На правах рукописи

Бейбалаев Ветлугин Джабраилович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВО ФРАКТАЛЬНЫХ И ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ульяновск – 2024

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет» на кафедре прикладной математики

Научный консультант:	**Аливердиев Абутраб Александрович,** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Москалев Павел Валентинович,** доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», кафедра прикладной математики, профессор кафедры
	Паровик Роман Иванович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБУН Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения РАН, лаборатория моделирования физических процессов, ведущий научный сотрудник
	Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», кафедра «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», профессор кафедры
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

Защита состоится «25» сентября 2024 года в 10.00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.422.04, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ульяновский государственный университет», по адресу: г. Ульяновск, ул. Набережная реки Свияги, д. 106, корпус 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа — https://www.ulsu.ru, с авторефератом — на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации — https://vak.minobrnauki.gov.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан « ____ » _____________ 2024 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Волков Максим Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Одним из перспективных подходов при описании многих физических процессов во фрактальных и пористых средах является использование математического аппарата интегралов и производных дробных порядков. Дробные степени в показателях размерностей очень часто возникают при моделировании различных процессов во фрактальных (разномасштабных, подобных целому) средах. В работе [3]Тарасова показано, что дробный математический анализ является важнейшим методом для построения моделей теоретической физики, в которых иптегро-дифференциальные операторы дробного порядка по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память, и пространственную нелокальность сложных сред, процессов и явлений.

Как указано в работах [1]Нахушева А.М., [2]Потапова А.А., [4]Мейланова Р.П., [5]Учайкина В.В., [6]Рехвиашвили С.Ш., [7]Hristov J., разработка новых математических методов моделирования востребовали проблемы, связанные с исследованием нелокальных динамических процессов во фрактальных и пористых средах, так как в настоящее время понятие фрактала стало одним из парадигм современной физики, радиофизики, радиолокации, аппарат дробного исчисления математической основой моделирования различных динамических процессов физики фракталов, геотермии, гидромеханики и космической электродинамики.

Актуальность работы

В связи с большими трудностями, возникающими при поиске аналитических решений уравнений с дробными производными, наряду с аналитическими методами развиваются и численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка. В настоящее время, разностные методы и алгоритмы их реализации актуальны при исследовании математических моделей сложных физических систем с памятью, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка. На актуальность разработки численных методов решения начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений с производными дробного порядка обращено внимание в работах как отечественных [8]Алиханова А.А., [9]Пименова В.Г., [10]Бештокова М.Х так и зарубежных авторов [11]Gao, G., [12]Cai M. и др.

---

[1]Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2000. – 299 с.

[2]Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.

[3]Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро- дифференцированием дробного порядка: Дис. док. физ.-мат. наук: 01.04.02 / В.Е. Тарасов. – Москва, 2011. – 298 с.

[4]Meilanov R.P., Shabanova M.R., Akhmedov E.N. Some peculiarities of the solution of the heat conduction equation in fractional calculus // Chaos, Solitons & Fractals. –2015. – Vol. 75. – P. 29-33.

[5]Учайкин, В.В. Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике / В. В. Учайкин // Известия вузов, ПНД, – 2019. – Т. 27. – В. 1. – С. 5 –40.

[6]Рехвиашвили С.Ш., Алиханов А.А. Моделирование диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в полупроводниковых слоях с фрактальной структурой в переменном электрическом поле // Физика и техника полупроводников. – 2017. – Том 51, вып. 6 – С. 787–791

[7]Hristov J. Constitutive fractional modeling // – Contemporary Mathematics. – 2023. – Vol. 786. – P. 38 –138. – DOI: https://doi.org/10.1090/conm/786/15795.

В настоящее время актуально исследование моделей, описывающих нелокальные процессы, которые протекают в динамических системах с фрактальной структурой. Для многих таких систем на основе аппарата интегродифференцирования дробного порядка построены нелинейные модели, описывающие их свойства. Однако эти уравнения часто настолько сложны, что исследование их возможно только при помощи численного моделирования. Поэтому актуально развитие теории линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка, позволяющей свести исходные задачи к более простым, для которых возможно получить аналитические результаты. Данный метод служит необходимым промежуточным шагом для анализа нелинейных моделей динамических систем, поскольку позволяет сделать выводы о фундаментальных свойствах решения нелинейной задачи.

Поскольку математическое описание процессов во фрактальных структурах обладает рядом специфических особенностей, становится весьма актуальным развитие соответствующих подходов при расчетно-теоретическом моделировании газовых разрядов. Для исследования таких процессов плодотворным может оказаться подход с использованием математического аппарата дробного интегродифференцирования. На актуальность исследования динамики переноса электронов в ветвящихся системах газоразрядных каналов с использованием дифференциальных уравнений дробного порядка показывают и работы [14]Тренькина А.А. [14]Карелин В.И., [13]Алисултанова З.З., [13]Рагимханова Г.Б.

