;98]. С развитием нелинейных колебательных процессов в динамических системах появились новые понятия, бифуркация, предельный цикл.

На новом этапе развития нелинейных динамических систем, исследователей заинтересовали вопросы, которые связаны появлением хаотических колебаний [60;107]. Важным результатом в этом направлении стал, полученный в 1963 г. Э. Лоренцом «странный аттрактор» [70; 79;180]. На основе математических методов был обоснован «странный аттрактор» в 1971 г. Д. Рюэлем и Ф. Такенсом. Работы этих авторов положили начало развития нового направления в науке, которое получило название детерминированный хаос. Огромный интерес к исследованиям нелинейных колебательных процессов в динамических системах, связанным с детерминированным хаосом и фрактальной геометрией, обусловлен в становлении этих систем базовыми для исследования большого числа процессов, охватывающие физические, химические, геофизические, биологические, социально-экономические системы [95].

Задача прогноза различных наблюдаемых явлений природы является одной из важнейших востребованных от фундаментальной науки. На сегодняшний день, несмотря на многочисленные и интенсивные попытки многих научных школ и исследователей, она далека от своего решения. Основная трудность решения задачи прогноза для реальных систем заключается в необходи-

мости учета эффектов памяти, пространственных корреляций и самоорганизации. Следует ожидать, что в связи с появлением нового научного направления – физики открытых систем [56] теория колебаний получит новое развитие с учетом данных эффектов [14].

Как известно, математические методы, основанные на теории дифференциальных уравнений, стали качественным математическим аппаратом для разработки математических моделей нелинейных динамических систем. Несмотря на это, проведенные исследования не полностью охватывают данную область науки и необходимо развивать новые подходы для разработки математических моделей. Многим динамическим системам присущи эффекты памяти. При описании колебательных процессов в таких системах математические методы, основанные на теории дробных дифференциальных уравнений, становится эффективным математическим аппаратом [40;84;100;101]. Переход от традиционных дифференциальных уравнений к дробным дифференциальным уравнениям при описании нелинейных колебательных процессов в динамических системах позволяют учитывать эффекты памяти [76;200;201].

Если говорить о некоторых физических аспектах дробной производной по времени, то один из критериев необратимости процессов, который заключается в изменении знака производной при преобразовании  $t \rightarrow -t$ , при рассмотрении дробных производных имеет вид:

$$(-t)^\alpha \rightarrow t^\alpha (\cos(\pi\alpha) + i \sin(\pi\alpha)).$$

Это означает, что переход к дробным производным по времени позволяет учитывать как обратимые так и необратимые процессы, то есть при этом часть процесса соответствует обратимым, другая часть необратимым процессам [28]. Таким образом, сочетание обратимых и необратимых процессов, в математических моделях, описываемых дробными производными, позволяют их использовать для исследования нелинейных процессов.

Исследования нелинейных динамических систем, основанные на математических методах в настоящее время хорошо известны. При этом исследователи используют аналитико-топологический подход, в основу которой входит качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений и асимптотический, в основу которой входит анализ асимптотических решений нелинейных дифференциальных уравнений, которые содержат известный параметр. Первый подход применяют в основном для исследования динамических систем с малым числом степеней свободы (второго порядка), а второй подход для исследования динамических систем, которые имеют порядок выше второго.

Эта глава посвящена исследованиям автономных динамических систем, которые описываются двумя дифференциальными уравнениями, содержащими дробные производные Капуто (1.28), то есть систем вида:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha} x(t) &= P(x, y), \\ \partial_{0t}^{\alpha} y(t) &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{4.1}$$

Как известно, для исследования динамических систем на основе математических методов, нужно построить математический портрет исследуемой системы. В качестве такого портрета можно рассмотреть траекторию движения представляющей точки в фазовом пространстве. Такое геометрическое описание траектории представляющей точки нам дает взаимно однозначное отображение многообразия состояний системы на координатную плоскость, называемое фазовым пространством. Фазовое пространство, это пространство, которое разбито на траектории движения представляющей точки [84]. При этом на траекториях указывают направления движения представляющей точки по траекториям.

Под *динамической системой* понимается некоторое множество элементов, для которых имеет место функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве.

Дадим еще одно определение динамической системы с точки зрения топологии. Пусть  $X$  – произвольное гладкое многообразие.

**Определение 4.1.** Отображение  $G: R \times X \rightarrow X$ , задаваемое в параметрической форме  $G^t(x)$ , являющееся дифференцируемым отображением, причем  $G^0$  – тождественное отображение пространства  $X$ , называется динамической системой, заданной на гладком многообразии  $X$ .

Динамическая система является математической моделью некоторого объекта, процесса или явления. Она описывает динамику смены состояний процессов при переходе из одного состояния в другое.

Множество всех допустимых состояний динамической системы называется *фазовым пространством системы*.

Динамическую систему, описываемую дифференциальным осцилляторным уравнением с производными дробного порядка Римана–Лиувилля в работе Мейланова Р.П., Янполова М.С. [73], назвали *фрактальным осциллятором*. В работе Нахушева А.М. была исследована начальная задача для неоднородного осцилляторного уравнения с дробной производной Капуто [85]. Работы [106;192;195] посвящены исследованию дробно-дифференциальных моделей динамических систем. В работах [22;28;82;92] исследованы нелинейные динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями дробного порядка методом линеаризации.

Рассмотрим дифференциальное осцилляторное уравнения с дробными производными Капуто вида:

$$\partial_{0r}^{2\beta} x(t) + 2\gamma \cdot \partial_{0r}^{\beta} x(t) + \omega^{2\beta} x(t) = f(t), \quad (4.2)$$

где  $0 < \beta \leq 1$ ,  $\gamma$  – коэффициент обычного затухания.

### § 1. Дробный осциллятор

Как указано в [96], дробный осциллятор представляет себе некоторая физическая система, совершающая колебания, которые описываются дифференциальным уравнением с производной дробного порядка.

Исследуем задачу Коши для осцилляторного уравнения (4.2) при значениях параметров дробного дифференцирования  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 2\beta$ , то есть уравнение вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) + \omega^{\alpha} x(t) = f(t),$$

где  $1 < \alpha < 2$ .

В работе [17] исследована начальная задача для дифференциального уравнения дробного осциллятора.

Если вынуждающая сила в правой части уравнения положить равной нулю  $f(t) = 0$ , то уравнение примет вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) + \omega^{\alpha} x(t) = 0, \quad (4.3)$$

где  $1 < \alpha < 2$ ,  $\omega$  – частота,  $t$  – время.

Для полной постановки задачи, зададим еще начальные условия:  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = b$ . Решение задачи Коши для осцилляторного уравнения (4.3) имеет вид:

$$x(t) = aE_{\alpha,1}(-(\omega t)^{\alpha}) + btE_{\alpha,2}(-(\omega t)^{\alpha}), \quad (4.4)$$

где  $a, b$  – числовые параметры.

Если в решение (4.4) положить  $\alpha = 2$  и учитывать, что  $E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$ ,  $E_{2,2}(-z^2) = \sin(z)/z$ , то решение (4.4) переходит в решение линейного гармонического осциллятора.

Исследуем поведение решения при различных значениях параметра дробного дифференцирования. На рисунке 4.1 приведены графики зависимости  $x(t)$  при различных значениях параметра дробного дифференцирования  $\alpha$ . Как мы видим из рис. 4.1, если  $\alpha = 2$ , то решение соответствует решению гармонического осциллятора, а, если  $1 < \alpha < 2$ , то характер решения меняется. В этом случае решения соответствуют затухающим процессам.

Проведем анализ решения (4.4) для случая нецелых значений параметра дробного дифференцирования, то есть при  $1 < \alpha < 2$ . Если рассмотреть урав-

нение обыкновенного осциллятора с коэффициентом затухания отличным от нуля, то имеет место затухающие решения. При этом они имеют различную природу затухания.

Как известно, для обыкновенного осциллятора затухающие решения вызваны диссипативными процессами. Для моделирования затухающих процессов с помощью уравнения обыкновенного осциллятора, явно вносятся в дифференциальное уравнение слагаемые, содержащие нечетные производные. В случае дробного осциллятора затухающие решения связаны с эффектами памяти. Чтобы выяснить соответствие между затухающими решениями этих двух осцилляторов, найдем выражение параметра  $\alpha$  из решения (4.4).

Прежде чем найти выражение для параметра дробного дифференцирования, исследуем возможность использования равенства (4.4) как систему базисных функций для параметрического представления различных нелинейных колебаний. Обозначим через  $F(t)$  функцию, которая зависит от времени, и рассмотрим равенство

$$F(t) = aE_{\alpha,1}(-(\omega t)^\alpha) + \frac{b}{\omega} t E_{\alpha,2}(-(\omega t)^\alpha). \quad (4.5)$$

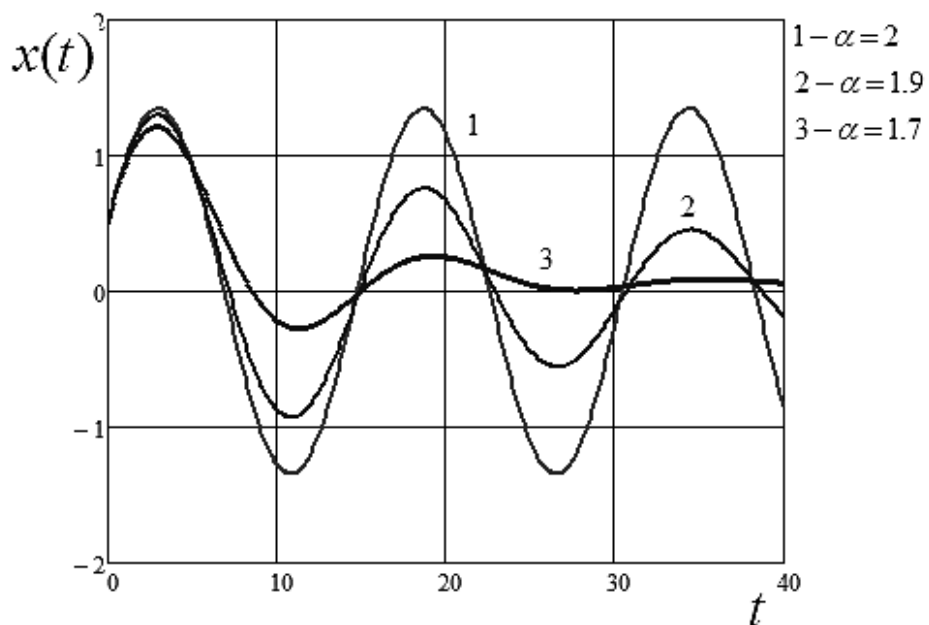


Рис. 4.1. Графики решения (4.4) при различных значениях параметра  $\alpha$

Равенство (4.5) можно рассматривать как уравнение относительно параметра дробной производной  $\alpha$ . Найдя решение уравнения (4.5) для всех значений  $t$  и  $\omega$ , можно найти функцию  $\alpha_F = \alpha_F(t, \omega, a, b)$ . Если такая функция существует, то эту функцию будем использовать для определения решений из множества (4.5). Используя эти функции для нахождения  $F(t)$ , получим некоторое «параметрическое» представление:

$$F(t) = aE_{\alpha_F,1}(-(\omega t)^{\alpha_F}) + \frac{b}{\omega} tE_{\alpha_F,2_F}(-(\omega t)^{\alpha_F}). \quad (4.6)$$

В этом случае, необходимым условием возможности данной функции для квалификации нелинейных процессов является вид данной функции. Функциональное представление, задаваемое равенством (4.6), будем называть «мультифрактальным».

Чтобы показать возможность данного представления, будем задавать формальным образом различные значения параметра  $\alpha = \alpha(t)$  и исследовать, какие при этом значения удовлетворяют (4.6). Таким образом, для зависимости  $F(t)$ , задаваемой равенством (4.6), соответствует некоторый класс непрерывных функций  $\alpha_F = \alpha_F(t, \omega, a, b)$ , удовлетворяющих условию  $1 < \alpha \leq 2$ .

Пусть параметр дробного дифференцирования  $\alpha$  удовлетворяет функциональной зависимости

$$\alpha(t) = [(1 - \delta - \varepsilon)\cos(kt) + (\varepsilon - \delta + 3)]/2,$$

где для числовых параметров  $\delta$  и  $\varepsilon$  выполняются условия:  $\delta, \varepsilon \geq 0$ ,  $\delta + \varepsilon < 1$  и  $k$  – произвольное число. В этом равенстве числовые параметры  $\delta$  и  $\varepsilon$  задают множество значений функции  $\alpha(t)$ , то есть функция  $\alpha(t)$  удовлетворяет условиям:  $\alpha(t) \in C(1 + \varepsilon, 2 - \delta)$  и  $1 + \varepsilon < \alpha(t) \leq 2 - \delta$ .

Если рассмотрим для  $\alpha(t)$  функциональную зависимость

$$\alpha(t) = [(1 - \delta - \varepsilon)\cos(k \cos(x(t))) + (\varepsilon - \delta + 3)]/2, \quad (4.7)$$

то в параметрической форме можно получить представление сложного нелинейного сигнала  $F(t)$  на классе, полученных решений (4.4). При этом функцию параметра дробной производной  $\alpha(t)$  удовлетворяет равенству (4.7).

**Выводы.** Из проведенного выше исследования решений дробного осциллятора следует, что решение задачи для осцилляторного уравнения (4.3) при значении параметра  $\alpha = 2$  переходит в решение задачи линейного гармонического осциллятора. При переходе к нецелым значениям параметра, получили новые результаты, которые можно использовать при исследовании нелинейных процессов. Как известно, в традиционных моделях поведение фазовой траектории определяется значениями параметров, которые непосредственно входят в само уравнение. В отличие от этого, в математических моделях, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, в качестве такого параметра выступает параметр дробного дифференцирования. Полученный класс решений (4.4) начальной задачи для осцилляторного уравнения (4.3), можно использовать в качестве базисной системы для параметрического представления некоторой функции  $F(t)$ . При таком подходе параметр дробности рассматривается как параметр для определения возможности представления другого сигнала в базисе (4.4).

## § 2. Вынужденные колебания дробного осциллятора

В связи с развитием математических методов, основанных на аппарате дробного интегрирования и дифференцирования, стали широко применять эти методы к обобщению традиционных математических моделей динамических систем. Исследование широкого класса колебательных процессов связано с математической моделью гармонического осциллятора. Когда речь о диссипативных и эрдитарных процессах, обусловленных эффектом памяти, как указано [108;115], необходимо переходить к дробным осцилляторным уравнениям. В работе [96] показано, что математическая модель вынужденных



колебаний осциллятора, описываемая дифференциальным уравнением с производной дробного порядка, вполне сопоставима с классической моделью вынужденных колебаний осциллятора с вязким демпфированием и вычислены параметры частотной характеристики установившихся колебаний дробного осциллятора и определена связь между порядком дробной производной в дифференциальном уравнении колебаний и добротностью системы.

Этот параграф посвящен исследованию вынужденных колебаний дробного осциллятора, описываемого дифференциальным уравнением с производной дробного порядка Капуто.

Исследуем вынужденные колебания дробного осциллятора, когда система находится под воздействием некоторого переменного внешнего поля, то есть, когда действует некоторая вынуждающая сила.

Рассмотрим малые колебания вблизи точки покоя. Следовательно, вынуждающая сила слабая, так как при больших воздействиях внешнего поля вызовет большое смещение от точки равновесия [81].

Исследуем задачу Коши для неоднородного осцилляторного уравнения (4.2) при значениях параметров дробного дифференцирования  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 2\beta$ , то есть уравнение вида:

$$\partial_{0,t}^{\alpha} x(t) + \omega^{\alpha} x(t) = F(t), \quad (4.8)$$

где  $1 < \alpha < 2$ ,  $F(t)$  – вынуждающая сила. Будем предполагать, что функция  $F(t)$  имеет суммируемую производную порядка  $n - \alpha$  с началом и концом в точках 0 и  $t \in [0, T]$ .

Если в уравнение (4.8) положить  $\alpha = 2$ , то получим уравнение, которое описывает вынужденные колебания гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = F(t), \quad (4.9)$$

где  $\omega$  – частота свободных колебаний.

Если в уравнении (4.9) в качестве вынуждающей силы возьмем некоторую периодическую функцию, которая определяется равенством  $F(t) = f \cos \Omega t$ , то решение уравнения (4.9), удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = b$  записывается в виде [63]:

$$x(t) = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t. \quad (4.10)$$

Решение (4.10) нельзя использовать, если частота вынуждающей силы и собственная частота системы равны между собой, то есть в случае резонанса. В этом случае решение (4.10) записывается в виде [63]:

$$x(t) = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos \Omega t - \cos \omega t]. \quad (4.11)$$

В случае, когда частота вынуждающей силы стремится к собственной частоте ( $\Omega \rightarrow \omega$ ) третье слагаемое в решении (4.11) дает неопределенность вида  $\{0/0\}$ . Применяя правило Лопиталья для раскрытия неопределенности, получим:

$$x(t) = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t + \frac{f}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (4.12)$$

Из решения (4.12) следует, что в случае резонанса амплитуда колебаний меняется по линейному закону в зависимости от времени.

Теперь исследуем поведение резонансных решений дробного осцилляторного уравнения (4.8), удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = b$ . Пусть  $x(t) \in AC^2[0, T]$ . Тогда решение начальной задачи для уравнения (4.8) имеет вид [85]:

$$x(t) = x_1(t) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[-\omega^\alpha (t - \tau)^\alpha] F(\tau) d\tau, \quad (4.13)$$

где  $x_1(t) = aE_{\alpha, 1}[-(\omega t)^\alpha] + btE_{\alpha, 2}[-(\omega t)^\alpha]$ .

В работе [96] исследованы вынужденные колебания дробного осциллятора, когда вынуждающая сила в правой части уравнения (4.8) представлена в виде:

$$F(t) = \omega_0^\alpha a \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0),$$

где  $1 < \alpha < 2$ ,  $a, \Omega, \varphi_0$  - амплитуда, частота и начальная фаза внешней переменной силы,  $\omega_0$  - частота свободных незатухающих колебаний осциллятора при  $\alpha = 2$ .

Рассмотрим случай, когда вынуждающая сила в правой части уравнения (4.8) представлена функцией Миттага–Леффлера, то есть в виде:

$$F(t) = f_0^{\alpha/2} E_{\alpha,1}[-(\Omega t)^\alpha]. \quad (4.14)$$

Если в равенстве (4.14) значение параметра  $\alpha = 2$ , то мы получим простую периодическую функцию

$$F(t) = f_0 \cos(\Omega t),$$

где  $\Omega$  - частота внешней силы.

Решение уравнения (4.8) с правой частью (4.14), удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = b$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + f_0^{\alpha/2} \int_0^t \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\omega^\alpha(t-\tau)^\alpha] E_{\alpha,1}[-(\Omega t)^\alpha]}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \\ &= x_1(t) + f_0^{\alpha/2} \frac{\omega^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}[-(\omega t)^\alpha] - \Omega^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}[-(\Omega t)^\alpha]}{\omega^\alpha - \Omega^\alpha} t^\alpha \end{aligned}$$

Имеет место равенство  $E_{\alpha,\alpha+1}(-z^\alpha) = 1 - E_{\alpha,1}(-z^\alpha)$ . Воспользовавшись этим равенством, решение можно переписать в виде:

$$x(t) = x_1(t) + \frac{f_0^{\alpha/2}}{\omega^\alpha - \Omega^\alpha} \left[ E_{\alpha,1}[-(\Omega t)^\alpha] - E_{\alpha,1}[-(\omega t)^\alpha] \right]. \quad (4.15)$$

Следовательно, в колебательной системе с фрактальной структурой под воздействием внешнего поля совершает движение, которое представляет со-

бой совокупностью двух колебаний: с собственной частотой системы  $\omega$  и с частотой вынуждающей силы  $\Omega$  [14].

Если в решении (4.15) значение параметра  $\alpha = 2$ , то это решение переходит в решение (4.11). Решение (4.15) нельзя использовать, если частота вынуждающей силы и собственная частота системы равны между собой, то есть в случае резонанса [28]. Найдем решение в этом случае.

В случае, когда частота вынуждающей силы стремится к собственной частоте ( $\Omega \rightarrow \omega$ ) вторая половина решения (4.11) дает неопределенность вида  $\{0/0\}$ . Применяя правило Лопиталю для раскрытия неопределенности, получим:

$$x(t) = aE_{\alpha,1}[-(\omega t)^\alpha] + btE_{\alpha,2}[-(\omega t)^\alpha] + \frac{f_0^{\alpha/2}}{\alpha} t^\alpha E_{\alpha,\alpha}[-(\omega t)^\alpha]. \quad (4.16)$$

Если  $\alpha = 2$ , то  $E_{2,2}(-z^2) = \frac{\sin z}{z}$ . Тогда решение (4.16) переходит в решение (4.12) начальной задачи для уравнения (4.9). В случае вынужденных колебаний «фрактального» осциллятора, когда вынуждающая сила имеет вид (4.14), рост амплитуды резонансного решения происходит по нелинейному закону, пропорционально  $t^\alpha$ .

### **§ 3. Линейные однородные динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка**

Рассмотрим сначала простейшие динамические системы, принадлежащие виду (4.1), а именно те, которые отображаются системой двух линейных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha x(t) &= ax + by, \\ \partial_{0t}^\alpha y(t) &= cx + dy, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $a, b, c, d$  – некоторые постоянные параметры.

Работа [84] посвящена исследованию линейной однородной динамической системы, описываемой системой двух дифференциальных уравнений с производными дробного порядка Капуто.

Характеристическое уравнение системы (4.17) имеет вид

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0. \quad (4.18)$$

**Задача.** Найти решение  $x(t), y(t) \in AC^2[0, T]$  системы (4.17), удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ .

Решение задачи имеет вид [43]

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) \right) + \\ &\quad + \frac{y_0 b - x_0 d + \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) \right), \\ y(t) &= \frac{y_0}{2} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) \right) + \\ &\quad + \frac{x_0 c - y_0 a + \gamma y_0}{2\sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $\lambda_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}$  – корни характеристического уравнения (4.18),

$$\gamma = \frac{a + d}{2}.$$

Характеристические корни  $\lambda_1, \lambda_2$  являются решениями уравнения (4.18),

и нормальная форма матрицы коэффициентов  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  и параметр  $\alpha$  полностью определяют поведение траекторий в окрестности особой точки. В случае,

когда корни характеристического уравнения (4.18) действительны, действительное преобразование координат приводит систему к системе того же вида, но с матрицей коэффициентов одного из двух типов [8,9]

$$A: \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B: \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случаи действительных корней характеристического уравнения, т. е. случаи с матрицами коэффициентов типа  $A$  и  $B$ .

Пусть действительные корни одного знака, а матрица типа  $A$ . В этом случае с помощью линейного однородного преобразования  $u = \alpha x + \beta y, v = \gamma x + \delta y$  система (4.17) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u(t) &= \lambda_1 u, \\ \partial_{0t}^\alpha v(t) &= \lambda_2 v, \end{aligned} \tag{4.20}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни характеристического уравнения (4.18).

Решение системы (4.20) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha), \\ v(t) &= v_0 E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha), \end{aligned}$$

где  $u_0, v_0$  – произвольные постоянные.

Предположим, что оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные, отрицательны. Пусть  $\lambda_i = -\mu_i, \mu_i > 0, i = 1, 2$ . Решение системы (4.20) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 E_{\alpha,1}(-\mu_1 t^\alpha), \\ v(t) &= v_0 E_{\alpha,1}(-\mu_2 t^\alpha). \end{aligned}$$

На рис. 4.2, 4.3 приведены графики фазовых траекторий в случае отрицательных корней характеристического уравнения. Как видно из рис. 4.2, фазовые траектории приближаются к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$ . Они совпадают с полуосью  $u$ , когда  $v_0 = 0$ , и с полуосью  $v$ , когда  $u_0 = 0$ . В этом случае особой точкой является устойчивый узел. А, когда  $\alpha \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow +\infty$ , как видно на рис. 4.3, происходит топологическое изменение фазовой плоскости.

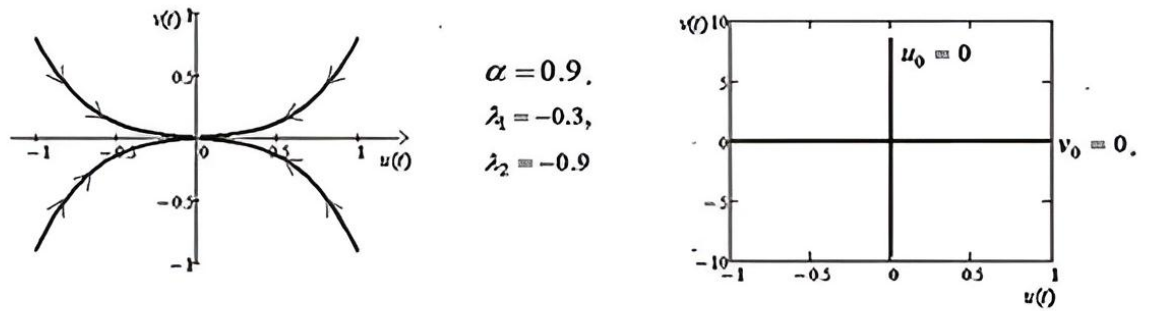


Рис. 4.2. Графики фазовых траекторий в случае отрицательных корней характеристического уравнения.

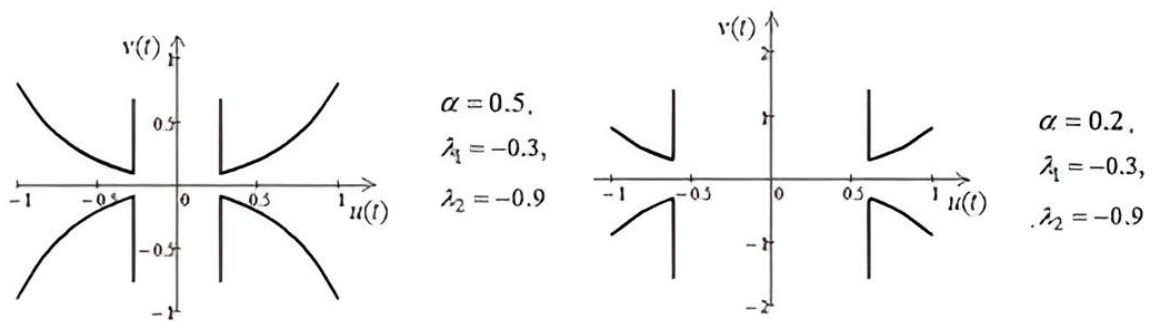


Рис. 4.3. Графики фазовых траекторий в случае, когда  $\alpha \rightarrow 0$

Пусть теперь оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные, положительные. На рис. 4.4 приведены графики фазовых траекторий в случае положительных корней характеристического уравнения. Как видно на рис. 4.4, фазовые траектории отдаляются от начала координат при  $t \rightarrow \infty$ . В этом случае особой точкой является неустойчивый узел.

Теперь предположим, что оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные, но противоположных знаков. Пусть  $\lambda_1 = -\lambda < 0$ , а  $\lambda_2 = \mu > 0$ . Тогда

$$u(t) = u_0 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha),$$

$$v(t) = v_0 E_{\alpha,1}(\mu \cdot t^\alpha).$$

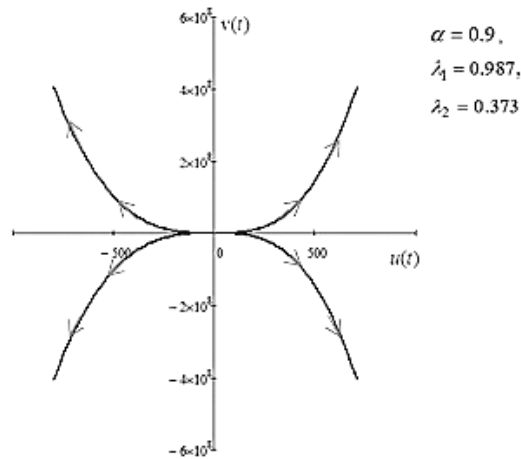


Рис. 4.4. Графики фазовых траекторий в случае положительных корней характеристического уравнения

Теперь предположим, что оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные, но противоположных знаков. Пусть  $\lambda_1 = -\lambda < 0$ , а  $\lambda_2 = \mu > 0$ . Тогда

$$u(t) = u_0 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha),$$

$$v(t) = v_0 E_{\alpha,1}(\mu \cdot t^\alpha).$$

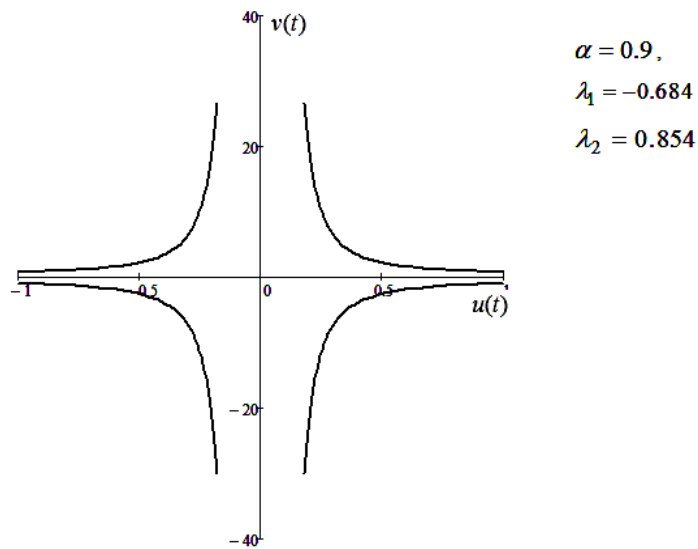


Рис. 4.5. Графики фазовых траекторий в случае, когда оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные, но противоположных знаков,  $|\lambda_i| \leq 1$

Полуоси  $u, v$  являются траекториями, соответствующими  $u_0 = 0$  и  $v_0 = 0$ . Если  $u_0 v_0 \neq 0$ , то  $u \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . На рис. 4.5 приведе-



ны графики фазовых траекторий в случае, когда оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные, противоположных знаков и  $|\lambda_i| \leq 1$ . В этом случае особой точкой является седло.

А при  $|\lambda_i| \geq 1$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow +\infty$ , как видно из рис. 4.6, происходит топологическое изменение фазовой плоскости, т. е. из одного состояния – с особой точкой типа седло (рис. 4.5) переходит в другое с особой точкой типа неустойчивый узел.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристическое уравнение имеет один корень  $\lambda$ , и этот корень действительный. Приведенная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u(t) &= \lambda u, \\ \partial_{0t}^\alpha v(t) &= u + \lambda v. \end{aligned} \quad (4.21)$$

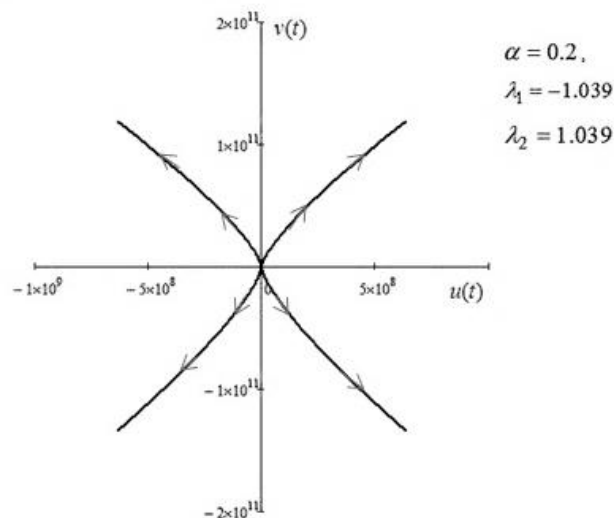


Рис. 4.6. Графики фазовых траекторий в случае, когда корни действительные противоположных знаков,  $|\lambda_i| \geq 1$  и  $\alpha \rightarrow 0$

Решение системы (4.21) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha), \\ v(t) &= v_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + u_0 t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k t^{\alpha k} E_{\alpha, \alpha k + \alpha + 1}(\lambda t^\alpha). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Допустим сначала, что  $\lambda < 0$ . Как видно из рис. 4.7, в случае, когда  $u_0 = 0$  и  $v_0 > 0$  фазовые траектории представляют собой положительную полуось  $v$ , а когда  $v_0 < 0$  – отрицательную полуось  $v$ .

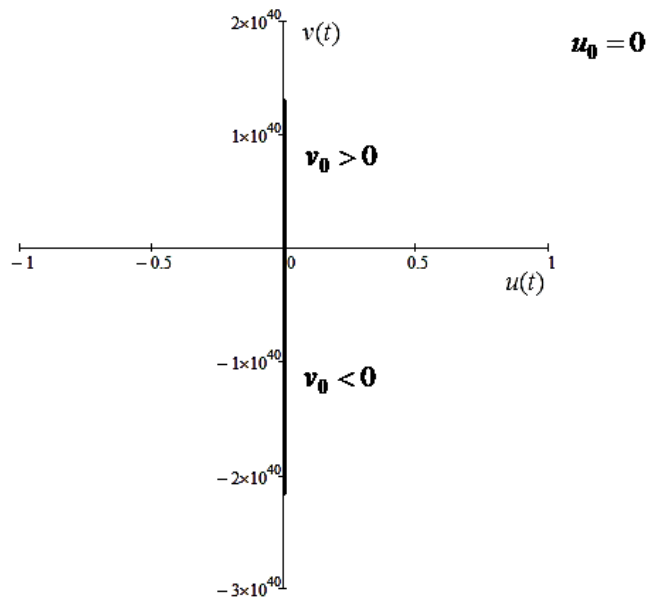


Рис. 4.7. Графики фазовых траекторий в случае, когда характеристическое уравнение имеет один корень  $\lambda < 0$  и  $u_0 = 0$

В этом случае независимо от  $u_0$  и  $v_0$  одновременно  $u, v \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и особой точкой будет устойчивый узел (рис. 4.8).

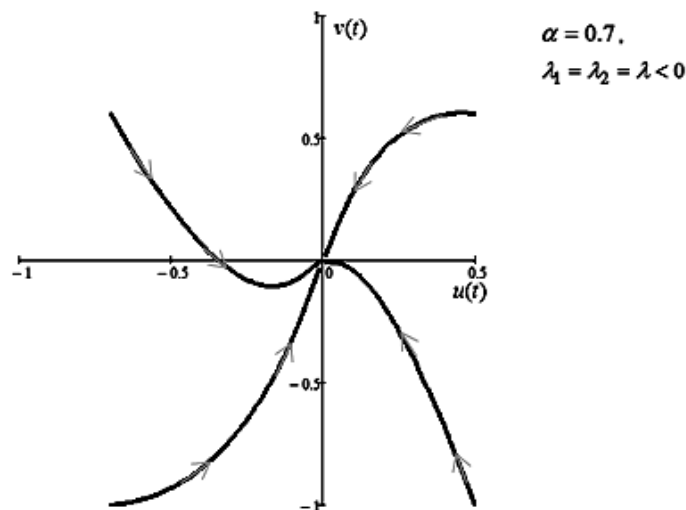


Рис. 4.8. Графики фазовых траекторий в случае, когда характеристическое уравнение имеет один корень  $\lambda < 0$

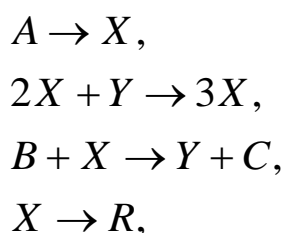
В случае, когда корень характеристического уравнения  $\lambda > 0$ , особой точкой будет неустойчивый узел.

#### § 4. Дробный «брюсселятор»

В этом параграфе дадим обобщение задачи «брюсселятора». «Брюсселятор», или тримолекулярная модель, была предложена Пригожиным и Лефевром в 1965 г. Данная модель является наиболее исследованной системой, обладающая разнообразным поведением во времени и пространстве в зависимости от значений параметров. На основе данной модели можно выявить условия, при которых возникают процессы самоорганизации в биологических и химических системах.

В работах [20;80] исследовано поведения фазовых траекторий дробного «брюсселятора» при различных значениях параметра дробной производной.

«Брюсселятор» представляется следующей схемой гипотетических химических реакций, которые происходят в тонком и длинном сосуде:



где  $A, B$  – изначально заданные вещества, которые распределены в трубке равномерно,  $R$  и  $C$  – вещества, выпадающие в виде осадка. Вещества  $X$  и  $Y$  диффундируют вдоль трубки и участвуют в химическом процессе. Математическая модель этой динамической системы имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a + x^2 y - (b + 1)x, \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2 y.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Рассмотрим дробно-дифференциальную модификацию системы (4.22).

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^{\alpha}x(t) &= a + x^2y - (b+1)x, \\ \partial_{0t}^{\alpha}y(t) &= bx - x^2y.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Точка  $\bar{x} = a$ ,  $\bar{y} = \frac{b}{a}$  является особой точкой. С помощью замены  $\xi = x - \bar{x}$ ,  $\eta = y - \bar{y}$ , ограничиваясь только слагаемыми первого порядка малости, система (4.22) приводится к линеаризованному виду:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= (b-1)\xi + a^2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -b\xi - a^2\eta.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Тогда система дифференциальных уравнений с производными дробного порядка (4.23) приведет к виду:

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^{\alpha}x(t) &= (b-1)x + a^2y, \\ \partial_{0t}^{\alpha}y(t) &= -bx - a^2y,\end{aligned}\tag{4.25}$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $a, b$  – некоторые постоянные параметры. В случае  $\alpha = 1$  система (4.25) переходит в систему (4.24).

**Задача.** Найти решение  $x(t), y(t) \in AC^2[0, T]$  системы (4.25), удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ .

Пусть  $D_{\alpha} \subset AC^2[0, T]$  – область определения  $\partial_{0t}^{\alpha}$ . Тогда для любых функций  $x(t) \in D_{\alpha}, y(t) \in D_{\alpha}$  согласно (1.65) справедливы равенства

$$\begin{aligned}D_{0t}^{\alpha}x(t) &= (b-1)x + a^2y + \frac{x(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}, \\ D_{0t}^{\alpha}y(t) &= -bx - a^2y + \frac{y(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Пусть  $x(t) \in D_{\alpha}, y(t) \in D_{\alpha}$  – решение системы (4.26). Тогда, применяя преобразования Лапласа к системе (4.26), получим

$$\begin{aligned}\tilde{x}(p) &= \frac{x(0)(p^\alpha + a^2) + y(0)a^2}{p^{1-\alpha} [p^{2\alpha} + (a^2 - (b-1))p^\alpha + a^2]}, \\ \tilde{y}(p) &= \frac{y(0)(p^\alpha - b + 1) - x(0)b}{p^{1-\alpha} [p^{2\alpha} + (a^2 - (b-1))p^\alpha + a^2]}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Систему (4.27) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tilde{x}(p) &= \frac{x_0}{p^{1-\alpha}(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( \frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} \right) + \\ &\quad + \frac{(x_0 + y_0)a^2}{p(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( \frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} \right), \\ \tilde{y}(p) &= \frac{y_0}{p^{1-\alpha}(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( \frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} \right) - \\ &\quad + \frac{(x_0 + y_0)b - y_0}{p(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( \frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} \right),\end{aligned}$$

где  $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - a^2}$ ,  $\gamma = \frac{a^2 - (b-1)}{2}$ .

Если  $\operatorname{Re} p > 1$ , то имеют место равенства (1.22). С помощью этих равенств получим выражения для оригиналов функций  $x(t), y(t)$ :

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{x_0 t^{-\alpha}}{2\sqrt{\gamma^2 + a^2}} \left( E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^\alpha) - E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_2 t^\alpha) \right) + \frac{a^2(x_0 + y_0)}{2\sqrt{\gamma^2 - a^2}} \left( E_{\alpha, 1}(\lambda_2 t^\alpha) - E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^\alpha) \right), \\ y(t) &= \frac{y_0 t^{-\alpha}}{2\sqrt{\gamma^2 + a^2}} \left( E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^\alpha) - E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_2 t^\alpha) \right) - \frac{b \cdot (x_0 + y_0) - y_0}{2\sqrt{\gamma^2 - a^2}} \left( E_{\alpha, 1}(\lambda_2 t^\alpha) - E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^\alpha) \right).\end{aligned}$$

Если воспользуемся равенством (1.14), то полученное решение можно представить в виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{x_0}{2} \left( E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha, 1}(\lambda_2 t^\alpha) \right) + \\ &\quad + \frac{a^2(x_0 + y_0) + \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - a^2}} \left( E_{\alpha, 1}(\lambda_2 t^\alpha) - E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^\alpha) \right),\end{aligned}\tag{4.28}$$

$$y(t) = \frac{y_0}{2} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) \right) + \frac{(x_0 + y_0) \cdot b - (1 + \gamma) y_0}{2\sqrt{\gamma^2 - a^2}} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) \right),$$

**Теорема 4.1.** Функции  $x(t) \in D_\alpha$ ,  $y(t) \in D_\alpha$  являются решениями системы (4.25), если их можно представить в виде (4.28).

Исследуем устойчивость состояний равновесия в зависимости от параметров системы и параметра дробной производной. Характер устойчивости определяется поведением динамической системы, линеаризованной в малой окрестности неподвижной точки. Для исследования поведения фазовых траекторий линеаризованной системы (4.25) воспользуемся пакетом прикладных программ Mathcad, а для численного исследования поведения фазовых траекторий нелинейной системы воспользуемся разработанным комплексом программ. Для построения фазовых траекторий и графиков зависимостей по данным, полученным с помощью программного комплекса, также воспользуемся пакетом Mathcad.

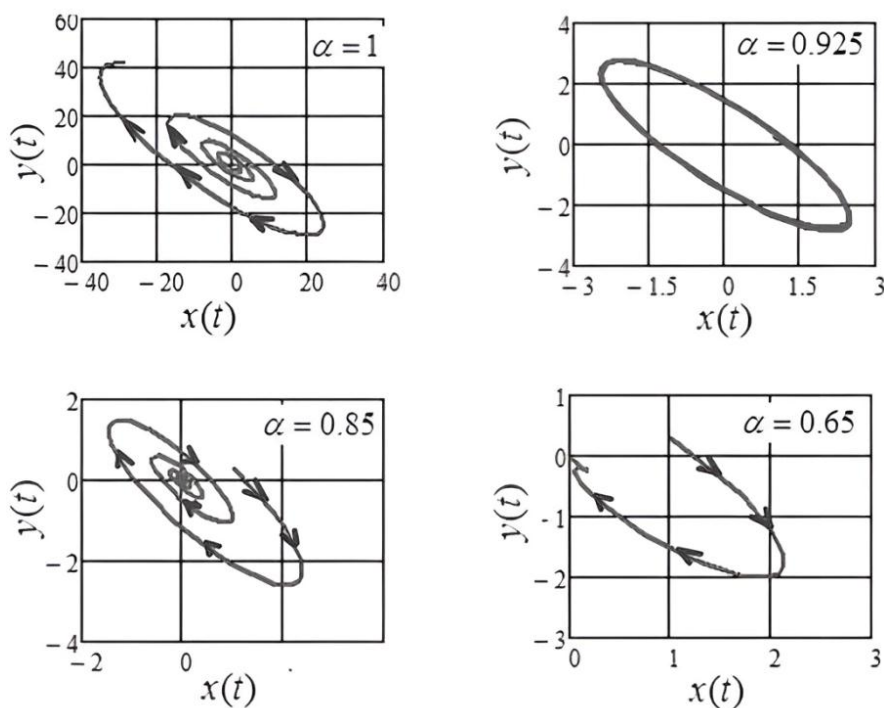
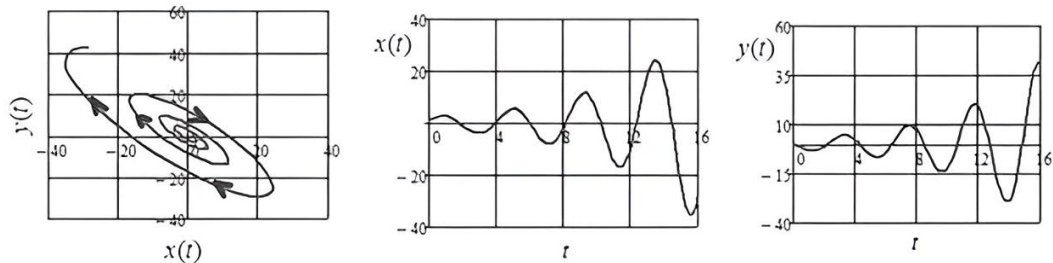


Рис. 4.9. Графики фазовых траекторий при различных значениях  $\alpha$  и  $b > 1 + a^2$

Если  $b > 1 + a^2$ , то собственные значения  $\lambda_{1,2}$  являются комплексно-сопряженными. Они имеют положительную действительную часть, то есть  $\text{Re}(\lambda) > 0$ . При  $\alpha = 1$  неподвижная точка в начале координат представляет собой неустойчивый фокус. При переходе к дробной производной меняется поведение фазовых траекторий, то есть происходит переход от неустойчивого фокуса к устойчивому фокусу (рис. 4.9).

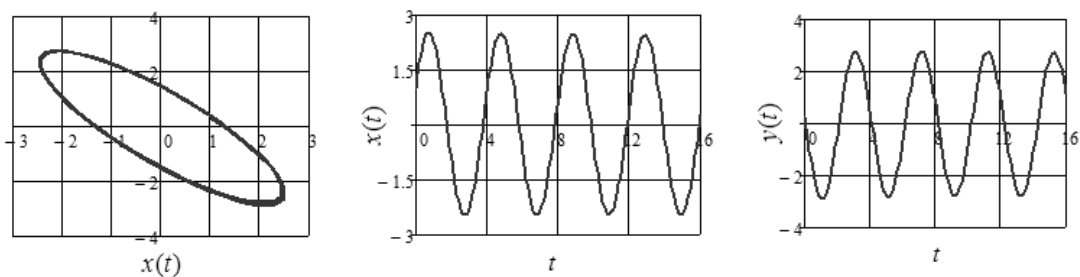
Проведем анализ устойчивости состояний равновесия в зависимости от параметра дробной производной. Возьмем  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$  и проведем вычислительный эксперимент по анализу поведения фазовых траекторий при различных значениях параметра дробной производной. В этом случае тоже собственные значения  $\lambda_{1,2}$  являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью, то есть  $\text{Re}(\lambda) > 0$ . Рассмотрим случаи:

1. Если  $\alpha = 1$ , то положения равновесия неустойчивое и неподвижная точка типа неустойчивый фокус (4.10).



4.10. Поведение фазовой траектории при  $\alpha = 1$ ,  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$ .

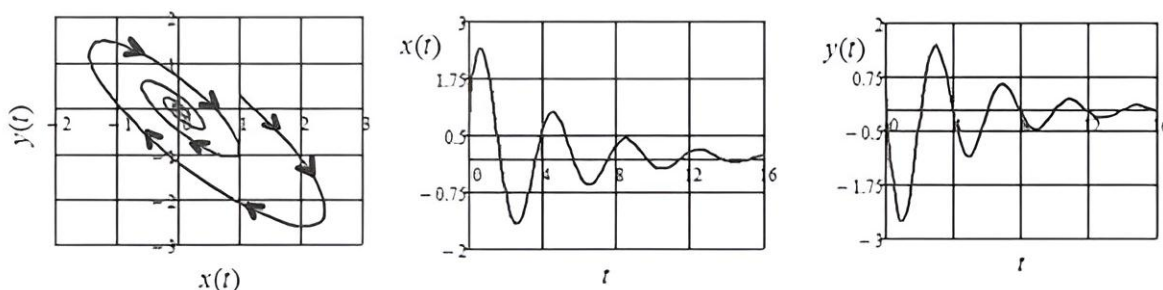
2. Если  $\alpha = 0.925$ , то неподвижная точка представляет собой типа центр (рис. 4.11).



4.11. Поведение фазовой траектории при  $\alpha = 0.925$ ,  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$ .

3. Если  $\alpha = 0.85$ , то положение равновесия устойчивое и неподвижная точка типа устойчивый фокус (рис. 4.12).

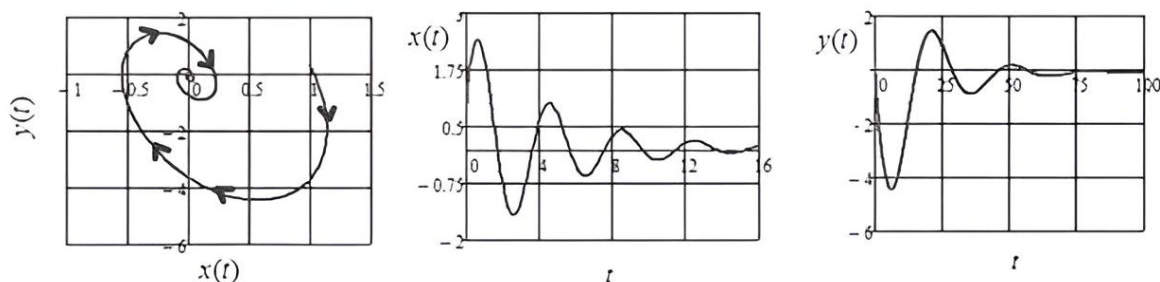
Таким образом, если  $0.925 < \alpha \leq 1$ , то неподвижная точка типа неустойчивый фокус, если  $\alpha = 0.925$ , то неподвижная точка типа центр, если  $0.7 < \alpha < 0.925$ , то неподвижная точка типа устойчивый фокус, если  $0.45 < \alpha < 0.7$ , неподвижная точка типа устойчивый узел и, если  $\alpha < 0.45$  неподвижная точка типа неустойчивый узел.



4.12. Поведение фазовой траектории при  $\alpha = 0.85$ ,  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$ .

Теперь исследуем устойчивость состояний равновесия в зависимости от параметра  $b$ . Рассмотрим случаи:

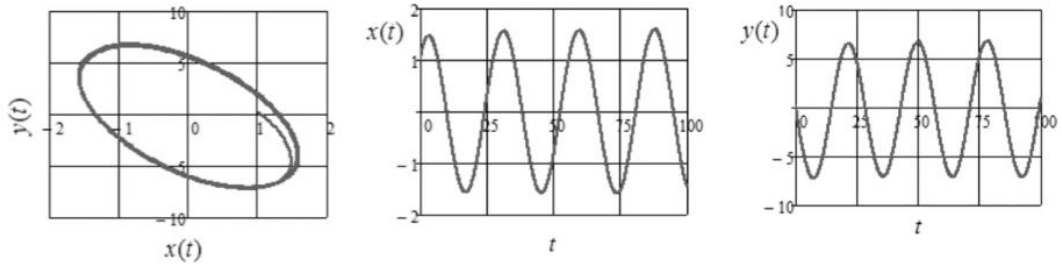
1. Если  $\alpha = 0.8$ ,  $1.1 < b < 1.276$ , то тип особой точки устойчивый фокус (рис. 4.13), то есть, в этом случае, при переходе к дробной производной из неустойчивого состояния равновесия система переходит в устойчивое состояние.



4.13. Поведение фазовой траектории при  $\alpha = 0.8$ ,  $1.1 < b < 1.276$ ,  $a = 0.3$ .

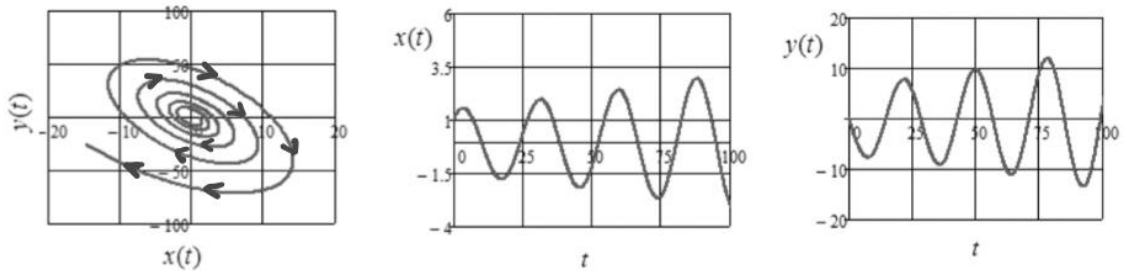
2. Если  $\alpha = 0.8$ ,  $b = 1.276$ ,  $a = 0.3$ , то неподвижная точка типа центр (рис. 4.14).





4.14. Поведение фазовой траектории при  $\alpha = 0.8$ ,  $b = 1.276$ ,  $a = 0.3$ .

3. Если  $\alpha = 0.8$ ,  $1.276 < b < 1.68$ ,  $a = 0.3$ , то система переходит в неустойчивое состояние равновесия (рис. 4.15).



4.15. Поведение фазовой траектории при  $\alpha = 0.8$ ,  $1.276 < b < 1.68$ ,  $a = 0.3$ .

Рассмотрим случай, когда  $b = 1 + a^2$ . Пусть  $a = 1$  и  $b = 2$ . На рис. 4.16 приведены графики фазовых траекторий при различных значениях параметра дробной производной. Как видно из рис. 4.16, при переходе к дробной производной происходит топологическое изменение фазовой плоскости.

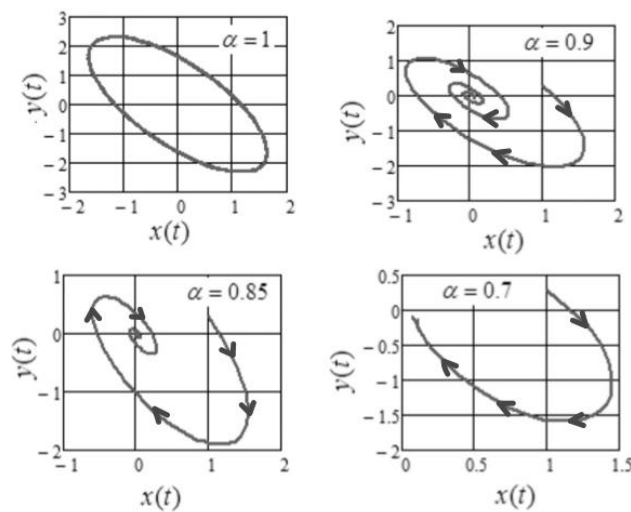


Рис. 4.16. Графики фазовых траекторий при различных значениях  $\alpha$  и

$$b = 1 + a^2$$

При больших отклонениях от положения равновесия линейное приближение становится неприменимым. В этом случае для исследования поведения фазовых траекторий исходной нелинейной системы воспользуемся вычислительными алгоритмами на основе численных методов решения задачи Коши для дробного дифференциального уравнения. Численно исследуем поведение фазовых траекторий исходной нелинейной системы при различных значениях параметра дробной производной.

Если  $\alpha = 1$ ,  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$ , то получаем особую точку типа неустойчивый фокус с предельным циклом, а при переходе к дробной производной ( $\alpha = 0.8$ ) получаем особую точку типа устойчивый фокус, то есть происходит топологическое изменение фазовой плоскости (рис. 4.17). Таким образом, как и в случае линеаризованной системы, неподвижная точка типа неустойчивый фокус переходит к устойчивому фокусу, то есть система из неустойчивого состояния переходит в устойчивое состояние.

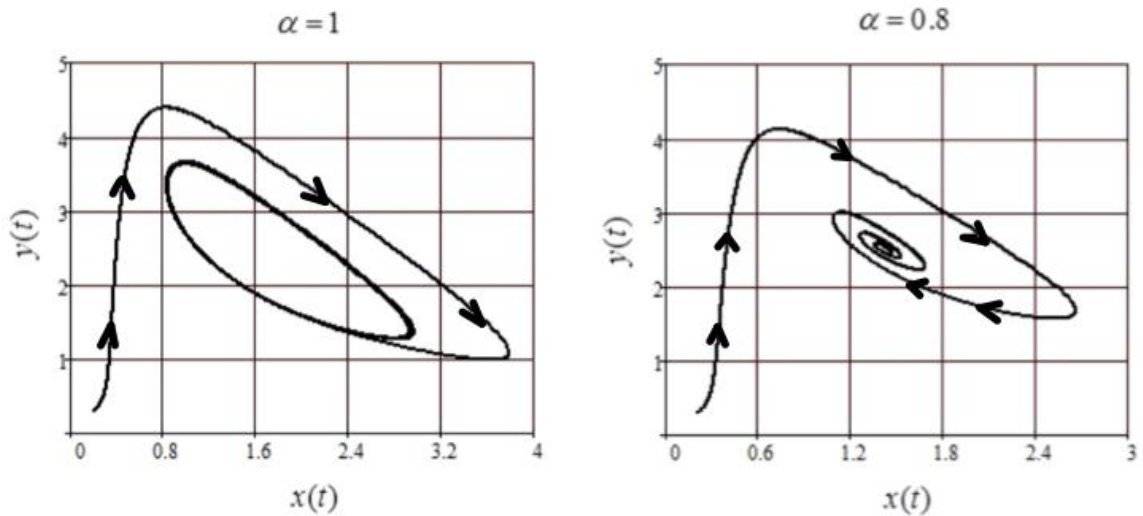


Рис. 4.17. Графики фазовых траекторий при различных значениях параметра  $\alpha$  и  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$

Как мы видим из рис. 4.17, результаты численного исследования поведения фазовых траекторий нелинейной системы соответствуют результатам исследования поведения фазовых траекторий линеаризованной системы при малых отклонениях от положения равновесия.

С целью проверки адекватности решений, проведем вычислительные эксперименты по сравнению полученных решений при  $\alpha = 1$  с решениями известной модели «брюсселятора».

Проведем сравнительный анализ решений начальной задачи для линеаризованных систем (4.24) и (4.25). На рисунке 4.18 приведены фазовые траектории и графики зависимостей  $\xi(t)$  и  $x(t)$  построенные согласно решениям систем (4.24) и (4.25). Как мы видим из рисунка, решения систем хорошо согласуются. Точность результатов оценивались с помощью норм:

$$\Delta_1 = \|\xi(t) - x(t)\|, \quad \Delta_2 = \|\eta(t) - y(t)\|.$$

В случае, когда  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$ , получили  $\Delta_1 = 3.376 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta_2 = 4.645 \times 10^{-4}$ .

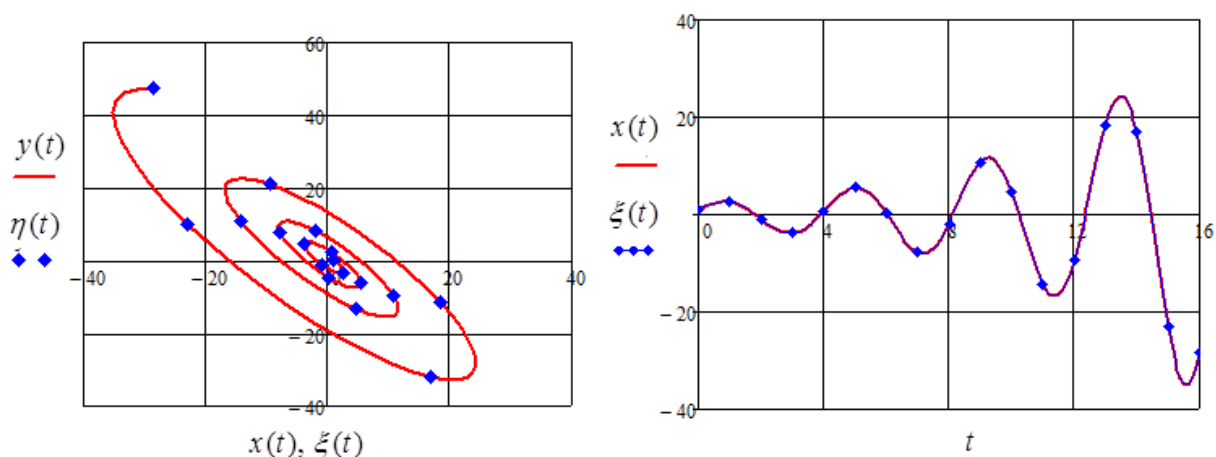


Рис. 4.18. Фазовые траектории и графики зависимостей  $\xi(t)$  и  $x(t)$ , соответствующие решениям систем (4.24), (4.25) при  $\alpha = 1$  и  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$

Теперь проведем вычислительный эксперимент по сравнению численного решения системы (4.23) при  $\alpha = 1$  с численным решением системы (4.22). На рисунке 4.19 приведены фазовые траектории согласно решениям систем (4.22) и (4.23). В этом случае, при значениях параметров  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$ , получили  $\Delta_1 = \|x_1(t) - x_2(t)\| = 0.01$ ,  $\Delta_2 = \|y_1(t) - y_2(t)\| = 0.01$ . Погрешности соответствуют точности вычислительных алгоритмов.

Следовательно, при  $\alpha = 1$  решение системы (4.25) переходит в решение системы (4.24), а при остальных значениях параметра дробной производной мы получаем новый класс решений.

Таким образом, учет эффектов памяти приводит к принципиально новым результатам, когда в системе возможны переходы между различными особыми точками фазовой траектории.

Полученные решения могут служить основой для исследования колебательных процессов в автоколебательных системах ветвящихся фрактальных структур. К таким системам можно отнести метаболические системы с фрактальной структурой.

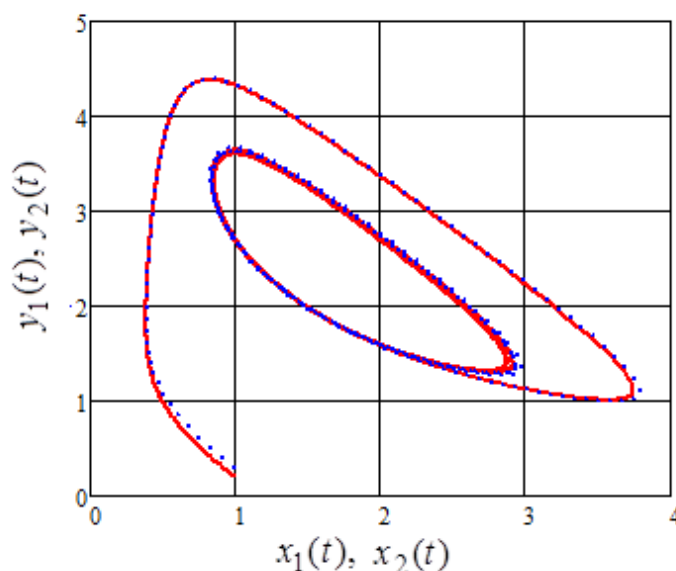


Рис. 4.19. Графики фазовых траекторий, которые соответствуют решениям систем (4.22), (4.23) при  $\alpha = 1$  и  $a = 1.5$ ,  $b = 3.6$

## § 5. Обобщенный нелинейный осциллятор Дуффинга

В нелинейных системах возникают различные явления, не только характерные для таких систем, но и нестандартные. Рассмотрим динамическую систему, описываемую нелинейным осцилляторным уравнением с операторами дробного дифференцирования Капуто (1.65) вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} (\partial_{0t}^{\alpha} x(t)) + k^{\alpha} \partial_{0t}^{\alpha} x(t) + f(x) = P(t), \quad (4.29)$$

где  $k$  – коэффициент затухания,  $f(x)$  – нелинейная восстанавливающая сила,  $P(t)$  – периодическая функция периода  $T$ .

Периодические вынужденные колебания, описанные этим уравнением, предоставляют широкий спектр интересных явлений, характерных для поведения нелинейных динамических систем, таких, как регулярное и хаотическое движение, сосуществующие аттракторы, регулярные и фрактальные границы областей притяжения, а также локальная и глобальная бифуркация.

В случае, когда  $\alpha = 1$  уравнение (4.29) переходит в уравнение Дуффинга

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k \frac{dx(t)}{dt} + f(x) = P(t). \quad (4.30)$$

Уравнение (4.30) впервые было получено Дуффингом и стало предметом теоретического и экспериментального изучения многих исследователей. С теоретической точки зрения устойчивое состояние системы, которое управляется уравнением Дуффинга (4.30), является периодическим движением, основной период которого также будет равен периоду внешней силы  $T$  или ее целочисленному множителю.

Уравнение (4.29) представляет собой частный случай неавтономной периодической системы

$$\begin{aligned} \partial_{0r}^\alpha x_1(t) &= X_1(t, x, y), \\ \partial_{0r}^\alpha x_2(t) &= X_2(t, x, y), \end{aligned} \quad (4.31)$$

где  $X(t, x, y)$  и  $Y(t, x, y)$  – периодические функции по  $t$  с периодом  $T$ , а также эти функции непрерывные в заданной области.

Решение системы (4.31) описывает движение некоторой точки на координатной плоскости  $Oxy$ . Пусть решение системы (4.31) можно представить в виде:

$$x_1 = \varphi_1(t, x_0, y_0), \quad x_2 = \varphi_2(t, x_0, y_0). \quad (4.32)$$

Решение (4.32) описывает некоторую кривую пространства  $txy$ . Проекция этой кривой решения на плоскость  $Ox_1x_2$  и представляет фазовую плос-

кость. Фазовые траектории движения имеют начало движения в точке  $P_0$  при  $t = t_0$ .

Рассмотрим частный случай уравнения (4.29)

$$\partial_{0t}^{2\alpha}(\partial_{0t}^\alpha x(t)) + k^\alpha \partial_{0t}^\alpha x(t) - \beta^\alpha x + x^3 = B \cos t. \quad (4.33)$$

Представим уравнение (4.33) в виде системы

$$\begin{cases} \partial_{0t}^\alpha x_1(t) = x_2, \\ \partial_{0t}^\alpha x_2(t) = -k^\alpha x_2 + \beta^\alpha x_1 - x_1^3 + B \cos t. \end{cases} \quad (4.34)$$

Уравнение (4.34) описывает вынужденные колебания в системах с эффектами памяти. Здесь  $k$  – постоянный положительный коэффициент затухания, а  $x^3$  – нелинейная возвращающая сила.

Как известно, уравнение (4.30) симметрична относительно преобразований  $-x_1 \rightarrow x_1, -x_2 \rightarrow x_2, t + \pi \rightarrow t$ , то есть не меняет своего вида. Следовательно, периодическая траектория будет также симметрична сама себе относительно начала координат плоскости  $Ox_1x_2$ . В случае дифференциальных уравнений дробного порядка этот принцип нарушается, то есть при изменении знака времени  $t \rightarrow -t$  в случае дробных производных состоит в замене

$$(-t)^\alpha \rightarrow t^\alpha (\cos(\pi\alpha) + i \sin(\pi\alpha)).$$

Таким образом, при переходе к дробным производным по времени часть процесса соответствует обратимым, другая часть необратимым процессам. Такое сочетание обратимых и необратимых процессов фактически означает возможность описания нелинейных процессов при переходе к дробным производным [28].

В вынужденной колебательной системе, заданной уравнением (5), можно исследовать различные типы устойчивых состояний в зависимости от параметров системы  $k$ ,  $\beta$  и  $B$ .

Рассмотрим задачу в отсутствие внешних сил:  $B = 0$ . Система описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\partial_{0t}^{\alpha}(\partial_{0t}^{\alpha}x(t)) + k^{\alpha}\partial_{0t}^{\alpha}x(t) - \beta^{\alpha}x + x^3 = 0$$

или двумя уравнениями порядка  $\alpha$

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha}x_1(t) = x_2, \\ \partial_{0t}^{\alpha}x_2(t) = -k^{\alpha}x_2 + \beta^{\alpha}x_1 - x_1^3. \end{cases} \quad (4.35)$$

Система при  $\beta < 0$  имеет единственное положение равновесия, а в случае  $\beta > 0$  имеется три положения равновесия  $x = 0, \pm\sqrt{\beta^{\alpha}}$ .

Рассмотрим задачу Коши для системы (4.34)

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha}x(t) &= f(t, x, y), \\ x(0) &= x^0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где  $f(t, x, y) = \{x_2, -k^{\alpha}x_2 + \beta^{\alpha}x_1 - x_1^3 + B \cos t\}$ ,  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$ .

Решение системы (4.36) будем находить численным методом в области

$$D = \{|t| \leq T, |x_i - x_i^{(0)}| < b, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Функции  $f_1(t, x_1, x_2)$  и  $f_2(t, x_1, x_2)$  непрерывны в области  $D$  и удовлетворяют условию Липшица. Следовательно, система (4.36) имеет единственное решение [85] определенное при  $|t| \leq t_0 = \min(a, b/M)$  и принимающее при  $t = 0$  заданные начальные значения. Для численного решения задачи (4.36) введем по переменной  $t$  равномерную сетку с шагом  $\tau > 0$ :  $\omega_{\tau} = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Уравнения системы (4.35) заменим, пользуясь аппроксимацией (1.97), разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (x_1^{k+1} - x_1^k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= x_2^n, \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (x_2^{k+1} - x_2^k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= -k^{\alpha}x_2^n + \beta^{\alpha}x_1 - \\ &\quad -(x_1^n)^3 + B \cos t_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0, \\ x_2(0) &= x_2^0, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.37)$$

Решение разностной задачи (4.37) можно найти в явном виде по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0, x_2(0) = x_2^0, \\ x_1^1 &= x_1^0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha x_2^0, \\ x_1^{n+1} &= x_1^n - \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (x_1^{k+1} - x_1^k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha x_2^n, \\ x_2^1 &= x_2^0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \left( -k^\alpha x_2^0 + \beta^\alpha x_1 - (x_1^0)^3 + B \cos t_0 \right), \\ x_2^{n+1} &= x_2^n - \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (x_2^{k+1} - x_2^k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + \\ &\quad + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \left( -k^\alpha x_2^n + \beta^\alpha x_1 - (x_1^n)^3 + B \cos t_n \right), \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.38)$$

Исследуем нелинейную дробно-дифференциальную модель динамической системы Дуффинга при различных значениях параметра дробной производной и  $k = 0.1, \beta = 2.75, B = 1$ .

На рис. 4.20 изображен фазовый портрет динамической системы Дуффинга при  $\alpha = 1$ . Как мы видим из рис. 4.20, при  $\alpha = 1$  в системе возникает хаотическое поведение.

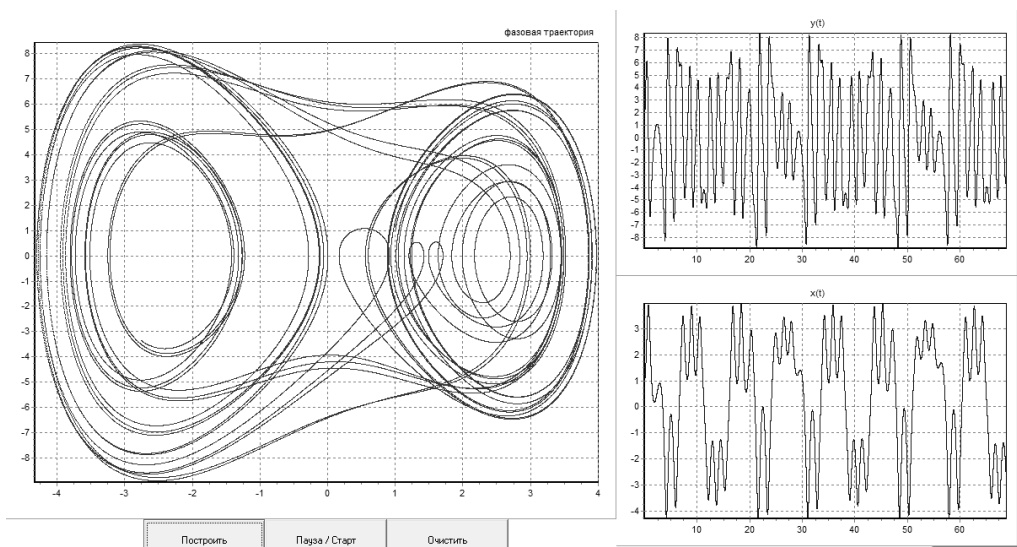


Рис. 4.20. Фазовый портрет осциллятора Дуффинга при  $\alpha = 1$ .



На рисунке 4.21 приведена фазовая траектория динамической системы, описываемой дробным дифференциальным уравнением (4.33) в случае, когда  $\alpha = 0.9$ .

Как видно из рис. 4.21, при переходе к дробной производной происходит топологическое изменение фазовой плоскости. Динамическая система имеет две особые точки, но фазовая траектория от одной особой точки к другой переходит плавно, чем в случае целого значения параметра  $\alpha$ .

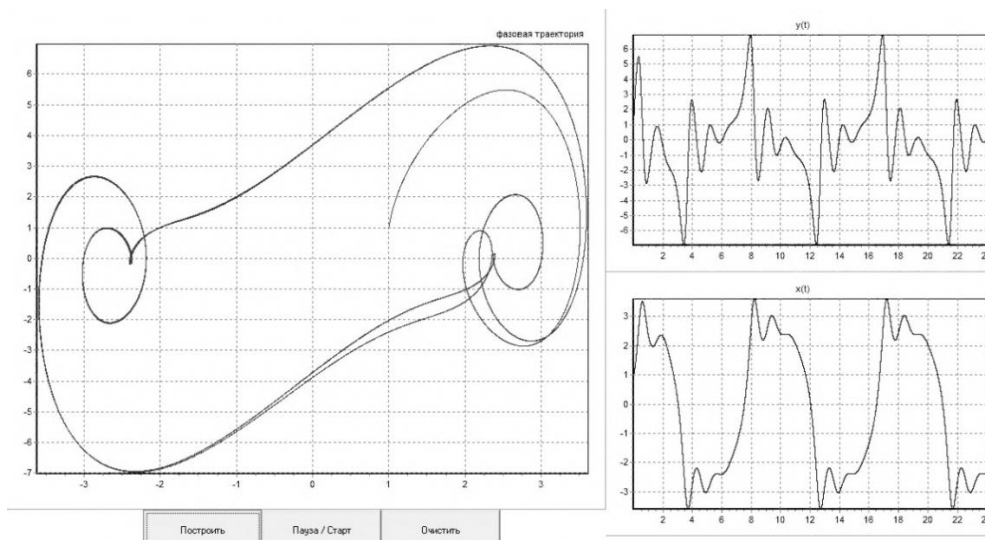


Рис. 4.21. Фазовая траектория обобщенного нелинейного осциллятора Дуффинга при  $\alpha = 0.9$ .

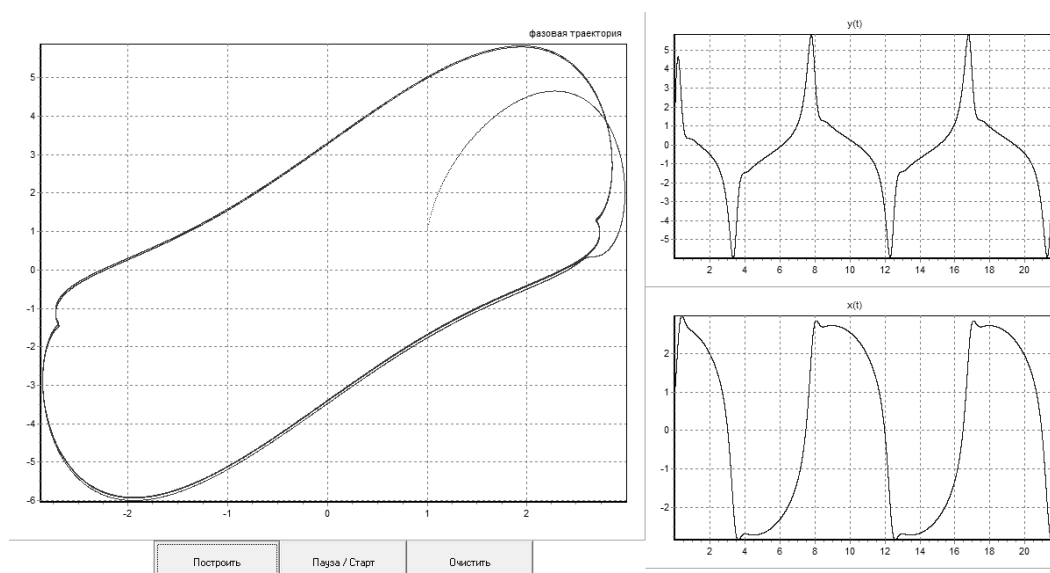


Рис. 4.22. Фазовая траектория дробно-дифференциального осциллятора Дуффинга при  $\alpha = 0.7$ .

На рисунке 4.22 приведены фазовые траектории в случае, когда  $\alpha = 0,7$ . Как видно из рисунка, при  $\alpha = 0,7$  происходит топологическое изменение фазовой плоскости. В этом случае система имеет единственное положение равновесия типа центр, что соответствует гармоническим колебаниям.

### § 6. Модель «хищник–жертва» в нелокальной постановке

Современное понимание естественнонаучной картины мира, которая включает в себя физические, биологические и другие процессы, опирается на фундаментальный принцип, который основан на принципе всеобщей связи природных явлений и на принципе развития. При этом выделяется физическое (биологическое) ядро природных систем как совокупность низших редукционистских форм материи со своими законами движения [61]. В основе самого принципа подчинения нелинейной динамики в математическом плане лежит идея разделения данной системы на две подсистемы (медленные и быстрые). В результате чего происходит процедура, при котором исключаются переменные с характерными временными масштабами. Помимо данного принципа, в нелинейной динамике огромное значение имеет также понятие параметра порядка.

В 1931 г. Вито Вольтерра предложил модель «хищник–жертва». Пусть на некоторой замкнутой территории обитают два вида: вегетарианцы–жертвы и хищники, охотящиеся на жертв.

Если бы не было хищников, то жертвы размножались бы беспредельно и их численность описывалась бы уравнением Мальтуса

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x,$$

где  $\alpha > 0$  – коэффициент прироста. Если бы не было жертв, то хищники постепенно вымирали бы. Их численность описывалась бы уравнением

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y,$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент убыли хищников,  $Y$  – их численность в данный момент времени. Росту численности жертв, однако, препятствуют их встречи с хищниками, частота которых пропорциональна как числу жертв, так и числу хищников –  $xY$ . Тогда скорость изменения численности жертв описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

где  $\beta > 0$  – коэффициент убыли жертв при встрече с хищниками.

Аналогично встреча хищника с жертвой увеличивает вероятность выживания хищника, т. е. способствует сохранению популяции хищников

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x),$$

где  $\delta > 0$  – коэффициент, зависящий от того, как часто встреча хищника с жертвой заканчивается трапезой.

В качестве нелокальной модели «хищник-жертва» исследуем систему дифференциальных уравнений с производными дробного порядка вида

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha} x(t) &= x(a - by), \\ \partial_{0t}^{\alpha} y(t) &= -y(c - dx), \\ x(0) &= x_0, y(0) = y_0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $c > 0$  – коэффициент убыли хищников,  $y$  – их численность в данный момент времени,  $y_0$  – их численность в начальный момент времени,  $b > 0$  – коэффициент убыли жертв при встрече с хищником,  $d > 0$  – коэффициент, зависящий от того, как часто встреча хищника с жертвой заканчивается трапезой,  $x_0$  – их численность в начальный момент времени,  $\alpha$  – параметр, учитывающий информацию о «прошлом» системы.

В системе (4.39), если взять  $\alpha = 1$ , то получим модель «хищник–жертва», предложенную Вито Вольтеррой.

$$\begin{aligned}
x'(t) &= x(a - by), \\
y'(t) &= -y(c - dx), \\
x(0) &= x_0, y(0) = y_0.
\end{aligned}
\tag{4.39.1}$$

Если численность популяций есть постоянное число, то их производные Капуто по времени равны нулю и мы приходим к системе

$$\begin{cases} x(a - by) = 0, \\ -y(c - dx) = 0. \end{cases}
\tag{4.40}$$

Из системы (4.40) следует, что

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0. \end{cases}
\text{ или }
\begin{cases} x_2 = \frac{c}{d}, \\ y_2 = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Так как производные на прямых  $x = \frac{c}{d}$  и  $y = \frac{a}{b}$  обращаются в нуль, то, следовательно, численность популяций имеет здесь экстремумы.

Разлагая выражения в правых частях системы (4.39) вблизи стационарной точки  $x = \frac{c}{d}$ ,  $y = \frac{a}{b}$  и ограничиваясь малыми отклонениями от положения равновесия, получим:

$$\begin{cases} x^* = x - \frac{c}{d}, \\ y^* = y - \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Тогда систему (3.31) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\partial_{0t}^\alpha x^*(t) &= -bx^* y^* - \frac{cb}{d} y^*, \\
\partial_{0t}^\alpha y^*(t) &= dx^* y^* + \frac{ad}{b} x^*.
\end{aligned}$$

Так как  $x^*$  и  $y^*$  малы, пренебрегая произведением  $x^* y^*$ , систему уравнений можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^\alpha x^*(t) &= -\frac{cb}{d} y^*, \\ \partial_{0t}^\alpha y^*(t) &= \frac{ad}{b} x^*.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Если в (4.41) взять значение параметра  $\alpha = 1$ , то получим:

$$\begin{aligned}\xi'(t) &= -\frac{cb}{d} \eta, \\ \eta'(t) &= \frac{ad}{b} \xi, \\ \xi(0) &= x_0, \eta(0) = y_0.\end{aligned}\tag{4.41.1}$$

Характеристическое уравнение этой системы (4.41)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + ac = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = i\sqrt{ac}$ ,  $\lambda_2 = -i\sqrt{ac}$ . Найдем решение системы (4.41).

Пусть  $\partial_\alpha \subset AC^2[0, T]$  – область определения  $\partial_{0t}^\alpha$ . Тогда для любых функций  $x(t) \in \partial_\alpha$ ,  $y(t) \in \partial_\alpha$  согласно достаточному условию (1.65) справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^\alpha x(t) &= D_{0t}^\alpha x(t) - \frac{x(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}, \\ \partial_{0t}^\alpha y(t) &= D_{0t}^\alpha y(t) - \frac{y(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Воспользовавшись равенствами (4.42), систему (4.41) можно привести к виду:

$$D_{0t}^\alpha x^*(t) = \frac{cb}{d} y^* + \frac{x(0)}{\Gamma(1-\alpha) \cdot t^\alpha},$$

$$D_{0t}^{\alpha} y^*(t) = \frac{ad}{b} x^* + \frac{y(0)}{\Gamma(1-\alpha) \cdot t^{\alpha}}. \quad (4.43)$$

Пусть  $x(t) \in D_{\alpha}$ ,  $y(t) \in D_{\alpha}$  – решение системы (4.43), тогда, применяя преобразования Лапласа к системе (4.43), получим:

$$\bar{x}^*(t) = \frac{x(0)p^{\alpha} - \frac{bcy(0)}{d}}{p^{1-\alpha}[p^{2\alpha} + ac]}, \quad \bar{y}^* = \frac{y(0)p^{\alpha} + \frac{adx(0)}{b}}{p^{1-\alpha}[p^{2\alpha} + ac]}. \quad (4.44)$$

Систему (4.44) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}^*(t) &= \frac{x(0)}{p^{1-\alpha}[\lambda_1 - \lambda_2]} \left[ \frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} \right] - \\ &\quad - \frac{\frac{bcy(0)}{d}}{p[\lambda_1 - \lambda_2]} \left[ \frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} \right], \\ \bar{y}^* &= \frac{y(0)}{p^{1-\alpha}[\lambda_1 - \lambda_2]} \left[ \frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} \right] - \\ &\quad - \frac{\frac{adx(0)}{b}}{p[\lambda_1 - \lambda_2]} \left[ \frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенствами (1.13), получим выражения для оригиналов функций

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \frac{x(0)}{2} \left[ E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha}) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha}) \right] - \\ &\quad - \frac{y(0)cb}{2d\sqrt{ac} \cdot i} \left[ E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha}) \right], \\ y^*(t) &= \frac{y(0)}{2} \left[ E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha}) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha}) \right] + \\ &\quad + \frac{x(0)ad}{2b\sqrt{ac} \cdot i} \left[ E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha}) \right]. \quad (4.45) \end{aligned}$$

Исследуем линеаризованную систему вблизи точки равновесия в зависимости от параметра дробной производной. Линеаризованная система имеет

единственную точку равновесия в начале координат. Возьмем  $a = 2$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = 2$ ,  $d = 0.5$  и рассмотрим случаи:

1. Если  $\alpha = 1$ , то решение системы эволюционирует циклически, на фазовой плоскости неподвижная точка типа центр. Это означает, что внутривидовой кокуренции нет. Численность популяций испытывает не совпадающие по фазе колебания. (рис. 4.23).
2. Если  $0.7 < \alpha < 1$ , то на фазовой плоскости неподвижная точка типа устойчивый фокус. В этом случае, решения описывают временную динамику численности популяций, когда внутривидовая конкуренция приводит к обеднению среды. При этом количество и хищников, и жертв будет уменьшаться со временем, то есть получим затухающие колебания (рис. 4.24).

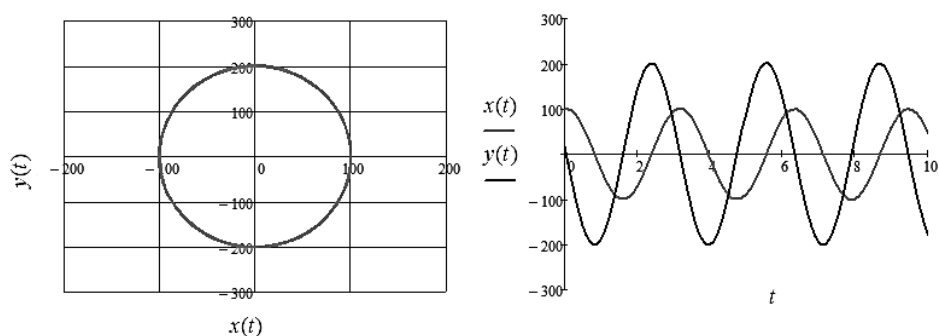


Рис. 4.23. Графики решений и фазовая траектория при  $\alpha = 1$ .

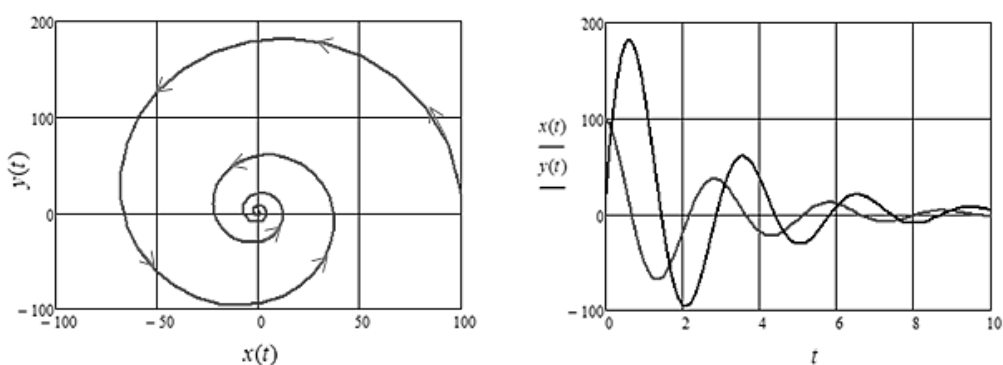


Рис. 4.24. Графики решений и фазовые траектории при  $\alpha = 0.9$ .

3. Если  $0.5 \leq \alpha \leq 0.7$ , то на фазовой плоскости неподвижная точка типа устойчивый узел, то есть вымирание популяции жертв приводит к вымиранию популяции хищников (рис. 4.25).

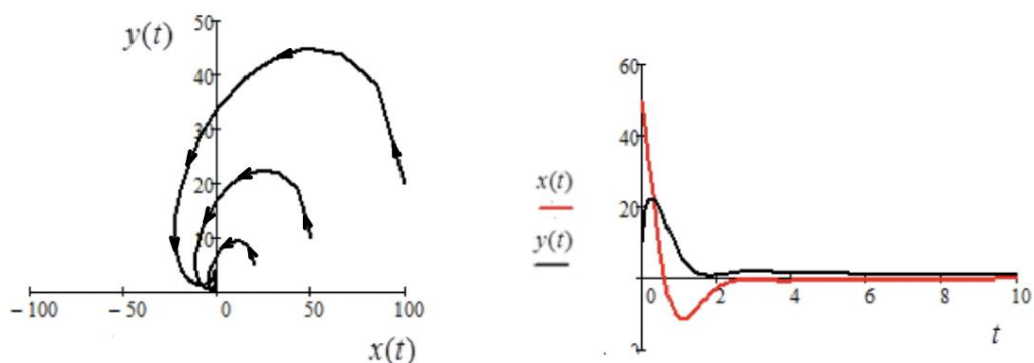


Рис. 4.25. Графики решений и фазовые траектории при  $\alpha = 0.7$ .

При больших отклонениях от положения равновесия линейное приближение становится неприменимым. В этом случае для исследования поведения фазовых траекторий исходной нелинейной системы пользуемся вычислительными алгоритмами на основе численных методов решения задачи Коши для дробного дифференциального уравнения. Численно исследуем поведение фазовых траекторий исходной нелинейной системы при различных значениях параметра дробной производной.

Как мы видим из рис. 4.26, результаты численного исследования поведения фазовых траекторий нелинейной системы соответствуют результатам исследования поведения фазовых траекторий линеаризованной системы при малых отклонениях от положения равновесия.

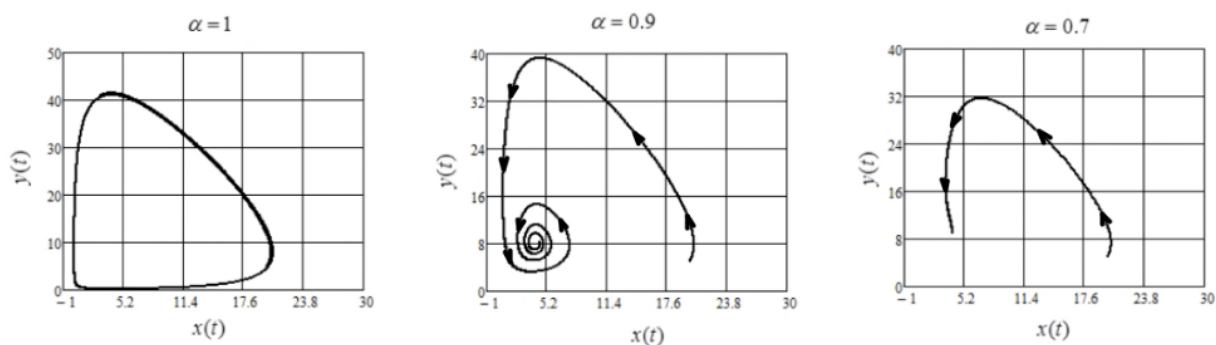


Рис. 4.26. Фазовые траектории при различных значениях параметра дробной производной и  $a = 2$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = 2$ ,  $d = 0.5$ ,  $x_0 = 20$ ,  $y_0 = 5$ .

С целью проверки адекватности решений, проведем вычислительные эксперименты по сравнению полученных решений при  $\alpha = 1$  с решениями из-



вестной модели «хищник-жертва». Проведем сравнительный анализ решений начальной задачи для линеаризованных систем (4.41) и (4.41.1). На рисунке 4.27 приведены фазовые траектории и графики зависимостей  $\xi(t)$  и  $x(t)$  построенные согласно решениям систем (4.41) и (4.41.1). Как мы видим из рисунка, решения систем хорошо согласуются. Точность результатов оценивались с помощью норм:  $\Delta_1 = \|\xi(t) - x(t)\|$ ,  $\Delta_2 = \|\eta(t) - y(t)\|$ .

В случае, когда  $a = 2$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = 2$ ,  $d = 0.5$  получили  $\Delta_1 = 1.195 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta_2 = 2.482 \times 10^{-4}$ .

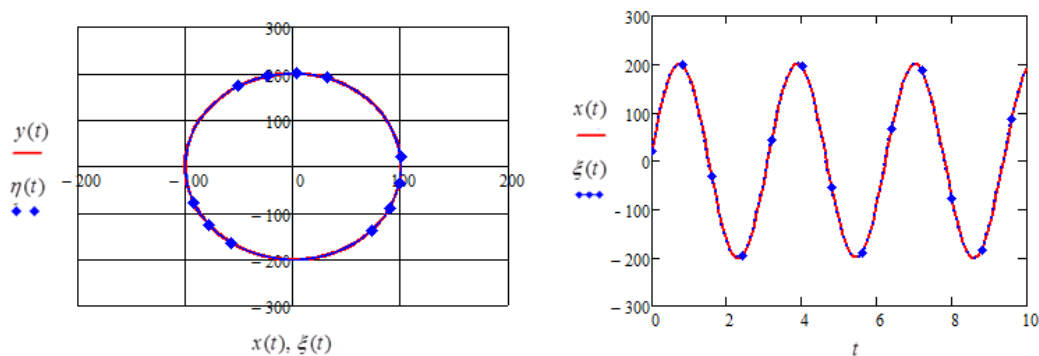


Рис. 4.27. Фазовые траектории и графики зависимостей  $\xi(t)$  и  $x(t)$ , соответствующие решениям систем (4.41), (4.41.1) при  $\alpha = 1$  и  $a = 2$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = 2$ ,  $d = 0.5$ .

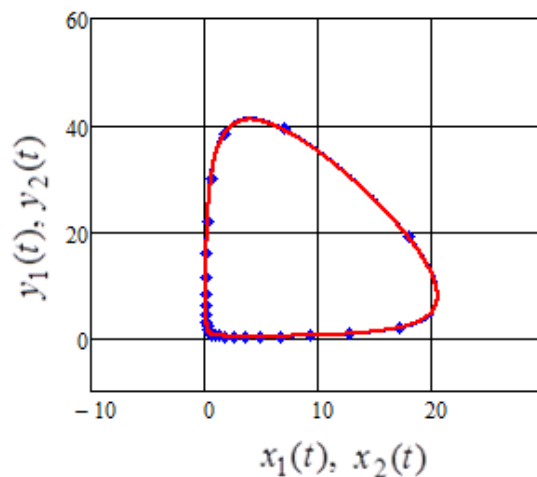


Рис. 4.28. Фазовые траектории, соответствующие решениям систем (4.39), (4.39.1) при  $\alpha = 1$  и  $a = 2$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = 2$ ,  $d = 0.5$ .

Теперь проведем вычислительный эксперимент по сравнению численного решения (4.39) при  $\alpha = 1$  с численным решением системы (4.39.1). На рисунке 4.28 приведены фазовые траектории согласно решениям систем (4.39) и (4.39.1). В этом случае, при значениях параметров  $a = 2$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = 2$ ,  $d = 0.5$ , получили  $\Delta_1 = \|x_1(t) - x_2(t)\| = 0.01$ ,  $\Delta_2 = \|y_1(t) - y_2(t)\| = 0.01$ . Погрешности соответствуют точности вычислительных алгоритмов.

Таким образом, при переходе к дробной производной происходит топологическое изменение фазовой плоскости. При этом параметр дробной производной становится управляющим параметром системы. Следовательно, переход к дробным производным позволяет учитывать необратимые процессы.

### **§ 7. Хаотическое поведение динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка**

Обратимся теперь к явлению, называемому хаосом. Это непредсказуемое поведение динамических систем, напоминающее случайные флуктуации [21]. Рассмотрим динамические системы состояния, которые зависят на определенном промежутке времени  $[t_n, t_{n+1}]$  от некоторого случайного фактора. В качестве величины, учитывающей этот фактор, возьмем показатель дробной производной. Пусть на определенном отрезке времени  $[t_n, t_{n+1}]$  состояние системы зависит от некоторой случайной величины  $\alpha_n$ . Тогда модель такой динамической системы соответствует системе дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_n} x_n(t) = ax_n + by_n, \\ \partial_{0t}^{\alpha_n} y_n(t) = cx_n + dy_n, \\ x(0) = p, y(0) = q, \\ x_n(t_n) = x_{n+1}(t_{n+1}), y_n(t_n) = y_{n+1}(t_{n+1}), n = 1, 2, \dots, N-1, \end{cases} \quad (4.46)$$

где  $0 < \alpha_n \leq 1$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Решение системы (4.46) на каждом частичном отрезке  $[t_n, t_{n+1}]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_n(t) &= \frac{p}{2} \left( E_{\alpha_n,1}(\lambda_1 t^{\alpha_n}) + E_{\alpha_n,1}(\lambda_2 t^{\alpha_n}) \right) + \\
 &\quad + \frac{qb - pd + \gamma p}{2\sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}} \left( E_{\alpha_n,1}(\lambda_1 t^{\alpha_n}) - E_{\alpha_n,1}(\lambda_2 t^{\alpha_n}) \right), \\
 y_n(t) &= \frac{q}{2} \left( E_{\alpha_n,1}(\lambda_1 t^{\alpha_n}) + E_{\alpha_n,1}(\lambda_2 t^{\alpha_n}) \right) + \\
 &\quad + \frac{pb - qd + \gamma q}{2\sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}} \left( E_{\alpha_n,1}(\lambda_1 t^{\alpha_n}) - E_{\alpha_n,1}(\lambda_2 t^{\alpha_n}) \right),
 \end{aligned}$$

где  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $x_n(t_n) = x_{n+1}(t_{n+1})$ ,  $y_n(t_n) = y_{n+1}(t_{n+1})$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

Наряду с задачей (4.46), рассмотрим задачу Коши для системы (4.17) на отрезке  $[0, T]$ .

Решение задачи Коши для системы (4.17) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{x_0}{2} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) \right) + \\
 &\quad + \frac{y_0 b - x_0 d + \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) \right), \\
 y(t) &= \frac{y_0}{2} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) \right) + \\
 &\quad + \frac{x_0 c - y_0 a + \gamma y_0}{2\sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}} \left( E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) \right).
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

На рис. 4.29 приведены графики решения задачи (4.46)  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$  при  $\alpha_n = rnd$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Как видно из рис. 4.29, если в качестве параметра дробной производной на каждом частичном отрезке  $t_n, t_{n+1}$  взять некоторую случайную величину, то можно моделировать хаотическое движение динамической системы. Предложенную модель можно использовать при моделировании хаотических процессов в физических, экономических и др. системах.

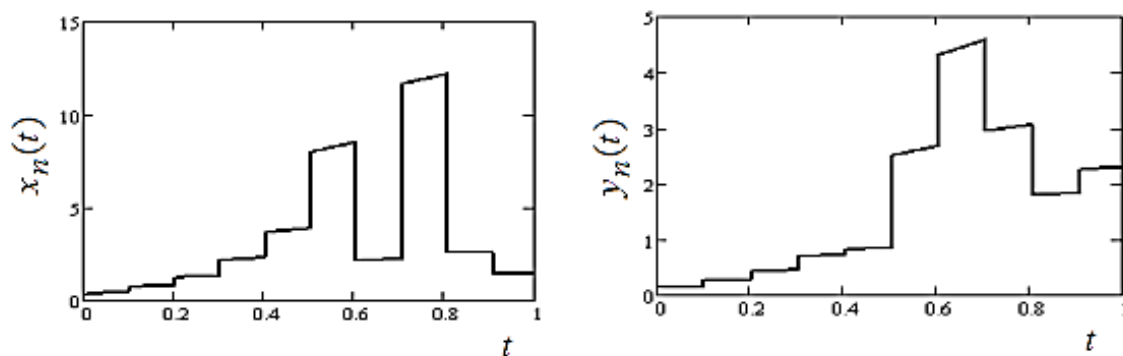


Рис. 4.29. Графики решений задачи (4.46)  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$  при

$$\alpha_n = rnd, n = 1, 2, \dots, N$$

## § 8. Фрактальные характеристики микроструктуры газоразрядных каналов и динамика электронов в них

Наглядный пример ветвящейся структуры представляют собой многие типы электрических разрядов, такие, как грозовые (молниевые), поверхностные, искровые, импульсные стримерные короны и др.

В последнее время получены новые экспериментальные данные по микроструктуре газоразрядных каналов [204; 205]. Так, при исследовании искрового разряда в воздухе атмосферного давления в промежутке острие–плоскость методом теневого фотографирования было обнаружено, что на начальной стадии разряд развивается в форме микроканальной структуры – пучка большого количества каналов микронного диаметра [204]. Динамика структуры на временах от единиц до десятков наносекунд включает развитие микроканалов от острия вглубь разрядного промежутка их ветвление и радиальное расширение. При этом на фотографиях собственного свечения разряда микроканальная структура была неразрешима [204].

Микроканальная структура разряда находит отражение и в характере его автографов – отпечатков канала на поверхности плоского электрода. Установлено, что автографы представляют собой скопление большого количества микрократеров, а микроструктура автографов носит фрактальный характер

[205]. Обнаружено также, что разряды, развивающиеся в режиме микроструктурирования токовых каналов, в ряде случаев сопровождаются генерацией потоков высокоэнергичных электронов и рентгеновского излучения [141; 191].

Таким образом, наличие динамической ветвящейся фрактальной структуры требует учета ее влияния на протекающие газоразрядные процессы. Поскольку математическое описание процессов во фрактальных структурах обладает рядом специфических особенностей, становится весьма актуальным развитие соответствующих подходов при расчетно-теоретическом моделировании газовых разрядов.