Как указано в многочисленных работах [15]Нахушевой В.А., [16]Мейланова Р.П., [17]Deng S.-X., [18]Zingales M. исследование нелокальных процессов теплопереноса должны быть проведены с учетов эффектов памяти и пространственных корреляций. Учет эффектов нелокальности в рамках традиционных подходов приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, где ядро интегрального оператора несет информацию о природе нелокальности. В таких системах физические величины обычно имеют дробную размерность. Для исследования таких процессов актуальным является применение математического аппарата дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка в математических моделях.

[8] Alikhanov A.A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation. – Applied Mathematics and Computation. – 2015. – Vol. 268. – P.12–22.

[9]Pimenov V.G., Hendy A.S. Numerical methods for the equation with fractional derivative on state and with functional delay on time. Bulletin of the Tambov university. Series: Natural and technical science. –2015. – Vol. 20(5). –P. 1358–1361.

[10]Бештоков М.Х., Худалов М.З. Третья краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто// Математика и математическое моделирование. – 2020. – №3. – С. 52–64.

[11]Gao, G. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications / G. Gao, Z. Sun, H. Zhang// Journal of Computational Physics. – 2014. – Vol. 259. – P. 33 – 50.

[12]Cai, M. Numerical Approaches to fractional Integrals and derivatives: a review / M. Cai, C. Li // Mathematics. – 2020. – Vol.8, no. 1. – P. 1 – 53.

[13]Alisultanov Z.Z., Ragimkhanov G.B. Fractional – differential approach to the study of instability in a gas discharge // Chaos, Solitons and Fractals. – 2018. –Vol. 107. – P. 39–42.

[14]Karelin V.I., Trenkin A.A., Fedoseev I.G. Dynamics of the Microstructure of Current Channels and the Generation of High_Energy Electrons in Nanosecond Discharges in Air // Physics of Atomic Nuclei. – 2015. – Vol. 78, no. 12. – P. 1440–1445.

Дробные степени в показателях размерностей очень часто возникают и при исследовании эффективной теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления. Как показывают многочисленные данные экспериментов по теплопроводности горных пород, температурная зависимость теплопроводности на всем барическом диапазоне следует степенному закону $\lambda \sim T^n$ и при этом барическая зависимость проявляет резкий нелинейный рост до 100 МПа, сопровождающийся существенным изменением значения степенного показателя. Практическая потребность знания теплопроводности горных пород в условиях естественного залегания делают актуальным исследования ее температурной и барической зависимости.

Исследование перечисленных проблем потребовало усовершенствования и развития новых методов изучения динамических процессов во фрактальных и пористых средах с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций, а также разработки эффективных алгоритмов численного моделирования нелокальных процессов теплопереноса и реализация этих методов в виде комплексов объектно-ориентированных программ.

Ключевые результаты диссертации опубликованы в ведущих журналах, входящих в список ВАК и Международные базы данных Scopus и WOS, как российских – «Mathematical Models and Computer Simulations», «Вестник СамГТУ», «Известия РАН», «Нелинейный мир», так и зарубежных – «Thermal Science», «Journal of Thermal Analysis and Calorimetry», «Fractal and Fractional», «High Temperature».

Об актуальности темы свидетельствует также то, что все представленные в диссертации результаты были получены при выполнении проектов, поддержанных грантами: Проект по аналитической ведомственной целевой программе РНПВШ 2.1.1/2669; Программа №3 фундаментальных исследований отделения математических наук РАН "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач"; РФФИ 16-08-00067 «Развитие термодинамики в дробном исчислении и расчет теплофизических характеристик веществ, в том числе в экстремальных состояниях на основе фрактального уравнения состояния»; РФФИ 18-08-00059 «Экспериментальные и теоретические исследования теплопроводности диэлектриков и горных пород при высоких гидростатических давлениях и температурах»; РФФИ 20-08-00319 «Разработка математических моделей и программных пакетов, описывающих процессы теплопереноса в призабойной зоне нефтяных, газовых и геотермальных скважин на основе экспериментальных измерений эффективной теплопроводности горных пород в условиях, близких пластовым».

---

[15] Нахушева В.А.. Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой: Дис. док. физ.-мат. наук: 05.13.18 / В.А. Нахушева. – Нальчик, 2008. – 268 с.

[16] Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Особенности решений уравнения теплопереноса в производных дробного порядка // Журнал технической физики. – 2011. – Том 81, вып. 7. – С. 1-6.

[17] Deng, S.-X., et al. Local Fractional Helmholtz Simulation for Heat Conduction // Thermal Science. – 2019. – Vol. 23, no. 3A. –P. 1671-1675.