Для решения поставленной задачи плодотворным может оказаться подход с использованием математического аппарата дробного интегрирования [89; 111]. Попытки описания динамики переноса электронов в ветвящихся системах газоразрядных каналов с использованием дифференциальных уравнений дробного порядка были предприняты в работах [112; 113; 127].

В этом параграфе приводим краткий обзор экспериментальных данных по микроструктуре разрядов из различных источников и численное исследование динамики процессов переноса электронов во фрактальных микроканальных структурах на основе дробно-дифференциальной модели.

### **8.1. Экспериментальные результаты и их обсуждение**

Подробно проведенный эксперимент теневого фотографирования и методика проведения эксперимента описаны в [204]. В общем эксперименты заключались в следующем. На разрядный промежуток с генератора импульсов напряжения, используя кабельную линию, подавался импульс напряжения, который имеет амплитуду 25 кВ и длительность фронта по уровню 0,1–0,9 около 7 нс. Электродная система имела геометрию «острие–плоскость». Использовались различные острийные электроды, отличающиеся формой поверхности и материалом [5]. Радиус кривизны электродов составлял от 0,1 мм до 0,2

мм. Межэлектродный зазор составлял 1,5 мм. В качестве плоского электрода использовалась пластина из меди толщиной 2 мм и размером  $65 \times 20$  мм<sup>2</sup>.

После пробоя промежутка в разрядной цепи возникал колебательный процесс с экспоненциальным затуханием тока и напряжения. Длительность полуволны составляла 0,5 мкс, амплитуда тока и время его затухания соответственно – 1,5 кА и 2 мкс [204]. За момент пробоя условно был принят момент начала роста тока и соответственно спада напряжения [5].

Теневая съемка разряда осуществлялась в однокадровом режиме с помощью цифрового электронно-оптического регистратора. Экспозиция кадра определялась длительностью импульса зондирующего излучения. В качестве источника зондирующего излучения использовался твердотельный лазер с длиной волны 532 нм и длительностью импульса на полувысоте 5 нс. Разрешающая способность оптической системы регистрации – не хуже 5 мкм. Сдвигом момента запуска лазера и оптической системы регистрации относительно момента пробоя обеспечивалась визуализация различных стадий разрядного процесса [5]. На рис. 4.30 представлена интегральная фотография свечения разряда.

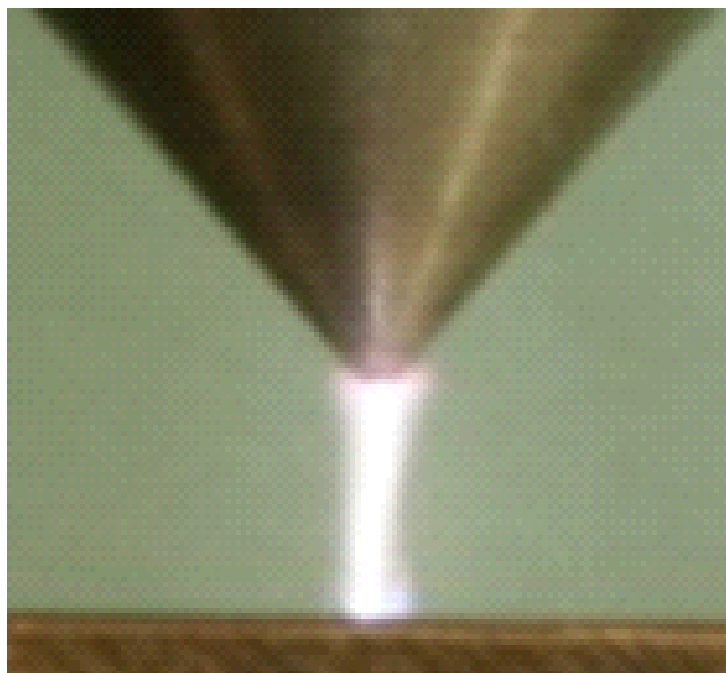


Рис. 4.30. Интегральная фотография свечения разряда

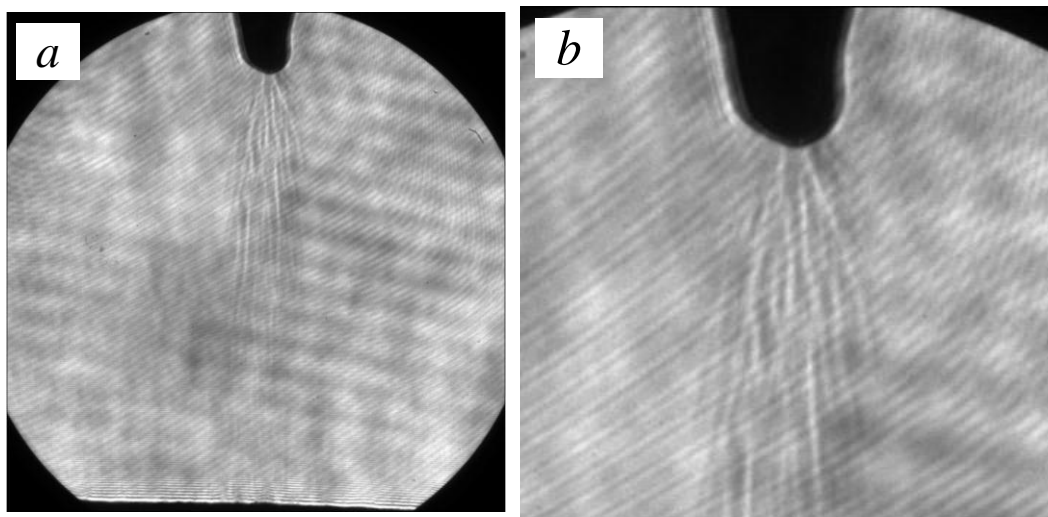


Рис. 4.31. Тенеграмма разряда, зарегистрированная на пятой наносекунде после пробоя для острейного электрода с радиусом кривизны 0.1 mm (сверху): *a* – весь разрядный промежуток, *b* – его увеличенная область вблизи острия

Кадры теневой съемки свидетельствуют, что разряд развивается в микроканальной форме и представляет собой пучок большого числа микроканалов. Динамика разряда на временах от единиц до десятков наносекунд включает развитие микроканалов от острия вглубь разрядного промежутка, ветвление, расширение микроканалов, формирование общего фронта ударной волны искры и его движение [204]. На рис. 4.31*a* представлена тенеграмма разряда, зарегистрированная на пятой наносекунде после пробоя, а на рис. 4.31*b* – его увеличенная область вблизи острия, иллюстрирующая зону ветвления микроканалов.

Описанная выше картина развития разряда наблюдалась при всех указанных выше острийных электродах.

На поверхности плоского электрода автограф разряда в каждом импульсе представляет собой совокупность большого числа микрократеров [204; 205]. Для исследования характера пространственной структуры таких автографов были построены зависимости числа ячеек  $N(\delta)$ , необходимых для покрытия множества микрократеров, от размера  $\delta$  ячейки. Если данная зависи-

мость в двойном логарифмическом масштабе линейна, то структура носит самоподобный характер, а ее фрактальная размерность равна угловому коэффициенту [197]. На рис. 4.32 представлены результаты построения указанной зависимости для автографов, полученных в разных импульсах. Видно, что зависимости подчиняются линейному закону, а фрактальные размерности лежат в диапазоне 1,4–1,7. Таким образом, микроструктура автографа разряда носит фрактальный характер и топологически соответствует двумерному множеству Кантора [197; 205].

Необходимо отметить, что подобные автографы обнаружены и в ряде других работ, посвященных исследованиям различных типов импульсных разрядов: искровой разряд в однородном промежутке, бесстримерный разряд, многоканальный разряд в геометрии проволока-плоскость, диффузный разряд в геометрии острие–плоскость [141; 169; 191; 206].

Следует отметить, что как на интегральных фотографиях, так и на кадрах скоростной фотосъемки в отсутствие зондирующего излучения внутренняя микроструктура разряда была неразрешима [204; 141; 169; 191; 206]. Полученные результаты могут свидетельствовать о наличии микроканальной структуры и в других типах газовых разрядов, внешне выглядящих бесструктурными [141; 169; 191; 206].

В ряде перечисленных исследований были зарегистрированы рентгеновское излучение и высокоэнергичные электроны, генерируемые в разрядах [141; 191]. Для объяснения ускорения (убегания) электронов была предложена модель [141; 170], согласно которой протекание тока проводимости вызывает нагрев и радиальное расширение микроканалов. В результате этого концентрация газа и соответственно частота столкновений электронов с нейтралами существенно уменьшаются, что обеспечивает условия для генерации потоков высокоэнергичных электронов и сопутствующего тормозного рентгеновского излучения.



В отличие от сильно перенапряженных разрядов [132; 202] предложенный механизм позволяет объяснить генерацию высокоэнергичных электронов и РИ в условиях, когда приведенная напряженность поля (отношение напряженности электрического поля к концентрации газа) в разрядном промежутке существенно меньше критической, необходимой для убегания.

## 8.2. Описание движения электронов в динамической фрактальной структуре ветвящихся каналов

В работе [114] Тренкиным А.А. и Рагимхановым Г.Б. (соавторами) предложена модель движения электронов в сформировавшейся в разрядном промежутке структуре ветвящихся газоразрядных каналов (рис. 4.33). В плоскости, перпендикулярной вектору электрического поля  $E$ , фрактальное множество каналов является несвязным, при этом электроны  $e$  перемещаются по каналам, оставаясь в пределах своей компоненты связности. В этом случае часть состояний в пространстве, в которое вложен фрактальный объект, оказывается исключенной для движения.

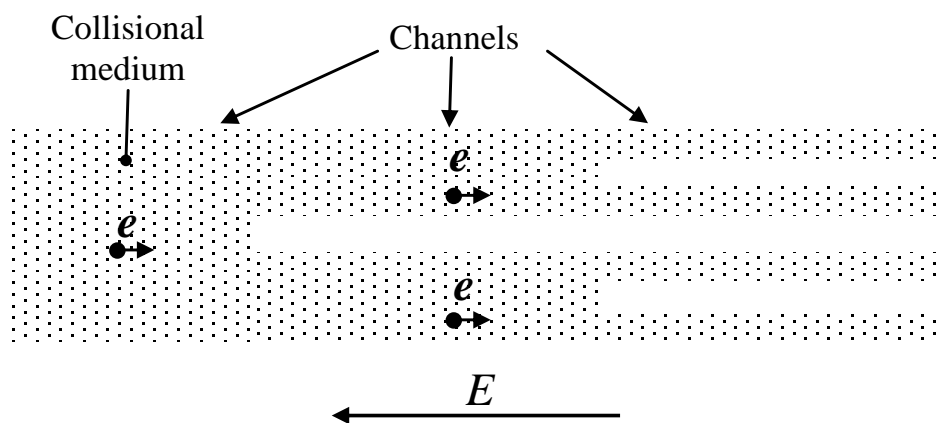


Рис. 4.33. Модель движения электронов в структуре ветвящихся каналов

В работе [114] авторами показано, что при радиальном расширении каналов концентрация газа и соответственно эффективная частота столкновений электронов, снижаются. Для описания движения электронов в этом случае

Тренкиным А.А. и Рагимхановым Г.Б. (соавторами), было предложено следующее дифференциальное уравнение дробного порядка с переменной частотой столкновений электронов [114]:

$$\frac{m}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} v(t) = eE - m\nu_m(t) \cdot v(t), \quad (4.48)$$

где  $\partial_{0t}^{\alpha} v(t)$  – дробная производная Капуто (1.28),  $0 < \alpha < 1$ ,  $\tau$  – характерное время процесса,  $t$  – безразмерное (отнесенное к  $\tau$ ) время,  $\alpha$  – доля разрешенных состояний, которая соответствует фрактальной размерности одномерного канторовского множества,  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона,  $\nu_m$  – его эффективная частота столкновений,  $v(t)$  – скорость движения электрона во фрактальной среде. При дальнейшем рассмотрении в качестве характерного масштаба времени  $\tau$  будем использовать время свободного пробега электрона в воздухе атмосферного давления.

В этом параграфе проведем анализ движения электронов в структуре ветвящихся каналов на основе численного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производной дробного порядка (4.48).

Следует отметить, что в случае  $\nu_m = const$  и  $\alpha = 1$  уравнение (4.48) переходит в обычное уравнение, описывающее движение электрона с дрейфовой скоростью  $V_{dr}$ :

$$V_{dr} = \frac{qE}{m\nu_m}.$$

При уменьшении  $\alpha$  значение дрейфовой скорости электрона снижается, что, по-видимому, можно трактовать как рост диссипативного эффекта в точках ветвления фрактальной структуры [111].

Эффективная частота столкновений будет иметь зависимость, обратную площади сечения каналов или, что то же самое, квадрату их радиуса. Относительно зависимости радиуса канала от времени  $R(t)$  в процессе расширения

следует отметить следующее. Экспериментальные данные свидетельствуют об ударном режиме расширения искровых каналов и микроканалов, по крайней мере, на начальной фазе [45; 204]. Случаю классического автомодельного решения для сильного взрыва в цилиндрической симметрии соответствует зависимость [204]

$$R(t) \propto t^{\frac{1}{2}}.$$

Однако ввиду отсутствия универсальных закономерностей расширения каналов, особенно с учетом растянутого во времени энерговыделения [45; 141], представляет интерес исследование динамику переноса электронов в более общем виде, когда

$$R(t) \propto t^{\frac{\gamma}{2}}.$$

В этом случае

$$\nu_m(t) = \nu_0 t^{-\gamma},$$

где  $\nu_0$  – частота столкновений в случае отсутствия расширения каналов, при этом  $\nu_0 = \tau - 1$ . Переходя к безразмерной скорости

$$V = \frac{v}{v_{dr}},$$

уравнение (4.48) запишется в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha} V(t) = t^{-\gamma} V(t) + 1, \quad (4.49)$$

с начальным условием:

$$V(1) = 1.$$

Уравнение (4.49) описывает движение электронов в ветвящейся канальной системе под действием постоянной силы с учетом трения столкновительной среды и расширения каналов.

Поскольку аналитическое решение уравнения (4.49) в случае  $\alpha \neq \gamma$  найти не удалось, для ряда значений  $\alpha$  и  $\gamma$  в области  $D = [1, T]$  построим численное решение задачи Коши для дифференциального уравнения с дробным производным Капуто (4.49).

Пусть функция  $f(t, V)$  непрерывна по всем аргументам в замкнутой области  $D$ . Следовательно, существует константа  $M = \text{const} > 0$ , что во всей области  $D$  имеют место неравенства  $f(t, V) < M$ .

В области  $D$  для функции  $f(t, V)$  выполняется условие Липшица по аргументу  $V$ , т. е.

$$\begin{aligned} |f(t, V_1) - f(t, V_2)| &= |-t^{-\gamma}V_1 + 1 - (-t^{-\gamma}V_2 + 1)| = |t^{-\gamma}V_2 - t^{-\gamma}V_1| \leq \\ &\leq |t^{-\gamma}| |V_2 - V_1| \leq |V_2 - V_1|. \end{aligned} \quad (4.50)$$

При выполнении условия (4.50) задача (4.49) имеет единственное решение  $V = V(t)$ .

Для построения численного решения задачи (4.51) в области  $D$  введем по переменной  $t$  равномерную сетку с шагом  $\tau > 0$ :  $\omega_\tau = \{t_n = 1 + n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Обозначим через  $V(t_n)$  точное решение задачи (4.48), а через  $y = y(t_n)$  – приближенное решение в точке  $t = t_n$ .

Воспользовавшись аппроксимацией дробной производной (2.18), уравнение (4.51) заменим следующим разностным уравнением:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) - f(t_n, y_n) = 0, \quad (4.51)$$

$$y_0 = u_0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда численное решение задачи (4.49) можно найти по явным рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} y_0 &= u_0, y_1 = y_0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha f(t_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n - \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha f(t_n, y_n). \end{aligned} \quad (4.52)$$

На рис. 4.34 представлена зависимость скорости электронов от расстояния для  $V(t_n)$ ,  $\alpha = 0.7$  при различных значениях параметра  $\gamma$ , полученная по рекуррентным формулам (4.50).

Значение безразмерного параметра  $t = 10^3$  соответствует пройденному пути порядка сантиметра в воздухе атмосферного давления при уровне электрических полей десятки  $kB/cm$ . Такие условия характерны для лабораторных разрядов. При этом, важно отметить, что на рассматриваемых длинах, если параметр дробной производной больше  $\gamma > 2$ , график решения практически перестает зависеть от  $\gamma$ . В этом случае из-за того, что происходит быстрое расширение каналов, электроны будут двигаться без столкновений.

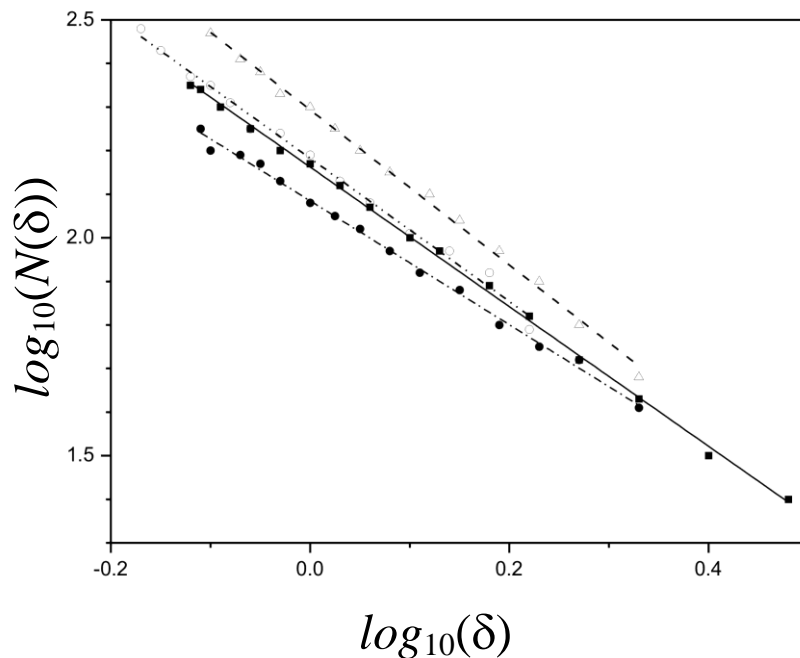


Рис. 4.32. Зависимость числа ячеек  $N(\delta)$ , необходимых для покрытия множества микрократеров на поверхности плоского электрода, от размера ячейки  $\delta$  для разных импульсов: символы – вычисленные значения, линии – интерполяция по методу наименьших квадратов

Таким образом, в зависимости от режима расширения каналов соответствующее снижение эффективной частоты столкновений электронов частично или полностью компенсирует воздействие силы трения.

На рисунке 4.35 представлены графики зависимостей скорости электронов от расстояния при различных значениях параметра фрактальной размерности  $\alpha$ , которые показывают на диссипативное влияние фрактальной структуры. Как мы видим из рисунка 4.35, с уменьшением параметра фрактальной размерности  $\alpha$  происходит возрастание диссипативного влияния фрактальной структуры.

Следует отметить, что несколько иной подход к определению закона уменьшения эффективной частоты столкновений электронов, был предложен в [113], где были получены близкие по смыслу результаты.

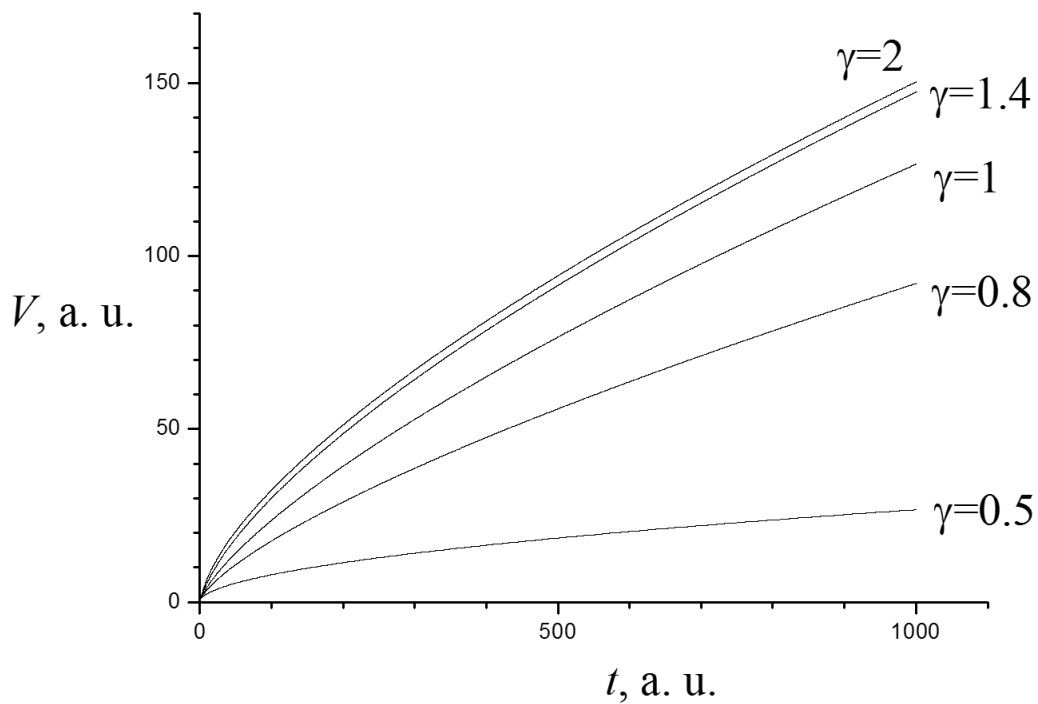


Рис. 4.34. Зависимость скорости электронов от расстояния для различных  $\gamma$  ( $\alpha = 0,7$ )

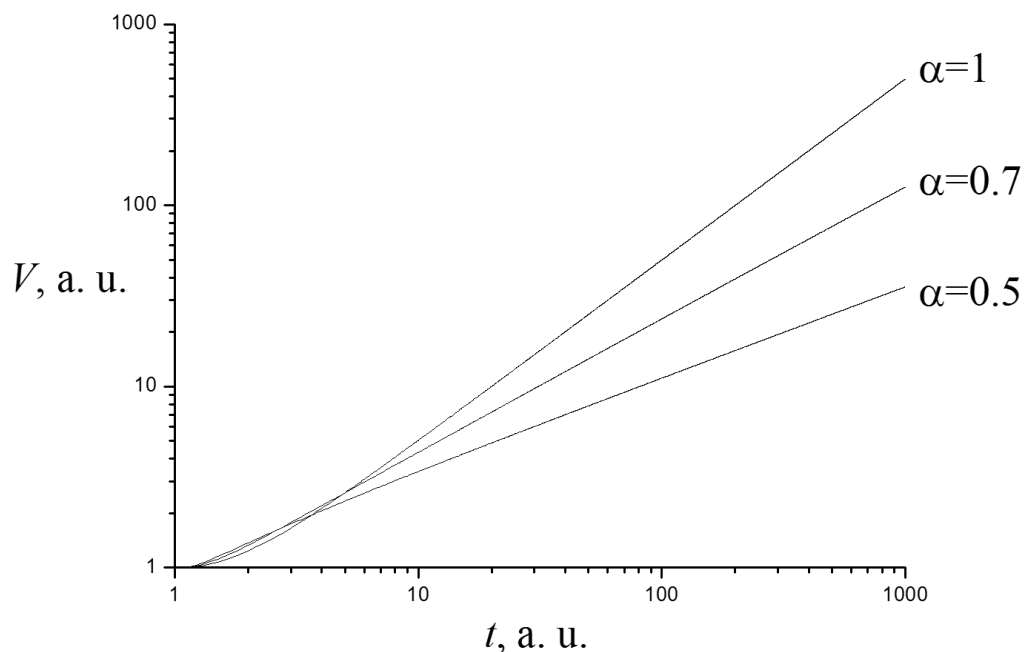


Рис. 4.35. Зависимость скорости электронов от расстояния для различных  $\alpha$  ( $\gamma=1$ )

### Выводы

Представлен краткий обзор результатов экспериментальных исследований микроструктуры искрового разряда в воздухе атмосферного давления в промежутке острие–плоскость.

В работах [5;170] методом теневого фотографирования установлено, что канал разряда представляет собой совокупность большого количества микроканалов. Зарегистрирована динамика микроструктуры канала разряда на временах от единиц до десятков наносекунд, включающая развитие микроканалов от острия вглубь разрядного промежутка, ветвление, расширение микроканалов, формирование общего фронта ударной волны искры и его движение. Установлено, что микроструктура автографов разряда носит фрактальный характер и определены значения ее фрактальной размерности.

Численно исследованы процессы движения электронов в ветвящихся фрактальных столкновительных структурах расширяющихся каналов. Постро-

ен алгоритм численного решения задачи Коши для уравнения (15). Проведен вычислительный эксперимент по анализу полученных численных решений. Построены графики зависимостей скорости электронов от расстояния при различных значениях параметра дробной производной.

На основе проведенного вычислительного эксперимента в работе [114] показано, что решения соответствуют обобщенному режиму движения электронов, описывающий переход от дрейфового движения к ускоренному. Эффект роста скорости электронов реализуется за счет снижения их эффективной частоты столкновений в результате расширения каналов.

Установлено, что с ростом фрактальной размерности и степенного показателя, характеризующего быстроту расширения каналов, скорость электронов возрастает.



## Глава V. Исследование процессов теплопроводности во фрактальных и пористых средах

Широкий класс математических моделей различных нелокальных физических процессов описывается дифференциальными уравнениями в частных производных дробного порядка, которые для случая двух аргументов имеют вид:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = C(x,t) \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta} + f(x,t), \quad (5.1)$$

где  $C(x,t) \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$ .

При разработке математических моделей подобные уравнения дополняются соответствующими начальными и краевыми условиями. Соответственно решением уравнения (5.1) будет функция двух переменных – это время  $t$  и пространственная переменная  $x$ . Уравнение (5.1) при соответствующих начальных и краевых условиях является математической моделью двумерной динамической системы. В вид уравнения (5.1) входят нелокальное уравнение теплопроводности ( $0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2$ ) и нелокальное волновое уравнение ( $1 < \alpha \leq 2, 1 < \beta \leq 2$ ).

В работе [99] авторы исследовали модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в полупроводниковом слое с фрактальной структурой под действием продольного переменного электрического поля, описываемая дифференциальным уравнением с частной дробной производной. В работе [99] авторы показали, что в слоях с фрактальной структурой имеют место уширение и асимметрия пространственно-временных распределений носителей заряда и установили, что при определенных условиях наблюдается эффект удвоения частоты осцилляций заряда во внешнем переменном электрическом поле.

В этой главе проведем исследование нестационарных процессов теплопроводности, включающие эффекты памяти через производную дробного порядка.

## **§ 1. Исследование нелокальных процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с производной дробного порядка по времени**

Задача Стефана описывает явления тепломассопереноса в средах с фазовым переходом, сопровождающимся выделением или поглощением тепла. Большой прикладной интерес представляет обобщение задачи Стефана для сред, в которых не выполняется принцип локального равновесия, что приводит к необходимости учета особенностей теплопереноса на межфазной границе с учетом нелокальных эффектов по времени (эффект памяти) [6; 75; 179] и по пространству (эффект пространственных корреляций) [75; 179]. Одно из направлений обобщения неравновесной термодинамики связано с развитием концепции фрактала. Процессы переноса тепла в этом случае могут быть описаны на основе дифференциальных уравнений в производных дробного порядка [13]. В этом параграфе проведем сравнительный анализ пространственно – временных полей, получающихся при варьировании дробного параметра  $\alpha$  для производной по времени (производная Капуто). В дальнейшем сопоставление с экспериментальными результатами позволит определить данный коэффициент для различных грунтов [31;36].

### **1.1. Математическая постановка задачи**

Влажная фрактальная структура находится с некоторой постоянной температурой  $T_0$  в талом состоянии. Внезапно в начальный момент времени на поверхности устанавливается температура  $T_c$ , которая ниже температуры замерзания  $T_3$ . При этом с некоторой переменной толщиной  $\xi = f(t)$  образуется промерзший слой. Нижняя подвижная граница имеет всегда температуру замерзания  $T_3$ , а на границе происходит фазовый переход, на что требуется теплота фазового перехода  $Q_f$ . При этом верхняя граница талой зоны имеет по-

стоянную температуру замерзания, а нижняя—температуру грунта на большой глубине.

В качестве математической модели процесса промерзания во фрактальных структурах рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha} T_1(x,t) &= D_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), t > 0, \\ \partial_{0t}^{\alpha} T_2(x,t) &= D_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < L, t > 0, \\ T(x,0) &= T_0, \\ T(0,t) &= T_c, \quad \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = 0, t > 0, \\ x = \xi(t) : &\begin{cases} T_1 = T_2 = T_3, \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = Q_f \partial_{0t}^{\alpha} \xi(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\rho$  – плотность грунта,  $t = \tau / \tau_0$ ,  $x = \xi / \xi_0$  – безразмерные время и координата,  $\tau_0, \xi_0$  – характерные время и масштаб,  $D_{1(2)} = a_{1(2)} t_0 / x_0^2$  – безразмерный коэффициент температуропроводности,  $a_{1(2)} = \lambda_{1(2)} / c_{1(2)} \rho_{1(2)}$  – коэффициент температуропроводности,  $Q$  – количество тепла, выделяемое или поглощаемое в процессе таяния льда или замерзания воды, постоянные температуры  $T_c < T_3 < T_0$ ,  $\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t)$  – частная дробная производная Капуто (2.18).

Как известно, при поиске аналитических решений дробных дифференциальных уравнений возникают большие трудности. Поэтому в настоящее время при решении дробных дифференциальных уравнений применяют как аналитические, так и численные методы.

Унифицированным методом приближенного решения дифференциальных уравнений, применимым для широкого класса уравнений математической физики, является метод конечных разностей (или метод сеток).

## 1.2. Численное исследование математической модели

Для решения задачи (5.2), (5.3) методом сеток вводим равномерную сетку по пространственной переменной

$$x_m = mh, m = 0, 1, \dots, M, h = \frac{L}{N}$$

и неравномерную сетку по времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, n = 0, 1, \dots, N-1, t_0 = 0, t_N = t_{\text{кон}}, \tau_{n+1} > 0.$$

Для дробной производной Капуто имеет место аппроксимация (2.4)

$$\partial_{0t}^{\alpha} T(x_m, t_n) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_n} \sum_{k=0}^n (T_{1,m}^{k+1} - T_{1,m}^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + O(\tau), \quad (5.4)$$

а для производной  $\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$  имеет место аппроксимация

$$\frac{\partial^2 T(x_m, t_n)}{\partial x^2} = \frac{T_{m+1}^{n+1} - 2T_m^{n+1} + T_{m-1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2). \quad (5.5)$$

Шаг по времени  $\tau_{n+1}, n = 0, 1, \dots, N-1$  нужно выбрать таким образом, чтобы за этот временной промежуток (от  $t_n$  до  $t_{n+1}$ ) граница фазового перехода сдвинулась ровно на один шаг пространственной сетки. Тогда, воспользовавшись разностной аппроксимацией дробной производной (5.4), можно записать

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha} \xi(t) &\approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_{n+1}} \sum_{k=0}^n (\xi_{k+1} - \xi_k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) \approx \\ &\approx \frac{h}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_{n+1}} \sum_{k=0}^n (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) = \frac{h \cdot t_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_{n+1}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Воспользовавшись (5.4, 5.5), получим следующую разностную схему:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_n} \sum_{k=0}^n \left( T_{1,m}^{k+1} - T_{1,m}^k \right) \left( t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha} \right) = \frac{D_1}{h^2} \left( T_{1,m+1}^{n+1} - 2T_{1,m}^{n+1} + T_{1,m-1}^{n+1} \right), \quad (5.7)$$

$$m = 1, 2, \dots, m^* - 1, T_1|_{m=1} = T_c, T_1|_{m=m^*} = T_3,$$

где  $m = m^*$  – граница фазового перехода.

Тогда разностная схема второй части уравнения будет иметь вид:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_n} \sum_{k=0}^n \left( T_{2,m}^{k+1} - T_{2,m}^k \right) \left( t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha} \right) = \frac{D_2}{h^2} \left( T_{2,m+1}^{n+1} - 2T_{2,m}^{n+1} + T_{2,m-1}^{n+1} \right), \quad (5.8)$$

Проведем дискретизацию граничного условия в случае  $x = \xi(t)$

$$\lambda_1 \frac{T_{1,m^*} - T_{1,m^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,m^*+1} - T_{2,m^*}}{h} = Q_f \frac{h \cdot t_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_{n+1}},$$

т. е.

$$\lambda_1 \frac{T_3 - T_{1,m^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,m^*+1} - T_3}{h} = Q_f \frac{h \cdot t_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_{n+1}}.$$

Таким образом,

$$\tau_{n+1} = \frac{Q_f h^2 \cdot t_n^{1-\alpha}}{(\lambda_1 (T_3 - T_{m^*-1}) - \lambda_2 (T_{2,m^*+1} - T_3)) \cdot \Gamma(2-\alpha)}. \quad (5.9)$$

Шаг по времени зависит от температуры. Поэтому поле температуры можно определить методом простой итерации.

Результаты и их обсуждение. Для анализа полученного решения нами были выбраны начальные условия, типичные для зимнего промерзания, и взяты табличные теплофизические характеристики: глубина грунта  $L = 0,3$  м; теплофизические характеристики промерзшей зоны грунта:  $\lambda_1 = 2,7 \frac{Вт}{м \cdot К}$ ,

$\rho_1 = 917 кг / м^3$ ,  $a_1 = 2090 Дж / (кг \cdot К)$ ; теплофизические характеристики

талой зоны грунта:  $\lambda_2 = 0,6 \frac{Вт}{м \cdot К}$ ,  $\rho_2 = 1000 кг / м^3$ ,  $a_2 = 4220 Дж / (кг \cdot К)$   
; характерные температуры:  $T_0 = 293К$ ,  $T_3 = 273К$ ,  $T_c = 268К$ , теплота фазового перехода  $Q_\phi = 3,32 \cdot 10^5 Дж / кг$ , влажность грунта  $w = 1 кг / кг$ .

На рис. 5.1 приведены графики численного решения задачи при различных значениях параметра  $\alpha$  в произвольно выбранный момент времени  $t = 130\,000$  с. Как видно из рис. 5.1, в точке замерзания ( $0\text{ }^\circ\text{C}$ ) температурная зависимость претерпевает излом, причем с уменьшением показателя дробной производной точка замерзания лежит ближе к поверхности.

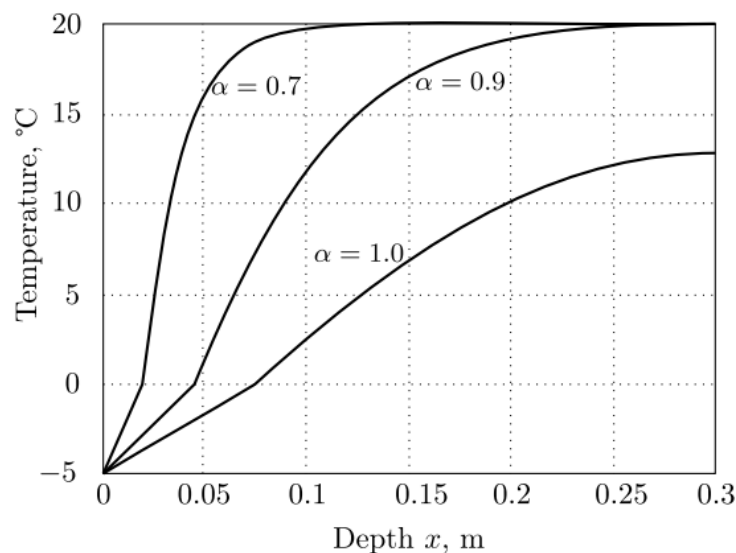


Рис. 5.1. Графики численного решения задачи (1), (2) при различных значениях параметра  $\alpha$  в момент времени  $t = 130\,000$  с

На рис. 5.2 и 5.3 приведены графики зависимости температуры от времени на глубинах  $0,0015$  м и  $0,075$  м при различных значениях параметра дробной производной. Как видно из рисунков, промерзание на глубине  $0,0015$  м происходит практически сразу, в то же время на глубине  $0,075$  м при любом значении  $\alpha$  температура достаточно долго держится выше точки замерзания. В обоих случаях даже незначительное уменьшение  $\alpha$  приводит к существенному замедлению скорости охлаждения, что характерно для сред с фрактальной структурой [75]. В таблице приведены моменты времени, соответствующие

щие фазовым переходам, для различных координат при значениях параметра  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0.9$ . Данные для  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0.9$  соответствуют функциональной зависимости  $\xi(t) \approx 0.00015 \cdot t^{1/2}$  и  $\xi(t) \approx 0.0002 \cdot t^{0.45}$  соответственно. Таким образом, фазовую границу можно задать функциональной зависимостью  $\xi(t) \approx \sigma(\alpha) \cdot t^{\alpha/2}$ , где  $0 < \alpha \leq 1$ .

	$x, \text{ м}$	0,0015	0,0030	0,0045	0,0060
$\alpha = 1$	$t, \text{ с}$	93	296	606	1023
$\alpha = 0.9$	$t, \text{ с}$	154	545	1190	2105

Для скорости движения межфазной границы, согласно обобщенному условию Стефана, имеем следующее выражение:

$$V_{\Gamma} = \partial_{0t}^{\alpha} \xi(t) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\xi'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds = \frac{\sigma(\alpha) \cdot \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot t^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, скорость движения фазовой границы является функцией зависящей от времени и параметра производной дробного порядка. Фазовая скорость  $V_{\Gamma} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

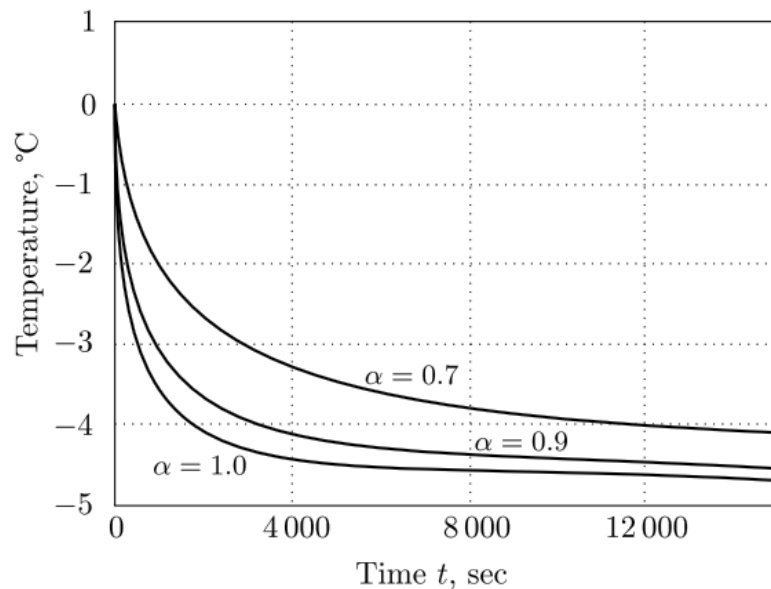


Рис. 5.2. Графики зависимости температуры от времени на глубине 0.0015 м в различные моменты времени и при различных значениях параметра  $\alpha$  и  $T_c = -$

5 °C

## Выводы

В этом параграфе на основе классической модели Стефана построена математическая модель процессов промерзания с учетом особенностей теплопереноса на межфазовой границе, учитывающая эффекты памяти и фрактальность среды. Разработан алгоритм и создана программа численного решения задачи Стефана с оператором дробного дифференцирования. Оценены функциональные зависимости движения межфазной границы для обобщенного условия Стефана в зависимости от значения дробного параметра  $\alpha$ . Установлено, что переход к дробным производным позволяет описать замедление процесса промерзания грунта относительно классического решения.

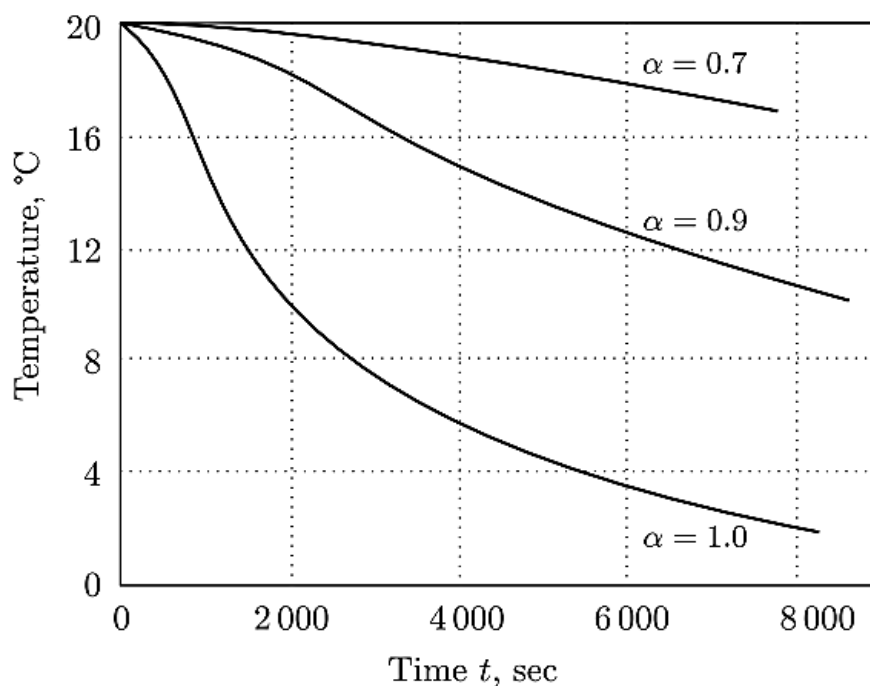


Рис. 5.3. Графики зависимости температуры от времени на глубине 0.075 м при различных значениях параметра  $\alpha$  и  $T_c = -5$  °C

## § 2. Численное исследование нелокальных процессов неизотермической фильтрации во фрактальных средах с памятью

Фундаментальные вопросы, связанные с исследованиями движения жидкости в пористых средах, актуальны на сегодняшний день, что подтвер-



ждают многочисленные исследования в этой области [3; 11; 12; 41; 66; 76; 187]. Как указано в работах [11; 12; 76; 187], особенности многофазных пористых структур приводят к сложной природе явлений тепломассопереноса, для которых характерны нелокальные эффекты памяти, сильных пространственных корреляций и самоорганизации.

Для нелинейного закона Дарси имеет место следующее уравнение

$$v = -\frac{\kappa}{\mu} \text{grad}P + F(v, P, T, \varepsilon),$$

где  $v$  – скорость фильтрации,  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $\varepsilon$  – параметр, характеризующий свойства флюида и пласта,  $F(v, P, T, \varepsilon)$  – некоторая нелинейная функция, зависящая от этих параметров. В известных монографиях [3; 41; 66] приведены конкретные уравнения нелинейного закона Дарси. В монографии [3] приведены решения конкретных задач неизотермической фильтрации, установлена пороговая связь между скоростью фильтрации и градиентом давления. Как отмечено в работе [76], закон Дарси имеет более сложную природу, выходящую и за рамки нелинейной фильтрации.

Как указано в [11], при разработке математических моделей процессов переноса в сложных системах нельзя использовать традиционные методы. В этом случае актуальными являются модели, описываемые дробными дифференциальными уравнениями. При этом параметр дробной производной позволяет учитывать нелокальности по времени (эффект памяти), по координате (пространственные корреляции), приводящие к проявлению процессов самоорганизации [11; 12; 76; 187].

В качестве математической модели неизотермической фильтрации во фрактальных средах в работах [34;138] исследована следующая задача.

**Задача.** В области  $D = \{(r, t) : 0 < r < L, t > 0\}$  найти решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений неизотермической фильтрации с дробной производной по времени

$$\partial_{0t}^{\alpha} P(r,t) - \frac{\partial}{\partial r} \left( D_P(P,T) \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \right) = \beta \cdot \partial_{0t}^{\alpha} T(r,t), \quad (5.10)$$

$$\partial_{0t}^{\alpha} T(r,t) - \frac{\partial}{\partial r} \left( D_T(P,T) \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) = \gamma \cdot \partial_{0t}^{\alpha} P(r,t), \quad (5.11)$$

$$P(x,0) = P_0, \quad T(x,0) = T_0, \quad (5.12)$$

$$P(0,t) = P^*, \quad \left. \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \right|_{r=L} = 0, \quad (5.13)$$

$$T(0,t) = T^*, \quad \lambda_{\text{пл}} \left. \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right|_{r=L} = \lambda_{2p} \left. \frac{\partial T_{2p}(r,t)}{\partial r} \right|_{r=L}, \quad (5.14)$$

где  $\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t)$  – производная Капуто (1.28),  $0 < \alpha < 1$ ,  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $D_P(P,T) > 0$  и  $D_T(P,T) > 0$  – заданные функции, зависящие от давления и температуры,  $\gamma$  – коэффициент изотермической сжимаемости,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $r$  – радиальная координата,  $\lambda_{\text{пл}}$  – коэффициент теплопроводности пласта,  $\lambda_{2p}$  – коэффициент теплопроводности внешнего пласта,  $P_0, T_0$  – начальное давление и температура,  $P^*, T^*$  – давление и температура на границе области.

## 2.1. Численный метод решения краевой задачи

Краевую задачу для системы (5.10)–(5.14) будем решать численным методом. Для этого в области  $\bar{D} = \{(r,t) : 0 \leq r \leq L, 0 \leq t \leq t_{\text{кон}}\}$  введем сетку:

$$\omega_{h\tau} = \left\{ \begin{array}{l} (r_m, t_n) : r_m = mh, t_n = \\ = n\tau, m = 0, 1, \dots, K, hK = L, n = 0, 1, \dots, N, \tau N = t_{\text{кон}}. \end{array} \right\}$$

с шагом  $h$  по  $r$  и  $\tau$  по  $t$ . Здесь  $[0, t_{\text{кон}}]$  – временной отрезок.

Для производной  $\partial_{0t}^{\alpha} T$  имеет место разностная аппроксимация (2.4)

$$\left( \partial_{0t}^{\alpha} T \right)_{n,m} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (T_m^{k+1} - T_m^k) \left( t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha} \right) + O(\tau). \quad (5.15)$$

Для производных целого порядка  $\frac{\partial}{\partial r} \left( D_P(P, T) \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right)$ ,

$\frac{\partial}{\partial r} \left( D_T(P, T) \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right)$  имеют место следующие разностные аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( D_P(P, T) \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right)_{m, n} &= \\ &= \frac{1}{h} \left( g_{m+1}^{n+1} \frac{P_{m+1}^{n+1} - P_m^{n+1}}{h} - g_m^{n+1} \frac{P_m^{n+1} - P_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + O(h^2), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( D_T(P, T) \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right)_{m, n} &= \\ &= \frac{1}{h} \left( v_{m+1}^{n+1} \frac{T_{m+1}^{n+1} - T_m^{n+1}}{h} - v_m^{n+1} \frac{T_m^{n+1} - T_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + O(h^2), \end{aligned} \quad (5.17)$$

где  $g_m^n = \frac{D_P(r_{m-1}, t_n) + D_P(r_m, t_n)}{2}$ ,  $v_m^n = \frac{D_T(r_{m-1}, t_n) + D_T(r_m, t_n)}{2}$ .

С учетом соотношений (5.15), (5.16) и (5.17) получим следующую разностную схему с весами, аппроксимирующую задачу (5.10)–(5.14).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (P_m^{k+1} - P_m^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= \sigma_1 \cdot \frac{1}{h} \left( g_{m+1}^{n+1} \frac{P_{m+1}^{n+1} - P_m^{n+1}}{h} - \right. \\ &\left. - g_m^{n+1} \frac{P_m^{n+1} - P_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + (1-\sigma_1) \cdot \frac{1}{h} \left( g_{m+1}^n \frac{P_{m+1}^n - P_m^n}{h} - g_m^{n+1} \frac{P_m^n - P_{m-1}^n}{h} \right) + \\ &+ \frac{\beta}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^{n-1} (T_m^{k+1} - T_m^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (T_m^{k+1} - T_m^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= \sigma_2 \cdot \frac{1}{h} \left( v_{m+1}^{n+1} \frac{T_{m+1}^{n+1} - T_m^{n+1}}{h} - \right. \\ &\left. - v_m^{n+1} \frac{T_m^{n+1} - T_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + (1-\sigma_2) \cdot \frac{1}{h} \left( v_{m+1}^n \frac{T_{m+1}^n - T_m^n}{h} - v_m^{n+1} \frac{T_m^n - T_{m-1}^n}{h} \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^{n-1} (P_m^{k+1} - P_m^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$P_m^0 = P_0, T_m^0 = T_0, \quad (5.20)$$

$$P_0^n = P^*, T_0^n = T^*, \quad (5.21)$$

$$P_K^n = P_{K-1}^n, \quad (5.22)$$

где  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  – вектор числовых параметров.

Будем предполагать, что градиент температуры в граничном пласте

$$\frac{\partial T_{zp}}{\partial r} = \frac{T_{zp}^2 - T_{zp}^1}{r_2 - r_1} = \xi = const, \text{ то есть скорость теплового потока будем считать}$$

постоянной величиной, тогда

$$T_K^n = T_{K-1}^n + h \cdot \frac{\lambda_{zp} \xi}{\lambda_n}. \quad (5.23)$$

В случае, когда  $\sigma = (0,0)$ , систему (5.18), (5.19), (5.20) можно привести к виду

$$\begin{aligned} a_m P_{m-1}^{n+1} - c_m P_m^{n+1} + b_m P_{m+1}^{n+1} &= -(2^{1-\alpha} - 2) P_m^n + \varphi_m^n, \\ a_m^* T_{m-1}^{n+1} - c_m^* T_m^{n+1} + b_m^* T_{m+1}^{n+1} &= -(2^{1-\alpha} - 2) T_m^n + \psi_m^n, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где

$$\begin{aligned} a_m &= \Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha \frac{g_{m+1}^{n+1}}{h^2}, \quad b_m = \Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{g_m^n}{h^2}, \quad c_m = 1 + \frac{g_m^{n+1} + g_{m+1}^{n+1}}{h^2}, \\ \varphi_m^n &= -\tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot P_m^k + \beta \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot T_m^k, \\ a_m^* &= \Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha \frac{v_{m+1}^{n+1}}{h^2}, \quad b_m^* = \Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{v_m^{n+1}}{h^2}, \\ \psi_m^n &= -\tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot T_m^k + \gamma \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot P_m^k. \end{aligned}$$

Легко проверить, что достаточные условия хорошей обусловленности системы (5.24) при фиксированном  $n$  выполняются. Система разностных уравнений (5.24) совместно с краевыми условиями (5.21), (5.22), (5.23) при фиксированном  $n$  имеет единственное решение и его можно найти методом прогонки.

## 2.2. Сходимость разностной схемы

Сходимость разностной схемы докажем методом замороженных коэффициентов.

Разностную схему (5.18), (5.19), (5.20) запишем в операторном виде

$$(E + \sigma_1 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha A)P^{n+1} + ((2^{1-\alpha} - 2)E - (1 - \sigma_1)\Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha A)P^n - \phi^n = 0, \quad (5.25)$$

$$(E + \sigma_2 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha B)T^{n+1} + ((2^{1-\alpha} - 2)E + (1 - \sigma_2)\Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha B)T^n - \psi^n = 0, \quad (5.26)$$

$$P_m^0 = P_0, \quad T_m^0 = T_0,$$

$$P_0^n = P^*, \quad T_0^n = T^*,$$

$$P_K^n = P_{K-1}^n, \quad T_K^n = T_{K-1}^n + h \frac{\lambda_{\text{эп.}} \xi}{\lambda_{\text{н.}}}, \quad (5.27)$$

где  $P^n = (P_1^n, P_2^n, \dots, P_{K-1}^n)^T$ ,  $T^n = (T_1^n, T_2^n, \dots, T_{K-1}^n)^T$ ,  $\phi^n = (\phi_1^n, \phi_2^n, \dots, \phi_{N-1}^n)^T$ ,

$$T^0 = (T_0(r_1), T_0(r_2), \dots, T_0(r_{K-1}))^T, \quad P^0 = (P_0(r_1), P_0(r_2), \dots, P_0(r_{K-1}))^T,$$

$$(AP)_m = -\left( \frac{g_{m+1}}{h^2} P_{m+1} - \frac{g_{m+1} + g_m}{h^2} P_m + \frac{g_m}{h^2} P_{m-1} \right),$$

$$(BT)_m = -\left( \frac{v_{m+1}}{h^2} T_{m+1} - \frac{v_{m+1} + v_m}{h^2} T_m + \frac{v_m}{h^2} T_{m-1} \right).$$

Разрешимость уравнений (5.25), (5.26) относительно  $P^{n+1}$  и  $T^{n+1}$  эквивалентна обратимости операторов  $E + \sigma_1 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha A$  и  $E + \sigma_2 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha B$ .

Собственные значения матриц  $A$  и  $B$  положительные, т. е.  $\lambda(A)_k > 0, \lambda(B)_k > 0$ , расположим их в порядке возрастания  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1}$ . Положительность собственных значений следует из того, что матрицы  $A$  и  $B$  трехдиагональные и  $g_m^n > 0, v_m^n > 0, m = 0, 1, \dots, K$  Опера-

торы  $E + \sigma_1 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha A$  и  $E + \sigma_2 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha B$  будут обратные, если потребовать  $1 + \sigma_1 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_k > 0$ ,  $1 + \sigma_2 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_k > 0$   $k = 1, 2, \dots, N-1$ , где  $\lambda(A)_k > 0, \lambda(B)_k > 0$  собственные числа операторов  $A$  и  $B$ .

При каждом  $n$  решения  $P_m^n = P(r_m, t_n)$  и  $T_m^n = T(r_m, t_n)$  можно представить в виде:

$$P(r_m, t_n) = \sum_{s=1}^{K-1} c_s(t_n) \mu_s(r_m), \quad T(r_m, t_n) = \sum_{s=1}^{K-1} d_s(t_n) \mu_s(r_m). \quad (5.28)$$

Здесь  $c_s(t_n)$  и  $d_s(t_n)$  – коэффициенты Фурье функций  $P(r_m, t_n)$ ,  $T(r_m, t_n)$  соответственно. Подставляя (5.28) в уравнения (5.18), (5.19) и учитывая, что  $(\mu_s(r))_{rr,m}^- = -\lambda_s \mu_s(r_m)$  и  $\mu_s(r)$  линейно-независимые [111], получим

$$\begin{cases} \left( (1 + \sigma_1 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s) \cdot c_s(t_{n+1}) + \right. \\ \left. + ((2^{1-\alpha} - 2) - (1 - \sigma_1)\Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s) c_s(t_n) + \bar{\phi}_s(t_n) = 0, \right. \\ \left( (1 + \sigma_2 \cdot \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s) d_s(t_{n+1}) + \right. \\ \left. + ((2^{1-\alpha} - 2) - (1 - \sigma_2)\Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s) d_s(t_n) + \bar{\psi}_s(t_n) = 0, \right. \end{cases} \quad (5.29)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_s(t_n) &= \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot c_s(t_k) - \\ &- \beta \cdot \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot d_s(t_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_s(t_n) &= \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot d_s(t_k) - \\ &- \beta \cdot \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot c_s(t_k), \end{aligned}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1, S = 1, 2, \dots, K-1.$$

Система уравнений (5.29) при каждом  $s$  представляет собой систему разностных уравнений относительно  $c^{(n)} = c_s(t_n)$  и  $d^{(n)} = d_s(t_n)$ . Чтобы найти единственное решение, зададим начальные условия  $c_s(0) = (P^0, \mu_s)$ ,  $d_s(0) = (T^0, \mu_s)$ .

Из уравнений (15) получим

$$\begin{aligned} c_s(t_{n+1}) &= \frac{(2-2^{1-\alpha}) - (1-\sigma_1)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s}{1+\sigma_1 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s} c_s(t_n) + \\ &+ \frac{1}{1+\sigma_1 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s} \bar{\phi}_s(t_n), \\ d_s(t_{n+1}) &= \frac{(2-2^{1-\alpha}) - (1-\sigma_2)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s}{1+\sigma_2 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s} c_s(t_n) + \\ &+ \frac{1}{1+\sigma_2 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s} \bar{\psi}_s(t_n). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Учитывая (5.30), решение  $P_m^{n+1}$  и  $T_m^{n+1}$  задачи запишем в виде

$$\begin{aligned} P_m^{n+1} &= \sum_{s=1}^{K-1} \left[ p_s \cdot c_s(t_n) + q_s \cdot \bar{\phi}_s(t_n) \right] \mu_s(r_m), \\ T_m^{n+1} &= \sum_{s=1}^{K-1} \left[ p_s^{(1)} \cdot d_s(t_n) + q_s^{(1)} \cdot \bar{\psi}_s(t_n) \right] \mu_s(r_m), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{2-2^{1-\alpha} - (1-\sigma_1)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s}{1+\sigma_1 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s}, \\ q_s &= \frac{1}{1+\sigma_1 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s}, \\ p_s^{(1)} &= \frac{2-2^{1-\alpha} - (1-\sigma_2)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s}{1+\sigma_2 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s}, \\ q_s^{(1)} &= \frac{1}{1+\sigma_2 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s}. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\begin{aligned}\overline{P}_m^{n+1} &= \sum_{s=1}^{K-1} [p_s \cdot c_s(t_n)] \mu_s(r_m), \quad \tilde{P}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{K-1} \left[ q_s \cdot \overline{\hat{\phi}}_s(t_n) \right] \mu_s(r_m), \\ \overline{T}_m^{n+1} &= \sum_{s=1}^{K-1} [p_s^{(1)} \cdot d_s(t_n)] \mu_s(r_m), \quad \tilde{T}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{K-1} \left[ q_s^{(1)} \cdot \overline{\psi}_s(t_n) \right] \mu_s(r_m),\end{aligned}$$

получим, что

$$P_m^{n+1} = \overline{P}_m^{n+1} + \tilde{P}_m^{n+1}, \quad (5.31)$$

$$T_m^{n+1} = \overline{T}_m^{n+1} + \tilde{T}_m^{n+1}. \quad (5.32)$$

В силу ортонормированности базиса  $\{\mu_s\}$  получаем

$$\begin{aligned}\left\| \overline{P}^{n+1} \right\|^2 &= \sum_{m=1}^{K-1} \left( \overline{P}_m^{n+1} \right)^2 h \leq \sum_{s=1}^{K-1} p_s^2 \cdot (c_s(t_n))^2, \\ \left\| \overline{T}^{n+1} \right\|^2 &= \sum_{m=1}^{K-1} \left( \overline{T}_m^{n+1} \right)^2 h \leq \sum_{s=1}^{K-1} \left( p_s^{(1)} \right)^2 \cdot (d_s(t_n))^2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\| \overline{P}^{n+1} \right\| \leq \left( \sum_{s=1}^{K-1} (c_s(t_n))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \max |p_s| = \left\| P^n \right\|_{1 \leq S \leq M-1} \max |p_s|, \quad (5.33)$$

$$\left\| \overline{T}^{n+1} \right\| \leq \left( \sum_{s=1}^{K-1} (d_s(t_n))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \max |p_s^{(1)}| = \left\| T^n \right\|_{1 \leq S \leq M-1} \max |p_s^{(1)}|. \quad (5.34)$$

Потребуем выполнения условий

$$|p_s| = \left| \frac{2 - 2^{1-\alpha} - (1 - \sigma_1) \Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda(A)_s}{1 + \sigma_1 \cdot \Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda(A)_s} \right| \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (5.35)$$

$$|p_s^{(1)}| = \left| \frac{2 - 2^{1-\alpha} - (1 - \sigma_2) \Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda(B)_s}{1 + \sigma_2 \cdot \Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha \lambda(B)_s} \right| \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (5.36)$$



Условия (5.35) и (5.36) эквивалентны условиям

$$\sigma_1 \geq \frac{1}{2} - \frac{3 - 2^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s}, \quad \sigma_2 \geq \frac{1}{2} - \frac{3 - 2^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s}. \quad (5.37)$$

Из (5.35) и (5.36) при любом  $s = 1, 2, \dots, M-1$  следуют неравенства:

$$1 + \sigma_1 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s \geq \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s}{2} + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{2} > 0,$$

$$1 + \sigma_2 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s \geq \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s}{2} + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{2} > 0.$$

Оценим функции

$$\tilde{P}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{K-1} \left[ q_s \overline{\hat{\phi}}_s(t_n) \right] \mu_s(r_m),$$

$$\tilde{T}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{K-1} \left[ q_s^{(1)} \overline{\psi}_s(t_n) \right] \mu_s(r_m).$$

Для этого потребуем выполнения условий

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\geq \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon_1)(3-2^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_{N-1}}, \\ \sigma_2 &\geq \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon_2)(3-2^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_{N-1}}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

где  $0 < \varepsilon_1 < 1$ ,  $0 < \varepsilon_2 < 1$ ,  $s = 1, 2, \dots, M-1$ . Отсюда следует выполнение условий (5.37). Из (5.38) получим

$$\begin{aligned} 1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s &\geq \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda_s}{2} + 1 - \frac{(1-\varepsilon)(3-2^{1-\alpha})\lambda_s}{2\lambda_{N-1}} > \\ &> 1 - \frac{(1-\varepsilon)(3-2^{1-\alpha})}{2} > 1 - \frac{(1-\varepsilon) \cdot 2}{2} = \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Теперь оценим функции

$$\tilde{P}_m^{n+1} = - \sum_{s=1}^{K-1} \left[ \frac{1}{1 + \sigma_1 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s} \cdot \left( \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) - \beta \Delta_\tau^\alpha d_s(t_n) \right) \right] \cdot \mu_s(r_m),$$

$$\tilde{T}_m^{n+1} = - \sum_{s=1}^{K-1} \left[ \frac{1}{1 + \sigma_2 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s} \cdot \left( \Delta_\tau^\alpha d_s(t_n) - \gamma \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \right) \right] \cdot \mu_s(r_m),$$

где  $\Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) = \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot c_s(t_k),$

$$\Delta_\tau^\alpha d_s(t_n) = \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n-k+2}^{1-\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\alpha} + t_{n-k}^{1-\alpha}) \cdot d_s(t_k).$$

Отсюда следует

$$\left\| \tilde{P}^{n+1} \right\|^2 \leq 2 \sum_{s=1}^{K-1} \left( \frac{1}{1 + \sigma_1 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(A)_s} \right)^2 \left( \left( \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \right)^2 + \left( \Delta_\tau^\alpha d_s(t_n) \right)^2 \right),$$

$$\left\| \tilde{T}^{n+1} \right\|^2 \leq 2 \sum_{s=1}^{K-1} \left( \frac{1}{1 + \sigma_2 \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda(B)_s} \right)^2 \left( \left( \Delta_\tau^\alpha d_s(t_n) \right)^2 + \left( \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \right)^2 \right).$$

Тогда

$$\left\| \tilde{P}^{n+1} \right\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left( \left\| \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \right\| + \left\| \Delta_\tau^\alpha d_s(t_n) \right\| \right), \quad \left\| \tilde{T}^{n+1} \right\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left( \left\| \Delta_\tau^\alpha d_s(t_n) \right\| + \left\| \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \right\| \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_\tau^\alpha c_s(t_n) \right\| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left\| (c_s(t_{k+1}) - c_s(t_k)) \right\| \left| (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right| \leq \\ &\leq M_1 \cdot \tau \sum_{k=1}^{n-1} \left( (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right) \leq M_1 \cdot \tau \cdot (n^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}) \leq \\ &\leq M_1 \cdot \tau \cdot n^{1-\alpha} = M_1 \tau \cdot \left( \frac{t_{\text{кон.}}}{\tau} \right)^{1-\alpha} = M_1 \cdot t_{\text{кон.}}^{1-\alpha} \cdot \tau^\alpha \end{aligned}$$

и  $\left\| \Delta_\tau^\alpha d_s(t_n) \right\| \leq M_2 \cdot t_{\text{кон.}}^{1-\alpha} \cdot \tau^\alpha,$  где  $M_1 = \max |c'_s(t)| = \text{const},$

$M_2 = \max |d'_s(t)| = \text{const}.$

Следовательно,

$$\left\| \tilde{P}^{n+1} \right\| \leq \frac{2M_1 t_{\text{кон}}^{1-\alpha} \tau^\alpha}{\varepsilon_1}, \quad \left\| \tilde{T}^{n+1} \right\| \leq \frac{2M_2 t_{\text{кон}}^{1-\alpha} \tau^\alpha}{\varepsilon_2}. \quad (5.39)$$

Тогда, воспользовавшись оценками (5.33), (5.34), (5.39), равенствами (5.31), (5.32) и свойствами нормы, окончательно получим оценки:

$$\left\| P^{n+1} \right\| \leq \left\| P^n \right\| + \frac{M_1 t_{\text{кон}}^{1-\alpha} \tau^\alpha}{\varepsilon_1}, \quad \left\| T^{n+1} \right\| \leq \left\| T^n \right\| + \frac{M_2 t_{\text{кон}}^{1-\alpha} \tau^\alpha}{\varepsilon_2}. \quad (5.39.1)$$

Отсюда следует, что разностная схема (5.18)–(5.20) устойчива. Кроме того, легко проверить, что она аппроксимирует задачу (5.10)–(5.13) с порядком  $O(h^2 + \tau)$ . Следовательно, справедлива:

**Теорема 5.1.** Если для разностной схемы (5.18)–(5.20) выполнены условия (5.39.1), то решение этой разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи (5.10)–(5.13) с порядком сходимости  $O(h^2 + \tau)$ .

В качестве примера рассмотрим случай, когда начальное давление  $P(0, r) = 10.2$ , начальная температура  $T(0, x) = 28.1$ , а на границах пласта давление и температура задаются равенствами  $P(t, 0) = 1.4$ ,  $P(t, L) = 1.4$ ,  $T(t, 0) = 9$ ,  $T(t, T) = 9$ .

### Выводы

На рис. 5.4, 5.5 приведены графики распределения давления и температуры в зависимости от координаты радиуса пласта. Как видим на рис. 5.4, 5.5, при переходе к дробным производным происходит локализация зоны высокого давления и температуры и уменьшение максимума давления и температуры. И при этом точка максимума смещается вправо. На рис. 5.6, 5.7, изображены графики изменения забойного давления и температуры в зависимости от времени. Как видно на рис. 5.6, 5.7 при переходе к дробным производным давление и температура со временем падает быстрее. Такая динамика изменения давления и температуры свойственно фрактальным средам.

Как известно [76], во фрактальных средах, в отличие от сплошных сред, все физические процессы протекают медленнее. Во фрактальных средах для движения частицы не все направления доступны, то есть случайно блуждающая частица удаляется от места старта медленнее. Замедление процессов тепло-массопереноса и фильтрации во фрактальных средах настолько существенно, что физические величины начинают изменяться медленнее первой производной, и учесть этот эффект можно только в интегрально-дифференциальном уравнении, содержащем производную по времени дробного порядка.

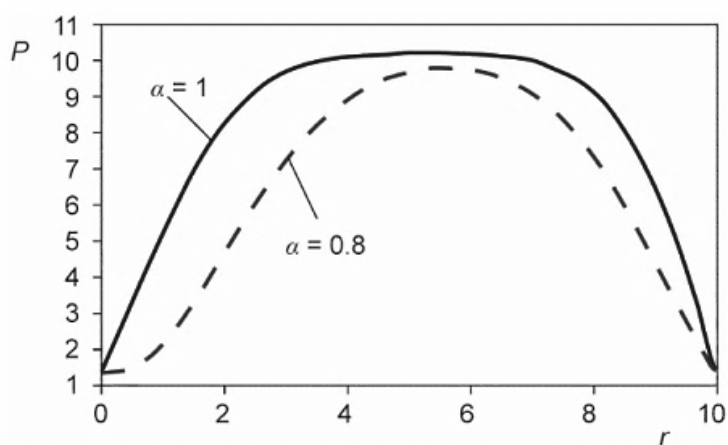


Рис. 5.4. Динамика изменения давления в пласте в зависимости от координаты по радиусу пласта (1 – при  $\alpha = 1$ , 2 – при  $\alpha = 0.8$ )

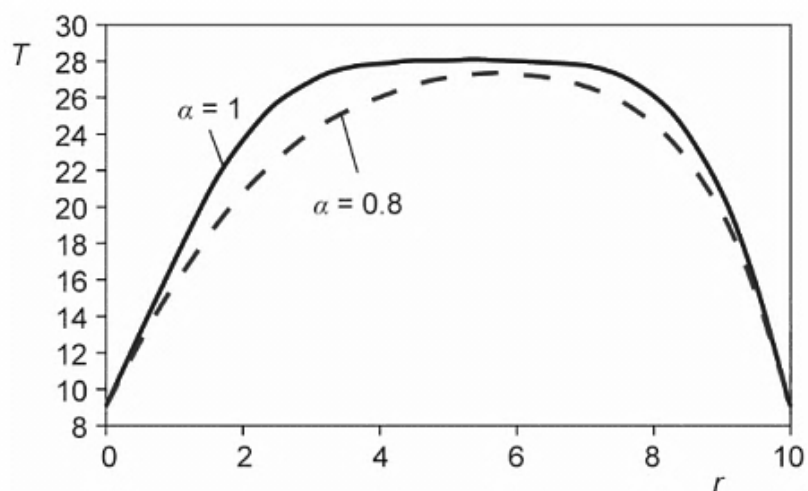


Рис. 5.5. Динамика изменения температуры в пласте в зависимости от координаты по радиусу пласта (1 – при  $\alpha = 1$ , 2 – при  $\alpha = 0.8$ )

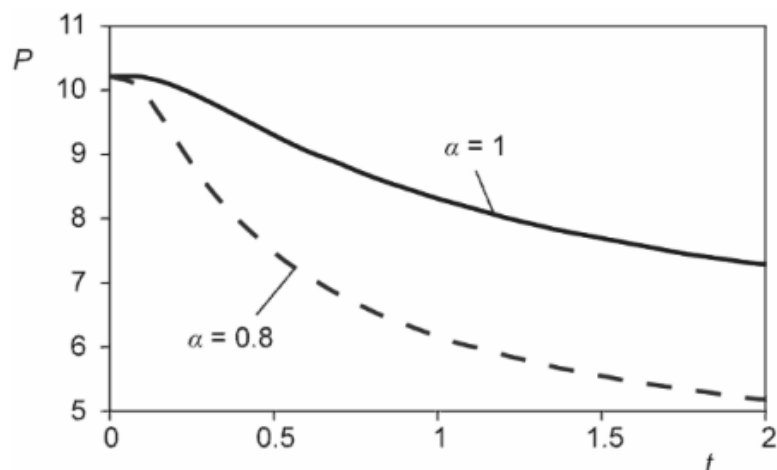


Рис. 5.6. Динамика изменения давления в пласте в зависимости от времени при различных значениях параметра дробной производной (1 – при  $\alpha = 1$ , 2 – при  $\alpha = 0.8$ )

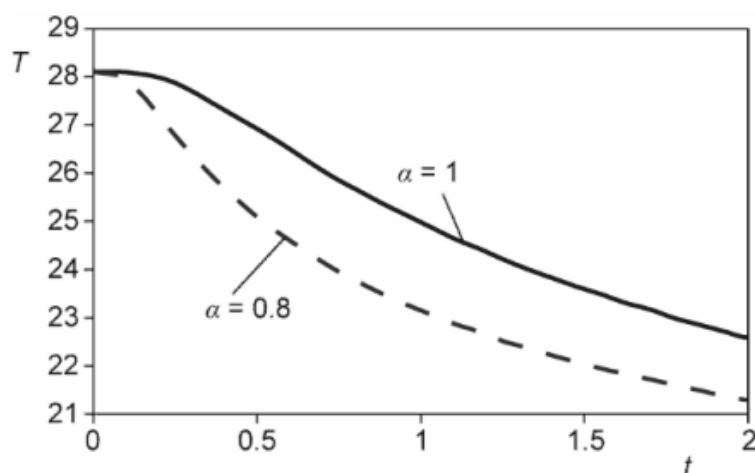


Рис. 5.7. Динамика изменения температуры в пласте в зависимости от времени при различных значениях параметра дробной производной (1 – при  $\alpha = 1$ , 2 – при  $\alpha = 0.8$ )

### § 3. Исследование нелокальных процессов теплопроводности для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций

Этот параграф посвящен исследованию теплопроводности для полуограниченного тела с фрактальной структурой, когда на одной из границ задан

тепловой поток. В качестве математической модели исследована краевая задача для уравнения теплопроводности с граничными условиями второго рода и дробными производными Капуто по времени и Рисса по пространственной переменной.

### 3.1. Математическая постановка задачи

В основе классической теории теплопроводности лежит локальный закон Фурье, который связывает вектор теплового потока  $q$  с градиентом температуры

$$q = -\lambda \text{grad}T,$$

где  $\lambda$  - теплопроводность твердого тела. В сочетании с законом сохранения энергии

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}q$$

где  $\rho$  - плотность массы,  $c$  - теплоемкость, закон Фурье (1) приводится к параболическому уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad (5.40)$$

где  $a = \lambda / (\rho c)$  - коэффициент температуропроводности.

В работе Денг и Ге [54] изучали теплоперенос в фрактальной среде, используя дробное уравнение Гельмгольца вида:

$$\frac{\partial^{2\beta} T(x, y)}{\partial x^{2\beta}} + \frac{\partial^{2\beta} T(x, y)}{\partial y^{2\beta}} + k^2 T(x, y) = f(x, y),$$

где  $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$ .

Хе и Лиу использовали дробную версию закона Фурье [54]

$$\lambda^{2\beta} \frac{\partial^\beta T}{\partial x^\beta} = q. \quad (5.41)$$

Математически переход от детерминированного представления модели теплопереноса к ее фрактальному описанию может быть осуществлен с помощью аппарата дробного дифференцирования и интегрирования [172, 210]. В

частности, для математической формализации характеристик фрактальных сред используют производные дробного порядка по пространственным координатам, а для представления эффекта памяти — дробную производную по времени.

Рассмотрим обобщение уравнения (5.40) на дробные порядки производных

$$\partial_{0t}^{\alpha} T(\xi, \tau) = \bar{a} {}^R D_{0x}^{2\beta} T(\xi, \tau), \quad \tau > 0, 0 < \xi < \infty, \quad (5.42)$$

где  $\partial_{0t}^{\alpha} T(\xi, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\tau} \frac{T_t'(\xi, s)}{(\tau-s)^{\alpha}} ds$  - частная дробная производная Капуто,

$${}^R D_{0x}^{2\beta} T(\xi, \tau) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(2-2\beta) \cos\left(\frac{\pi}{2}(2-2\beta)\right)} \frac{d^2}{d\xi^2} \int_0^{\infty} \frac{T(z, \tau)}{|\xi-z|^{2\beta-1}} dz$$
 - частная дробная производная Рисса на полуоси [115],

$0 < \alpha \leq 1, \frac{1}{2} < \beta \leq 1$ ,  $T(\xi, \tau)$  - температура,  $\tau = t/t_0, \xi = x/x_0$  - безразмерные время и координата,  $t_0, x_0$  - характерное время и координата,  $\bar{a} = a \cdot t_0 / x_0^2$  - безразмерный коэффициент температуропроводности.

Исследуем случай, когда на одной из концов области задан тепловой поток, то есть рассмотрим граничное условие второго рода

$$\xi = 0: \lambda^{2\beta} {}^R D_{0\xi}^{\beta} T(\xi, \tau) + q_c = 0, \quad (5.43)$$

где  $q_c = -\frac{Q}{\lambda}$ ,  $Q = \frac{P}{S}$  - удельная мощность поверхностного тепловыделения,  $Bm/m^2$ ,  $P$  - мощность теплового источника,  $Bm$ ,  $S$  - площадь нагреваемой грани области,  $m^2$ . Будем предполагать, что другая граница области существенно удалена от градиентной зоны и на этой границе устанавливается температура, равная температуре окружающей среды

$$T(\infty, \tau) = T_0, \quad \left. \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\infty} = 0. \quad (5.44)$$

Задачу дополним начальным условием  $T(\xi, \tau_0) = T_0$ ,  $0 \leq \xi < +\infty$ .

### 3.2. Решение задачи

Задачу (5.42)- (5.44) будем решать путем сведения этой задачи к задаче с граничными условиями первого рода. Согласно равенству (5.41) имеем:

$$q(\xi, \tau) = -\lambda^{2\beta} \cdot {}^R D_{0\xi}^\beta T(\xi, \tau). \quad (5.45)$$

Для дробной производной Рисса выполняется равенство (1.45):

$${}^R D_{0\xi}^\beta \left( {}^R D_{0\xi}^\beta (T(\xi, \tau)) \right) = {}^R D_{0\xi}^{2\beta} T(\xi, \tau). \quad (5.46)$$

Продифференцируем левую и правую части уравнения (5.42). Тогда уравнение примет вид:

$$\partial_{0\tau}^\alpha \left( {}^R D_{0\xi}^\beta T(\xi, \tau) \right) = a^{-} {}^R D_{0\xi}^\beta \left( {}^R D_{0\xi}^{2\beta} T(\xi, \tau) \right). \quad (5.47)$$

Воспользовавшись равенствами (5.45) и (5.47) задачу (5.42)- (5.44), перепишем в виде:

$$\partial_{0\tau}^\alpha q(\xi, \tau) = a^{-} {}^R D_{0\tau}^{2\beta} q(\xi, \tau), \quad (5.48)$$

$$q(\xi, 0) = 0,$$

$$q(0, \tau) = q_c, \quad q(\infty, \tau) = 0. \quad (5.49)$$

Пусть функция  $q(\xi, \tau)$  – непрерывна в области  $D = (0, +\infty) \times [0, T]$ , причем  $q'_\tau(\xi, \tau) \in L[0, T]$ . Тогда для  $0 < \alpha < 1$  производная  $D_{0\tau}^\alpha q(\xi, \tau)$  существует и почти всюду на  $[0, T]$  и имеет место представление

$${}^{RL} D_{0\tau}^\alpha q(\xi, \tau) = \frac{q(\xi, 0)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \tau^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{q'_t(\xi, s)}{(\tau-s)^\alpha} ds, \quad (5.50)$$

где  ${}^{RL} D_{0\tau}^\alpha q(\xi, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{q(x, s)}{(\tau-s)^\alpha} ds$  – дробная производная Римана-Лиувилля.

Лиувилля.

Так как  $q(\xi, 0) = 0$ , то равенство (5.50) примет вид:



$$D_{0t}^{\alpha} q(\xi, \tau) = \frac{0}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \tau^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{q'_t(\xi, s)}{(\tau-s)^{\alpha}} ds = \partial_{0t}^{\alpha} q(\xi, \tau). \quad (5.51)$$

С учетом (5.51), задача (5.48) и (5.49) переписывается в виде:

$${}^{RL}D_{0t}^{\alpha} q(\xi, \tau) = {}^{\bar{a}}R D_{0x}^{2\beta} q(\xi, \tau). \quad (5.52)$$

$$q(\xi, 0) = 0,$$

$$q(0, \tau) = q_c, \quad q(\infty, \tau) = 0. \quad (5.53)$$

Далее, решение задачи (5.52) и (5.53) найдем с помощью преобразований Фурье и Лапласа. Совершая косинус-преобразования Фурье по пространственной переменной и Лапласа по времени, для образа получим выражение:

$$p^{\alpha} \bar{q}(k, p) = \frac{q_c \cdot a^2}{k^{1-2\beta} \cdot p} - \bar{a} \cdot k^{2\beta} \bar{q}(k, p),$$

т.е.

$$\bar{q}(k, p) = \frac{\bar{a} \cdot q_c \cdot k^{2\beta-1}}{p \cdot (p^{\alpha} + \bar{a} \cdot k^{2\beta})}. \quad (5.54)$$

Имеем [12]:

$$\frac{1}{p(p^{\alpha} + \bar{a} \cdot k^{2\beta})} = \frac{1}{\bar{a} \cdot k^{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} (1 - E_{\alpha,1}(-\bar{a} \cdot k^{2\beta} \tau^{\alpha})) d\tau, \quad (5.55)$$

где  $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$  – функция Миттага-Лефлера.

Учитывая (5.55), равенство (5.54) можно записать в виде:

$$\bar{q}(k, p) = q_c \cdot k^{-1} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} (1 - E_{\alpha,1}(-\bar{a} \cdot k^{2\beta} \tau^{\alpha})) d\tau. \quad (5.56)$$

Применяя обратные косинус преобразования Фурье, для оригинала функции получим выражение:

$$q(\xi, \tau) = \frac{2 \cdot q_c}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(k\xi)}{k} (1 - E_{\alpha,1}(-\bar{a} \cdot k^{2\beta} \tau^{\alpha})) dk \quad (5.57)$$

Исследуем вопрос о единственности решения (5.57). Пусть  $q_1(\xi, \tau)$  и  $q_2(\xi, \tau)$  решения задачи (5.52) и (5.53), то есть  ${}^{RL}D_{0t}^\alpha q_i(\xi, \tau) = {}^{\bar{a}}R D_{0x}^{2\beta} q_i(\xi, \tau)$  и удовлетворяют граничным условиям  $q_i(\xi, 0) = 0$ ,  $q_i(0, \tau) = q_c$ ,  $q_i(\infty, \tau) = 0$ .  $i = 1, 2$ . И пусть  $q_1(\xi, \tau), q_2(\xi, \tau) \in C[\bar{D}]$ ,  $q_1(\xi, \tau), q_2(\xi, \tau) \in C^{2,1}[D]$ . Обозначим через  $q(\xi, \tau) = q_1(\xi, \tau) - q_2(\xi, \tau)$ . Тогда согласно принципу максимума имеем:

$$\max_{\bar{D}} q(\xi, \tau) = \max_{\Gamma} q(\xi, \tau) = 0, \quad (5.58)$$

$$\min_{\bar{D}} q(\xi, \tau) = \min_{\Gamma} q(\xi, \tau) = 0. \quad (5.59)$$

Из равенств (5.58), (5.59) следует, что  $q(\xi, \tau) = 0$  в области  $\bar{D}$ , то есть  $q_1(\xi, \tau) = q_2(\xi, \tau)$ . Чтобы найти решение  $T(\xi, \tau)$  подставим в выражение (5.45) вместо функции  $q(x, t)$  соответствующее выражение из (5.57) и применим к обеим частям оператор дробного интегрирования Рисса.

$$q(\xi, \tau) = -\lambda^{2\beta} \cdot {}^R D_{\xi}^{\beta} T(\xi, \tau), \quad T(\xi, \tau) = T_0 \frac{\xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2 \cdot q_c}{\lambda \cdot \pi} R_{\beta} q(\xi, \tau), \quad (5.60)$$

где  $R_{\beta} q(\xi, \tau) = \frac{1}{2\Gamma(\beta)\cos(\pi\alpha/2)} \int_0^{+\infty} \frac{q(z, \tau)}{|\xi - z|^{1-\beta}} dz$  - дробный интеграл Рисса.

### 3.3. Результаты и обсуждение

На рисунках 5.8 и 5.9 приведены графики решения (5.60) при различных значениях параметров дробных производных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Как видно из рисунков 5.8 и 5.9, пространственные корреляции и эффекты памяти оказывают различное влияние на окончательное решение. При уменьшении показателя пространственной производной ( $\beta$ ) наблюдается ускорение процессов теплопроводности без существенного влияния на характер пространственных и временных зависимостей. В то время как уменьшение показателя временной производной ( $\alpha$ ) приводит к существенному замедлению

процессов, меняя при этом характер нелинейности временных зависимостей.

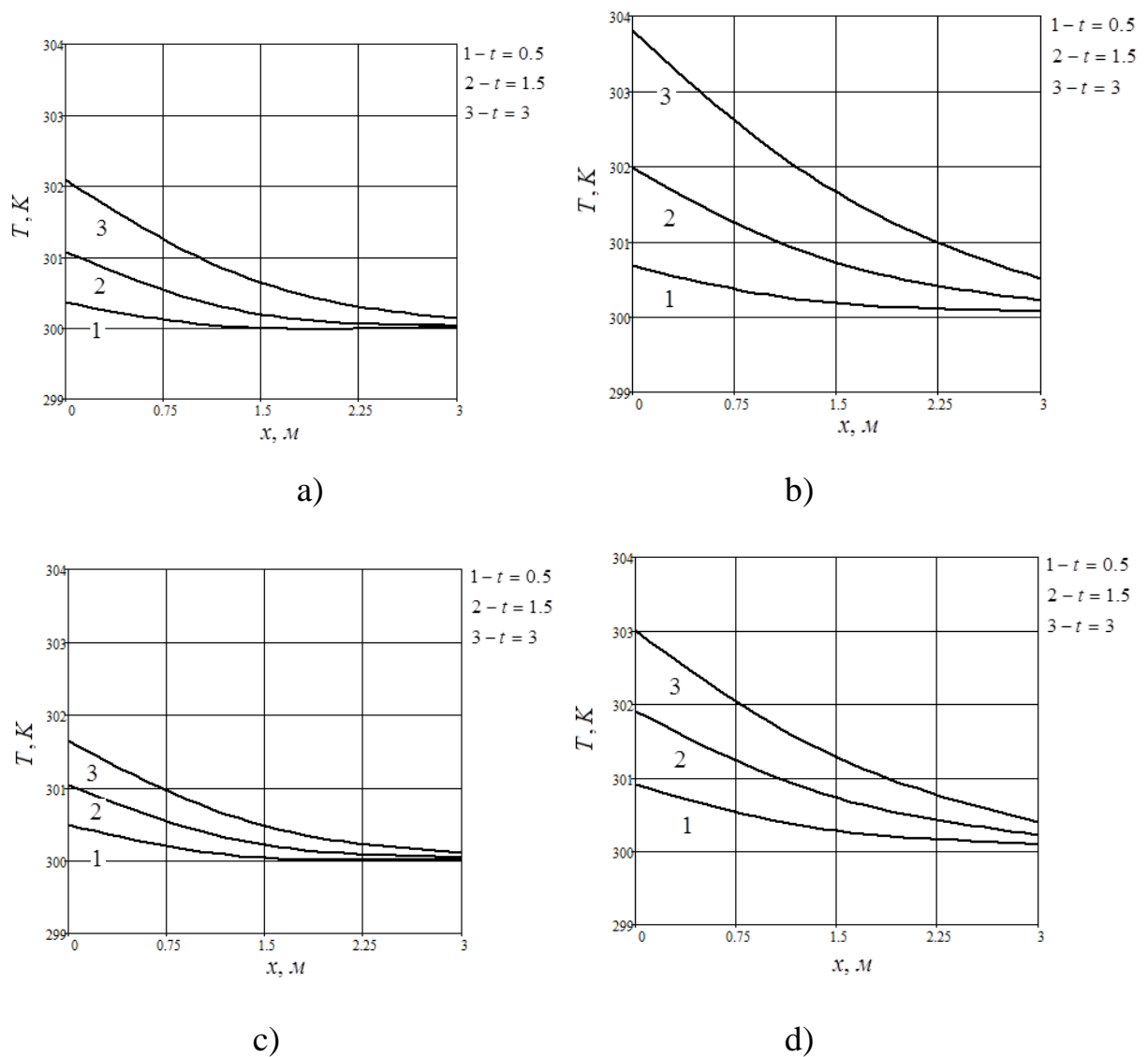


Рис. 5.8. Графики распределения температуры в полуограниченном теле в различные моменты времени при: а)  $\alpha = 1, \beta = 2$ , б)  $\alpha = 1, \beta = 1.7$ , в)  $\alpha = 0.7, \beta = 2$ , д)  $\alpha = 0.7, \beta = 1.7$ . Для всех случаев  $a = 1 \frac{m^2}{c}$ ,  $q_c = 1.8 \frac{Bm}{m^2}$ ,  $\lambda = 2.5 \frac{Bm}{m \cdot K}$ ,  $T_0 = 300 K$ .

### Выводы

В этом параграфе на основе классической модели теплопроводности для полуограниченного тела построена математическая модель теплопроводности, учитывающая эффекты памяти и пространственные корреляции. Построены

графики зависимости температуры от пространственной координаты и времени. При переходе к дробной производной по времени, происходит замедление процесса теплопереноса с изменением характера временной зависимости. Таким образом, переход к дробным производным позволяет исследовать сверхмедленные процессы теплопереноса, что характерно средам с фрактальной структурой.

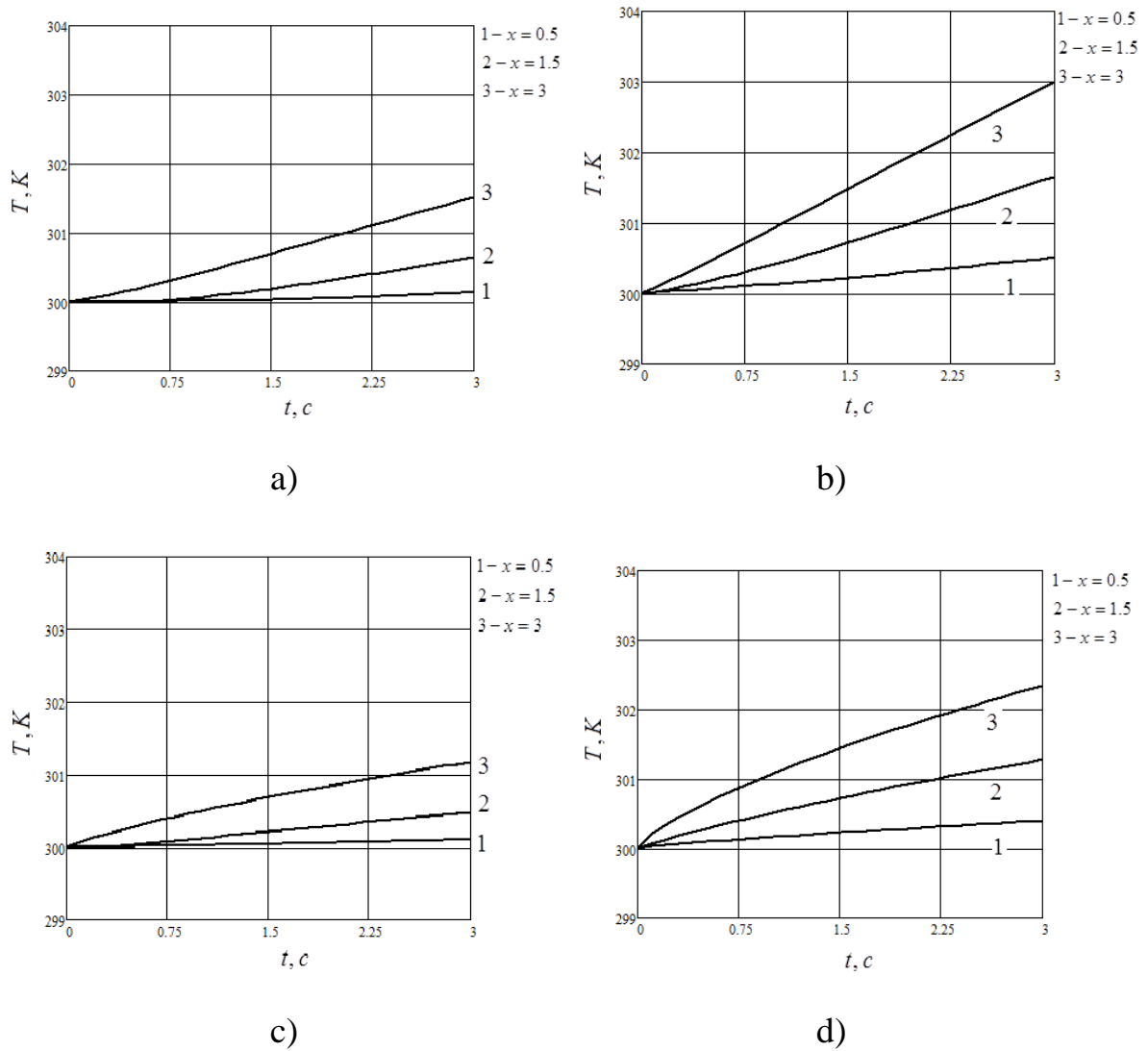


Рис. 5.9. Температурные зависимости от времени в полуограниченном теле при: а)  $\alpha = 1, \beta = 2$ , б)  $\alpha = 1, \beta = 1.7$ , в)  $\alpha = 0.7, \beta = 2$ , г)  $\alpha = 0.7, \beta = 1.7$ . Для всех случаев  $a = 1 \frac{m^2}{c}$ ,  $q_c = 1.8 \frac{Bm}{m^2}$ ,  $\lambda = 2.5 \frac{Bm}{m \cdot K}$ ,  $T_0 = 300 K$ .

#### § 4. Исследование нелокальных процессов конвективного теплообмена с внешней средой для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти

Этот параграф посвящен исследованию процессов конвективного теплообмена с внешней средой на одном конце области с учетом эффектов памяти.

##### 4.1. Математическая постановка задачи

Если существует область  $S$ , в которой необходимо решить определенное модельное уравнение (в данном случае уравнение диффузии тепла), где  $dS$  отмечает границу с окружающей средой (обычно жидкостью), то граничное условие Робена определяется как взвешенная комбинация граничных условий Дирихле и Неймана, а именно

$$aT + b \frac{\partial T}{\partial n} = g, \quad (5.61)$$

где  $a$  и  $b$  – ненулевые константы,  $\frac{\partial T}{\partial n}$  нормальная производная к границе.

В области  $S = [0,1]$  условия Робена имеют вид:

$$aT(0,t) - b \frac{\partial T(0,t)}{\partial n} = g(0,t), \quad (5.62)$$

$$aT(1,t) + b \frac{\partial T(1,t)}{\partial n} = g(1,t), \quad (5.63)$$

имея в виду, что в конце домена  $\frac{\partial T}{\partial n}$  меняет знак.

Если условие Робена применяется к изолированной границе  $G$ , то сумма диффузионного и конвективного потоков равны нулю.

$$aT(G,t) - b \frac{\partial T(G,t)}{\partial n} = g(G,t) = 0, \quad (5.64)$$

*Теплопроводность с конвективным потоком на границе.* Учитывая конвективный теплообмен на границе, то граничное условие Робена

определяет тепловой поток  $q$  как взвешенную комбинацию граничного условия Ньютона ( $h$  - коэффициент теплообмена с размерностью  $Bm/(m^2 K)$ )

$$q = h \cdot (T_f - T_0), \quad (5.65)$$

а также на основе классической теории теплопроводности, согласно закону Фурье:

$$q = -\lambda \cdot \text{grad}T. \quad (5.66)$$

В (5.65) через  $T_f$  обозначена температура жидкости, а  $T_0$  – температура на границе раздела жидкость-твердое тело, т.е. при  $x = 0$ .

Для полубесконечной среды, которая проявляет нелокальные во времени свойства переноса тепловой энергии с начальной температурой  $T_0$  и  $t = 0_+$ , применяется однородное граничное условие Робена (5.64):

$$\lambda \cdot \text{grad}T + h \cdot (T_f - T_0) = 0. \quad (5.67)$$

В качестве математической модели данного процесса исследуем в области  $D = \{(x, t) : 0 < x < \infty, 0 < t \leq T\}$  уравнение теплопроводности с дробной производной Капуто по времени:

$$\partial_{0t}^\alpha T(x, t) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t), t > 0, 0 < x < \infty, \quad (5.68)$$

где  $\partial_{0t}^\alpha T(x, t)$  - частная дробная производная Капуто (1.28),  $0 < \alpha < 1$ ,  $T(x, t)$  - температура,  $a$  - коэффициент температуропроводности.

Вводя безразмерную временную шкалу, производную Капуто можно представить в виде:

$$\partial_{0t}^\alpha T(x, \tau) = \frac{1}{t_0^\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{T_t'(x, s)}{(\tau-s)^\alpha} ds.$$

Тогда уравнение (5.68) переписется в виде:

$$\partial_{0t}^\alpha T(x, \tau) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, \tau), \tau > 0, 0 < x < \infty, \quad (5.69)$$

где  $\bar{a} = at_0^\alpha$ .

Здесь  $\bar{a} = at_0^\alpha$  имеет размерность  $m^2$ , учитывая, что в (5.68) размерность коэффициента температуропроводности  $a$  равна  $m^2/c^\alpha$ .

То есть безразмерность влияет только на временную переменную. Однако, имея в виду, что в полубесконечной среде нет характерного масштаба длины, можно рассмотреть результаты работ [166], где масштаб длины в таком случае уравнения дробной диффузии может быть определен как  $x_0 = \sqrt{at^\alpha}$  с размерностью длины  $[m]$ . Для значения параметра дробной производной  $\alpha = 1$  мы получаем масштаб длины как в классическом уравнении диффузии. На этой основе мы можем определить переменную подобия  $\eta_\alpha = x/\sqrt{at^\alpha}$ , которая для значения параметра дробной производной  $\alpha = 1$  соответствует переменной подобия Больцмана  $\eta = x/\sqrt{at}$ .

Для полной постановки задачи, зададим начальное и краевые условия:

$$T(x,0) = T_0, \quad T(0,\tau) = T_s, \quad (5.70)$$

$$\kappa \frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} + h \cdot [T_f - T_s] = 0, \quad T(\infty,\tau) = T_0, \quad \frac{\partial T(\infty,\tau)}{\partial x} = 0, \quad (5.71)$$

#### 4.2. Решение задачи

**Теорема.** Пусть выполняются условия  $T(x,\tau) \in C^{2,0}(D) \cap C^{1,0}(\bar{D})$ ,  $\partial_{0t}^\alpha u(x,t) \in C(\bar{D})$ , тогда для решения задачи (5.69)-(5.71) справедлива априорная оценка:

$$\|T\|_0^2 + D_{0\tau}^{-\alpha} \|T_x\|_0^2 \leq M \left( \|T_0(x)\|_0^2 + \left( \frac{h}{\kappa} T_f \right)^2 \right). \quad (5.72)$$

где  $M = const$ , которая зависит от входных данных задачи.

**Доказательство.** Пусть  $M_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots$ , которые зависят от входных данных. Умножая уравнение (5.69) скалярно на  $T(\xi, \tau)$ , получим:

$$\left(\partial_{0\tau}^\alpha T(x, \tau), T(x, \tau)\right) = \left(T_{xx}(x, \tau), T(x, \tau)\right), \quad (5.73)$$

где  $(g, h) = \int_0^\infty gh dx$ ,  $\|g\|_0^2 = (g, g)$ , для заданных на  $[0, +\infty)$  функций.

Преобразуем каждое из слагаемых равенства (5.73), используя неравенство Коши с  $\varepsilon$  [2].

$$\left(\partial_{0\tau}^\alpha T, T\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty T dx \int_0^\tau T_s (\tau-s)^{-\alpha} ds \geq \frac{1}{2} (1, \partial_{0\tau}^\alpha T^2) = \frac{1}{2} \partial_{0\tau}^\alpha \|T\|_0^2; \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} \left(T_{xx}, T\right) &= \int_0^\infty T_{xx} T dx = T(x, \tau) T_x(x, \tau) \Big|_0^\infty - \\ &\quad - \int_0^\infty T_x T_x dx = T(0, \tau) \frac{\alpha}{\lambda} [T_c - T(0, \tau)] - \|T_x\|_0^2. \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} T(x, \tau) T_x(x, \tau) \Big|_0^\infty &= \frac{h}{\kappa} T(0, \tau) [T_f - T(0, \tau)] = \frac{h}{\kappa} T_f \cdot T(0, \tau) - \frac{h}{\kappa} T^2(0, \tau) \leq \\ &\leq -\frac{h}{\kappa} T^2(0, \tau) + \frac{1}{2} \left( T^2(0, \tau) + \left( \frac{h}{\kappa} T_f \right)^2 \right) \leq M_2^\varepsilon \|T\|_0^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\kappa} T_f \right)^2. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Подставляя (5.74), (5.75), (5.76) в (5.73), получим:

$$\frac{1}{2} \partial_{0\tau}^\alpha \|T\|_0^2 + \|T_x\|_0^2 \leq M_3 \|T\|_0^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\kappa} T_f \right)^2. \quad (5.77)$$

В неравенстве (5.77) применим к обеим частям оператор дробного дифференцирования  $D_{0\tau}^{-\alpha}$ . Тогда на основании леммы 2 [2] получим оценку:

$$\|T\|_0^2 + D_{0\tau}^{-\alpha} \|T_x\|_0^2 \leq M_4 \|T_0(x)\|_0^2 + D_{0\tau}^{-\alpha} \left( \frac{h}{\kappa} T_f \right)^2, \quad (5.78)$$

или же

$$\|T\|_0^2 + D_{0\tau}^{-\alpha} \|T_x\|_0^2 \leq M \left( \|T_0(x)\|_0^2 + \left( \frac{h}{\kappa} T_f \right)^2 \right), \quad (5.79)$$

где  $M = \text{const}$  зависящая от входных данных.