[18] Zingales M. Fractional-order theory of heat transport in rigid bodies // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. – 2014. – Vol. 19. – P. 3938–3953.

Степень разработанности темы исследования

Первые применения методов дробных производных для исследования различных нелокальных процессов содержатся в работах [19]Нигматулина Р.Р., [20]Чукбар К.В., [21]Нахушева А.М. и др. Наряду с аналитическими методами решения краевых задач для дифференциальных уравнений с производными дробного порядка развивались и численные методы их решения. Одними из первых работ, посвященных численным методам решения краевых задач для дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, принадлежат [22]Шханукову М.Х., [23]Головизину В.М., [24]Meerschaert M.M., Tadjeran C. и др.

Данные методы применялись при исследовании особенностей фазовой траектории «фрактального» осциллятора [25], при исследовании прямых задач неклассического переноса радионуклидов в геологических формациях [26]. В монографии [5] автор раскрывает физические основания метода дробных производных и возможность применения метода в различных областях физики: в механике и гидродинамике, вязкоупругости и термодинамике, физике диэлектриков и полупроводников, электротехнике и физике плазмы, нанофизике и космофизике.

В настоящее время исследованиям нелокальных динамических процессов посвящены много работ. В частности, в работе [27] приведены численные схемы решения модели теплопроводности с двойным запаздыванием по времени в двухслойной наноразмерной тонкой пленке, в работе [28] приведены различные нелокальные математические модели, описывающие дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка, а в монографии [29] исследованы различные математические модели нелинейных эредитарных осцилляторов. Работа [30] посвящена исследованию модели затухающих колебаний осциллятора с экспоненциально-степенной функцией динамической памяти.

---

[19]Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. – 1992. – Т. 90, № 3. – С. 354–368.

[20]Чукбар К.В. Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 108, № 5 (11). –С. 1875–1884.

[21]Нахушев А.М. Уравнения математической биологии: Учебная пособия для университетов. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

[22]Шхануков М.Х. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // ДАН. – 1996. – Т. 348, № 6. – С. 746–748.

[23]Головизнин В.М. и др. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнения дробной диффузии. – Препринт № IBRAE-2002-01, Москва: ИБРАЭ РАН, 2002. – 57 с.

[24]Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – No. 172. – P. 65–77.

[25]Мейланов Р.П., Янполов М.С. Особенности фазовой траектории «фрактального» осциллятора // Письма в ЖТФ. –2002 – Т. 28, № 1. – С. 67–73.

[26]Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А., Юрко Ю.И. Прямые задачи неклассического переноса радионуклидов в геологических формациях // Известия РАН. Энергетика. – 2004. – № 4. – С. 121–130.

[27]Ji, C.C., Dai W., Sun Z.Z. Numerical Schemes for Solving the Time-Fractional Dual-Phase-Lagging Heat Conduction Model in a Double-Layered Nanoscale Thin Film // Computing. – 2019. –Vol. 81. – P. 1767–1800.

[28] Жмакин А.И. Теплопроводность за пределами закона Фурье // Журнал технической физики.- 2021. – Т. 91, № 1. – С. 5-25.

29Паровик Р.И. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. – Петропавловск-Камчатский: Изд-во Камчатского госуниверситета им. Витуса Беринга, 2017. – 134 с.

[30]Рехвиашвили С.Ш. Дробный осциллятор с экспоненциально-степенной функцией памяти // Письма в ЖТФ. – 2022. – Т. 48, вып 7. – С. 33–35.

Объект и предмет исследования

Объектом исследований данной работы является динамические процессы во фрактальных и пористых средах, учитывающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка. Предметом исследований являются аналитические методы и численные алгоритмы, основанные на аппарате интегралов и производных дробного порядка, исследования нелокальных процессов в динамических системах и методы корреляционно-регрессионного анализа и вычислительного эксперимента для моделирования теплопроводности горных пород.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является развитие новых математических методов исследования динамических процессов во фрактальных и пористых средах на основе математического аппарата интегралов и производных дробного порядка; разработка эффективных вычислительных методов для численного исследования динамических процессов в системах с памятью и пространственными корреляциями; реализация этих методов в виде комплексов объектно-ориентированных программ.