Из оценки (5.79) следует единственность и устойчивость решения задачи (5.69)-(5.71) по начальным данным.

Решение задачи (5.69)-(5.71) будем находить операционным методом. Применим по переменной  $\tau$  преобразования Лапласа. Тогда уравнение для изображения с учетом начального условия будет иметь вид:

$$T_L''(x, p) - \frac{p^\alpha}{a} T(x, p) + \frac{p^{\alpha-1}}{a} T_0 = 0. \quad (5.80)$$

Граничные условия для изображения примут вид:

$$T_L'(0, p) + H \left[ \frac{T_f}{p} - T_L(0, p) \right] = 0, \quad T_L(\infty, p) = 0, \quad (5.81)$$

где  $H = \frac{h}{\kappa}$  - относительный коэффициент теплообмена.

Для уравнения (5.80) характеристическое уравнение имеет вид:

$$\mu^2 - \frac{p^\alpha}{a} = 0. \quad (5.82)$$

На основе корней характеристического уравнения (5.82) и частного решения по правой части, общее решение уравнения (5.80) запишется в виде:

$$T_L(x, p) = C_1 e^{\sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} x} + \frac{1}{p} T_0. \quad (5.83)$$

Из второго граничного условия следует:

$$0 = T_L(\infty, p) = \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} C_1 \exp(+\infty) - C_2 \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} \exp(-\infty),$$

т.е.  $C_1 = 0$ . Физически это означает, что температура на бесконечно большом расстоянии не изменится за все время процесса теплообмена. Постоянную  $C_2$  найдем из левого граничного условия:

$$-\sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} C_2 + H \left[ \frac{T_c}{p} - \frac{T_0}{p} - C_2 \right] = 0,$$

откуда

$$C_2 = \frac{T_c - T_0}{p \left( 1 + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} \right)}.$$

Тогда окончательно для изображения решение можно записать в виде:

$$T_L(x, p) = \frac{T_c - T_0}{p \left( 1 + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} \right)} e^{-\sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} x} + \frac{T_0}{p}. \quad (5.84)$$

Преобразуя равенство (5.84), получим:

$$T_L(x, p) = (T_c - T_0) \cdot \frac{H\sqrt{a}}{p \left( 1 - (-H\sqrt{a} \cdot p^{-\alpha/2}) \right)} \cdot \frac{1}{p^{\alpha/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{p^{\alpha/2}}{\sqrt{a}} x \right)^n}{n!} + \frac{T_0}{p}.$$

Имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \frac{H\sqrt{a}}{p^{\alpha/2} \left( 1 - (-H\sqrt{a} \cdot p^{-\alpha/2}) \right)} &= H\sqrt{a} \int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( -H\sqrt{a} \cdot t^{\alpha/2} \right)^k}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}k+1\right)} \cdot e^{-pt} dt = \\ &= H\sqrt{a} \int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1} E_{\alpha/2,1}(-H\sqrt{a} \cdot t^{\alpha/2}) \cdot e^{-pt} dt. \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{p^{\alpha/2}}{\sqrt{a}} x \right)^n}{n!} &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{1}{\sqrt{a}} x \cdot t^{-\alpha/2} \right)^n}{n! \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}n+1\right)} \cdot e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{a}} x \cdot t^{-\alpha/2}\right) \cdot e^{-pt} dt. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Здесь  $E_{\alpha/2, \alpha/2}(-z^{\alpha/2})$  - функция Миттаг-Леффлера (1.12), а  $\phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 1, -\lambda \cdot t^{-\alpha/2}\right)$  - функция Райта (1.16).

Воспользовавшись равенствами (5.85) и (5.86), для оригинала выраже-

ния  $\frac{T_c - T_0}{p \left( 1 + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} \right)} e^{-\sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} x}$  получим:

$$L^{-1} \left( \frac{(T_c - T_0)}{p \cdot \left( 1 + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} \right)} e^{-\sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} x} \right) = \quad (5.87)$$

$$= (T_c - T_0) \cdot H \sqrt{a} \cdot \int_0^\tau \phi \left( -\frac{\alpha}{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{a}} x \cdot \tau^{-\alpha/2} \right) (\tau - s)^{\alpha/2-1} \cdot E_{\alpha/2,1}(-H \sqrt{a} (\tau - s)^{\alpha/2}) ds.$$

На основе равенства (5.87), воспользовавшись свойством свертки Лапласа функций, решение задачи запишется в виде:

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{(T_c - T_0)} = \quad (5.88)$$

$$= H \sqrt{a} \cdot \int_0^\tau \phi \left( -\frac{\alpha}{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{a}} x \cdot s^{-\alpha/2} \right) \cdot (\tau - s)^{\alpha/2-1} \cdot E_{\alpha/2, \alpha/2}(-H \sqrt{a} (\tau - s)^{\alpha/2}) ds.$$

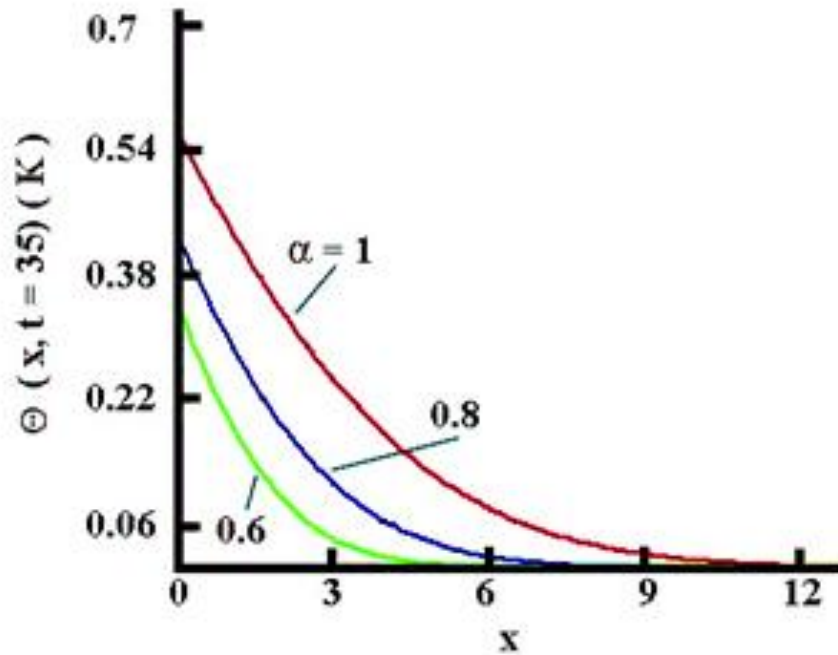


Рис. 5.10. Графики зависимости температуры от координаты при различных значениях параметра дробной производной.

### 4.3. Анализ решения

В случае, когда коэффициент теплообмена  $h$  очень большое число, то  $H \rightarrow \infty$ . Тогда из граничного условия (5.71) следует, что  $T(0, \tau) = T_c = const$ , то есть температура конца стержня сразу становится равной температуре окру-

жающей среды. Таким образом, получаем краевую задачу с граничными условиями первого рода.

На рис. 5.10 и 5.11 приведены графики зависимостей температуры от координаты и времени при различных значениях параметра дробной производной. Как видно из рисунков, при переходе к дробной производной по времени происходит замедление процесса теплообмена за счет температуры среды, что характерно фрактальным структурам с памятью.

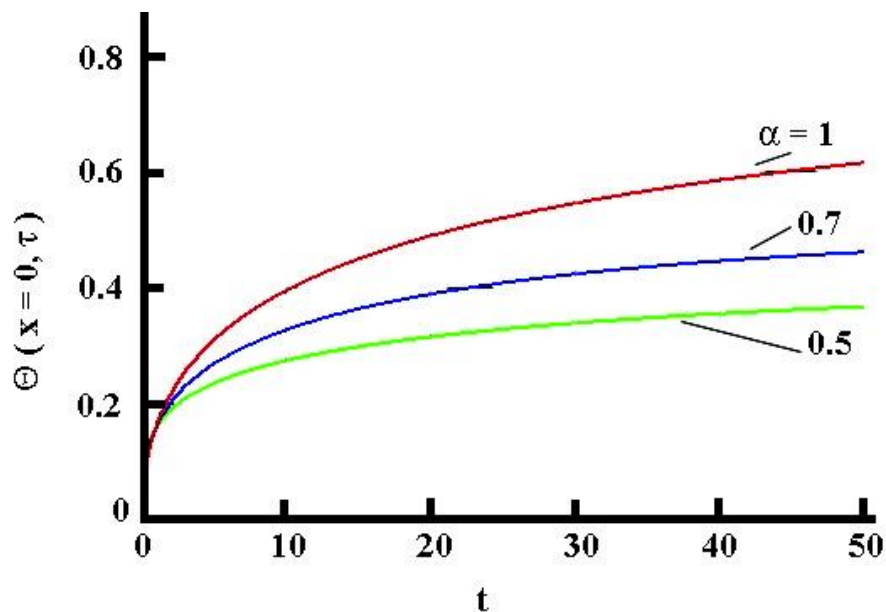


Рис. 5.11. Графики зависимости температуры от времени при различных значениях параметра дробной производной, 1-  $\alpha=0.5$ , 2-  $\alpha=0.7$ , 3-  $\alpha=1$ .

Продифференцируем выражение для изображения (5.84) по координате и получим:

$$\frac{\partial T_L(x, p)}{\partial x} = \frac{T_c - T_0}{p^{1-\alpha} \sqrt{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}}\right)} e^{-\sqrt{\frac{p^\alpha}{a}} x}.$$

Тогда, если положить  $x = 0$ , получим:

$$\frac{\partial T_L(0, p)}{\partial x} = \frac{T_c - T_0}{p^{1-\alpha/2} \sqrt{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}}\right)}.$$

Воспользовавшись равенством:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_L(0, p)}{\partial x} &= \frac{T_c - T_0}{p^{1-\alpha/2} \sqrt{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{p^\alpha}{a}}\right)} = \\ &= -H(T_c - T_0) \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-H\sqrt{a} \cdot \tau^{\alpha/2})^n}{\Gamma(\alpha/2n + 1)} e^{-pt} dt \end{aligned}$$

запишем выражение для оригинала:

$$\frac{\partial T_L(0, \tau)}{\partial x} = -H(T_c - T_0) \cdot E_{\alpha/2, 1}(-H\sqrt{a} \cdot \tau^{\alpha/2}).$$

Следовательно, плотность теплового потока равна:

$$q = b \cdot (T_c - T_0) \cdot E_{\alpha/2, 1}(-H\sqrt{a} \cdot \tau^{\alpha/2}).$$

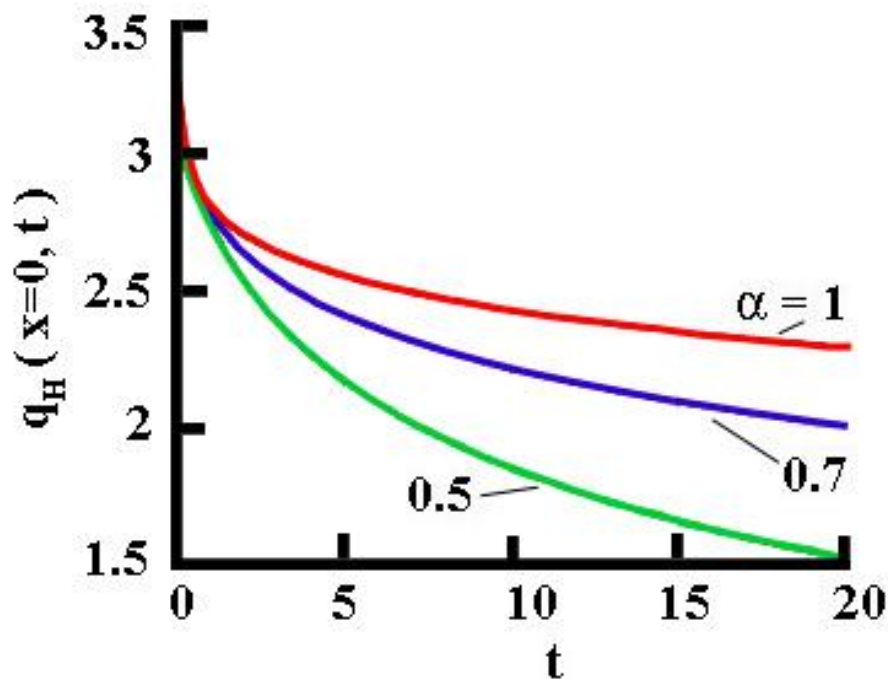


Рис. 5.12. Графики зависимости плотности теплового потока от времени при различных значениях параметра дробной производной, 1-  $\alpha = 0.5$ , 2-  $\alpha = 0.7$ , 3-  $\alpha = 1$ .

Как видно из рисунка 5.12, плотность потока тепла в первые моменты максимальна, а затем постепенно уменьшается, стремясь к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ . При этом, с уменьшением порядка производной по времени данный процесс замедляется. В начальный момент плотность теплового потока максимальна и равна  $q_{\max} = b \cdot (T_c - T_0)$ .

## Глава VI. Исследование температурных и барических закономерностей изменения теплопроводности горных пород

Мониторинг и прогноз температурного поля в призабойной зоне имеет большое значение на всех этапах подготовки, бурения и эксплуатации любой скважины и для решения многих задач, связанных с изучением и освоением земных недр [46;171;188]. Все это накладывает дополнительные требования к моделям, описывающим температурные поля, включая глубокое понимание тепловых свойств горных пород в целом и их эффективной теплопроводности в частности.

Как известно, процесс переноса тепла в твёрдых телах с упорядоченной кристаллической структурой имеет волновую природу, что приводит к обратно пропорциональной зависимости теплопроводности  $\lambda$  от температуры, в то время как процесс переноса тепла в твёрдых телах с аморфной структурой имеет активационный характер [131; 144;175;176] и  $\lambda \propto T^{0.5}$  [164]. В неупорядоченных кристаллических твёрдых телах массы атомов и их силовые константы беспорядочно меняются от узла к узлу, что вызывает ослабление фонных процессов рассеяния тепловых волн. Это в совокупности с влиянием границ блоков и дефектов кристаллической решётки приводит к достаточно сложному характеру температурной зависимости эффективной теплопроводности [158]. Тем не менее, анализ множества экспериментальных и теоретических работ (см. [147; 148] и ссылки в них) показывает, что температурная зависимость эффективной теплопроводности большого класса соединений и в первую очередь горных пород хорошо описывается степенным законом

$$\lambda(T) = const \cdot T^n, \quad (6.1)$$

где показатель степени  $n$  меняется в пределах от  $-0.5$  до  $+0.5$ .

С другой стороны, на эффективную теплопроводность горных пород существенно влияет гидростатическое давление [104]. При построении барических зависимостей эффективной теплопроводности горных пород (см.,

например, [197; 193]) обычно применяется линейная аппроксимация после некоторого давления ( $\sim 100$  МПа) без учета влияния давления на температурную зависимость. Несмотря на удовлетворительное согласие при достаточно высоких давлениях, этого может быть недостаточно при рассмотрении тепловых процессов, происходящих в диапазоне от атмосферного до 200 МПа.

В этой главе на основе проведенных исследований по теплопроводности горных пород в достаточно широком диапазоне температур 273 К – 523 К и давлений до 400 МПа, характерных для природных условий, выведены эмпирические уравнения для расчета теплопроводности горных пород. Как указано в [147; 148], исследования проводились абсолютным стационарным компенсационным методом плоских пластин на установке, состоящей из камеры высокого газового давления Unipress типа NMR-10, газового компрессора высокого давления GCA-10 Unipress (Польша), воздушного термостата с электронной регулировкой температуры до 0,1 К и измерительной ячейки. В качестве передающей давление среды использовался газ аргон с низкой теплопроводностью

$\lambda = 0.018 \frac{Вт}{м \cdot К}$ . Все экспериментальные данные, которые используем в работе, получены лабораторным путем под руководством доктора технических наук Эмирова С.Н., были результатами докладов на Всероссийских и Международных научно-практических конференциях и опубликованы в работах [32], [120], [121], [122], [123], [124], [129],[151], [152], [153],[154].

### **§ 1. Исследование температурных и барических закономерностей изменения теплопроводности песчаников**

Для проведения эксперимента по температурной и барической зависимости теплопроводности были взяты природные образцы мелкозернистого песчаника и мергеля из месторождений Республики Дагестан. Песчаник был взят из месторождения на глубине залегания 4495–4900 м, а мергель – из Сухокумского нефтегазового месторождения (скважина № 22) на глубине залега-



ния 3815 м. Песчаник имеет пористость  $K = 7\%$  и плотность  $\rho = 2.28 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а мергель – пористость  $K = 11.3\%$  и плотность  $\rho = 2.57 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . В табл. 6.1 приведены экспериментальные значения теплопроводности в зависимости от температуры и давления [123].

**Таблица 6.1.** Теплопроводность песчаника и мергеля ( $\lambda \text{ Вт/К} \cdot \text{м}$ ) в зависимости от температуры и давления

Т, К	Давление, МПа								
	0.1	50	100	150	200	250	300	350	400
<b>песчаник</b>									
<b>273</b>	2.05	2.21	2.23	2.26	2.27	2.277	2.283	2.288	2.292
<b>323</b>	1.93	2.14	2.15	2.18	2.19	2.20	2.21	2.215	2.22
<b>373</b>	1.84	2.059	2.10	2.12	2.13	2.14	2.15	2.155	2.16
<b>423</b>	1.766	2.02	2.04	2.06	2.08	2.09	2.097	2.104	2.109
<b>473</b>	1.702	1.94	2.00	2.02	2.035	2.044	2.052	2.059	2.065
<b>523</b>	1.647	1.92	1.95	1.97	1.98	2.004	2.013	2.02	2.026
<b>Мергель</b>									
<b>273</b>	1.63	1.82	1.98	2.04	2.07	2.09	2.11	2.13	2.15
<b>323</b>	1.75	1.93	2.10	2.16	2.19	2.21	2.23	2.25	2.27
<b>373</b>	1.85	2.03	2.20	2.27	2.30	2.32	2.34	2.36	2.38
<b>423</b>	1.94	2.12	2.30	2.37	2.40	2.42	2.44	2.46	2.48
<b>473</b>	2.02	2.21	2.39	2.46	2.49	2.5	2.53	2.55	2.57
<b>523</b>	2.10	2.29	2.47	2.55	2.58	2.60	2.62	2.645	2.66

Для вывода эмпирического уравнения для расчета теплопроводности представим уравнение (6.1) в виде

$$\lambda(T, P) = C(T_0, P) \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n(P)}, \quad (6.2)$$

где  $C(T_0, P) = \lambda(T_0, P)$ . (6.3)

При этом показатель  $n$  в степенном законе – безразмерная величина, которая зависит только от давления и не зависит от выбора фиксированной температуры  $T_0$ , а коэффициент  $C$  имеет размерность теплопроводности и зависит от выбора  $T_0$ . Кроме этого, следует особо отметить, что при точном выполнении степенного закона (6.1) и достаточно низкой погрешности эксперимента коэффициент  $C$  полностью определяется значением теплопроводности при температуре, выбранной в качестве фиксированной ( $T_0$ ).

Значения коэффициентов моделируются на основе экспериментальных значений, приведенных в табл. 6.1. Согласно табл. 6.1 нам известны дискретные значения  $\lambda_{i,j} = \lambda(T_i, P_j)$ , полученные с определенной погрешностью. Коэффициенты  $C_j$  и  $n_j$ , зависящие от давления, будем искать следующим образом. Обозначим через

$$r_i = \frac{\ln(\lambda_i / \lambda_{i-1})}{\ln(T_i / T_{i-1})}, \quad g_i = \frac{\lambda_i / \lambda_0}{(T_i / T_0)^{n_j}}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{6.4}$$

где  $r_i$  и  $g_i$  – безразмерные величины. Тогда имеем

$$n_j = \frac{1}{N} \sum_i r_i, \quad C_j = \frac{1}{N} \sum_i g_i, \tag{6.5}$$

где  $N$  – объем выборки. Значения  $C_j$  и  $n_j$  для песчаника приведены в табл. 6.2.

**Таблица 6.2.** Значения коэффициентов  $C_j$  и  $n_j$  для песчаника согласно

(6.4)

$n_j$	-0.34	-0.22	-0.21	-0.21	-0.21	-0.20	-0.20	-0.19	-0.19
$C_j$	0.997	1.076	1.09	1.104	1.111	1.11	1.114	1.116	1.118

Значения  $C_j$  и  $n_j$  для мергеля приведены в таблице 6.3.

**Таблица 6.3.** Значения коэффициентов  $C_j$  и  $n_j$  для мергеля согласно

(6.4).

$n_j$	0.39	0.354	0.34	0.344	0.339	0.337	0.334	0.335	0.328
$C_j$	1.00	1.115	1.216	1.25	1.269	1.28	1.293	1.304	1.318

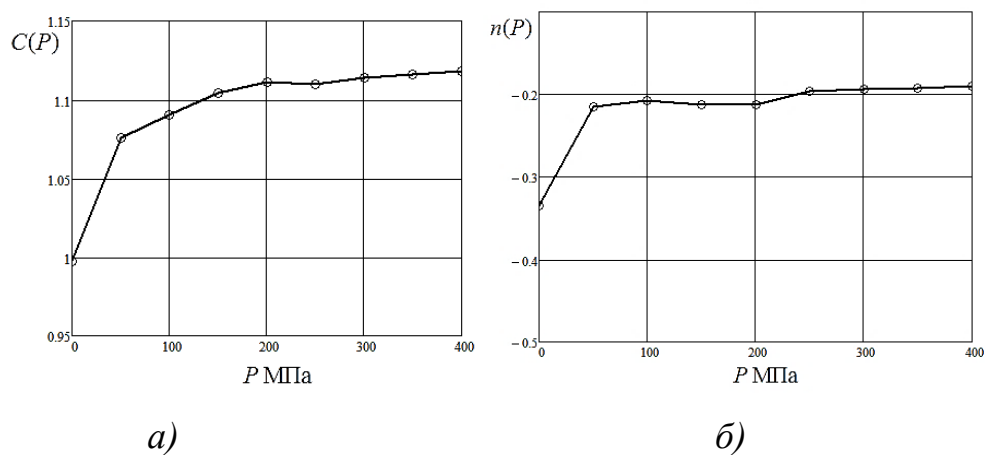


Рис. 6.1. Барические зависимости коэффициентов для песчаника:

а)  $C$  ( $T_0 = 273$  К), б)  $n$

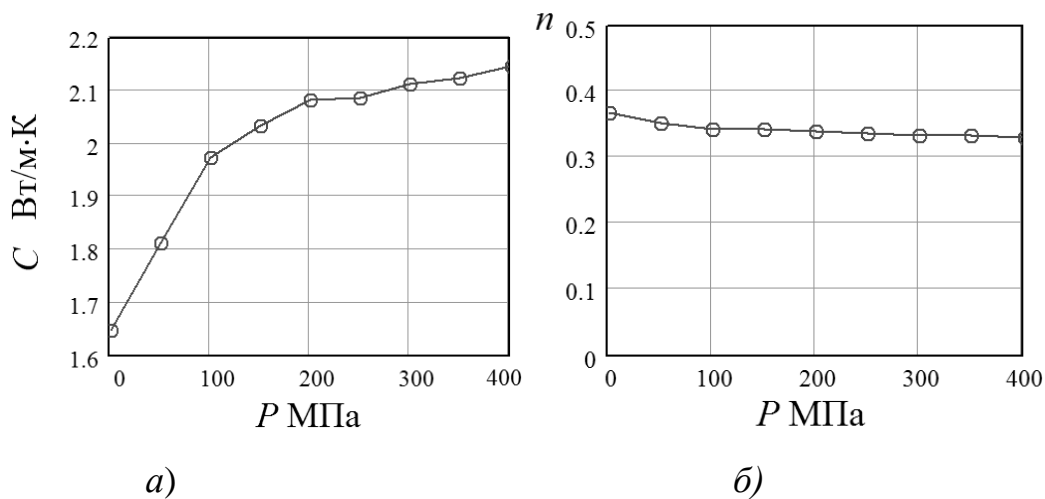


Рис. 6.2. Барические зависимости коэффициентов для мергеля:

а)  $C$  ( $T_0 = 273$  К), б)  $n$

Результаты вычисления барических зависимостей  $C$  (в единицах теплопроводности) и  $n$  по формулам (6.3) и (6.4) для рассмотренных выше экспери-

ментальных зависимостей  $\lambda(T, P)$  песчаника и мергеля представлены на рис. 6.1 и 6.2 соответственно.

Как видно из рисунков, давление в обоих случаях приводит к нелинейному росту теплопроводности горной породы. При этом наиболее интенсивный рост происходит в области до 100 МПа, а далее рост теплопроводности ослабевает.

Следует особо отметить, что давление влияет на температурную зависимость теплопроводности песчаника. Как мы видим из рис. 6.1б, если при  $P = 0.1$  МПа  $n \approx -0.335$ , то начиная с  $P = 100$  МПа  $P$  рост значение  $n$  ослабевает.

Коэффициенты  $n(P)$  и  $C(P)$  будем аппроксимировать в виде

$$n(P) = b \ln(P) + a, \quad (6.6)$$

$$C(P) = c \ln(P) + d, \quad (6.7)$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  определяются методом наименьших квадратов по экспериментальным данным. Для песчаника получаем  $a = -0.293$ ,  $b = 0.0172$ ,  $c = 0.0147$ ,  $d = 1.028$ .

Ошибка аппроксимации

$$\bar{A}_{n(P)} = \frac{0.1762}{9} \cdot 100 \% = 1.96 \% , \quad \bar{A}_{C(P)} = \frac{0.02878}{9} \cdot 100 \% = 0.32 \% .$$

Так как ошибки аппроксимации меньше 7 %, то данные уравнений (6.6) и (6.7) хорошо согласуются с экспериментальными данными. Индекс детерминации:

$$R_{n(P)}^2 = 1 - \frac{0.00031}{0.0169} = 0.981,$$

$$R_{C(P)}^2 = 1 - \frac{0.000175}{0.0118} = 0.985.$$

Определим статистическую значимость коэффициента детерминации по критерию Фишера. Число параметров уравнения  $m = 1$ . Тогда  $k_1 = m = 1$ ,  $k_2 = N - m - 1 = 9 - 1 - 1 = 7$ . Найдем критическое значение критерия:

$$F_{\text{крит}}(k_1, k_2, \alpha) = F_{\text{крит}}(1, 7, 0.05) \approx 5.59.$$

Найдем фактические значения критерия для уравнений (6.6) и (6.7), в случае песчаника:

$$F_{\text{факт.}C(P)}(k_1, k_2, \alpha) = F_{\text{факт.}C(P)}(1, 7, 0.05) = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{N - m - 1}{m} \approx 467.273,$$

$$F_{\text{факт.}n(P)}(k_1, k_2, \alpha) = F_{\text{факт.}n(P)}(1, 7, 0.05) = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{N - m - 1}{m} \approx 700.0943.$$

Поскольку  $F_{\text{факт.}} > F_{\text{крит}}$ , то коэффициенты детерминации статистически значимы. Следовательно, точность подбора уравнений высокая.

Тогда уравнение (6.2) в случае песчаника можно записать в виде

$$\lambda(P, T) = \lambda_0 \cdot (0.0147 \cdot \ln P + 1.028) \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{0.0172 \cdot \ln(P) - 0.293}. \quad (6.8)$$

Для мергеля получаем  $a = 0.373$ ,  $b = -0.00663$ ,  $c = 0.0367$ ,  $d = 1.07$ .

Ошибка аппроксимации

$$\bar{A}_{n(P)} = \frac{0.0684}{9} \cdot 100 \% = 0.76 \%,$$

$$\bar{A}_{C(P)} = \frac{0.1479}{9} \cdot 100 \% = 1.64 \%.$$

Так как ошибки аппроксимации меньше 7 %, то данные уравнений (6.6) и (6.7) хорошо согласуются с экспериментальными данными. Индекс детерминации:

$$R_{n(P)}^2 = 1 - \frac{0.000104}{0.00248} = 0.958,$$

$$R_{C(P)}^2 = 1 - \frac{0.00597}{0.0788} = 0.924.$$

Определим статистическую значимость коэффициента детерминации по критерию Фишера. Число параметров уравнения  $m = 1$ . Тогда  $k_1 = m = 1$ ,  $k_2 = N - m - 1 = 9 - 1 - 1 = 7$ . Критическое значение критерия равно:

$$F_{крит}(k_1, k_2, \alpha) = F_{крит}(1,7,0.05) \approx 5.59.$$

Найдем фактические значения критерия для уравнений (6.6) и (6.7), в случае мергеля:

$$F_{факт.C(P)}(k_1, k_2, \alpha) = F_{факт.C(P)}(1,7,0.05) = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{N-m-1}{m} \approx 45.6455,$$

$$F_{факт.n(P)}(k_1, k_2, \alpha) = F_{факт.n(P)}(1,7,0.05) = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{N-m-1}{m} \approx 196.0005.$$

Поскольку  $F_{факт.} > F_{крит}$ , то коэффициенты детерминации статистически значимы. Следовательно, точность подбора уравнений высокая.

Исследованы зависимости  $n(P)$  и  $C(P)$  для песчаника и мергеля из месторождений Республики Дагестан. Для зависимости  $n(P)$  и  $C(P)$  были выбраны логарифмические регрессии. Оценены их параметры методом наименьших квадратов. Статистические значимости уравнений проверены с помощью коэффициента детерминации и критерия Фишера. Установлено, что параметры модели статистически значимы. Полученные оценки уравнений регрессии позволяют использовать его для прогноза.

Тогда уравнение (6.2) в случае мергеля можно записать в виде:

$$\lambda(P, T) = \lambda_0 \cdot (0.0367 \cdot \ln P + 1.07) \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-0.00663 \cdot \ln(P) + 0.373} \quad (6.9)$$

На рис. 6.3 приведены графики зависимости теплопроводности песчаника и мергеля от температуры при различных значениях давления согласно уравнениям (6.8) и (6.9) и экспериментальным данным, приведенным в табл. 6.1. Как мы видим из рис. 6.3, экспериментальные данные хорошо согласуются с эмпирическими согласно (6.8) и (6.9).

**Выводы.** Таким образом, абсолютным стационарным методом измерена зависимость теплопроводности песчаника и мергеля от гидростатического давления до 400 МПа в области температур 273–523 К. Результаты показали, что температурная зависимость теплопроводности на всем барическом диапа-

зоне следует степенному закону  $\lambda \sim T^n$ . Барическая зависимость проявляет резкий нелинейный рост до 100 МПа, сопровождающийся существенным изменением значения степенного показателя.

В обоих случаях вместе с экспериментальными точками приведены кривые, полученные в соответствии со степенным законом (6.2) и коэффициентами  $C$  и  $n$ , рассчитанными из экспериментальных данных по (6.4).

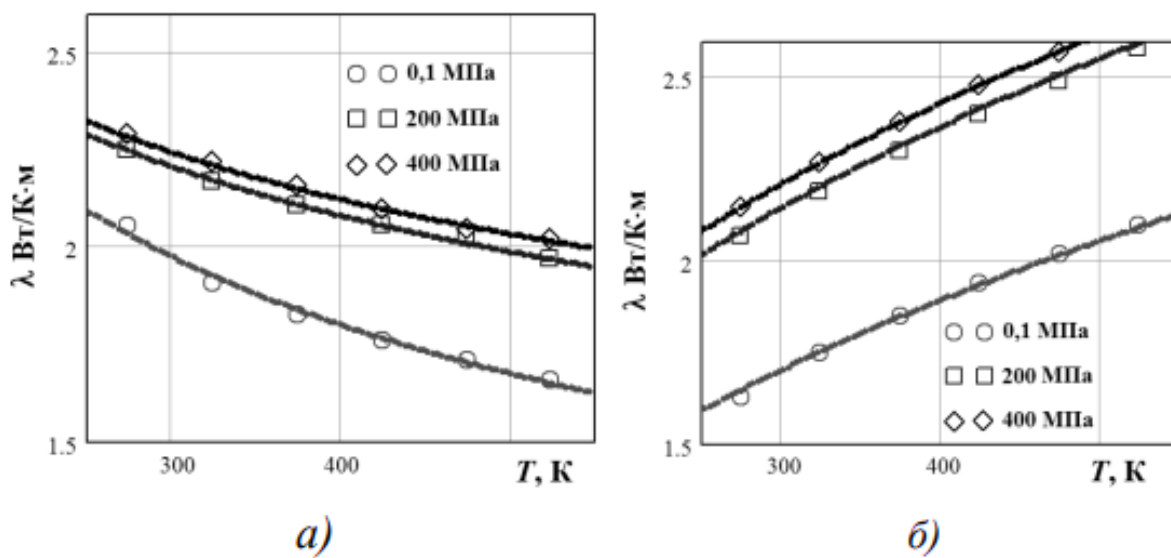


Рис. 6.3. Зависимость теплопроводности песчаника *a)* и мергеля *б)* от температуры при различных давлениях

### 1.1. Вклад водонасыщения в температурно-барическое поведение эффективной теплопроводности песчаника различной упорядоченности

Рассмотрим процессы воздействия различных факторов (температуры, давления, водонасыщения) на эффективную теплопроводность песчаников различной пористости и степени упорядоченности, что является актуальным на всех этапах подготовки, бурения и эксплуатации любой скважины и во многих задачах, связанных с изучением и освоением земных недр.

Измерения проводились в условиях газонасыщения и водонасыщения. Проведем сравнительный анализ температурных зависимостей (273–523 K) эффективной теплопроводности четырёх выбранных образцов песчаника. Два

из них имеют преобладающее кристаллическое упорядочение: образец 1 – из месторождения Кочубей (Республика Дагестан, плотность  $\rho = 2.27 \text{ г/см}^3$  и пористость  $k = 7\%$ ) и образец 2 – из месторождения Солончак (Республика Дагестан, плотность  $\rho = 2.18 \text{ г/см}^3$  и пористость  $k = 13\%$ ). А два – близкую к аморфной: образец 3 – из месторождения Тюменской сверхглубокой скважины (плотность  $\rho = 2.29 \text{ г/см}^3$ , пористость  $k = 11\%$ ) и образец 4 – из месторождения Буйнакск (Республика Дагестан, плотность  $\rho = 2.17 \text{ г/см}^3$  и пористость  $k = 16.2\%$ ).

Вопросы, связанные с оценкой, мониторингом и прогнозированием температурного поля в призабойной зоне пласта, привлекают возрастающее внимание в связи с интенсификацией освоения земных недр. Одним из ключевых в этой связи является поведение эффективной теплопроводности горных пород в условиях залегания [171; 188; 199].

**Таблица 6.4.** Сводные данные

№ образца	1	2	3	4
Месторождение	Кочубей, Республика Дагестан	Солончак, Республика Дагестан	Тюменская сверхглубокая скважина	Буйнакск, Республика Дагестан
$\phi$	0.07	0.11	0.13	0.16
$\rho (\text{г/см}^3)$	2.27	2.29	2.18	2.17
$n_0$ (газонасыщенный, аргон)	- 0.32	+ 0.32	- 0.21	+ 0.43
$n_0$ (водонасыщенный)	- 0.26	+ 0.29	- 0.19	+ 0.05



$P = 0.1 \text{ МПа}, T = 300 \text{ К}$				
$\lambda$ (Вт/м·К)	1.98	2.33	2.69	0.63
$\lambda_s$ (Вт/м·К)	~ 2.1	~ 2.7	~ 3.2	~ 0.8
$\lambda_{aq}$ (Вт/м·К)	2.32	2.49	3.75	2.26

В табл. 6.4 приведены сводные данные по образцам со значениями эффективной теплопроводности  $\lambda$ , оценочной теплопроводности твёрдой матрицы  $\lambda_s$  и эффективной теплопроводности в условиях водонасыщения  $\lambda_{aq}$  при температурах 300 К и 500 К.

Для выявления основных закономерностей совокупного воздействия давления, температуры и водонасыщения на эффективную теплопроводность  $\lambda$  нами были проведены исследования ряда образцов песчаников, взятых с различных месторождений (см. табл. 6.1).

Экспериментальные температурные зависимости эффективной теплопроводности для двух давлений – атмосферного и 250 МПа – в условиях газо – и водонасыщения для рассмотренных образцов 1–4 представлены на рис. 6.4 а–с соответственно.

Как было показано в ряде наших работ [120; 121; 151], температурная зависимость эффективной теплопроводности большого класса соединений в достаточно широком температурно-барическом диапазоне хорошо описывается степенным законом (6.1).

Линии на рис. 6.4 построены в соответствии с вычисленными методом наименьших квадратов коэффициентами, и, как видно из рисунка, степенная зависимость величины эффективной теплопроводности от температуры выполняется с очень хорошей точностью для каждого образца при любом фиксированном давлении.

Степенной показатель  $n$  в этом случае является объективным параметром, не зависящим от выбранной системы единиц и свидетельствующим о ме-

ре упорядоченности исследуемой породы. Его барическая зависимость представлена на рис. 6.5.

Применив (6.1) к текущей ( $T$ ) и фиксированной  $T_0$  температурам, мы можем перейти к

$$\lambda(T, P) = \lambda(T_0, 0) \cdot (1 + \delta_{T_0}(P)) \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{n(P)}, \quad (6.10)$$

где  $\delta_{T_0}(P) = \frac{\lambda(T_0, P)}{\lambda(T_0, 0)} - 1$ . (6.11)

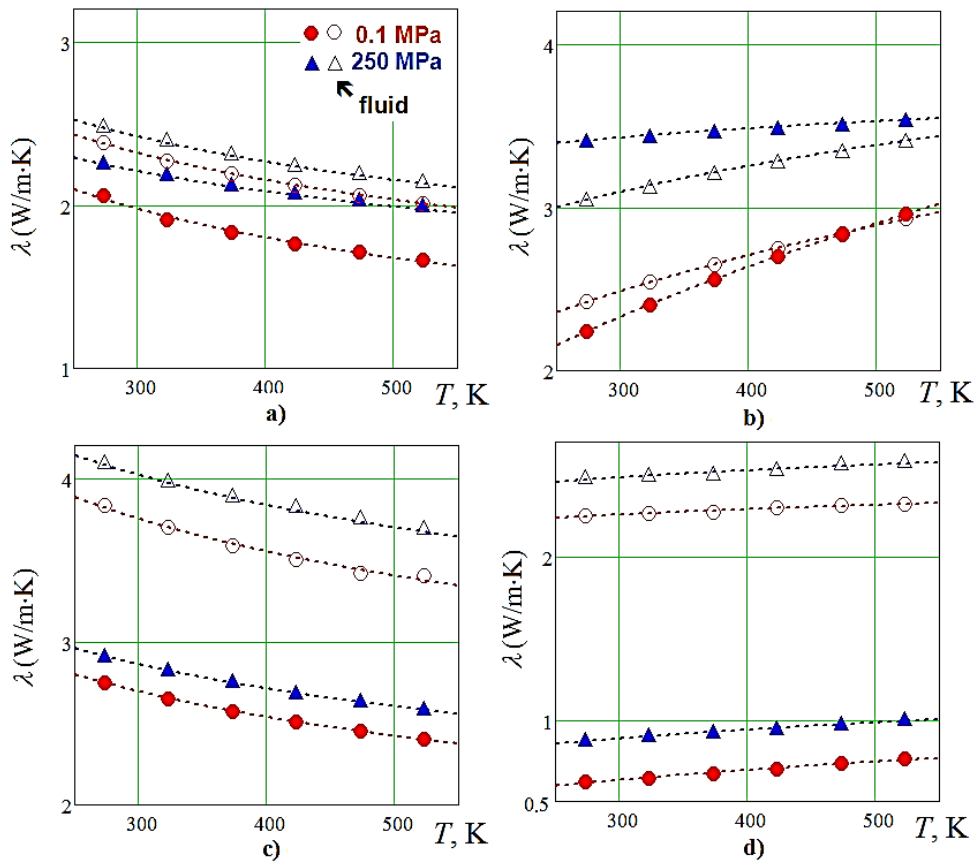


Рис. 6.4. Температурные зависимости эффективной теплопроводности для образцов 1–4 : ● – 0.1 МПа, ▲ – 250 МПа, открытые символы соответствуют водонасыщению, закрашенные газонасыщению.

В случае сильно упорядоченных (монокристаллических) и полностью аморфных материалов зависимость  $\delta_{T_0}(P)$  часто близка к линейной. Когда

исследуются комплексные многокомпонентные структуры, к которым относятся и осадочные горные породы, эта зависимость, особенно на начальном участке, носит сильно нелинейный характер. Это, скорее всего, связано с уменьшением пористости.

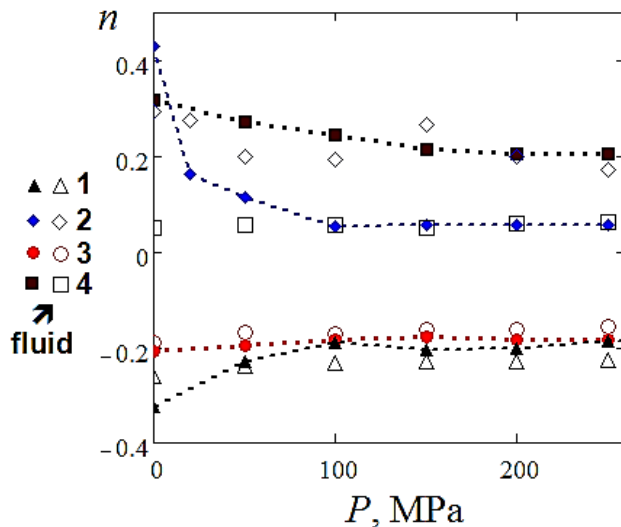


Рис. 6.5. Барическая зависимость степенного коэффициента  $n$ . Открытые символы соответствуют водонасыщению, закрашенные газонасыщению

Барические зависимости  $\delta_{300K}(P)$ , согласно (6.11), для исследованных образцов 1–4 приведены на рис. 6.4. Подставляя их вместе с приведёнными на рис. 6.5 барическими зависимостями  $n(P)$  и приведёнными в табл. 6.2 значениями эффективной теплопроводности для газонасыщенного  $\lambda$  и водонасыщенного  $\lambda_{aq}$  песчаников в выражение (6.10), можно вычислить значения эффективной теплопроводности во всём исследуемом диапазоне.

Существует множество моделей, описывающих теплопроводность пористых композитных материалов и горных пород, как основанных на упрощённой геометрии компонент и пор, так и эмпирических. В приложении к реальным горным породам все они имеют достаточно ограниченный диапазон применения в связи с сильной вариативностью и сложностью объектов. Тем не менее, даже относительно простые модели дают возможность, исходя из изме-

ренной эффективной теплопроводности при атмосферном давлении и известной пористости, оценить теплопроводность твёрдой матрицы  $\lambda_s$ .

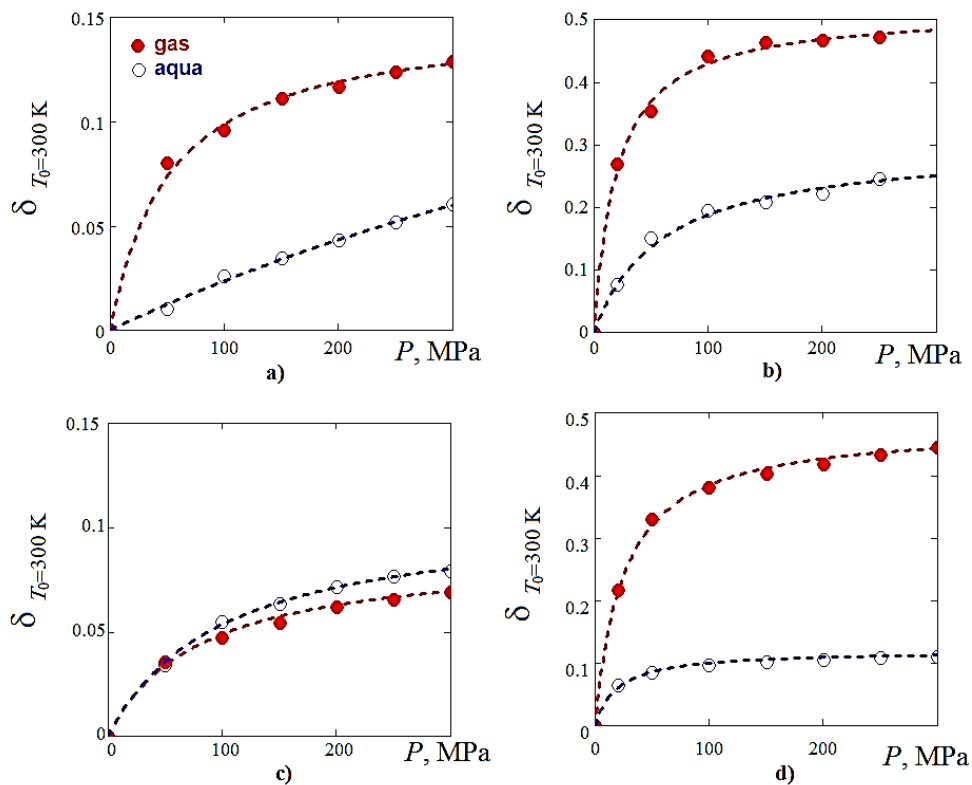


Рис. 6.6. Барические зависимости  $\delta_{T_0}(P)$  для  $T_0 = 300K$ . Открытые символы соответствуют водонасыщению, закрашенные – газонасыщению

Результаты, полученные с помощью модели Рассела с учётом относительной малости теплопроводности аргона (что при атмосферном давлении выполняется для всех образцов во всём температурном диапазоне) также представлены в табл. 6.4. Они достаточно хорошо согласуются как с другими адекватными моделями, так и с барическими зависимостями, представленными на рис. 6.6. Действительно, если аппроксимировать  $\delta_{T_0}(P)$  для  $P > 150 \text{ МПа}$  газонасыщенных образцов прямой линией, то ее пересечение с осью ординат даёт приращение, соответствующее  $(\lambda_s - \lambda)/\lambda$ .

$$\lambda_s = \lambda \frac{1 - \phi^{2/3} + \phi}{1 - \phi^{2/3}}, \quad (6.12)$$

Водонасыщенные песчаники, как и ожидалось, демонстрируют существенно меньшую барическую зависимость  $\delta_{T_0}(P)$  и  $n(P)$  (в нашем случае исключение составил третий образец). Существенно более высокая плотность и теплопроводность и значительно меньшая сжимаемость жидкости относительно газа сглаживают эффекты, связанные с уменьшением пористости с приложением давления. Но (опять-таки за исключением третьего образца) неожиданным оказалось, что значение эффективной теплопроводности при водонасыщении для атмосферного давления выше соответствующей величины  $\lambda_s$ . То, что теплопроводность воды в нашем температурно-барическом диапазоне не превышала  $\sim 0.7$  Вт/м·К, говорит о невозможности рассмотрения песчаника в виде двухкомпонентной системы «твёрдая матрица/флюид». Действительно, теплопроводность различных твёрдых составляющих песчаника сильно варьируется, и, вероятно, следует рассматривать более сложную многокомпонентную модель, учитывающую влияние смачивания на теплопроводность границ блоков. Тем не менее, полученные эмпирические оценки уже могут быть использованы в расчётах и находятся в полном соответствии с результатами, представленными в недавних работах других авторов [171; 199].

Температурная зависимость разности между эффективной теплопроводностью водонасыщенного и сухого песчаников  $\Delta\lambda = \lambda_{aq} - \lambda$  при тех же  $PT$ -условиях представлена на рис. 6.7.

Как видно из рисунка, значения  $\Delta\lambda$ , как и  $PT$ -поведение данной величины, сильно различаются для всех образцов.

Показано, что для песчаников с аморфизированной структурой одновременное увеличение температуры и давления может привести к достаточно существенному суммарному вкладу, который должен быть принят во внимание. Обнаружена возможность аномального влияния водонасыщения на эффективную теплопроводность аморфизированных песчаников.

Для образца 4 (с самой малой эффективной теплопроводностью сухого песчаника) наблюдается максимальное значение  $\Delta\lambda$  с очень малой температурной и практически отсутствующей барической зависимостью. Образец 2 (с максимальным в нашем случае значением эффективной теплопроводности сухого песчаника), напротив, демонстрирует малую величину  $\Delta\lambda$  с сильной температурной зависимостью. Более того, данная зависимость кардинально различается при приложении даже относительно небольшого давления (20 МПа). При высоких давлениях величина  $\Delta\lambda$  имеет отрицательный знак во всём очерченном диапазоне (275–523 К) и возрастает с температурой, в то время как при атмосферном давлении она является положительной при низких температурах, убывает с температурой и претерпевает инверсию знака примерно при 500 К.

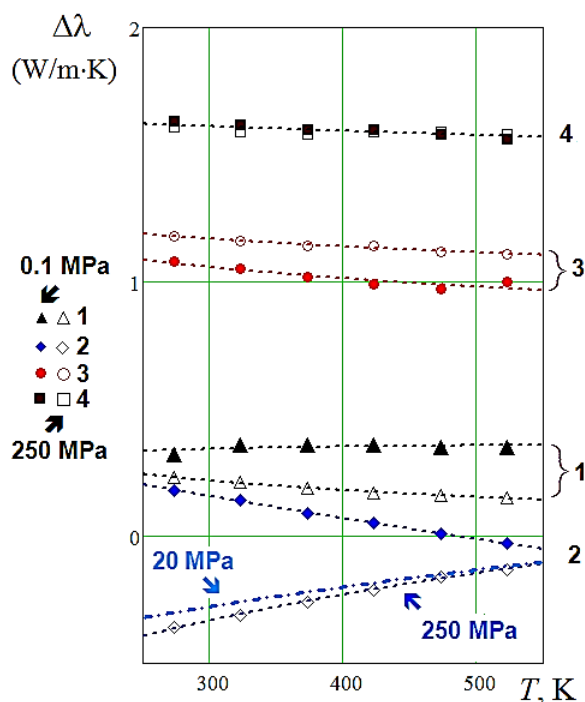


Рис. 6.7. Температурные зависимости разности между эффективной теплопроводностью водонасыщенного и газонасыщенного песчаников при тех же РТ-условиях. Открытые символы соответствуют давлению 250 МПа, закрашенные – атмосферному

Зависимость  $\Delta\lambda$  при 300 К и 500 К от пористости представлена на рис. 6.8. Из представленных данных рано делать обоснованные статистические выводы, но они дают основание для дальнейшего сравнительного анализа.

При более распространенной для песчаников поликристаллической упорядоченности, при которой  $n < 0$ , совокупным  $PT$ -воздействием, как уже отмечалось рядом авторов [154; 156], часто действительно можно пренебречь ввиду взаимной компенсации. Это видно из рис. 6.4(а–с), где  $\lambda(300\text{K}, 0.1\text{MPa}) \approx \lambda(450 \div 500\text{K}, 250\text{MPa})$ . В то же время для аморфной упорядоченности (где  $n > 0$ ) суммарное воздействие обоих факторов может оказаться существенным (см. рис. 6.4b; 6.4d).

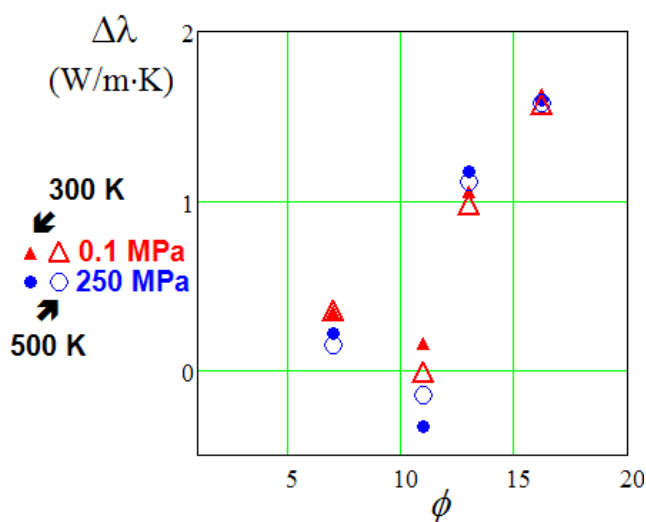


Рис. 6.8. Зависимость разности между эффективной теплопроводностью водонасыщенного и газонасыщенного песчаников при тех же  $PT$ -условиях для 300 К (закрашенные символы) и 500 К (открытые символы) от пористости

## §2. Исследование температурной и барической зависимости теплопроводности гранитов

Для проведения эксперимента по расчету теплопроводности гранита в зависимости от температуры и давления взяты природные образцы четырех гранитов: месторождение Республика Дагестан, глубина залегания 3020–3090 м, плотность  $\rho = 3.2 \text{ г/см}^3$ , пористость  $k = 1\%$  (образец 1); месторождение

Кольский полуостров, поверхностные отложения, плотность  $\rho = 2.54 - 2.57 \text{ г/см}^3$ , пористость  $k = 1 - 2 \%$  (образцы 2–4). Измерения теплопроводности проводились абсолютным стационарным методом. Экспериментальные данные по теплопроводности двух образцов гранита приведены в таблицах 6.5 и 6.6 [120; 123; 150; 155]. В работе [163] исследована теплопроводность гранитов при высокой температуре.

**Таблица 6.5.** Теплопроводность  $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  гранита из месторождения

Кольский полуостров плотностью  $\rho = 2.54 - 2.57 \text{ г/см}^3$ , пористостью  $k = 1 - 2 \%$  в зависимости от температуры и давления

Т, К	Давление, МПа						
	0.1	25	50	100	150	200	250
<b>Гранит из месторождения Кольский полуостров плотностью</b> $\rho = 2.54 \text{ г/см}^3$ , пористостью $k = 1 \%$							
<b>273</b>	2.14	2.3	2.35	2.39	2.42	2.45	2.48
<b>323</b>	2.08	2.207	2.25	2.29	2.34	2.38	2.42
<b>373</b>	2.04	2.14	2.195	2.235	2.275	2.31	2.35
<b>423</b>	2.0	2.1	2.14	2.17	2.21	2.25	2.3
<b>473</b>	1.96	2.06	2.09	2.13	2.16	2.2	2.23
<b>523</b>	1.93	2.02	2.06	2.09	2.12	2.15	2.18
<b>Гранит из месторождения Кольский полуостров плотностью</b> $\rho = 2.57 \text{ г/см}^3$ , пористостью $k = 2 \%$							
<b>273</b>	2.0	2.06	2.11	2.16	2.2	2.25	2.3
<b>323</b>	1.92	1.98	2.02	2.07	2.12	2.17	2.22
<b>373</b>	1.85	1.93	1.972	2.02	2.07	2.12	2.16
<b>423</b>	1.8	1.87	1.90	1.94	2.0	2.04	2.1
<b>473</b>	1.75	1.81	1.85	1.89	1.95	1.995	2.05
<b>523</b>	1.71	1.77	1.81	1.85	1.9	1.94	1.984



**Таблица 6.6.** Теплопроводность  $\lambda, \frac{Вт}{м \cdot К}$  и теплоемкость  $c_p, \frac{Дж}{кг \cdot К}$  гранита месторождение Республика Дагестан, глубина залегания 3020–3090 м, плотность  $\rho = 3.2 г/см^3$ , пористость  $k = 1\%$  в зависимости от температуры

Т, К	$c_p, \frac{Дж}{кг \cdot К}$	$\lambda, \frac{Вт}{м \cdot К}$	$a \cdot 10^6 м^2/с$
300	600	3.39	1.78
320	621	3.243	1.665
340	635	3.111	1.57
360	646	2.991	1.475
380	655	2.881	1.39
400	663	2.782	1.312
420	668	2.691	1.238
440	674	2.603	1.180
460	680	2.528	1.128
480	685	2.455	1.085
500	690	2.387	1.04
520	695	2.323	1.01
540	699	2.264	0.973
560	704	2.207	0.942
580	708	2.155	0.920
600	712	2.105	0.900
620	716	2.059	0.885
640	719	2.014	0.873
660	722	1.970	0.860
680	725	1.931	0.850
700	728	1.892	0.840

Экспериментальные данные будем аппроксимировать в виде:

$$\lambda(T, P) = \lambda(\lambda_0, P_{прив.}) \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n(P)}. \quad (6.13)$$

Здесь  $\lambda(\lambda_0, P_{прив.})$  – зависимость теплопроводности от давления,  $\lambda_0 = \lambda_0(T_0, P_0)$ ,  $P_{прив.} = \frac{P}{P_0}$ ,  $n(P) = \beta \cdot (P_{прив.})^\xi$  – барическая зависимость показателя степени,  $\beta = -\frac{\sigma_1 \cdot \Delta\lambda_T}{\lambda_0}$ ,  $\Delta\lambda_T$  – приращение теплопроводности при постоянном давлении,  $\xi = 0.65 \cdot \ln(\lambda_0 / (\lambda_0 + \Delta\lambda_P))$ .

В равенстве (6.13) зависимость теплопроводности от давления  $\lambda(\lambda_0, P_{прив.})$  представима в виде

$$\lambda(\lambda_0, P_{прив.}) = \lambda_0(T_0, P_0) \cdot \left( 1 + \frac{P}{P_0} \right)^\alpha, \quad (6.14)$$

где  $\alpha = \frac{\sigma_2 \Delta\lambda_P}{\lambda_0}$ ;  $\Delta\lambda_P$  – приращение теплопроводности при постоянной температуре.

Величины  $\alpha$  и  $\beta$  имеют физический смысл. Как мы видим, они равны отношениям приращения теплопроводности при постоянной температуре и постоянном давлении к  $\lambda_0$  соответственно. Параметры  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  определяют опытным путем согласно экспериментальным данным.

Тогда, если (6.14) подставим (6.13), получим

$$\lambda(T, P) = \lambda_0(T_0, P_0) \cdot \left( 1 + \frac{P}{P_0} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n(P)}. \quad (6.15)$$

Следует отметить, что в рассматриваемом диапазоне давлений атмосферное давление 0.1 МПа близко к нулевому и им можно пренебречь.

На рис. 6.9 приведены графики зависимости теплопроводности четырех образцов гранита от температуры. На графиках сплошными линиями изобра-

жены зависимости теплопроводности четырех образцов гранита от температуры согласно уравнению (6.14), а кружочками – согласно экспериментальным данным. Как видно на рис. 6.9, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими данными, полученными согласно уравнению (6.15).

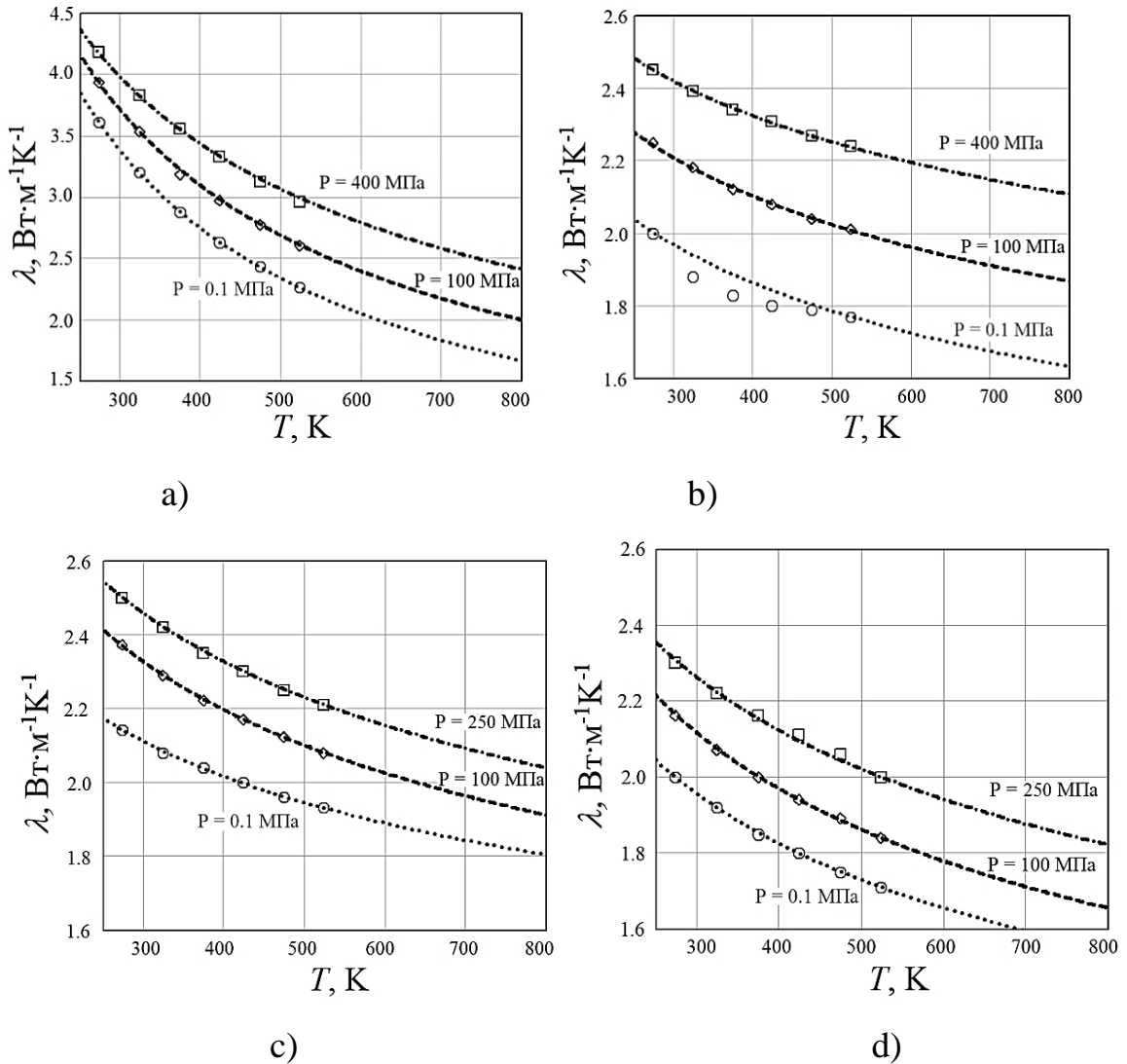


Рис. 6.9. Графики зависимости теплопроводности гранита от температуры согласно экспериментальным данным и уравнению (6.15) для образцов 1, 2, 3 и 4 [a), b), c) и d)] соответственно

В равенстве (6.15) барическая зависимость показателя степени стремится к константе при высоких давлениях, то есть  $n(P) \rightarrow \text{const}$  при  $P \rightarrow \infty$ .

Для образца гранита с плотностью  $\rho = 3.204 \text{ г} / \text{см}^3$  при постоянном давлении получаем, что  $n(P) \approx -0.687$ .

На рис. 6.10 приведены графики зависимости теплопроводности гранита от давления. На графике сплошной линией изображена зависимость теплопроводности гранита от давления согласно уравнению (6.15), а кружочками и четырехугольниками – согласно экспериментальным данным. Как видно на рис. 6.10, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими данными, полученными согласно уравнению (6.15) при постоянной температуре.

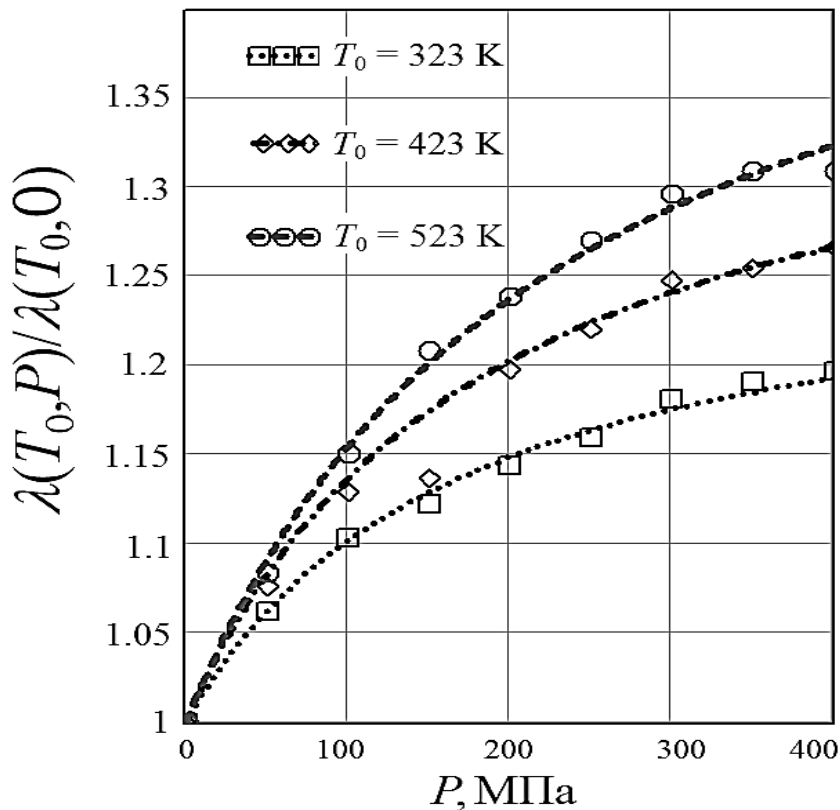


Рис. 6.10. Графики барической зависимости теплопроводности при постоянной температуре для образца 1 с плотностью  $\rho = 3.204 \text{ г/см}^3$

Для расчета теплоемкости гранита в зависимости от времени при  $P = 0.1$  МПа получено следующее эмпирическое уравнение:

$$c(T) = c_0 \cdot \left[ a + b \cdot \frac{T}{T_0} + d \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-2} \right], \quad (6.16)$$

где  $c_0 = 600 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ;  $T_0 = 300 \text{ К}$ ;  $a$ ,  $b$ ,  $d$  – параметры уравнения.

В частности, для образца 1 с плотностью  $\rho = 3.204 \text{ г/см}^3$  (глубина залегания 3020–3090 м) значения параметров равны

$$a = 1.144, b = 0.044, d = -0.189. \quad (6.17)$$

На рис. 6.11 приведены графики зависимости теплоемкости гранита от температуры для образца 1 с плотностью  $\rho = 3.204 \text{ г/см}^3$ . На графике сплошной линией изображена зависимость теплоемкости гранита от температуры согласно уравнению (6.16) при значениях параметров (6.17), а кружочками – согласно экспериментальным данным. Как видно на рис. 6.11, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими данными, полученными согласно уравнению (6.17).

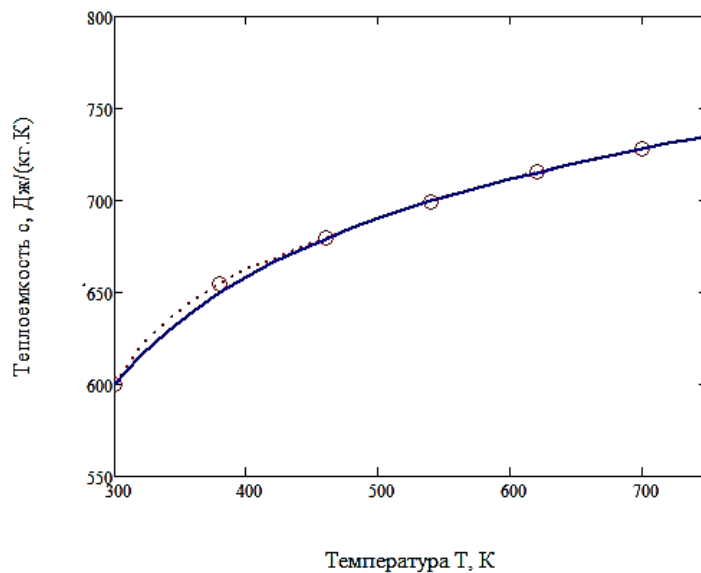


Рис. 6.11. Графики зависимости теплоемкости гранита с плотностью

$$\rho = 3.204 \text{ г/см}^3 \text{ от температуры при давлении } 0.1 \text{ МПа}$$

Оценим границы возможной экстраполяции для гранита. В сторону более высоких температур она, по-видимому, правомерна, по меньшей мере до окрестностей первого ожидаемого фазового перехода:  $\alpha$ – $\beta$ -перехода кварца, где его обычная форма с тригональной симметрией обратимо переходит в другую форму с гексагональной симметрией. Температура такого перехода составляет 845 К при атмосферном давлении и возрастает до 945 К при 375 МПа

[198]. С другой стороны, необходимо принимать во внимание то, что температура плавления (в том числе частичного) сложного композитного соединения может понижаться с ростом давления, особенно при существенном флюидо – и влагонасыщении. Тем не менее, в очерченном диапазоне давлений (до 400 МПа) наличие экспериментальной температурной зависимости, снятой при атмосферном давлении и достаточно хорошо подчиняющейся степенному закону до  $\sim 800\text{--}900$  К (см., например, [161]), может позволить достаточно надежно оценить эффективную теплопроводность во всем диапазоне, используя барические зависимости  $n(P)$  и  $\lambda(\lambda_0, P)$ , полученные при более низких температурах ( $\sim 500$  К). Большинство экспериментальных зависимостей  $n(P)$  и  $\lambda(\lambda_0, P)$  также допускают небольшую экстраполяцию в сторону высоких давлений [120].

**Выводы.** На основании анализа экспериментальных температурно-барических зависимостей теплопроводности двух образцов гранита, полученных абсолютным стационарным методом, предложено описание, позволяющее производить точный расчет теплопроводности во всем рассматриваемом диапазоне с возможной экстраполяцией в ближний регион. Входящие в данное описание безразмерные барические функции  $n(P)$  и  $\lambda(\lambda_0, P)$  позволяют сделать вывод о кристаллической упорядоченности образцов [120].

### **§3. Исследование температурной и барической зависимости теплопроводности гранулитов**

Для проведения сравнительного экспериментального исследования температурной и барической зависимости теплопроводности были взяты природные образцы саксонских гранулитов (Германия), плотностью  $\rho = 2.06 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , пористостью  $k = 1\%$  и для сравнения – мелкозернистого солончака (Республика Дагестан, глубина залегания 5100м) плотностью  $\rho = 2.18 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , пористостью  $k = 13\%$ .

Измерения теплопроводности в зависимости от гидростатического давления до 400 МПа в области температур 273–473 К в камере высокого давления проводились абсолютным стационарным методом, описанном в работах [148; 152]. Передающей давление средой служил газ аргон  $\left(\lambda = 0.019 \frac{Вт}{м \cdot К}\right)$ .

Экспериментальные данные теплопроводности гранулитов и мелкозернистого солончака в зависимости от давления и температуры приведены в таблице 6.7 [124].

**Таблица 6.7.** Теплопроводность  $\lambda, \frac{Вт}{м \cdot К}$  саксонских гранулитов и мел-

козернистого солончака в зависимости от температуры и давления

Т, К	Давление, МПа								
	0.1	50	100	150	200	250	300	350	400
<b>Гранулит, <math>\rho = 2.06 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3</math>, <math>k = 1\%</math></b>									
<b>273</b>	2.06	2.19	2.27	2.31	2.34	2.37	2.38	2.38	2.38
<b>323</b>	1.96	2.13	2.19	2.24	2.28	2.31	2.32	2.32	2.32
<b>373</b>	1.85	2.05	2.11	2.16	2.2	2.23	2.24	2.24	2.24
<b>423</b>	1.77	1.94	2.04	2.09	2.13	2.15	2.16	2.16	2.17
<b>473</b>	1.70	1.86	1.96	2.01	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08
<b>523</b>	1.63	1.80	1.90	1.96	2.00	2.01	2.02	2.02	2.03
<b>Солончак, <math>\rho = 2.18 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3</math>, <math>k = 13\%</math></b>									
<b>273</b>	2.75	2.84	2.87	2.89	2.91	2.92	2.93	2.94	2.95
<b>323</b>	2.65	2.75	2.78	2.80	2.82	2.83	2.84	2.85	2.86
<b>373</b>	2.57	2.67	2.71	2.73	2.75	2.76	2.77	2.78	2.79
<b>423</b>	2.51	2.61	2.65	2.67	2.68	2.69	2.70	2.72	2.73
<b>473</b>	2.45	2.55	2.60	2.62	2.63	2.64	2.65	2.67	2.68
<b>523</b>	2.40	2.50	2.54	2.57	2.58	2.59	2.61	2.62	2.63

Как видим из таблицы, теплопроводность является функцией, зависящей от температуры и давления –  $\lambda(P, T)$ , то есть

$$\lambda(P, T) = \lambda_0 f(P_{np.}) \cdot T_{np.}^{n(P_{np.})}, \quad (6.18)$$

где  $P_{np.} = \frac{P}{P_0}$ ,  $T_{np.} = \frac{T}{T_0}$ ,  $P_0 = 0.1 \text{ МПа}$ ,  $T_0 = 273 \text{ К}$ . Здесь  $f(P_{np.})$  и  $n(P_{np.})$

– функции, зависящие от давления.

Функция  $f(P_{np.})$  имеет вид  $f(P_{np.}) = \frac{P_{np.} + a}{b \cdot P_{np.} + c}$ , где  $a, b, c$  параметры, а

функция  $n(P_{np.}) = d(1 + P_{np.})^m$ , где  $d, m$  – параметры. Значения параметров моделируются на основе экспериментальных данных. Для образцов саксонских гранулитов (Германия), плотностью  $\rho = 2.06 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $k = 1\%$  значения параметров равны  $a = 708.242$ ,  $b = 0.84$ ,  $c = 708.4$ ,  $d = -0.41$ ,  $m = -0.06$ . Тогда уравнение (6.18) примет вид

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 \cdot \frac{P_{np.} + 708.242}{0.84 \cdot P_{np.} + 708.4} \cdot (T_{np.})^{-0.41 \cdot (1 + P_{np.})^{-0.06}}, \quad (6.19)$$

где  $\lambda_0 = 2.06 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Для исследуемых образцов солончака значения параметров равны  $a = 1231.276$ ,  $b = 0.911$ ,  $c = 1231.365$ ,  $d = -0.22$ ,  $m = -0.026$ . В результате уравнение (6.18) принимает вид:

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 \cdot \frac{P_{np.} + 1231.276}{0.911 \cdot P_{np.} + 1231.365} \cdot (T_{np.})^{-0.22 \cdot (1 + P_{np.})^{-0.026}}, \quad (6.20)$$

где  $\lambda_0 = 2.75 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Ошибка аппроксимации

$$\bar{A}_{n(P)} = \frac{0.0974}{9} \cdot 100 \% = 1.08 \%,$$



$$\bar{A}_{C(P)} = \frac{0.1264}{9} \cdot 100 \% = 1.4 \%$$

Так как ошибки аппроксимации меньше 7 %, то данные уравнения (6.19) и (6.20) хорошо согласуются с экспериментальными данными. Индекс детерминации

$$R_{n(P)}^2 = 1 - \frac{0.000203}{0.00252} = 0.919, \quad R_{C(P)}^2 = 1 - \frac{0.00477}{0.0677} = 0.93.$$

Следовательно, точность подбора уравнений высокая.

Для обоих образцов на рис. 6.12 и 6.13 приведены зависимости теплопроводности от давления при температурах  $T = 273 \text{ K}, 373 \text{ K}, 473 \text{ K}$  и от температуры при давлениях  $P = 0.1 \text{ МПа}, 100 \text{ МПа}, 400 \text{ МПа}$ . Вместе с экспериментальными данными на рис. 6.12 и 6.13 приведены графики зависимостей теплопроводности от давления и температуры, полученные по уравнениям (6.19) и (6.20) для гранулитов и солончака соответственно. Как видно из рисунков, теоретические данные, полученные на основе уравнений (6.19) и (6.20), хорошо согласуются с экспериментальными данными.

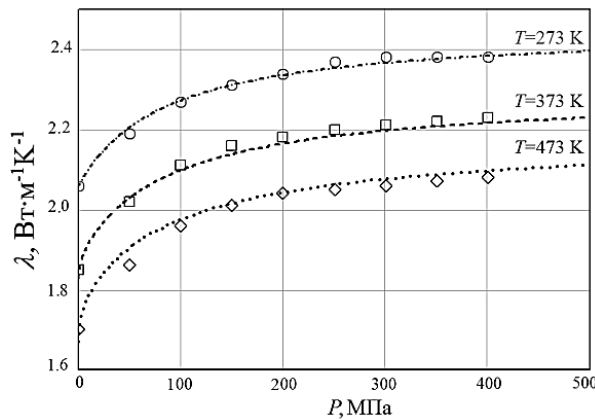


Рис. 6.12а. Графики зависимости теплопроводности гранулита от давления

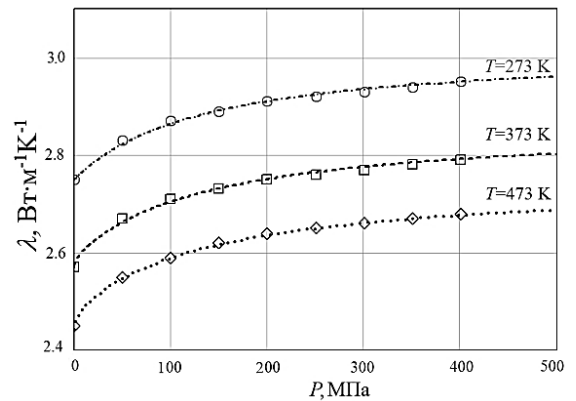


Рис. 6.12б. Графики зависимости теплопроводности газонасыщенного солончака от давления

Полученные аналитические выражения для теплопроводности (6.19) и (6.20) позволят определить теплопроводность саксонских гранулитов и мелко-

зернистого солончака в зависимости от температуры и давления, что поможет моделированию процессов теплопереноса и прогнозированию глубинных температур, в том числе в призабойной зоне.

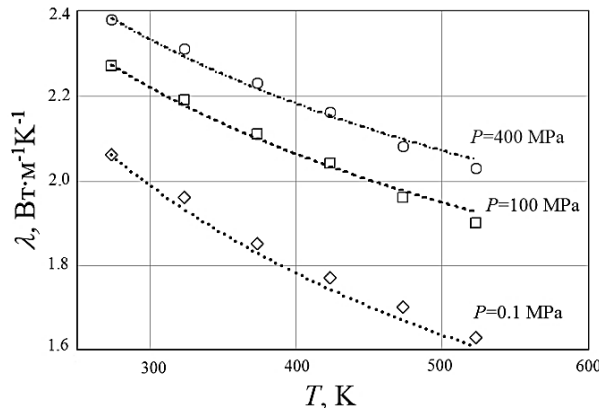


Рис. 6.13а. Графики зависимости теплопроводности гранулита от температуры

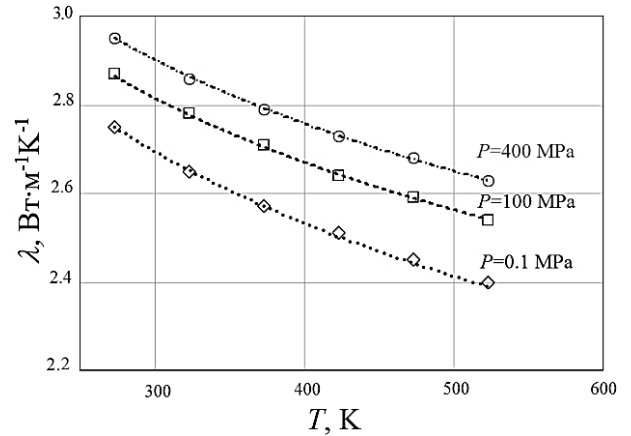


Рис. 6.13б. Графики зависимости теплопроводности газонасыщенного солончака от температуры

#### §4. Расчет теплопроводности газонасыщенных аргиллитов в зависимости от давления и температуры

Для исследования температурной и барической зависимости теплопроводности аргиллитов взяты природные образцы Сухокумских аргиллитов с плотностью  $\rho = 2,626 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , пористостью  $k = 13,3\%$  и глубиной залегания 3923 – 3930 м. Экспериментальные данные теплопроводности аргиллита в зависимости от гидростатического давления до 400 МПа в области температур 273–473 К получены с помощью камеры высокого давления. Эксперимент проводился абсолютным стационарным методом. В качестве среды, передающей давление, был взят аргон ( $\lambda = 0.019 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ).

Как было указано выше, теплопроводность есть функция, которая зависит от температуры и давления,  $\lambda(P, T)$ , то есть можно представить в виде:

$$\lambda(P, T) = \lambda_0 \cdot f(P_{np.}) \cdot T_{np.}^{n(P_{np.})}, \quad (6.21)$$

где  $P_{np.} = \frac{P}{P_0}$ ,  $T_{np.} = \frac{T}{T_0}$ ,  $P_0 = 0,1 \text{ МПа}$ ,  $T_0 = 273 \text{ К}$ ,  $f(P_{np.})$  и  $n(P_{np.})$  – функции,

которые зависят от давления.

**Таблица 6.8.** Теплопроводность  $\lambda$ ,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  образцов Сухокумских аргил-

литов в зависимости от температуры и давления.

Аргиллит, $\rho = 2.626 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , $k = 13.3\%$									
Т, К	давление МПа								
	0.1	50	100	150	200	250	300	350	400
Газонасыщенный									
273	1.55	1.57	1.60	1.61	1.63	1.65	1.68	1.70	1.72
323	1.60	1.63	1.65	1.67	1.70	1.72	1.75	1.78	1.81
373	1.65	1.67	1.70	1.73	1.75	1.77	1.80	1.83	1.86
423	1.69	1.71	1.74	1.77	1.79	1.82	1.85	1.87	1.91
473	1.73	1.75	1.77	1.79	1.83	1.85	1.87	1.90	1.93
523	1.76	1.79	1.82	1.84	1.87	1.89	1.92	1.95	1.99

В формуле (6.21) значение  $\lambda_0 = 1,55 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ . В случае газонасыщенных

аргиллитов функцию  $f(P_{np.})$  будем моделировать в виде

$$f(P_{np.}) = \frac{P_{np.} + a}{bP_{np.} + c}, \quad (6.22)$$

а  $n(P_{np.})$  – в виде

$$n(P_{np.}) = d(1 + P_{np.})^m, \quad (6.23)$$

где  $a, b, c, d, m$  – параметры. Значения параметров находим на основе экспериментальных данных. Для газонасыщенных аргиллитов значения параметров,

исходя из экспериментальных данных, равны:  
 $a = 667,71, b = 0,884, c = 667,826, d = 0,198, m = 0,015$ . Подставляя в (6.21)  
 $f(P_{np.}), n(P_{np.})$  и значения параметров, получим

$$\lambda(P, T) = \lambda_0 \cdot \frac{P_{np.} + 667,71}{0,884 \cdot P_{np.} + 667,826} \cdot T_{np.}^{0,198 \cdot (1 + P_{np.})^{0,015}} \quad (6.24)$$

Ошибка аппроксимации

$$\bar{A}_{n(P)} = \frac{0.0974}{9} \cdot 100 \% = 1.08 \% , \quad \bar{A}_{C(P)} = \frac{0.1264}{9} \cdot 100 \% = 1.4 \% .$$

Так как ошибки аппроксимации меньше 7%, то данные уравнения (6.22) и (6.23) хорошо согласуются с экспериментальными данными. Индекс детерминации:

$$R_{n(P)}^2 = 1 - \frac{0.000206}{0.00879} = 0.977, \quad R_{C(P)}^2 = 1 - \frac{0.00405}{0.0685} = 0.94.$$

Следовательно, точность подбора уравнений высокая.

На рис. 6.14 и 6.15 приведены графики зависимостей теплопроводности аргиллитов от давления и температуры. Для газо- и маслонасыщенных образцов аргиллитов приведены зависимости теплопроводности от давления при  $T = 273K, 373K, 473K$  и при  $P = 0.1MPa, 100MPa, 400MPa$ .

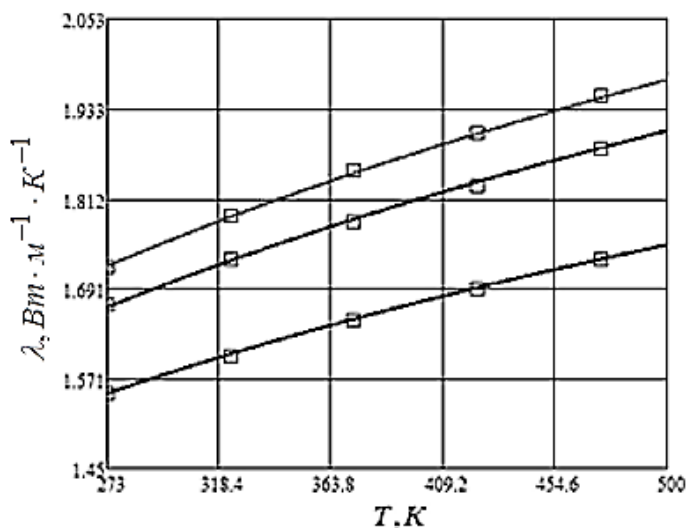


Рис. 6.14. Графики зависимости теплопроводности аргиллитов от температуры.

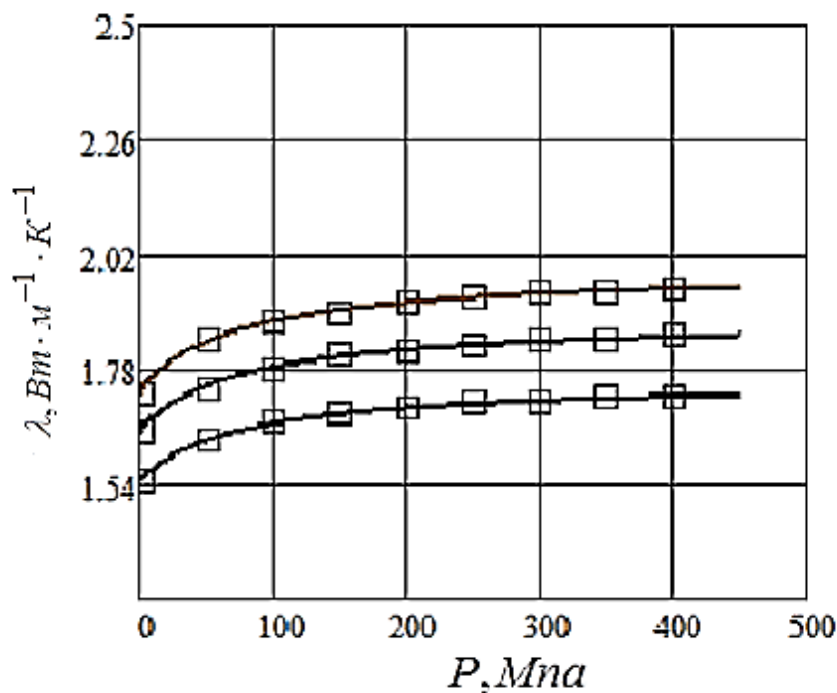


Рис. 6.15. Графики зависимости теплопроводности аргиллитов от давления

На рисунках 6.14 и 6.15 совместно с графиками экспериментальных данных приведены графики зависимостей теплопроводности от давления и температуры, которые получены согласно (6.24) для газонасыщенных аргиллитов. Как видим из рис. 6.14 и 6.15, теоретические данные, полученные согласно уравнению (6.24), хорошо согласуются с экспериментальными данными.

### §5. Исследование температурной и барической зависимости теплопроводности известняка

Для эксперимента были взяты образцы газонасыщенных известняков из месторождения Солтан-Гаша, Южно-Сухокумск на глубине залегания 2685м, с плотностью  $\rho=2.38 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и пористостью  $k=5\%$ . В табл. 6.9 приведены экспериментальные значения теплопроводности в зависимости от температуры и давления [37].

**Таблица 6.9.** Теплопроводность песчаника и мергеля ( $\lambda \text{ Вт/К} \cdot \text{м}$ ) в зависимости от температуры и давления

Т, К	Р, МПа								
	0,1	50	100	150	200	250	300	350	400
<i>газонасыщенный</i>									
273	1.98	2.23	2.27	2.29	2.30	2.31	2.32	2.33	2.34
323	1.86	2.11	2.15	2.18	2.19	2.20	2.21	2.22	2.23
373	1.760	2.01	2.06	2.08	2.10	2.11	2.12	2.11	2.15
423	1.678	1.93	1.98	2.00	2.02	2.03	2.04	2.05	2.07
473	1.610	1.86	1.91	1.94	1.96	1.97	1.98	1.99	2.01
523	1.549	1.80	1.85	1.88	1.90	1.91	1.92	1.93	1.85

Как мы видим из экспериментальных данных, коэффициент  $C$  и показатель  $n$  в уравнении (1) являются функциями, зависящими от давления. Таким образом, уравнение (1) можно представить в виде:

$$\lambda(T, P) = f(\lambda_0, P_{np}) \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n(P_{np})}. \quad (6.25)$$

где  $P_{np} = \frac{P}{P_0}$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $f(\lambda_0, P_{np}) = \lambda_0 \cdot C(T_0, P_{np})$ .

Как мы видим из равенства (6.25), коэффициент  $C$  и показатель  $n$  являются безразмерными величинами, зависящими от давления и не зависящими от выбора фиксированной температуры  $T_0$ , а функция  $f(\lambda_0, P_{np})$  имеет размерность теплопроводности.

На основе экспериментальных данных будем находить дискретные значения коэффициента  $C$  и показателя  $n$  в зависимости от давления и температуры. Для этого воспользуемся равенствами (6.3) и (6.4).

В таблице 6.10 приведены значения  $C_j$  и  $n_j$  для газонасыщенного известняка.

**Таблица 6.10.** Значения коэффициентов  $C_j$  и  $n_j$  для газонасыщенного известняка согласно (4).

$n_j$	-0.378	-0.324	-0.315	-0.303	-0.294	-0.293	-0.291	-0.29	-0.281
$C_j$	1	1.123	1.147	1.156	1.162	1.167	1.172	1.177	1.183

Графики барических зависимостей  $C$  (в единицах теплопроводности) и  $n$  по формулам (6.3) и (6.4) для экспериментальных данных  $\lambda(T, P)$  газонасыщенного известняка приведены на рис. 6.16. Как видно из графиков, давление в обоих случаях приводит к нелинейному росту теплопроводности известняка. При этом наиболее интенсивный рост происходит в промежутке от 0.1 до 100 МПа, а далее рост ослабевает.

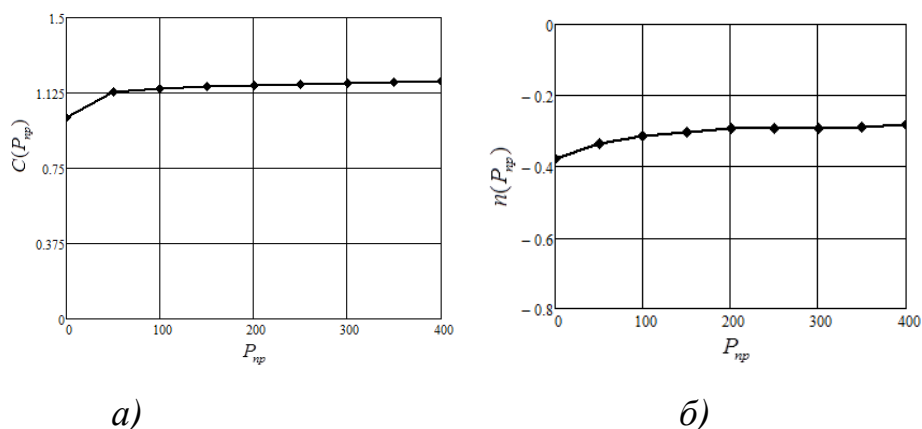


Рис. 6.16. Барические зависимости коэффициентов для газонасыщенного известняка: а)  $C$  ( $T_0 = 273$  К), б)  $n$

Функциональные коэффициенты  $n(P_{np})$  и  $C(P_{np})$  на основе данных, приведенных в таблице 6.10, будем аппроксимировать в виде

$$n(P) = b \ln(P) + a, \quad (6.26)$$

$$C(P) = c \cdot P_{np}^d, \quad (6.27)$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  определяются методом наименьших квадратов по данным, приведенным в таблице 6.10. Для газонасыщенного известняка получаем  $a = -0.3821$ ,  $b = 0.0111$ ,  $c = 0.9984$ ,  $d = 0.02$ .

Для определения согласованности экспериментальных данных с эмпирическими уравнениями, найдем ошибку аппроксимации и индекс детерминации. Найдем ошибку аппроксимации:

$$\bar{A}_{n(P)} = \frac{1}{N} \sum_i \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\% = \frac{0.1467}{9} \cdot 100\% = 1.63\%,$$

$$\bar{A}_{C(P)} = \frac{1}{N} \sum_i \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\% = \frac{0.0151}{9} \cdot 100\% = 0.168\%.$$

Как мы видим, ошибки аппроксимации меньше 7 %, следовательно, уравнения (6.26) и (6.27) хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Найдем теперь индекс детерминации:

$$R_{n(P)} = \sqrt{1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.000339}{0.00699}} = 0.975,$$

$$R_{C(P)} = \sqrt{1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.0001}{0.0256}} = 0.9984.$$

Следовательно, точность подбора уравнений высокая.

Определим статистическую значимость коэффициента детерминации по критерию Фишера. Число параметров уравнения  $m=1$ . Тогда  $k_1 = m = 1$ ,  $k_2 = N - m - 1 = 9 - 1 - 1 = 7$ . Найдем критическое значение критерия:

$$F_{крит}(k_1, k_2, \alpha) = F_{крит}(1, 7, 0.05) \approx 5.59.$$

Найдем фактические значения критерия для уравнений (6.26) и (6.27):

$$F_{факт.C(P)}(k_1, k_2, \alpha) = F_{факт.C(P)}(1, 7, 0.05) = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{N - m - 1}{m} \approx 2157.9548,$$

$$F_{факт.n(P)}(k_1, k_2, \alpha) = F_{факт.n(P)}(1, 7, 0.05) = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{N - m - 1}{m} \approx 137.3148.$$



Поскольку  $F_{\text{факт.}} > F_{\text{крит.}}$ , то коэффициенты детерминации (и в целом эмпирические уравнения) статистически значимы.

Тогда для газо- насыщенного известняка уравнение можно записать в виде:

$$\lambda(P, T) = \lambda_0 \cdot 0.9984 \cdot \left(\frac{P}{0.1}\right)^{0.02} \cdot \left(\frac{T}{273}\right)^{-0.3821+0.0111 \cdot \ln(P/0.1)} \quad (6.28)$$

На рис. 6.17 и 6.18 приведены графики зависимости теплопроводности газо- насыщенного известняка от давления при различных значениях температуры и от температуры при различных значениях давления согласно уравнению (6.28) и экспериментальным данным, приведенным в табл. 6.9. Как мы видим из рис. 6.17 и 6.18, экспериментальные данные хорошо согласуются с эмпирическими, согласно (6.28).

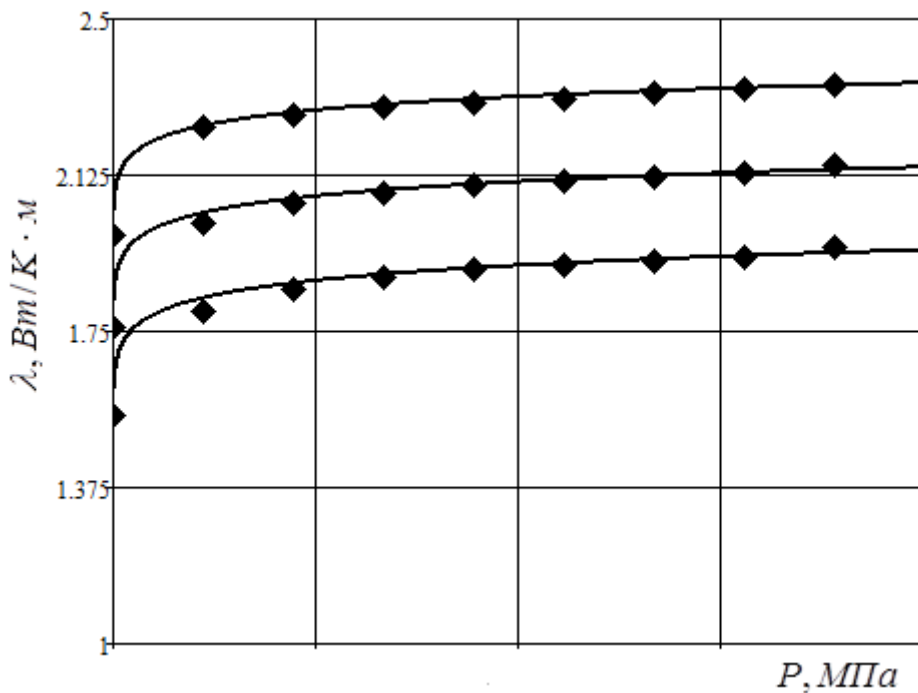


Рис. 6.17. Зависимость теплопроводности газо- насыщенного известняка от давления при различных температурах

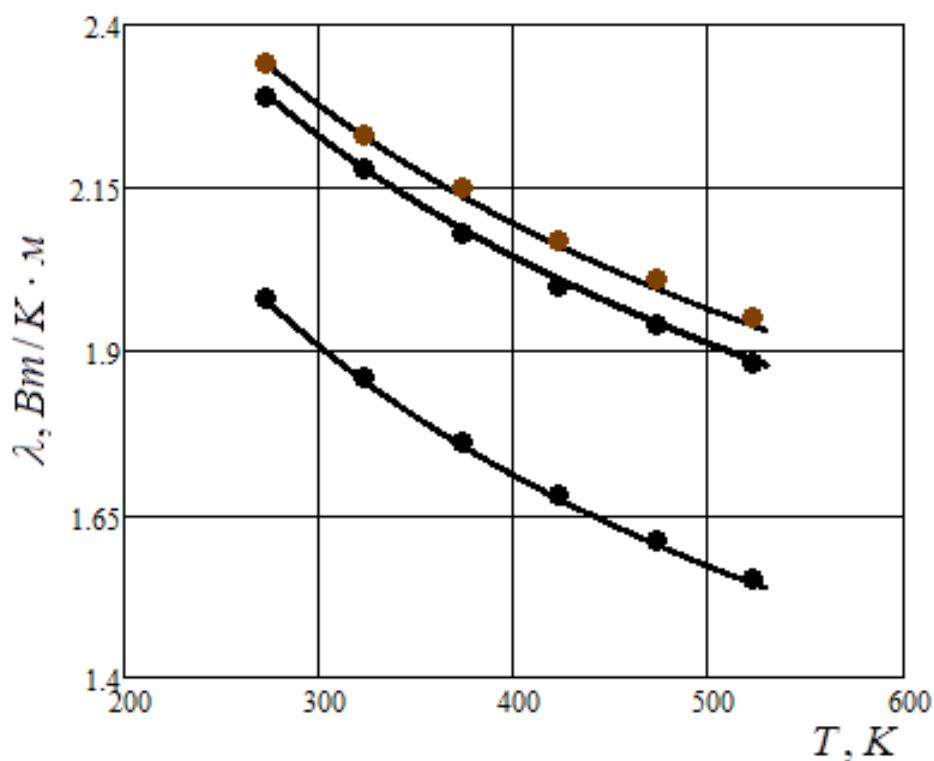


Рис. 6.18. Зависимость теплопроводности газо- насыщенного известняка от температуры при различных значениях давления.

**Выводы.** Исследованы зависимости  $n(P)$  и  $C(P)$ . Для зависимости  $n(P)$  было выбрано логарифмическую регрессию, а для зависимости  $C(P)$  степенную регрессию. Оценены их параметры методом наименьших квадратов. Статистические значимости уравнений проверены с помощью коэффициента детерминации и критерия Фишера. Установлено, что параметры модели статистически значимы. Полученные оценки уравнений регрессии позволяют использовать его для прогноза.

Таким образом, абсолютным стационарным методом измерена зависимость теплопроводности газонасыщенного известняка от гидростатического давления до 400 МПа в области температур 273–523 К. Результаты показали, что температурная зависимость теплопроводности на всем барическом диапазоне следует степенному закону  $\lambda \sim T^n$ . Барическая зависимость проявляет

резкий нелинейный рост до 100 МПа, сопровождающийся существенным изменением значения степенного показателя.

## **§ 6. Исследование температурного поля горной породы одномерным нелинейным уравнением теплопроводности с дробной производной Капуто по времени**

В этом параграфе исследуем температурное поле горной породы. Из проведенных выше исследований по теплопроводности горных пород известно, что коэффициент теплопроводности горной породы является нелинейной функцией, которая зависит от температуры и давления.

Как указано в работе [62], одним из научных направлений, получившее свое развитие, является исследование и практическое использование эффектов памяти в горных породах при решении задач геоконтроля. Память представляет собой фундаментальное свойство горных пород накапливать, хранить и воспроизводить информацию об испытанных в прошлом воздействиях. Конкретные проявления этого свойства носят название эффектов памяти. Как пишет автор в работе [90], структура такого материала как горная порода обладает иерархией и определенным подобием в большом масштабном диапазоне. В работах [200, 201] указано, что замедление процесса диффузии в структурах с памятью настолько существенно, что физические величины начинают изменяться медленнее чем в обычных средах и учесть данный эффект можно только помощью интегрально – дифференциальными уравнениями, содержащими дробную производную по времени.

Рассмотрим в качестве математической модели теплопереноса в горной породе начально-краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной по времени Капуто и в качестве примера горной породы рассмотрим аргиллиты. Для расчета коэффициента теплопроводности аргиллитов воспользуемся эмпирической зависимостью (6.24).

**Задача.** В области  $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, 0 < t \leq T\}$  найти решение задачи

$$\rho \cdot c \cdot \partial_{0t}^\alpha T(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T, P^*) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right), 0 < x < L, \quad (6.29)$$

$$T(x,0) = T_0, 0 \leq x \leq L,$$

$$T(0,t) = T_{2p}, T(L,t) = T_{2p}^*, 0 < t, \quad (6.30)$$

где  $0 < \alpha < 1$ .

Задачу (6.29), (6.30) будем решать численным методом. Для этого введем в области  $D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq L, 0 < t \leq T\}$  равномерную сетку:

$$\omega_{th} = \{(x_i, t_n) : x_i = i \cdot h, i = 0, 1, \dots, M, t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N\}.$$

Тогда воспользовавшись разностной схемой (3.54), получим:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c \frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau} \sum_{k=0}^n (T_i^{k+1} - T_i^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) = \\ = \frac{1}{h} \left( \lambda_{i+1/2}^n \frac{T_{i+1}^{n+1}}{h} - \lambda_{i-1/2}^n \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{h} \right), \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1, n = 0, 1, \dots$$

$$T_i^0 = T_0, i = 0, 1, \dots, M,$$

$$T_0^n = T_{2p}, T_M^n = T_{2p}^*, n = 1, 2, \dots, N, \quad (6.32)$$

где  $\lambda_{i+1/2}^n = \frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{2}$ ,  $\lambda_{i-1/2}^n = \frac{\lambda_{i-1}^n + \lambda_i^n}{2}$ , значение  $\lambda_i^n$  при фиксированном значении давления будем находить по формуле (6.24). Решение системы (6.31), (6.32) найдем методом прогонки. Численно исследуем задачу при различных значениях температуры на границе.

Разностное схему (6.31), (6.32) перепишем в виде:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i, i = 1, 2, \dots, M-1, \quad (6.33)$$

$$T_i^0 = T_0, i = 0, 1, \dots, M,$$

$$T_0^n = T_{2p}, T_M^n = T_{2p}^*, n = 1, 2, \dots, N, \quad (6.34)$$

где

$$A_i = \frac{\lambda_{i+1/2}^n}{h^2}, C_i = \frac{\lambda_{i-1/2}^n}{h^2}, B_i = A_i + C_i + \frac{\rho \cdot c \cdot (t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau},$$

$$F_i = -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau} \left( T_i^n (t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}) - \sum_{k=0}^{n-1} (T_i^{k+1} - T_i^k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) \right).$$

Решение системы (6.33) и (6.34) будем находить методом прогонки.

Рассмотрим случай, когда в (6.24) давление равно  $P = 0,1 \text{ МПа}$ , тогда равенство (6.24) примет вид:

$$\lambda(T) = \lambda_0 \left( \frac{T}{273} \right)^{0.2}. \quad (6.33)$$

Исследуем задачу при теплофизических характеристиках горной породы:  $\rho = 2.626 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 0.7 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)} = 700 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $L = 0.5 \text{ м}$ ,  $T_{zp} = 373 \text{ К}$  при  $x = 0$ ,  $T_{zp}^* = 363 \text{ К}$  при  $x = L$  и начальная температура при  $t = 0$  равно  $T_0 = 323 \text{ К}$ .

На рисунке 6.19, 6.20 приведены графики численного решения задачи (6.29), (6.30). На рис. 6.19 графики распределения температуры в зависимости от координаты, а на рис. 6.20 графики зависимости температуры от времени.

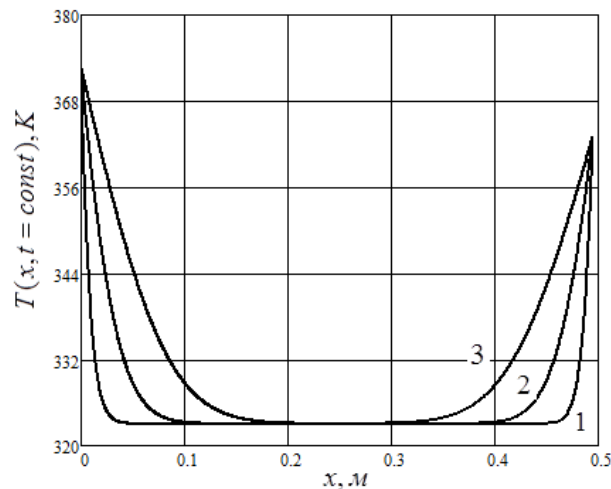


Рис. 6.19. Графики распределения температуры в зависимости от координаты и различных значениях параметра дробной производной:  $1 - \alpha = 0.5$ ,  $2 - \alpha = 0.8$ ,  $3 - \alpha = 1$ .

Как видно из рисунков 6.19 и 6.20, при переходе к дробным производным процесс распространения теплового фронта замедляется, что характерно фрактальным структурам с эффектами памяти. Полученные расчеты можно использовать при разработке технологических процессов, связанных с горными породами, в которых коэффициенты теплопроводности зависят от температуры.

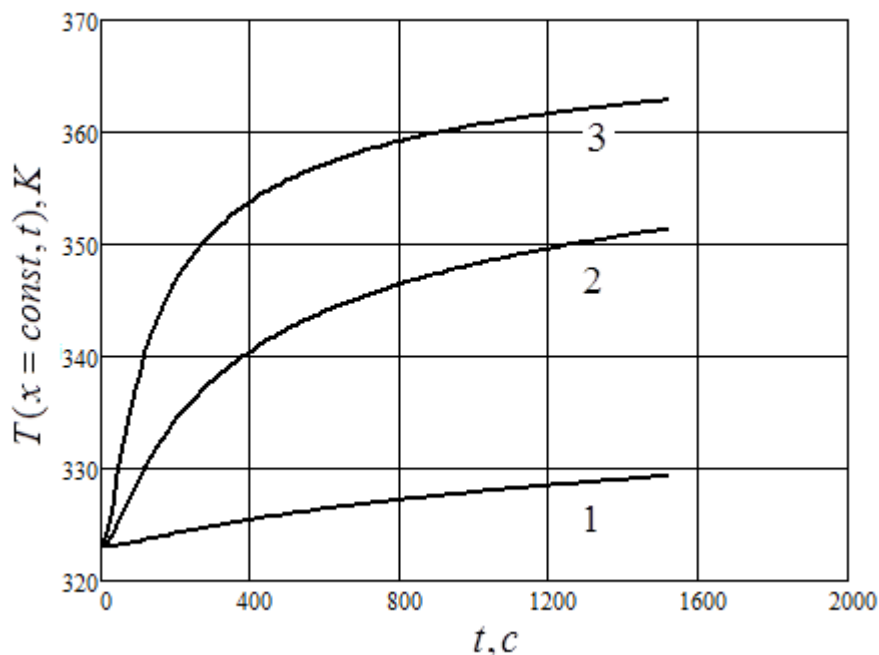


Рис. 6.20. Графики распределения температуры в зависимости времени при различных значениях параметра дробной производной:  $1 - \alpha = 0.5$ ,  $2 - \alpha = 0.8$ ,  $3 - \alpha = 1$ .

### § 7. Асимптотика прогрева горных пород добычной скважиной

Добыча нефти, газа и термальной воды, как правило, происходит со значительных глубин, порядка 2-5 км. На таких глубинах горные породы и содержащаяся в проницаемых пластах нефть, вода и газ прогреты до температур пород, примерно до 70-160°C. Горячий поток вверх по скважине нефти, газа добываемой термальной воды прогревает горную породу вокруг скважины на всём протяжении ствола, однако распространение тепла в поперечном ори-

горизонтальном направлении за длительное время измеряется лишь десятками метров из-за малых значений теплопроводности горной породы и малого радиуса скважины [128;174].

Внешний радиус колонны скважины  $R_c$  обычно около 0.1 м и менее. При глубине несколько тысяч метров отношение горизонтального размера к вертикальному размеру имеет порядок  $10^{-4}$ . При таком соотношении размеров вертикальным потоком тепла можно пренебречь по сравнению с горизонтальным потоком, т.е. можно считать, что распространение температурных возмущений от скважины происходит только в горизонтальном направлении. Вертикальные изменения определяют наложение множества решений плоских задач.

Ось скважины примем за вертикальную координатную ось  $Oz$ , направим её вверх от забоя. Задачу распространения температуры в однородном горном массиве можно считать плоской для каждого фиксированного значения  $z$  и описать её уравнением в безразмерных переменных (время заменено числом Фурье  $\tau$ , радиальная координата отнесена к радиусу колонны скважины)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad \tau > 0, \\ T(r, 0) &= T(\infty, \tau) = T_2, \\ T(1, \tau) &= T_s(\tau), \quad \tau = \frac{at}{R_c^2} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Здесь  $T_2$  – начальное невозмущенное значение температуры горной породы вдали от скважины, которое с изменением глубины возрастает в среднем 3°C на 100 метров.  $T_s(\tau)$  – заданная на поверхности скважины температура. Она меньше температуры термальной воды в пластовых условиях, выше температуры горной породы, и по истечению некоторого времени сохраняется почти постоянной. Температуропроводность горной породы  $a$  зависит от типа горной породы и для наиболее распространённых пород меняется в пределах от 10 до 40 м<sup>2</sup>/год при среднем значении 20 м<sup>2</sup>/год.

Сведение трехмерной задачи к двумерной – приём, хорошо известный в горной теплофизике. Ловерье [177] предложил для определения изменений температуры тонкого пласта из-за нагнетания горячей воды считать отток тепла в кровлю и подошву по одномерной схеме, пренебрегая горизонтальной составляющей теплового потока в горной породе. Такой подход получил широкое признание [3]. Аналогичный подход применялся и в ракетостроении (закон плоских сечений А.А. Ильюшина, 1947 г, см. Наука и жизнь, №2, 1998 г), согласно которому частицы воздуха при прохождении ракеты остаются в одной и той же плоскости, перпендикулярной оси ракеты. В нашем случае обоснование постановки задачи (6.34) более тривиально: если бы мы и записали член со второй производной по вертикальной координате  $z$ , то после перехода к безразмерным переменным при нём появился бы множитель, равный квадрату отношения радиуса скважины к её глубине порядка  $10^{-8}$ . Нет смысла в сохранении такого малого слагаемого.

Профиль температуры в случае постоянной температурной репрессии представим [3] в виде логарифмической функции с подвижным фронтом распространения возмущения  $R(\tau)$ :

$$T(r, \tau) = \Delta T_0 \frac{\ln \frac{r}{R} - \frac{r}{R} + 1}{\ln \frac{1}{R} - \frac{1}{R} + 1}, \quad (6.35)$$

$$1 \leq r \leq R(\tau); \quad T(r, \tau) = 0, \quad r \geq R(\tau)$$

На фронте возмущения и температура, и её первая производная по радиальной координате обращаются в нуль. Для определения закона распространения фронта возмущения  $R(\tau)$  пользуемся лишь одним интегральным соотношением, полученным из (6.34) интегрированием дифференциального уравнения по области возмущения, после его умножения на  $rdr$ . Полученную для  $R(\tau)$  задачу удобно представить в обратном виде:



$$\frac{d\tau}{dR} = \frac{R \ln R + 1 - R}{3(R-1)} \cdot \frac{d}{dR} \left( \frac{R^3 - 1,5R \ln R - 1}{R \ln R - R + 1} \right), \quad \tau(1) = 0. \quad (6.36)$$

Решая (6.36) численно можно ожидать представления фронта распространения возмущения в виде  $R(\tau) \approx 1.81\sqrt{\tau}$ . Однако, для малых времён решение (6.36) намного отличается от асимптотики.

Попытки видоизменить метод интегральных соотношений введением новых параметров и новых интегралов к желаемым результатам не привели. Наиболее удачным оказался не профиль (6.35), а обрезанная его часть, когда и в числителе и в знаменателе берутся только логарифмы, как для установившегося режима. Тогда производная по радиальной координате не обращается в нуль на фронте возмущения. Интегральное соотношение баланса тепла не выводится из дифференциального уравнения, а записывается без учета оттока тепла на фронте, и аналог (6.36) имеет более простой вид:

$$T(r, \tau) = \Delta T_0 \left( 1 - \frac{\ln r}{\ln R} \right), \quad q(\tau) = \frac{2\pi\lambda \Delta T_0}{\ln R}, \quad (6.37)$$

$$\frac{d\tau}{dR} = \frac{\ln R}{2} \cdot \frac{d}{dR} \frac{R^2 - 1}{\ln R^2}, \quad \tau(1) = 0$$

Решение задачи (6.37) теперь показывает, что фронт возмущения движется по закону  $R \approx 2.08\sqrt{\tau}$ , что весьма близко к обычно применяемому правилу:  $R = 2\sqrt{\tau}$ .

Находим теперь профиль температуры воды в скважине от забоя до устья при длительной её работе, применяя найденную выше асимптотику оттока тепла. Принимаем профиль установившимся и температурные изменения вдоль ствола обусловленными только оттоком тепла в горную породу. Дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$c_e q_e \frac{dT_c}{dz} + \frac{2\pi\lambda_z}{\ln(1,675\sqrt{\tau})} (T_c - T_z) = 0, \quad T_z = T_{nl} - (T_{nl} - T_0) \frac{z}{H}, \quad (6.38)$$

$$0 \leq z \leq H, \quad T_c(0) = T_{nl}$$

Здесь обозначения общепринятые:  $c_e$  – объёмная теплоёмкость воды (4.19 МДж/м<sup>3</sup>·К);  $q_e$  – дебит скважины (м<sup>3</sup>/сутки);  $T_c(z)$  – температура воды в скважине;  $T_z(z)$  – температура горной породы вдали от скважины;  $T_{nl}$  – пластовая температура;  $T_0$  – температура нейтрального слоя (среднегодовая температура поверхности земли),  $H$  – глубина скважины;  $\tau$  – число Фурье, определяемое как отношение  $at/R_c^2$ .

Профиль температуры по стволу скважины удобно представить в форме [4]:

$$\frac{T_c(z) - T_z(z)}{T_{nl} - T_0} = \frac{1 - e^{-\alpha z/H}}{\alpha}. \quad (6.39)$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi\lambda_z H}{c_e q_e \ln(1,675\sqrt{\tau})}, \quad \tau = \frac{at}{R_c^2}. \quad (6.40)$$

При  $z = H$

$$\frac{T_y - T_0}{T_{nl} - T_0} = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}. \quad (6.41)$$

Значения логарифма в знаменателе слабо растут со временем. При  $a=20$  м<sup>2</sup>/год для времён 1 год, 5 лет и 25 лет эти значения составляют 4.32; 5.12 и 5.93. Соответственно и параметр  $\alpha$  будет уменьшаться, но порядок величин сохраняется. Например, для  $H=300$ м,  $\lambda_z=2.5$  Вт/м·К,  $q_e=300$  м<sup>3</sup>/сутки формула (6.39) дает  $\alpha=0.75$ ; 0.63 и 0.55 соответственно на время 1 год; 5 лет и 25 лет. При малых дебитах, например, для 30 м<sup>3</sup>/сутки, значения параметра были бы  $\alpha=7.5$ ; 6.3 и 5.5.

Превышение температуры на устье скважины над температурой нейтрального слоя определяется всецело параметром  $\alpha$  и геотермальным градиентом. Для значений  $\alpha=0.1; 0.5; 1; 2$  и  $5$  превышение температуры на устье  $(T_y - T_0)$  составляет соответственно  $0.95; 0.79; 0.63; 0.43$  и  $0.2$  от общего температурного перепада  $(T_{nl} - T_0)$ . Профиль температуры состоит из линейной части и экспоненты, причём с ростом  $z$  профиль всё более становится линейным.

В переходной период, когда ещё нет выхода на асимптотику, приходится считаться с необходимостью решения задачи в полной постановке, сначала решать задачу методом преобразования Лапласа в изображениях, а затем пользоваться методами численного обращения. В этой задаче такой подход удобнее, нежели применение разностных методов.

Полная постановка отличается от асимптотической постановки (6.39) наличием еще производной по времени от температуры в стволе скважины. Отток тепла в горную породу меняется в начальный период значительно, он сначала возрастает от нуля до некоторого значения, затем убывает и выходит на асимптоту. Нарастание температуры в элементе ствола скважины происходит за счет притока новых более горячих порций воды и оттока тепла в горную породу. В размерном виде дифференциальное уравнение для неустановившейся температуры в стволе задачи выглядит следующим образом:

$$\pi R_c^2 c_k \frac{\partial T_c}{\partial t} + c_g q_g \frac{\partial T_c}{\partial z} = -q_T, \quad (6.42)$$

$$q_T = -2\pi R_c \lambda_z \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_c}, \quad 0 \leq z \leq H, \quad t > 0$$

В формуле (6.42):  $c_k$  – удельная объемная теплоёмкость на 1 м длины колонны скважины, она включает в себя теплоёмкость воды и металла;  $R_c$  – внешний радиус обсадной колонны;  $(R_c - \delta)$  – внутренний радиус скважины;  $c_g$  – объёмная теплоёмкость воды;  $q_g$  – дебит скважины;  $q_T$  – отток тепла в горную

породу;  $\lambda_2$  – теплопроводность горной породы. Начальные и граничные условия задачи следует принять в виде:

$$T_c(z,0) = T_2(z) = T_{nl} - \Gamma z, \quad T_c(0,t) = T_{nl}. \quad (6.43)$$

где  $\Gamma$  - геотермальный градиент.

Причём температура горной породы будет участвовать неявно и при определении оттока тепла  $q_T$  от колонны скважины в горную породу.

Задачу (6.42) решаем с применением преобразованием Лапласа, предварительно приводя её к безразмерному виду. Естественно в качестве безразмерного времени выбрать  $\tau$ , подсчитанное по температуропроводности  $a$  горной породы и внешнему радиусу колонны, чтобы было согласие с уже решённой выше задачей (6.34) оттока тепла от колонны скважины в горную породу в изображениях. Линейные размеры по координатам выбираем разные, равные соответственно  $R_c$  по радиусу и  $H$  (глубина залегания продуктивного пласта) по вертикали. Старые обозначения переменных сохраняем для упрощения письма. В качестве температурного масштаба естественно принять разность температур пласта и нейтрального слоя  $T_{nl} - T_0$ , но мы оставляем размерную температуру. Описание задачи в физических переменных принимает вид:

$$\frac{\pi a c_\kappa H}{c_\epsilon q_\epsilon} \cdot \frac{\partial(T_c(z,\tau) - T_2(z))}{\partial \tau} + \frac{\partial(T_c(z,\tau) - T_2(z))}{\partial z} - (T_{nl} - T_0) = \frac{2\pi \lambda_2 H}{c_\epsilon q_\epsilon} \cdot \frac{\partial(T(z,\tau) - T_2(z))}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (6.44)$$

Причём для начального момента времени  $\tau=0$  разности  $(T_c - T_2)$  и  $(T - T_2)$  равны нулю, и на границе  $z=0$  разность  $(T_c - T_2)$  сохраняет нулевое значение. Эту задачу надо решать совместно с (6.34), в которой вертикальная координата участвует неявно. Температура на устье при  $z=1$  и профили температур  $T_c(z)$  мы получим из совместного решения задач (6.34) и (6.44). Это решение задачи определяется двумя безразмерными параметрами:

$$\alpha_{\kappa} = \frac{\pi a c_{\kappa} H}{c_{\phi} q_{\phi}}, \quad \alpha_z = \frac{2\pi \lambda_z H}{c_{\phi} q_{\phi}}, \quad (6.45)$$

характерные значения которых близки к 1. Например, для  $H=3000$  м и  $q_{\phi}=1000$  м<sup>3</sup>/сутки при  $a=20$  м<sup>2</sup>/год и  $\lambda_z=2,5$  Вт/м·К получаем  $\alpha_{\kappa} \approx 0,5$  и  $\alpha_z \approx 1$ .

Введя изображения по Лапласу

$$\begin{aligned} \Theta(r, z, s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} (T(r, z, \tau) - T_z(z)) d\tau, \\ \Theta_c(z, s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} (T_c(z, \tau) - T_z(z)) d\tau, \end{aligned} \quad (6.46)$$

получим в них задачу:

$$\begin{aligned} \Theta(r, z, s) &= \frac{K_0(\sqrt{sr})}{K_0(\sqrt{s})} \cdot \Theta_c(z, s), \\ \alpha_{\kappa} s \cdot \Theta_c(z, s) + \frac{d\Theta_c}{dz} - \frac{T_{nl} - T_0}{s} &= \alpha_z \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Её решение имеет вид:

$$\Theta_c(z, s) = (T_{nl} - T_0) \frac{1 - e^{-\omega(s)z}}{s\omega(s)}, \quad \omega(s) = \alpha_{\kappa} s + \alpha_z \sqrt{s} \frac{K_1(\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s})}. \quad (6.48)$$

Однако, чтобы получить профили температур в пределах  $0 \leq z \leq 1$ , нужно найти оригинал по изображению (6.48). Общий поток тепла в горную породу определится снижением температуры от забоя  $z=0$  до устья  $z=1$ . Поэтому имеет смысл ограничиться отысканием обращения  $\Theta_c(1, s)$  для наиболее интересных вариантов  $\alpha_{\kappa}$  и  $\alpha_z$ .

Обращение  $\Theta_c(1, s)$  даст температуру воды на устье скважины:

$$\frac{T_y - T_0}{T_{nl} - T_0} = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{e^{i\varphi}} (1 - e^{-\omega_{\varphi}(\varphi, \tau)})}{\omega_{\varphi}(\varphi, \tau)} \right\} d\varphi - \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{-x+i} (1 - e^{-\omega_x(x, \tau)})}{(-x+i)\omega_x(x, \tau)} \right\} dx \right), \quad (6.49)$$

где

$$\omega_x(x, \tau) = \alpha_\kappa \frac{-x+i}{\tau} + \alpha_2 \sqrt{\frac{-x+i}{\tau}} \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{-x+i}{\tau}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{-x+i}{\tau}}\right)},$$

$$\omega_\varphi(\varphi, \tau) = \alpha_\kappa \frac{e^{i\varphi}}{\tau} + \alpha_2 \sqrt{\frac{e^{i\varphi}}{\tau}} \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{e^{i\varphi}}{\tau}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{e^{i\varphi}}{\tau}}\right)}$$

На рис. 6.21 представлены графики относительной температуры на устье для четырёх различных вариантов параметров:  $(\alpha_\kappa, \alpha_2) = (0.2, 0.4)$ ;  $(0.5, 1)$ ;  $(1, 2)$ ; и  $(0.2, 5)$ . Видно, что по истечению долгого времени температура на устье сходится к значению пластовой температуры, но сходимость является весьма слабой для горных пород с высоким значением температуропроводности.

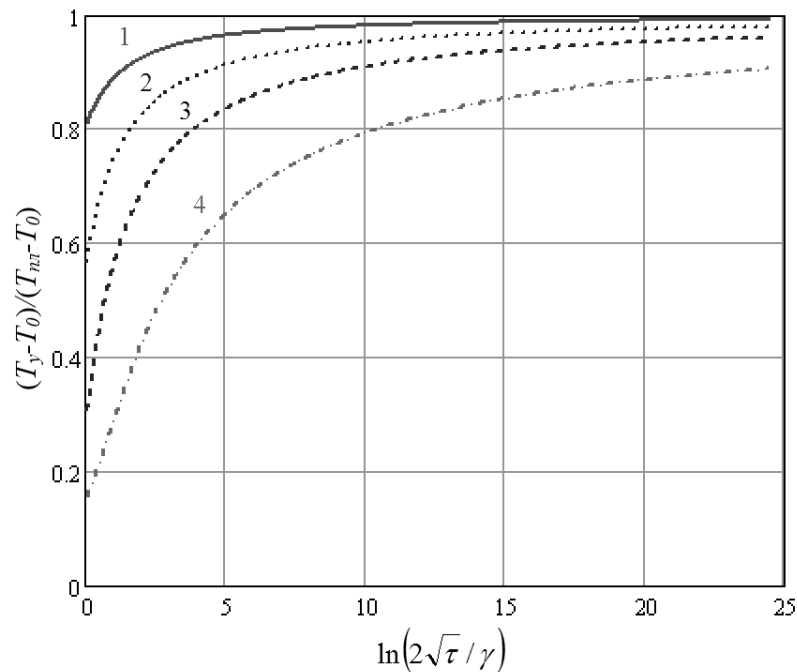


Рис. 6.21. Рост температуры на устье скважины после её пуска. По оси абсцисс отложены значения  $\ln(2\sqrt{\tau}/\gamma)$ , по оси ординат отношение  $(T_y - T_0)/(T_{nl} - T_0)$ . Варианты соответствуют значениям параметров:  $(\alpha_\kappa, \alpha_2) = (0.2, 0.4)$ ;  $(0.5, 1)$ ;  $(1, 2)$ ; и  $(0.2, 5)$  ((1), (2), (3) и (4) соответственно).

В заключение отметим, что представленный в этом параграфе подход численного обращения преобразования Лапласа с контурным интегрированием для больших времён оказывается намного эффективнее, чем применение конечно разностных методов [56].

## **Глава VII. Программная реализация алгоритмов численного моделирования динамических процессов в фрактальных и пористых средах**

Для проведения вычислительных экспериментов на основе разработанных численных алгоритмов, представленных во второй и третьей главах, и математических моделей нелокальных динамических процессов, представленных в четвертой, пятой и шестой главах диссертационной работы, разработаны комплексы объектно-ориентированных программ. Все, исследованные в работе, математические модели описываются дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка. В настоящее время не так много программных средств разработано, которые позволяют найти численные решения подобных задач. В работе [203] обновлена часть математического программного обеспечения FODE, используя дробную производную Грюнвальда-Летникова, то есть, добавлены параметры числового решателя более высокого порядка. В работе [173] создан пакет Julia с открытым исходным кодом, FdeSolver, который обеспечивает численные решения дифференциальных уравнений дробного порядка на основе правил интегрирования произведений, алгоритмов предиктора-корректора и метода Ньютона-Рафсона. Пакет охватывает решения одномерных уравнений с порядками положительных действительных чисел. В [109] для автоматизации расчетов была разработана программа «NSFDRE» на языке C++ для численного решения уравнения Риккати с дробной производной переменного порядка. В программе реализован численный алгоритм расчета, а также предусмотрена возможность визуализации результатов расчета.

В связи с ограниченностью программных средств численного исследования нелокальных динамических процессов, становится необходимым разработка объектно-ориентированных комплексов программ для компьютерного моделирования динамических процессов в фрактальных и пористых средах. В отличие от существующих программных комплексов, разработанные в ра-



боте комплексы объектно-ориентированных программ позволяют исследовать поведение фазовых траекторий динамических систем, описываемых двумя и тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка, нелокальные процессы теплопроводности в фрактальных системах с памятью при различных значениях параметра дробной производной. А также в работе, используя экспериментальные данные по теплопроводности горных пород, разработан комплекс объектно-ориентированных программ, который позволяет рассчитывать теплопроводность песчаника, мергеля, гранита и аргиллита в зависимости от температуры и давления.

Для разработки объектно-ориентированных программ была выбрана среда программирования Delphi. Среда разработки Delphi проста и удобна при использовании, имеет интуитивно понятный и легко обучаемый синтаксис. А также Delphi имеет богатую библиотеку компонентов, то есть поставляется с обширной коллекцией готовых компонентов, что позволяет разработчикам быстро создавать функциональные и привлекательные пользовательские интерфейсы, мощный редактор форм, позволяющий разрабатывать интерфейсы путем перетаскивания и настройки компонентов. В сравнении с языком программирования C++ у Delphi есть преимущества в высокой скорости компиляции, библиотеке компонентов и высокой производительности, что делает привлекательным язык программирования Delphi при решении прикладных задач. Язык программирования Python может быть медленнее, чем Delphi, из-за интерпретации кода.

Данная глава посвящена описанию разработанных комплексов объектно-ориентированных программ для исследования нелокальных динамических процессов в фрактальных и пористых средах. С помощью тестовых задач проверена адекватность и точность получаемых результатов. При целых порядках производных решения, получаемые с помощью разработанных программ, соответствуют решениям известных моделей динамических процессов. Разрабо-

таные прикладные программы подтверждены свидетельствами о регистрации программ для ЭВМ (Приложения 1-3) и поддержаны грантами РФФИ.

## § 1. Описание и структура комплекса программ моделирования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями

Для программной реализации вычислительных алгоритмов, приведенных во второй главе работы, выбрана объектно-ориентированная среда программирования Delphi. Разработанный комплекс объектно-ориентированных программ имеет модульную структуру и предназначен для исследования фазовой плоскости нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями. На рисунке приведена функциональная схема разработанного программного комплекса.

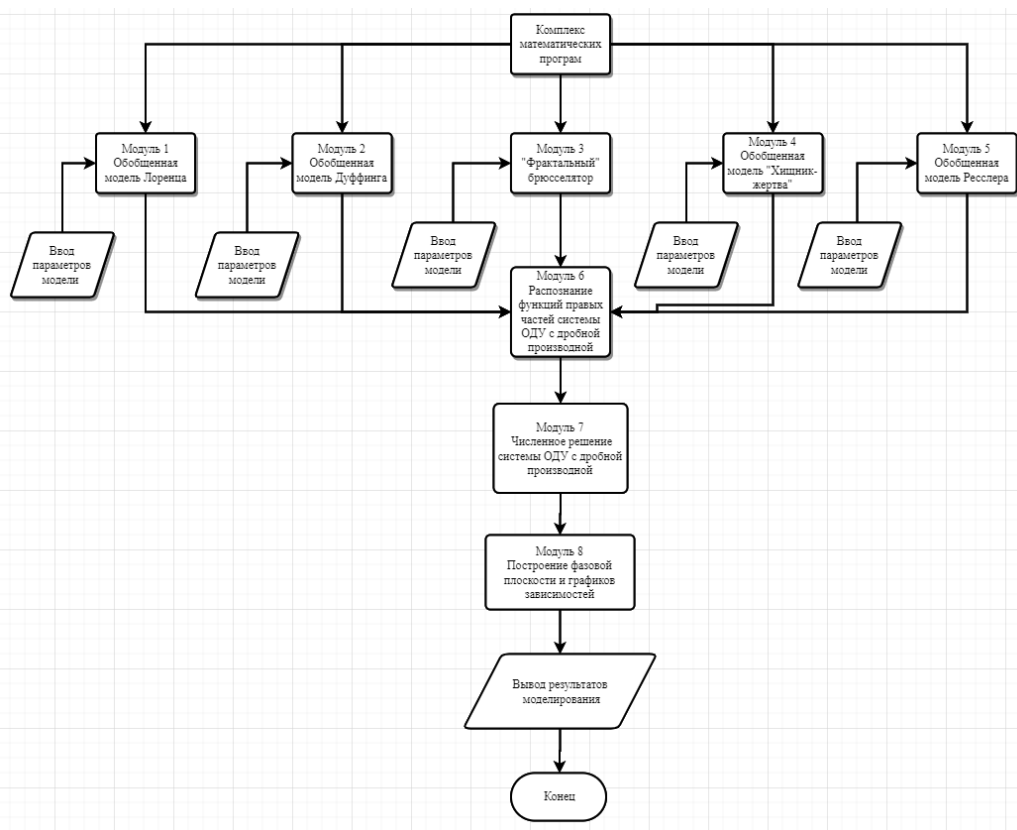


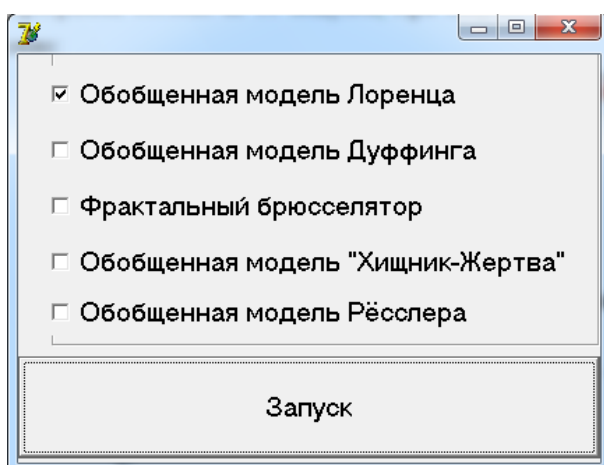
Рис. 7.1. Функциональная схема комплекса математических программ

Название комплекса программ – «Программная реализация алгоритма компьютерного моделирования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями». Наименования программных модулей приведены на рисунке 7.1.

Рекомендуемые системные требования:

- Система/язык программирования: Delphi.
- Процессор – любой процессор Intel или AMD.
- Операционная система – Windows 7.0 и выше.

При запуске программы открывается меню:



где можно выбрать одну из предложенных моделей. После выбора модели и нажатия кнопки «Запуск» открывается форма проекта программы (рис. 7.2), где слева на всплывающей панели расположены окна для ввода данных, в середине окно для построения фазовой плоскости, справа окна для построения графиков зависимостей  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  и снизу расположены кнопки «Построить», «Пауза/Старт» и «Очистить». На всплывающей слева панели верхние три окна для ввода начальных данных, следующие три окна для ввода функций правых частей, следующее окно для ввода шага сетки, далее три окна для ввода значений параметров системы и последние три окна для ввода значений параметра дробной производной. На этой же панели внизу справа еще три окна для выбора плоскости проектирования.

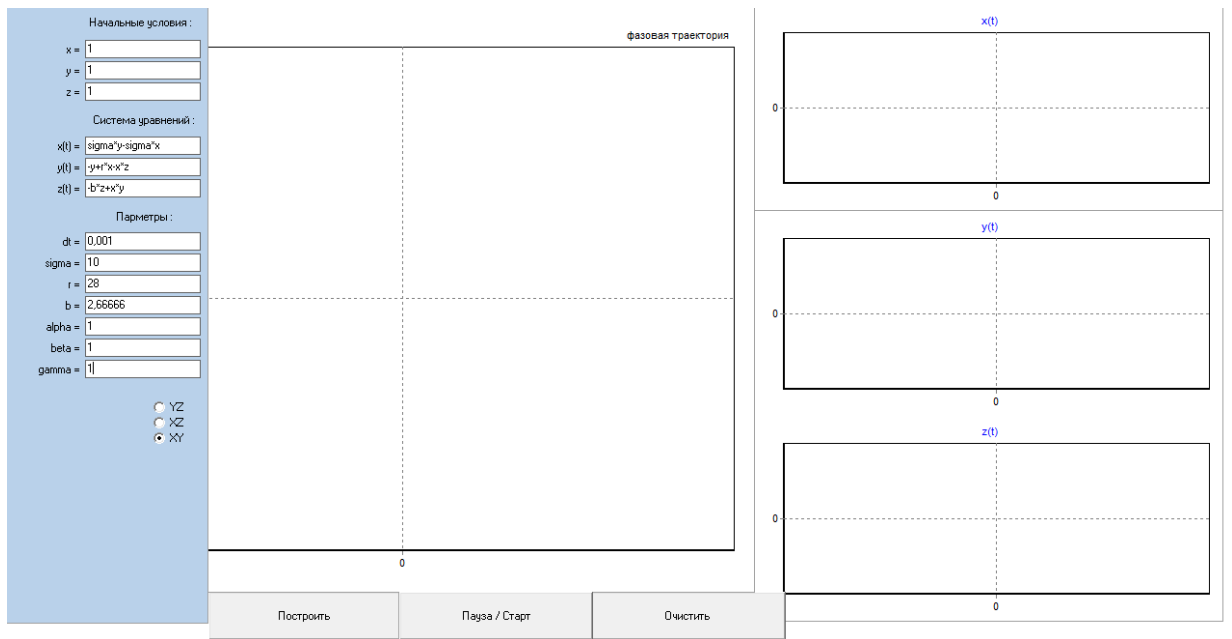
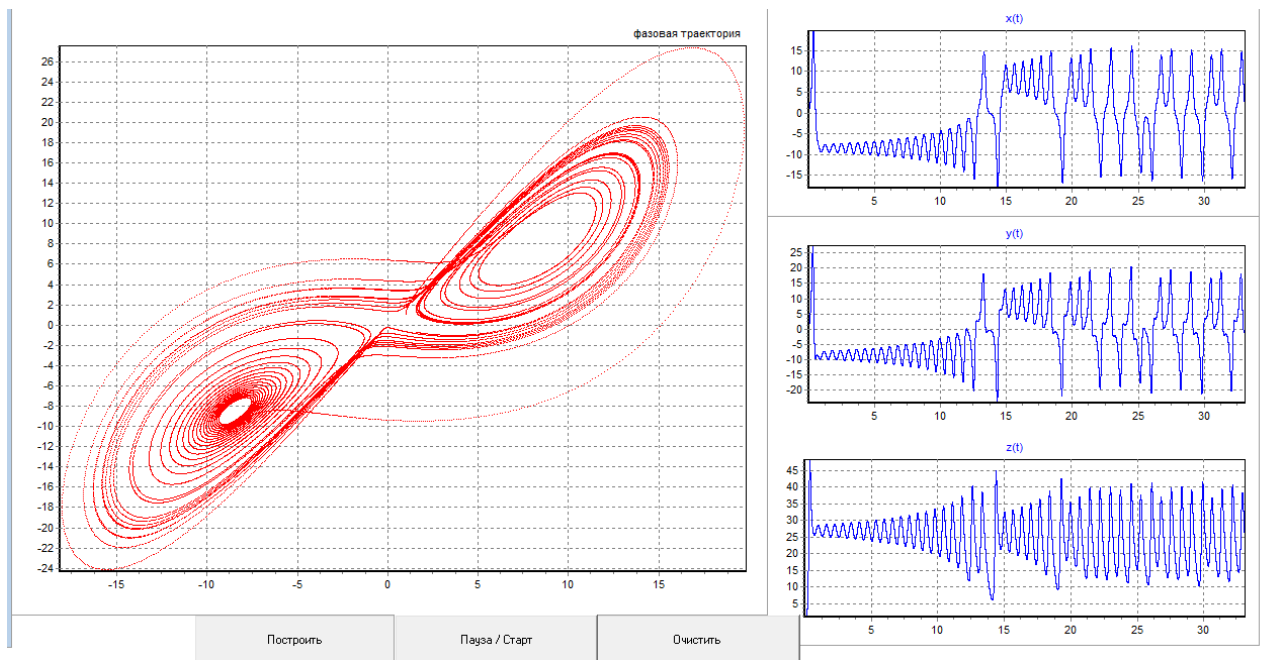
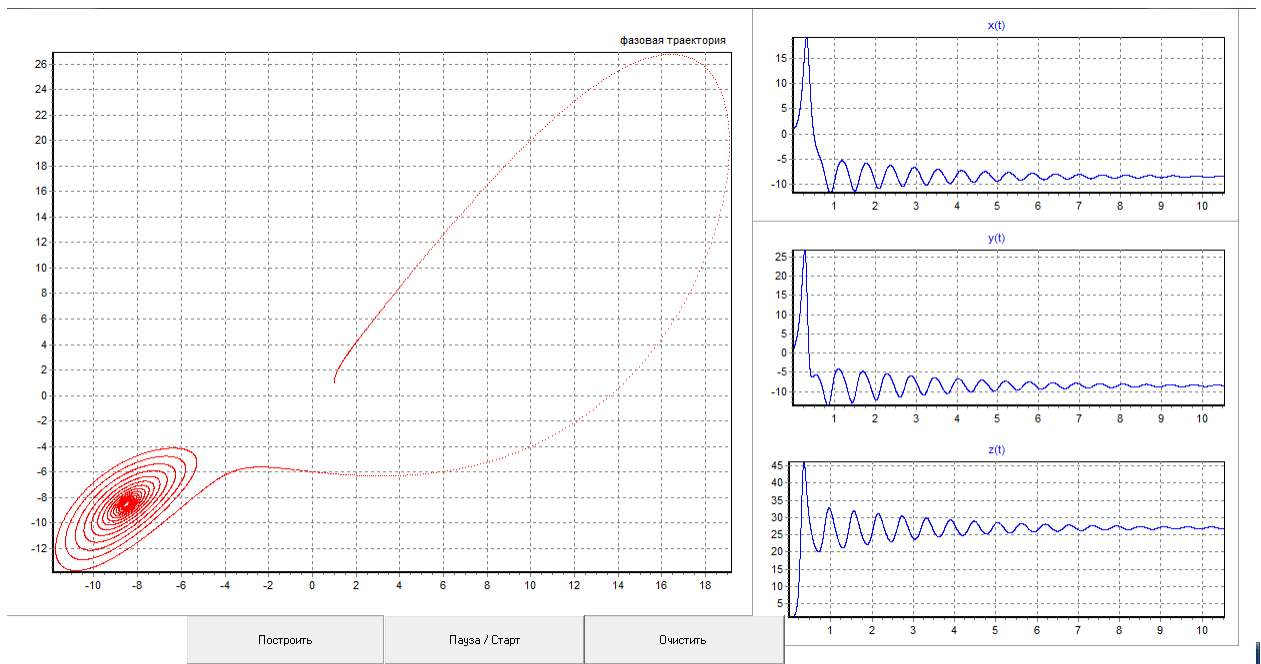


Рис. 7.2 Форма проекта программы



Скриншот формы результатов выполнения программы «Обобщенная модель Лоренца» при  $\alpha = 1$



Скриншот формы результатов выполнения программы «Обобщенная модель Лоренца» при  $\alpha = 0.9$

## § 2. Описание и структура комплекса программ компьютерного моделирования нелокальных процессов теплопереноса в фрактальных средах

Для программной реализации вычислительных алгоритмов, приведенных в третьей главе работы, выбрана объектно-ориентированная среда программирования Delphi. Разработанный комплекс объектно-ориентированных программ имеет модульную структуру и предназначен для исследования нелокальных процессов теплопереноса в фрактальных средах. На рисунке приведена функциональная схема разработанного программного комплекса.

Название комплекса программ – «Программная реализация алгоритмов численного решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с дробными производными». Наименования программных модулей приведены на рисунке 7.3.

Рекомендуемые системные требования:

- Система/язык программирования: Delphi.
- Процессор – любой процессор Intel или AMD.

- Операционная система – Windows 7.0 и выше.

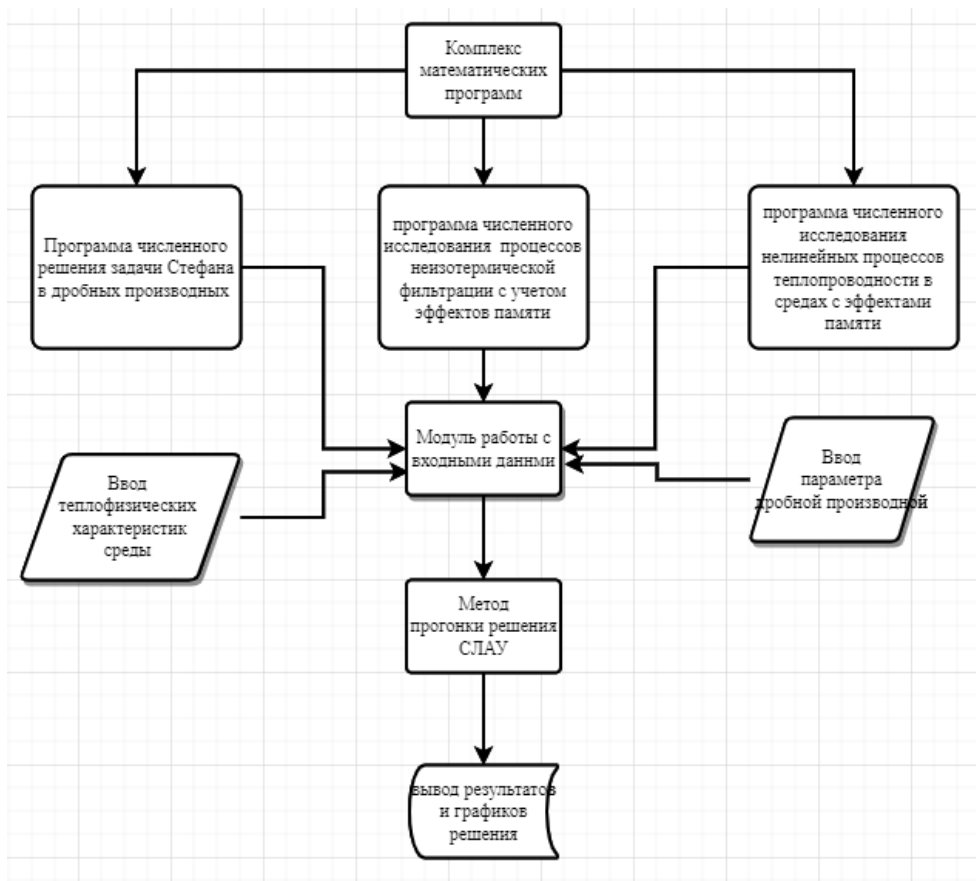
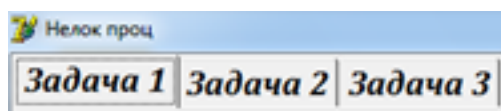


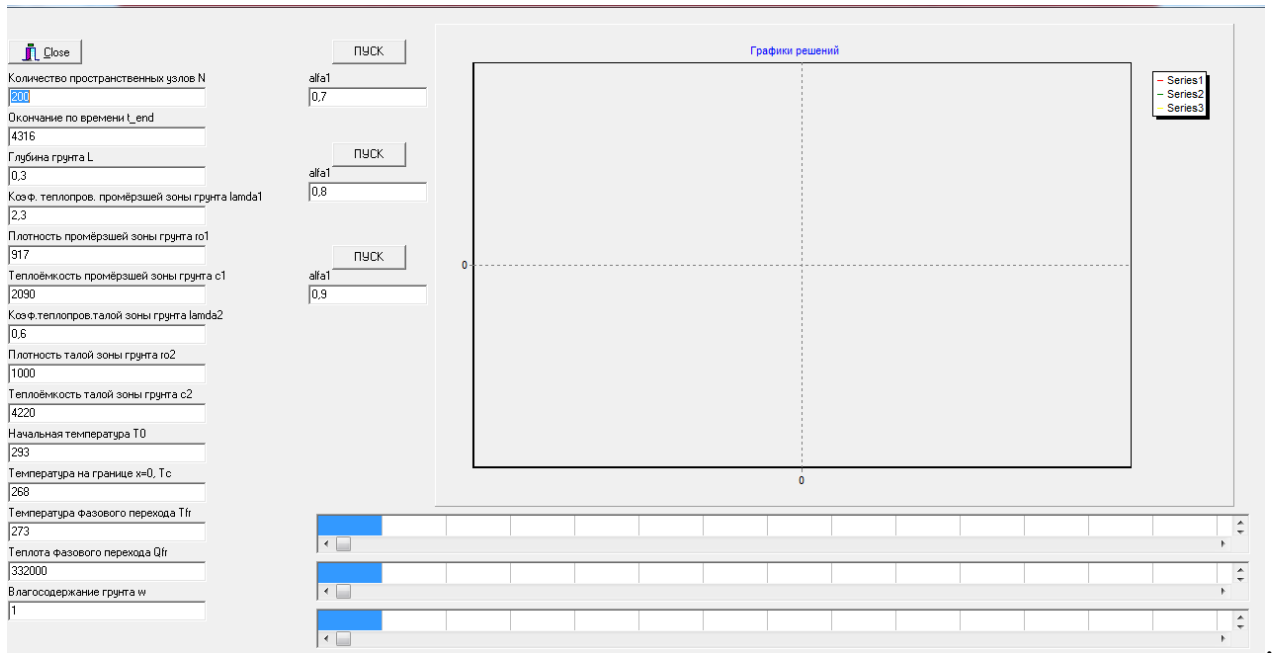
Рис. 7.3. Функциональная схема комплекса математических программ

При запуске программы открывается меню:

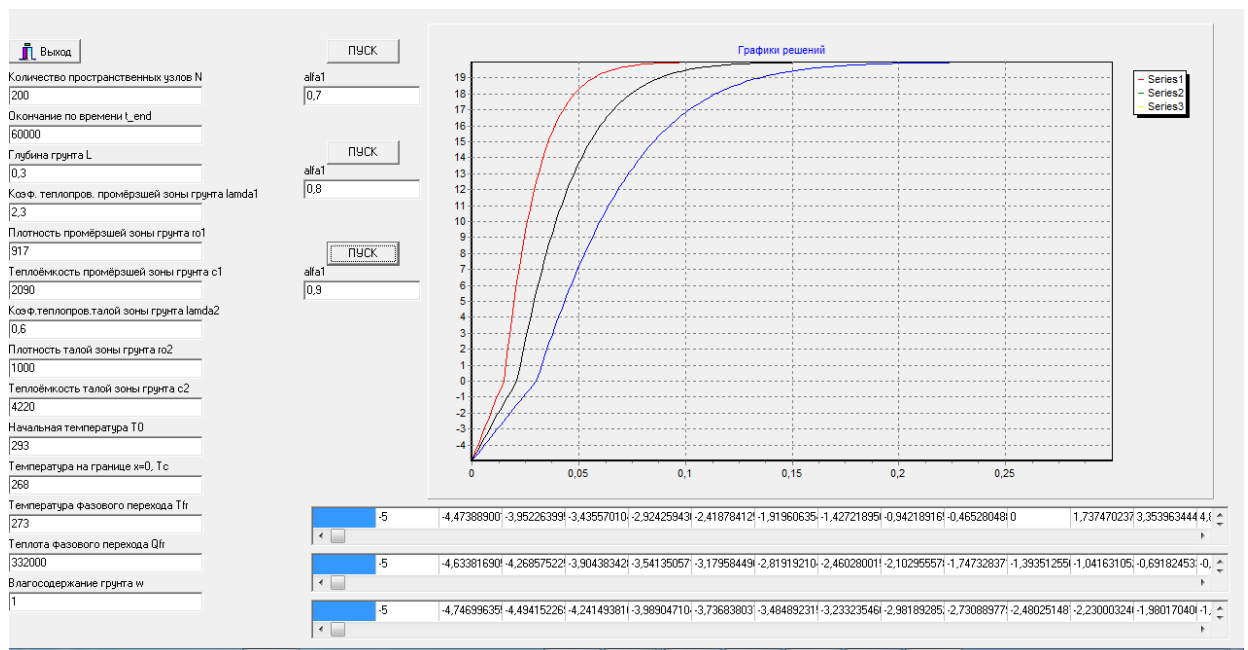


где можно выбрать задачу для проведения расчета распределения температуры. После выбора задачи и нажатия кнопки, например «Задача 1», открывается форма проекта программы (рис. 7.4). Слева формы расположены окна для ввода теплофизических данных среды, чуть правее окна для ввода параметра дробной производной, посередине окно для построения графиков зависимости температуры от координаты и снизу окна для вывода значений температуры в зависимости от координаты и параметра производной. На рис. 7.5 приведен скриншот работы программы численного моделирования процессов про-

мерзания при трех различных значениях параметра дробной производной.



#### 7.4. Форма проекта программы



7.5. Скриншот формы результатов выполнения программы для модели промерзания при  $\alpha = 0.7; 0.8; 0.9$ .

### § 3. Описание и структура комплекса программ расчета теплопроводности горных пород

Для программной реализации алгоритмов расчета теплопроводности горных пород согласно, приведенным в шестой главе работы экспериментальным данным, выбрана объектно-ориентированная среда программирования Delphi. Разработанный комплекс объектно-ориентированных программ имеет модульную структуру и предназначен для расчета теплопроводности горных пород и моделирования коэффициентов эмпирического уравнения. Для моделирования коэффициентов эмпирического уравнения используется алгоритм метода наименьших квадратов, а для оценки согласованности уравнения с экспериментальными данными программа вычисляет ошибку аппроксимации и индекс детерминации. По вычисленным данным программа выводит значение теплопроводности для заданных значений температуры и давления, эмпирическое уравнение теплопроводности в зависимости от температуры, графики температурной и барической зависимостей теплопроводности и выводы относительно полученных оценок. На рисунке приведена функциональная схема разработанного программного комплекса.

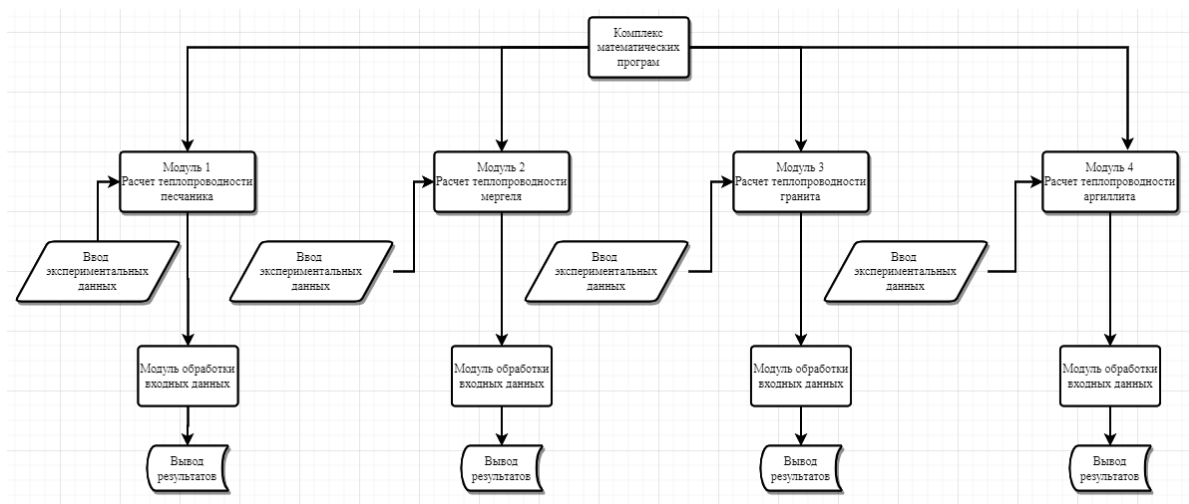


Рис. 7.6. Функциональная схема комплекса математических программ

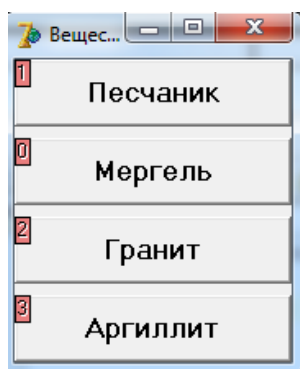


Название комплекса программ – «Расчет теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления». Наименования программных модулей приведены на рисунке 7.6.

Рекомендуемые системные требования:

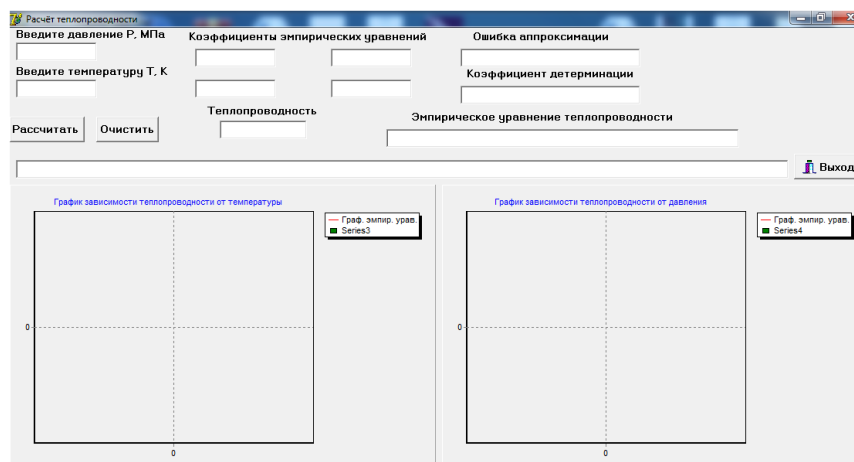
- Система/язык программирования: Delphi.
- Процессор – любой процессор Intel или AMD.
- Операционная система – Windows 7.0 и выше.

При запуске программы открывается меню:



Меню программы

где можно выбрать горную породу для проведения расчета теплопроводности в зависимости от температуры и давления. После выбора горной породы и нажатия кнопки, например «Песчаник», открывается форма проекта программы (рис. 7.7).



7.7. Форма проекта программы

Слева в верхнем углу проекта расположены окна для ввода давления и температуры, правее этих окон расположены окна для вывода коэффициентов эмпирического уравнения, снизу этих окон расположены две кнопки «Рассчитать» и «Очистить» и окно для вывода теплопроводности горной породы для введенных значений давления и температуры. В правой верхней части расположены окна для вывода ошибки аппроксимации, индекса детерминации и эмпирического уравнения теплопроводности горной породы и кнопка «Выход». Внизу формы проекта расположены два окна для построения графиков зависимостей теплопроводности от температуры и давления. При нажатии кнопки «Рассчитать» появляется окно для загрузки экспериментальных данных. Данные можно загрузить из файла нажатием кнопки «Загрузить» или непосредственно набрать в окне загрузки. После загрузки экспериментальных данных нужно нажать кнопку «Ок» (Рис.7.8). С помощью разработанного комплекса программ можно определить теплопроводность горной породы в зависимости от температуры и давления, построить графики зависимостей от температуры и давления, рассчитать коэффициенты эмпирического уравнения и вычислить ошибку аппроксимации и индекс детерминации (рис. 7.9).

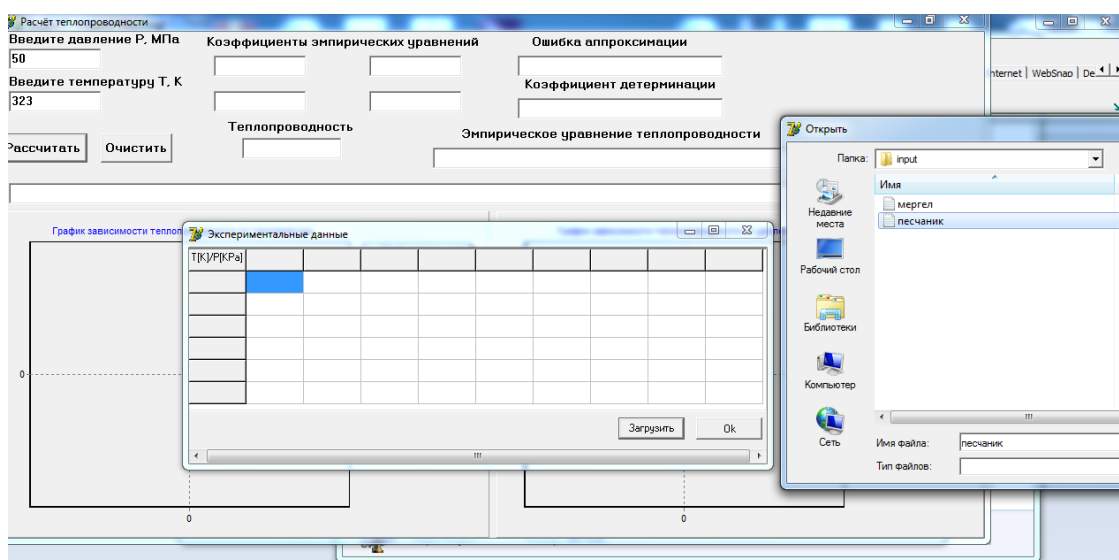


Рис. 7.8. Форма проекта программы с окном загрузки экспериментальных данных

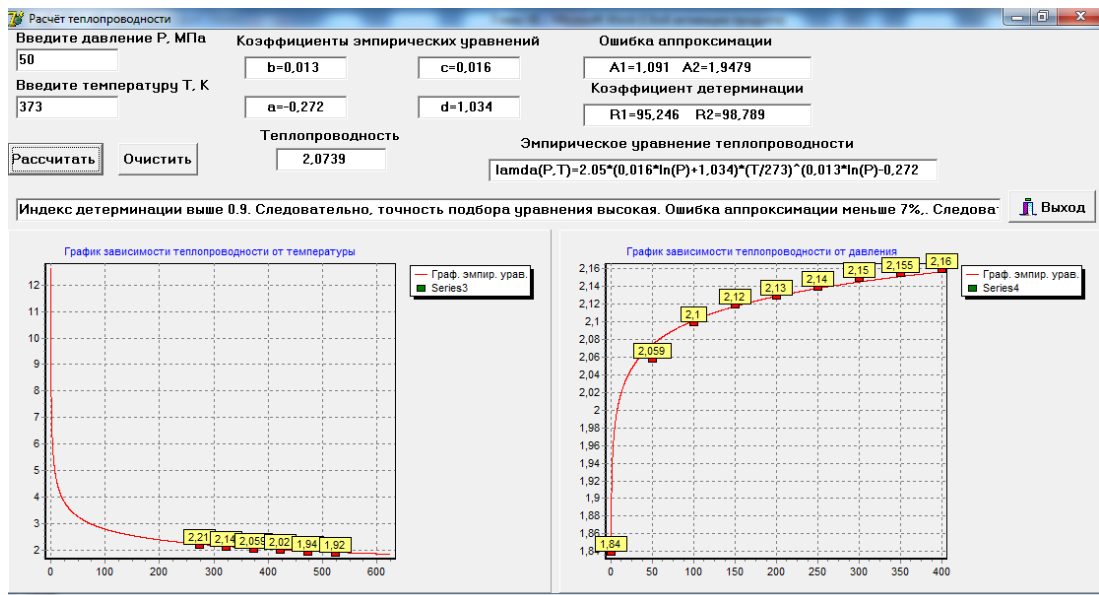


Рис. 7.9. Скриншот формы результатов выполнения программы для расчета теплопроводности песчаника

## Заключение

В работе получены новые результаты, которые являются важными в новом научном направлении «Математическое моделирование динамических процессов во фрактальных и пористых средах». Они приведены во введении и смогут сыграть значительную роль в создании нового направления в моделировании нелокальных процессов в динамических системах с памятью.

1. Получены численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной. Доказаны теоремы о сходимости полученных численных методов. На их основе построены эффективные численные алгоритмы, которые реализованы в виде пакетов прикладных программ для исследования нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка.
2. Разработаны устойчивые разностные схемы для численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Доказаны теоремы о сходимости этих разностных схем. На их основе построены эффективные численные алгоритмы, которые реализованы в виде пакетов прикладных программ для исследования процессов теплопроводности во фрактальных системах с памятью.
3. Проведено качественное исследование линейных динамических систем описываемых дробными дифференциальными уравнениями в случае действительных корней характеристического уравнения.
4. Проведено исследование нелинейных динамических систем, описываемых системой двух дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто, методом линеаризации. Получены аналитические решения линеаризованных систем и установлены топологические изменения фазовой плоскости при переходе к дробной производной.
5. Проведено численное исследование фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамику электронов в них с применением современной технологии математического моделирования и вы-

числительного эксперимента на основе аппарата интегродифференцирования дробного порядка.

6. Проведено численное исследование нелокальных процессов промерзания во фрактальных средах и динамики фронта фазового перехода, распространяющегося во фрактальной среде.
7. Проведено численное исследование процессов неизотермической фильтрации с учетом фрактальности среды и эффектов памяти.
8. Исследована математическая модель конвективного теплообмена с внешней средой для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти.
9. Были проведены исследования теплопроводности горных пород в достаточно широком диапазоне температур 273–523 К и давлений до 400 МПа, характерных для природных условий. На основе экспериментальных данных по эффективной теплопроводности песчаника, мергеля, гранитов, гранулитов и аргиллитов, известняка в зависимости от температуры и давления получены уравнения для расчета теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления.

## Литература

1. *Аливердиев А.А., Алиев Р.М., Бейбалаев В.Д., Григорьев Б.А., Заричняк Ю.П.* Теплопроводность горных пород в естественных условиях. – Махачкала: Из-во ДГУ, 2023. – 140 с. – ISBN: 978-9913-0281-4.
2. *Алиханов А.А.* Разностные методы решения краевых задач для волнового уравнения с дробной производной по времени // Вестник Сам. ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2008. – № 2 (17). – С. 13–20.
3. *Алишаев М.Г., Розенберг М.Д., Теслюк Е.В.* Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений: монография. – Москва: Недра, 1985. – 271 с.
4. *Алишаев М.Г.* Уточнение потерь тепла для геотермальной скважины // Известия РАН. – 2010. – №1. – С. 73–84.
5. *Алмазова К.И. и др.* Исследование динамики искрового разряда в воздухе в промежутке острие-плоскость методом теневого фотографирования // Журнал технической физики. – 2019. – Т. 89, №1. – С. 69–71.
6. *Алхасов А.Б., Мейланов Р.П., Шабанова М.Р.* Уравнение теплопроводности в производных дробного порядка // ИФЖ. – 2011. – Т. 84, № 2. – С. 309–317.
7. *Альтшулер В.А., Бравинский А.О.* Квантовая космология и физика переходов с изменением сигнатуры пространства-времени // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, № 5. – С. 459–492.
8. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е.* Теория колебаний. – Москва: Наука, 1981. – 568 с.
9. *Андронов Ф.А. и др.* Качественная теория динамических систем. – Москва: Наука, 1966. – 428 с.
10. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, № 11. – С. 46–56.
11. *Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р.* Особенности решения задачи Коши для нелокальной неизотермической фильтрации в дробном исчислении // Сб. ма-

териалов IV Международной конференции «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы». – Махачкала: ИПГ, 2014. – С. 144–147.

12. *Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р.* Особенности распределения температуры и давления в пласте при нелокальной неизотермической фильтрации // Сб. материалов IV Международной конференции «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы». – Махачкала, 2015. – С. 314–319.

13. *Батунин А.В.* Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в физике Адрона // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165, № 6. – С. 645–660.

14. *Бейбалаев В.Д.* Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой: Дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / В.Д. Бейбалаев. – Таганрог, 2009. – 132 с.

15. *Бейбалаев В.Д.* Математические модели динамических процессов в фрактальных и пористых средах. – Махачкала: Из-во ДГУ, 2022. – 278 с. – ISBN 978-5-9913-0227-1.

16. *Бейбалаев В.Д.* Математическая модель теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 55–62.

17. *Бейбалаев В.Д.* Решение начальной задачи для дифференциального уравнения «фрактального» осциллятора // Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – Вып. 2(19). – С. 240–242.

18. *Бейбалаев В.Д.* Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка // Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – Вып. 1(18). – С. 267–270.

19. *Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р.* Численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка // Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2010. – Вып. 5(21). – С. 244–251.

20. Бейбалаев В.Д. и др. Особенности фазовой траектории «фрактального» брюсселятора // Сб. материалов VII Всероссийской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара: Самарский ГТУ, 2010. – С. 204–210.

21. Бейбалаев В.Д. Моделирование хаотического поведения динамических систем с фрактальной структурой // Сб. материалов VIII Всероссийской конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара: Самарский ГТУ, 2011. – С. 27–31.

22. Бейбалаев В.Д. Модель «хищник–жертва» в нелокальной постановке // Сб. материалов VII Международной научно-практической конференции «Динамика современной науки». – София (Болгария), 2011. – Т. 10. – С. 73–75.

23. Бейбалаев В.Д., Давудова Ф.Ф., Ламетов А.Г. Численное решение краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2013. – №6. – С. 86–92.

24. Бейбалаев В.Д. Одношаговые методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. 6. – С. 35–44.

25. Бейбалаев В.Д., Назаралиев М.А., Шабанова М.Р., Ахмедов Т.З. Численный метод решения краевой задачи для нелокального уравнения теплопроводности с производными дробного порядка Рисса // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. 1. – С. 31–35.

26. Бейбалаев В.Д. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона с производными дробного порядка // Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2012. – Вып. 2 (27). – С. 183–187.

27. Бейбалаев В.Д., Якубов А.З. Анализ разностной схемы аналога волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования / Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2014. – Вып. 1 (34). – С. 125–133.



28. Бейбалаев В.Д., Давудова Ф.Ф., Наврузова К.А. Нелинейные динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 113–118.

29. Бейбалаев В.Д., Абдуллаев И.А., Наврузова К.А., Гаджиева Т.Ю. О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования // Вестник ДГУ. – 2014. – Вып. 6. – С. 53–61.

30. Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка: учебно-методическое пособие. — Махачкала: Издательство ДГУ, 2020. — 44 с.

31. Бейбалаев В.Д. и др. Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с оператором дробного дифференцирования // Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 378–387.

32. Бейбалаев В.Д., Эмиров С.Н., Аливердиев А.А. Расчет теплопроводности гранулитов в зависимости от давления и температуры // Сб. материалов I Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий». – Махачкала: ДГУ, 2020. – С. 46–50.

33. Бейбалаев В.Д., Малеева Ф.Ф. О сходимости разностного метода решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер.: Естественные науки. – 2018. – № 2 (198). – С. 30–34.

34. Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Ибатов Т.И. Об устойчивости и сходимости разностной схемы для нелокальной задачи неизотермической фильтрации // Сб. материалов XIII Международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук. – Махачкала: ДГУ, 2019. – С. 43–44.

35. *Бейбалаев В.Д., Ибатов Т.И., Омарова А.Г.* Численное исследование нелинейного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2021. –Т. 36, № 2. – С. 47–53. (203)

36. *Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Якубов А.З.* Исследование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с производными дробного порядка по времени // Сб. материалов II Международной научно-практической конференции «Современная математика и ее приложения». – Грозный: ЧГПУ, 2021. – С. 17–22.

37. *Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А.* Исследование температурных и барических закономерностей изменения теплопроводности известняка // Сб. материалов IV Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий». – Махачкала: ДГУ, 2023. – С. 37–41. (202)

38. *Бештоков М.Х., Худалов М.З.* Третья краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто// Математика и математическое моделирование. – 2020.-№3. – С. 52–64.

39. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 245 с.

40. *Боголюбов А.Н., Потапов А.А., Рехвиашвили С.Ш.* Способ введения дробного интегро-дифференцирования в классической электродинамике // Вестник МГУ. Сер. 3: Физика. Астрономия. – 2009. – № 4. – С. 9–11.

41. *Бочеввер Ф.М. и др.* Основы гидрогеологических расчетов. – Москва: Недра, 1965. – 306 с.

42. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1976. – 384 с.

43. *Вебер В.К.* Структура общего решения системы  $y^\alpha = Ay, 0 < \alpha \leq 1$  // Труды Киргизского гос. ун-та. Сер.: Математические науки. – 1976. – Вып. 11.– С. 26–32.

44. *Визгин В.П.* Эрлангенская программа и физика. – Москва: Наука, 1975. – 110 с.
45. *Гегечкори Н.М.* Экспериментальное исследование канала искрового разряда // *ЖЭТФ.* – 1951. – Т. 21, вып. 4. – С. 493–506.
46. *Воларович М.М. и др.* Физико-механические свойства горных пород и минералов при высоких давлениях. – Москва: Наука, 1974. – 223 с.
47. *Головизнин В.М. и др.* Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнения дробной диффузии. – Препринт № ИВРАЕ-2002-01, Москва: ИБРАЭ РАН, 2002. – 57 с.
48. *Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А.* Численные методы решения уравнения дробной диффузии в одномерном случае. – Препринт № ИВРАЕ-2002-10, Москва: ИБРАЭ РАН, 2002. – 35 с.
49. *Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А., Юрко Ю.И.* Прямые задачи неклассического переноса радионуклидов в геологических формациях // *Известия РАН. Энергетика.* – 2004. – № 4. – С. 121–130.
50. *Головизнин В.М., Короткин И.А.* Методы численных решений некоторых одномерных уравнений с дробными производными // *Дифференциальные уравнения.* – 2006. – Т. 42, № 7. – С. 121–130.
51. *Городецкий А.Я., Заборовский В.С.* Фрактальные процессы в компьютерных сетях. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 2000. – 102 с.
52. *Гордиевских, Д.М.* Численное решение некоторых вырожденных дифференциальных уравнений с дробной производной по времени / Д.М. Гордиевских, П.Н. Давыдов // *Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ».* – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 1 – 11.
53. *Джарбабян М.М.* Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. – Москва: Наука, 1966. – 672 с.
54. *Жмакин А.И.* Теплопроводность за пределами закона Фурье // *Журнал технической физики.* – 2021. – Т. 91, № 1. – С. 5-25.

55. *Зосимов В.В., Лямшев Л.М.* Фракталы в волновых процессах // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165, № 4. – С. 361–402.
56. *Иванов Н.М., Музыченко В.П.* Экономичный вариант численного обращения преобразования Лапласа // Вычислительная математика и математическая физика. – 1983. – Т. 23, №4. – С. 992–994.
57. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. – Москва: Янус-К, 2002. – 284 с.
58. *Колесников А.А.* Основы синергетики управляемых систем. – Таганрог, 2001. – 123 с.
59. *Luchko, Yu.* Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation / Yu. Luchko // *Comput. Math. Appl.* – 2010. – Vol. 59, no. 5. – P. 1766–1772.
60. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах / пер. с англ. Т.Э. Кренкеля и А.Л. Соловейчика; под ред. Т.Э. Кренкеля. – Москва: Постмаркет, 2000. – 350 с.
61. *Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Самарский А.А.* Компьютерное моделирование и нелинейные явления. – Москва: Наука, 1988. – 192 с.
62. *Лавров А.В.* Закономерности формирования и проявления эффектов памяти в горных породах : дис. док. тех. наук : 25.00.20 / Моск. гос. гор. ун-т. – Москва, 2001. – 582 с.
63. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика: в 10 т. – Москва: Наука, 1988. – Т. 1. – 214 с.
64. *Лафшиева М.М., Шхануков-Лафшиев М.Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // *Вычислительная математика и математическая физика.* – 2008. – Т. 48, № 10. – С. 1878–1887.

65. *Лебедев Т.С. и др.* Петрофизические свойства минерального вещества в термобарических условиях литосферы.– Киев: Наукова думка, 1988. – 248 с.
66. *Лейбензон Л.С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – Москва: Гостехиздат, 1947. – 244 с.
67. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1961. – 388 с.
68. *Малиницкий Г.Г., Потанов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. – Москва: Мир, 2000. – 335 с.
69. *Малиева Ф.Ф.* Об устойчивости разностной схемы с весами для уравнения теплопроводности с дробной производной Caputo // Вестник ДГУ. – 2017. – Т.32, Вып.2. – С. 39-46. (207)
70. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – 2-е изд. – Москва, 2004. – 248 с.
71. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – Москва: Наука, 2002. – 654 с.
72. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядкаю. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013 – 200 с.
73. *Мейланов Р.П., Янполов М.С.* Особенности фазовой траектории «фрактального» осциллятора // Письма в ЖТФ. –2002 – Т. 28, № 1. – С. 67–73.
74. *Мейланов Р.П., Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д.* Фрактальный осциллятор с затуханием // Сб. материалов I Международной научной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». – Махачкала, 2003. – С. 70–71.
75. *Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шаханова М.Р.* Прикладные аспекты дробного исчисления. – Palmarium Academic Publishing, 2012. – 135 с.
76. *Мейланов Р.П., Шабанова М.Р.* Особенности неизотермической фильтрации с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций // Сб.

материалов Международной конференции «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы». – Махачкала: ИПГ, 2014. – С. 96–99.

77. *Мейланов Р.П.* К теории фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой // Письма в ЖТФ. – 1996. – Т. 22, вып. 23. – С. 40–42.

78. *Мидлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. – Москва: Советское радио, 1961. – Т. 1. – 784 с.

79. *Мун Ф.* Хаотические колебания. – Москва: Мир, 1990. – 312 с.

80. *Назаралиев М.А., Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р.* Особенности фазовой траектории фрактального «брюсселятора» // Сб. научных трудов VII Всероссийской научной конференции с международным участием. – Самара, 2010. – С. 204–210.

81. *Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д.* Фрактальный осциллятор с вынуждающей силой // Сб. материалов IV Международной научной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». – Махачкала, 2009. – С. 168–171.

82. *Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д.* Нелинейные колебания в средах с фрактальной структурой // Сб. трудов Международного Российско-Болгарского симпозиума. – Нальчик, 2010. – С. 77–80.

83. *Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д.* Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2008. – Вып. 6. – С. 46–53.

84. *Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д.* Динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка // Владикавказский математический журнал. – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 30–40.

85. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2000. – 299 с.

86. *Нахушев А.М.* К проблеме информационной безопасности в системах с фрактальной структурой и памятью // Сб. материалов VI Международ-

ной научно-практической конференции «Информационная безопасность». – Таганрог, 2004. – С. 327–329.

87. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – Москва: Наука, 2006. – 173 с.

88. *Нахушева В.А.* Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой: Дис. док. физ.-мат. наук: 05.13.18 / В.А. Нахушева. – Нальчик, 2008. – 268 с.

89. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. – 1992. – Т. 90, № 3. – С. 354–368.

90. *Одинцев В.И., Бунин И.Ж.* Фрактальное разрушение и эффект «памяти» горных пород // «Неделя горняка». – 2002, семинар №2.

91. *Олемской А.И., Флат А.Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163, № 12. – С. 1–50.

92. *Паровик Р.И.* Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов. – Петропавловск-Камчатский: Изд-во Камчатского государственного университета им. Витуса Беринга, 2017. – 134 с.

93. *Петухов, А.А.* Алгоритмы численного решения дробнодифференциальных уравнений / А.А. Петухов, Д.Л. Ревизников // Вестник МАИ. – 2009. – Т. 16. – С. 228 – 234.

94. *Потанов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.

95. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. – Москва: Прогресс, 1986. – 320 с.

96. *Псху А.В., Рехвиашвили С.Ш.* Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // Письма в ЖТФ. – 2019. – Том 45, вып. 1. – С. 34-37.

97. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. – Москва: Наука, 2005. – 199 с.

98. Пуанкаре А. О кривых, определенных дифференциальными уравнениями. – Москва: Наука, 1947. – 127 с.
99. Рехвиашвили С.Ш., Алиханов А.А. Моделирование диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в полупроводниковых слоях с фрактальной структурой в переменном электрическом поле // Физика и техника полупроводников. – 2017. – Том 51, вып. 6 – С. 787–791.
100. Рехвиашвили С.Ш. Дробный осциллятор с экспоненциально-степенной функцией памяти // Письма в ЖТФ. – 2022. – Т. 48, вып 7. – С. 33–35.
101. Рехвиашвили С.Ш., Псху А.В. Новый метод описания затухающих колебаний балки с одним заделанным концом // Журнал технической физики. – 2019. – Т. 89, вып. 9. – С. 1314–1318.
102. Самарский А.А. Численные методы / Самарский А.А., Гулин А.В. – Москва: Наука, 1989. – 430 с.
103. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и Техника, 1987. – 688 с.
104. Свенсон К. Физика высоких давлений. – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 218 с.
105. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. – Москва: Наука, 2007. – 167 с.
106. Сибатов Р.Т., Учайкин В.В. Дробно-дифференциальная кинетика переноса заряда в неупорядоченных полупроводниках // Физика и техника полупроводников. – 2007. – Т. 41, № 3. – С. 346–351.
107. Синая Я.Г., Шильникова Л.П. Странные аттракторы. Новое в зарубежной науке. – Москва: Мир, 1981. – 384 с.
108. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегродифференцированием дробного порядка. – М.–Ижевск:РХД, 2011. – 568 с.



109. *Твердый Д.А., Паровик Р.И.* Программа численного расчета задачи Коши для уравнения Рикатти с производной дробного переменного порядка // *Фундаментальные исследования.* – 2017. – № 8-1. – С. 98-103.
110. *Тимашев С.Ф.* Фликер-шум как индикатор «стрелы времени». Методология анализа временных рядов на основе детерминированного хаоса // *Российский химический журнал.* – 1997. – Т. 41, № 3. – С. 17–29.
111. *Тренькин А.А.* Моделирование процессов переноса заряженных частиц под действием внешнего электрического поля в столкновительных канальных системах // *Нелинейный мир.* – 2016. – Т. 14, № 4. – С. 12–16.
112. *Тренькин А.А., Карелин В.И.* Генерация высокоэнергетичных электронов в высоковольтных импульсных разрядах в воздухе, развивающихся в режиме микроструктурирования токовых каналов // *Известия высших учебных заведений. Физика.* – 2014. – Т. 57, № 12/2. – С. 289–294.
113. *Тренькин А.А., Карелин В.И., Бейбалаев В.Д., Алисултанов З.З., Рагимханов Г.Б.* Динамика электронов в ветвящихся системах газоразрядных каналов со спадающей концентрацией газа // *Нелинейный мир.* – 2017. – Т. 15, № 3. – С. 24–31.
114. *Тренькин А.А., Бейбалаев В.Д., Рагимханов Г.Б.* Динамика электронов во фрактальных системах ветвящихся газоразрядных каналов при различных режимах радиального расширения // *Нелинейный мир.* – 2019. – Т. 17, № 5. – С. 47–53.
115. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных.- Издательство «Артишок», 2008. – 512 с.
116. *Чукбар К.В.* Стохастический перенос и дробные производные // *ЖЭТФ.* – 1995. – Т. 108, № 5 (11). –С. 1875–1884.
117. *Шаргатов В.А.* Математическое моделирование процессов с дисперсией, диссипацией и фазовыми переходами в сложных средах: Дис. док. физ.-мат. наук: 05.13.18 / В.А. Шаргатов – Москва, 2021. – 361 с.

118. *Шхануков М.Х.* О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // ДАН. – 1996. – Т. 348, № 6. – С. 746–748.

119. *Эмиров С.Н., Рамазанова А.Э.* Экспериментальные исследования процессов теплопереноса на границах зерен в упорядоченных и неупорядоченных средах // Известия РАН. Сер. Физическая. – 2013. – Т. 77, № 3. – С. 317–321.

120. *Эмиров С.Н., Аливердиев А.А., Бейбалаев В.Д. и др.* О температурных и барических зависимостях эффективной теплопроводности гранитов // Известия РАН: Серия физическая. – 2020. – Т. 84 (9). – С. 1338–1340.

121. *Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д. и др.* О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности горных пород // Вестник Новгородского государственного университета. – 2017. – № 5 (103). – С. 52–56.

122. *Эмиров С.Н. и др.* Описание температур-но-барической зависимости теплопроводности естественных и искусственных композитов // Тепловые процессы в технике. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 139–143.

123. *Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э. и др.* О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности композитных материалов // Известия РАН. Сер. Физическая. – 2018. – Т. 82, № 7. – С. 142–145.

124. *Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А.* Расчет теплопроводности гранулитов в зависимости от давления и температуры // Вестник ДГУ. – 2020. – Вып. 3. – С. 31–35.

125. *Abdulagatov I.M., Emirov S.N., Gairbekov Kh.A.* Effect temperature and pressure on thermal conductivity of sandstone // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2009. – Vol. 46, no. 6. – P. 1055–1071.

126. *Abdulagatov I.M. [et al.]* Efficient thermal conductivity of fluid-saturated porous mica ceramics at high temperatures and high pressures // Ind. Eng. Chem. Res. – 2002. – Vol. 41. – P. 3586–3593.

127. *Alisultanov Z.Z., Ragimkhanov G.B.* Fractional – differential approach to the study of instability in a gas discharge // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2018. – Vol. 107. – P. 39–42.

128. *Alishaev M.G., Beybalaev V.D., Aliev R.M., Aliverdiev A.A.* Heating and cooling of water injected into the well // *Thermal Science.* – 2021. – Vol. 25, no. 2. – P. 315–320.

129. *Aliev R.M., Aliverdiev A.A., Beybalaev V.D., Zarichnyak Yu.P., Ramazanova E.N.* Effect of Pressure on the Temperature Dependence of the Effective Thermal Conductivity of Gallium Antimonide with Different Degrees of Ordering // *Journal of Surface Investigation.* – 2022. – Vol. 16, no. 3 – P. 338–342.

130. *Alm O.* Influence of pressure and temperature on thermal conductivity of rocks / *Alm O., Backstrom G.* // *High Temperatures – High Pressures* – 1975. – Vol. 7. – P. 235–239.

131. *Aurangzeb, Khan L.A., Maqsood A.* Prediction of effective thermal conductivity of porous consolidated media as a function of temperature: a test example of limestones // *Journal of Physics D: Applied Physics.* – 2007. – Vol. 40, no.16. – P. 4953–4958.

132. *Babich L.P., Loiko T.V., Tsukerman V.A.* High-voltage nanosecond discharge in a dense gas at a high overvoltage with runaway electrons // *Phys. Usp.* – 2004. – Vol. 33, no. 7. – P. 521–540.

133. *Baleanu D.* Fractional calculus: models and numerical methods / *D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo* // Singapore: World Scientific, 2012.– 400 p.

134. *Beybalayev V.D.* Mathematical Model of transfer in fractal structure mediums // *Mathematical Models and Computer Simulations.* – 2010. – T. 2, no. 1. – P. 91–97.

135. *Beybalaev V.D., Meilanov R.P.* The Dirihlet problem for the fractional poisons equation with Caputo Derivatives: A finite difference approximation and a numerical solution // *Thermal Science.* – 2012. – Vol. 16, no. 2. – C. 385–394.

136. *Beybalaev V.D., Shabanova M.R.* A Finite-Difference scheme for solution of a fractional heat diffusion-wave equation without initial conditions // *Thermal science.* – 2015. – Vol. 19, no. 2. – P. 531–536.

137. *Beybalaev, V.D. [et al.]* To the fractal equation of state // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2017. – P. 891(1).

138. *Beybalaev V.D. [et al.]*. Numerical Research of Non-isothermal Filtration Process in Fractal Medium with Non-locality in Time // *Thermal Science.* – 2021. – Vol. 25, no. 1B. – P. 465–475.

139. *Beybalaev, V.D. [et al.]* Transient Heat Conduction in a Semi-Infinite Domain with a Memory Effect: Analytical Solutions with a Robin Boundary Condition // *Fractal Fractional.* 2023. – Vol. 7(10), no. 770. – [Doi.org/10.3390/fractalfract7100770](https://doi.org/10.3390/fractalfract7100770).

140. *Beybalaev, V.D. [et al.]* Mathematical Model of Heat Conduction for a Semi-Infinite Body, Taking into Account Memory Effects and Spatial Correlations // *Fractal Fractional.* – 2023. – Vol. 7(3), no. 265. – [Doi.org/10.3390/fractalfract7030265](https://doi.org/10.3390/fractalfract7030265).

141. *Buranov S.N. [et al.]*. Generation of high-energy electrons and X-rays in high-voltage diffuse discharges at atmospheric pressure with interelectrode gaps up to tens of centimeters. In book «Generation of Runaway Electron Beams and X-ray in high pressure gases». Vol. 1. Techniques and Measurements / Editors: Victor F. Tarasenko. – New York: Nova Publishers, 2016.

142. *Cai, M.* Numerical Approaches to fractional Integrals and derivatives: a review / M. Cai, C. Li // *Mathematics.* – 2020. – Vol.8, no. 1. – P. 1 – 53.

143. *Chen, W.* Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives / W. Chen, H. Sun, X. Zhang, D. Korošak // *Computers & Mathematics with Applications.* – 2010. – Vol. 59, no. 5. – P. 1754–1758.

144. *Debye P.* Zur Theorie der spezifischen Wärmen / *Debye P.* // *Annalen der Physik.* – 1912. – Vol. 344, no. 4. – P. 789–839.

145. *Diethelm, K.* Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical method / K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Yu. Luchko // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2005. – Vol. 194. – P. 743–773.

146. *Dimitrov Y.* Three-point compact approximation for the Caputo fractional derivative / Y. Dimitrov // *Communications on Applied Mathematics and Computation.* – 2015. – Vol. 31, no. 4. – P. 413–442.

147. *Emirov S.N.* Thermal conductivity of certain rocks under high pressures and temperatures // *Pressure Investigations in Geosciences.* – Berlin: Akadem. – Verlag, 1989. – P. 123–126.

148. *Emirov S.N., Beybalaev V.D. [et al.]*. Study of the thermal conductivity of SiC–BeO ceramics at high pressures and temperatures // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2017. – Vol. 71. – P. 290–292.

149. *Emirov S.N., Beybalaev V.D. [et al.]*. Temperature and Baric Patterns of Changes in the Thermal Conductivity of Composite Materials // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2018. – Vol. 82, no. 7. – P. 888–891.

150. *Emirov S.N., Aliverdiev A.A., Beybalaev V.D. [et al.]* Temperature and Pressure Dependences of the Effective Thermal Conductivity of Granites // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2020. – Vol. 84, no. 9. – P. 1144–1146.

151. *Emirov S.N. [et al.]*. Studies of the Effective Thermal Conductivity of Sandstone Under High Pressure and Temperature // *Rock Mechanics and Rock Engineering.* – 2021. – P. 44–47.

152. *Emirov S.N., Beybalaev V.D. [et al.]*. Temperature dependence of the thermal conductivity of rocks and ceramics on pressure // *Journal of Physics: Conf. Series.* – 2019. – Vol. 1172. – P. 012006.

153. *Emirov S.N., Aliverdiev A.A., Beybalaev V.D. [et al.]*. Some Features of the Temperature-Pressure dependence of the effective thermal conductivity of rocks // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2020. – On Dec 1. – P. 032044.

154. *Emirov S.N., Aliverdiev A.A., Beybalaev V.D. [et al.]*. Effect of pressure on the temperature dependence of the thermal conductivity of arsenic chalcogenide with Different ordering // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2021. – Vol. 85. – P. 979–982.

155. *Emirov S.N., Aliverdiev A.A., Beybalaev V.D., Amirova A.A.* On the temperature and pressure dependences of the effective thermal conductivity of granites // *Thermal Science.* – 2021. – Vol. 25, no. 4A. – P. 2493–2501.

156. *Eucken A.* About the temperature dependence of the thermal conductivity of solid non-metals // *Annals of Physics.* – 1911. – Vol. 339, no. 2. – P. 185–221.

157. *Charles Tadjeran, Mark M. Meerschaert, Hana-Peter Scheeffler.* A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation // *Journal of Computational Physics.* – 2006. – No. 213. – P. 205–213.

158. *Handbook of Physical Constant / Clark S.P.* – New York: Geological Society of America, 1966. – 587 p.

159. *Gao, G.* A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications / G. Gao, Z. Sun, H. Zhang // *Journal of Computational Physics.* – 2014. – Vol. 259. – P. 33 – 50.

160. *Garrappa, R.* Numerical solution of fractional differential equations: a survey and a software tutorial / R. Garrappa // *Mathematics.* – 2018. – Vol. 6, no. 2. – P. 1 – 16.

161. *Hartlieb P., Toifl M., Kuchar F., Meisels R., Antretter T.* Thermo-physical properties of selected hard rocks and their relation to microwave-assisted comminution // *Minerals Engineering.* – 2016. – Vol. 91. – P. 34–41

162. *Hausdorff F., Hausdorff F.* Dimension und Ausseres Mass // *Mathematische Annalen.* – 1919. – Vol. 79. – P. 157–179.

163. *Hofmaister A.M.* Thermal diffusivity of garnets at high temperature // *Phys. Chem. Miner.* – 2006. – Vol. 33. – P. 45–62.

164. *Horai K., Susaki J.* The effect of Pressure on the Thermal Conductivity of Silicate rocks up to 12 kBar // *Physics of the Earth and Planetary Interiors.* – 1989. – Vol. 55. – P. 292–305.

165. *Hristov J.* Approximate Solutions to Fractional Subdiffusion Equations // *The European Physical Journal Special Topics.* –2011. – Vol. 193, no. 1. – P. 229–243.

166. *Hristov J.* Constitutive fractional modeling, In: *Contemporary Mathematics. Mathematical Modelling: Principle and Theory.* – 2023. – Vol. 786. – P. 37–140.

167. *Hughes D.S., Savin F.* Thermal Conductivity of. Dielectric Solids at High Pressure // *Phys. Rev.* – 1967. – Vol. 61, no. 3. – P. 861–863.

168. *Jalab H.A., Ibrahim R.W.* Texture Enhancement for Medical Images Based on Fractional Differential Masks / *Discrete Dynamics in Nature and Society.* – 2013. – Vol. 2013. – P. 1–10.

169. *Karelin V.I., Trenkin A.A.* Microchannels in Atmospheric Pressure Pulsed Discharges // *Runaway Electrons Preionized Diffuse Discharges / Editors: Victor F. Tarasenko.* – Nova Publishers, 2014.

170. *Karelin V.I., Trenkin A.A., Fedoseev I.G.* Dynamics of the Microstructure of Current Channels and the Generation of High\_Energy Electrons in Nanosecond Discharges in Air // *Physics of Atomic Nuclei.* – 2015. – Vol. 78, no. 12. – P. 1440–1445.

171. *Kämmlein M., Stollhofen H.* Pore-fluid-dependent controls of matrix and bulk thermal conductivity of mineralogically heterogeneous sandstones // *Geothermics.* –2019. – Vol. 7, no. 13. – P. 31–40. – URL: <https://doi.org/10.1186/s40517-019-0129-4>.

172. *Kemppainen J.T.* Existence and uniqueness of the solution for a time-fractional diffusion equation with Robin boundary condition. *Abstract and Applied Analysis*, 2011, article ID 321903. 11p. DOI: 10.1155/2011/321903

173. *Khalighi M., Benedetti G., Lahti L.* A Julia Package for Solving Fractional Differential Equations // arXiv:2212.12550 [mat.NA]. – doi.org/10.48550/arXiv.2212.12550.

174. *Kukkonen I.T. [et al.]*. Geothermal studies of the Outokumpu Deep Drill Hole. Geological Survey of Finland // Special Paper. – 2011. – Vol. 51. – P. 181–198.

175. *Klemens P.G.* Thermal conductivity and lattice vibrational modes // Sol. St. Phys. – 1958. – Vol. 7. – P. 14.

176. *Klemens P.G.* Theory of the pressure dependence of the lattice Thermal Conductivity // “High Pressure Sci and Technol.” Prog. 7th Int. AIRAPT Conf. – 1979. – Vol. 1. – P. 480–482.

177. *Lauwerier H.A.* The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid // Appl. Scientific Res. Sec. A. – 1955. – Vol. 5, no. 2. – P. 145–150.

178. *Liu Q., Liu F., Turner I., Anh V.* Approximation of the Leavy-Feller advection-dispersion process by random walk and finite difference method // Journal of Computational Physics. – 2007. – No. 222. – P. 57–70.

179. *Liu Junyi, Xu Mingyu.* Some exact solutions to Stefan problems with fractional and Applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2009. – Vol. 351. – P. 536–542.

180. *Lorenz E.N.* Deterministic Non-Periodic Flow // Journal Atmosphere. – 1983. – Sci. 20. – P. 130–141.

181. *Lynch V.E. [et al.]* Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order // Journal of Computational Physics. – 2003. – No. 192. – P. 406–421.

182. *Magomedov R.A., Meilanov R.R., Beybalaev V.D. [et al.]* Generalization of thermodynamics in of fractional-order derivatives and calculation of heat-transfer properties of noble gases // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 2018. – Vol. 133, no. 2. – P. 1189–1194. – DOI:10.1007/s10973-018-7024-2.



183. *Mandelbrot B.B.* Fractals: Form, Chance, and Dimension, Freeman / Benoit B Mandelbrot. – San Francisco, 1977. – 420 p.

184. *Mainardi F. [et al.]*. The Fundamental Solutions of the Space-Time Fractional Diffusion Equation // *Fract. Calc. Appl. Anal.* –2011. – Vol. 4, no. 2. – P. 153–192.

185. *Meerschaert M.M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for two-sides space-fractional partial differential equations / *Meerschaert M.M.*, // *Applied Numerical Mathematics.* – 2006. – No. 56. – P. 80–90.

186. *Meerschaert M.M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // *J. Comput. Appl. Math.* – 2004. – No. 172. – P. 65–77.

187. *Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beibalaev V.D. [et al.]*. To the theory of non-local non-isothermal filtration in porous medium // *Journal of Physics: Conference Series* 32. – 2018. – Vol. 946. – P. 012076.

188. *Norden B., Förster A., Förste, H.-J., Fuchs S.* Temperature and pressure corrections applied to rock thermal conductivity: impact on subsurface temperature prognosis and heat-flow determination in geothermal exploration // *Geothermal Energy.* – 2020. – Vol. 8, no. 1. – P. 1–19.

189. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. – New York and London: Academic Press, 1974. – 234 p.

190. *Podlubny I.* Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego: Academic Press, 1999. – 340 p.

191. *Rep'ev A.G., Repin P.B, Pokrovskii V.S.* Microstructure of the current channel of an atmospheric-pressure diffuse discharge in a rod-plane air gap // *Technical Physics.* – 2007. – Vol. 52, no. 1. – P. 52–58.

192. *Rossikhin Y.A., Shitikova M.V.* Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // *Appl. Mech. Rev.* – 1997. – Vol. 50. – P. 15–67.

193. *Seipold U., Engler R.* Investigation of the thermal conductivity of Jointed Granodiorites under Uniaxial Load and Hydrostatic Pressure // *Gerland. Beitz. Z. Geophys.* – 1981. – Vol. 90. – P. 65–71.
194. *Sontakke, B.R.* Approximate scheme for time fractional diffusion equation and its applications / *B.R. Sontakke, A.S. Shelke* // *Global J. of Pure and Applied Mathematics.* – 2017. – Vol. 13, no. 8. – P. 4333 – 4345.
195. *Sousa E.* How to approximate the fractional derivative of order  $1 < \alpha \leq 2$  / *E. Sousa* // *International journal of bifurcation and chaos.* – 2012. – Vol. 22, no. 4. – P. 1 – 6.
196. *Stankovi'c B.* On the function of E.M. Wright // *Publ. de l'Institut Math.* –1970. – Vol. 24, no 10. – P. 113–124.
197. *Schroeder M.* Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise. – New York: W.H. Freeman and Company, 1991. – 429 p.
198. *Shen A.H., Bassett W.A., Cnou I-Ming.* The  $\alpha$ - $\beta$  quarts transition at high temperatures and pressures in a diamond-anvil cell by laser interferometry // *American Mineralogist.* – 1993. – Vol. 78. – P. 694–698.
199. *Sun Qiang [et al.]* Analyses of the factors influencing sandstone thermal conductivity // *Journal: Acta Geodynamica et Geomaterialia.* – 2017. – Vol. 14, no. 2. – P. 173–180.
200. *Tarasov V.E.* Fractional Integro-Differential Equations for Electromagnetic Waves in Dielectric Media // *Theoret. and Math. Phys.* – 2009. – Vol. 158, no. 3. – P. 355–359.
201. *Tarasov V.E.* Fractional Generalization of the Quantum Markovian Master Equation // *Theoret And Math. Phys.* –2009. – Vol. 158, no. 2. – P. 179–195.
202. *Tarassenko V.F., Yakovlenko S.I.* Plasma spectroscopy of runaway electrons... radiation sources for new generation lithography // *Phys. Usp.* – 2004. – Vol. 47. – P. 887–905.

203. *Tepljakov A. [et al.]* Fractional-order modeling and control of ionic polymer-metal composite actuator // *Smart Mater. Struct.* – 2019. – Vol. 28, no 8. – P. 084008.

204. *Trenkin A.A. [et al.]*. Microstructure of an Spark Discharge in Air in a Point–Plane Gap // *Technical Physics.* – 2018. – Vol. 63, no. 6. – P. 801–805.

205. *Trenkin A.A. [et al.]*. Parameters of a Microstructure of Erosion Regions during the Action of a Spark Discharge on a Copper Electrode Surface in Air // *Technical Physics.* – 2018. – Vol. 63, no. 10. – P. 1473–1478.

206. *Trenkin A.A. [et al.]*. Dynamics of the Spatial Structure of Pulsed Discharges in Dense Gases in Point Cathode–Plane Anode Gaps and Their Erosion Effect on the Plane Electrode Surface // *Plasma Physics Reports.* – 2016. – Vol. 42, no. 9. – P. 876–886.

207. *Vogel E. [et al.]*. Ab initio Pair Potential Energy Curve for the Argon Atom Pair and Thermophysical Properties for the Dilute Argon Gas. II. Thermophysical Properties for Low-Density Argon // *Mol. Phys.* – 2010. – Vol. 108. – P. 3335–3352.

208. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // *Quarterly J. of Math.* – 1940. – Vol. 11, no 1. – P. 36–48.

209. *Yi-Fei Pu, Ji-Liu Zhou, Xiao Yuan.* Fractional Differential Mask: A Fractional Differential-Based Approach for Multiscale Texture Enhancement / *Yi-Fei Pu,* // *IEEE Transactions on image processing.* –2010. – Vol. 19, no. 2. – P. 491–511.

210. *Zhou Yong* Basic theory of fractional differential equations.- New Jersey: World Scientific, 2014. – 293 p.

211. *Mainardi F.* Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models. – London: Imperial College Press, 2010. – 347 p.

Программная реализация алгоритма компьютерного моделирования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, методом фазовой плоскости



Программная реализация алгоритма компьютерного  
моделирования процессов промерзания во фрактальных средах





Программная реализация алгоритма расчета теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления



Программная реализация алгоритма обработки изображений с помощью  
обобщенных дробных операторов