Для достижения поставленных целей решались следующие задачи:

- Разработка вычислительных методов нахождения приближенного решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений и краевых задач для уравнения теплопроводности с дробными производными и реализация этих методов в вычислительных алгоритмах при исследовании динамических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка.
- Исследование поведения фазовых траекторий линейных и нелинейных динамических систем, отображаемых системой двух дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто при различных значениях параметра дробной производной.
- Комплексное исследование фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамику электронов в них с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.
- Комплексное исследование нелокальных процессов теплопроводности, описывающие сверхмедленные процессы в средах с фрактальной структурой с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций.
- На основании проведенных экспериментов по теплопроводности горных пород, развитие новых математических методов исследования температурных и барических зависимостей теплопроводности горных пород с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Методы исследования

В работе были использованы методы, которые основаны на математическом аппарате интегралов и производных дробного порядка, аналитические и численные методы решения задачи Коши и краевых задач для дробных дифференциальных уравнений, методы численного исследования динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, непосредственное численное решение уравнений в частных производных дробного порядка. Для численного моделирования процессов теплопроводности горных пород использовался метод наименьших квадратов и статистические методы корреляционно- регрессионного анализа. Программная реализация выполнено на языке Delphi и в пакете Mathcad.

Положения, выносимые на защиту:

1. Разностные методы и алгоритмы нахождения приближенного решения задачи Коши для систем ОДУ с дробными производными и теоремы о сходимости этих разностных методов.
2. Разностные схемы и алгоритмы нахождения приближенного решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных дробных производных и теоремы об устойчивости и сходимости этих разностных схем.
3. Результаты качественного исследования поведения фазовых траекторий линейной однородной динамической системы, отображаемой системой двух дифференциальными уравнениями с дробными производными в случае действительных корней характеристического уравнения.
4. Результаты качественного исследования поведения фазовых траекторий нелинейных динамических систем, описываемых системой двух дифференциальных уравнений с дробными производными методом линеаризации при различных значениях параметра дробной производной. Результаты численного исследования поведения фазовых траекторий нелинейной системы при больших отклонениях от положения равновесия.
5. Результаты численного моделирования фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамику электронов в них с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.
6. Результаты численного исследования нестационарных процессов промерзания и неизотермической фильтрации в средах с фрактальной структурой, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка.
7. Результаты комплексного исследования нестационарных процессов теплопроводности для полуограниченного тела, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка. Аналитическое решение начально-краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности с граничными условиями второго рода и результаты вычислительного эксперимента по анализу решения в зависимости от значений параметров дробных производных Капуто и Рисса.
8. Результаты комплексного исследования нелокальных процессов конвективного теплообмена с внешней средой с учетом эффектов памяти. Аналитическое решение начально-краевой задачи Робена для нестационарной теплопроводности дробной по времени производной Капуто в полубесконечной области с конвективным теплообменом (закон Ньютона) на границе и результаты

вычислительного эксперимента по анализу решения в зависимости от параметра дробной производной.

9. Эмпирические модели теплопроводности горных пород и результаты численного моделирования теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления с применением корреляционно-регрессионного анализа и вычислительного эксперимента на основе, полученных экспериментальных данных.

10. Комплексы объектно-ориентированных программ для численного исследования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, нелокальных процессов теплопроводности с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций и теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления.

Научная новизна

- Разработаны разностные методы и алгоритмы нахождения приближенного решения задачи Коши для систем ОДУ и краевых задача для уравнения теплопроводности с дробными производными, отличающиеся от известных разностных методов. Доказаны теоремы о сходимости этих разностных методов и получены условия для нахождения шага сетки в зависимости от параметра дробной производной.
- Впервые проведено качественное исследование поведения фазовых траекторий динамической системы, описываемой системой двух дифференциальных уравнений с производной дробного порядка Капуто в случае действительных корней характеристического уравнения. Показано, что при переходе к дробной производной в фазовой плоскости происходит топологические изменения.
- Впервые проведены качественные исследования динамических систем «брюсселятор» и «хищник-жертва», описываемых дробными дифференциальными уравнениями, методом линеаризации. Получены аналитические решения линеаризованных систем и численные решения нелинейных систем. Показано, что при переходе к дробной производной в фазовой плоскости происходит топологические изменения.
- Впервые проведено численное исследование фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамику электронов в них с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента на основе аппарата интегродифференцирования дробного порядка, отличающиеся от существующих методов исследования.
- Впервые проведено численное исследование нестационарных процессов промерзания и неизотермической фильтрации в средах с фрактальной структурой, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка Капуто и Рисса и на основе, построенных вычислительных алгоритмов, проведено исследование нестационарных процессов промерзания и неизотермической фильтрации.
- Впервые получено аналитическое решение начально-краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности с граничными условиями второго

рода. На основе полученного решения, проведено комплексное исследование нестационарных процессов теплопроводности для полуограниченного тела, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка Капуто и Рисса.

•Впервые представлен анализ нелокальных процессов конвективного теплообмена с внешней средой с учетом эффектов памяти через дробную производную по времени. Проведено комплексное исследование процессов конвективного теплообмена с внешней средой для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти.

•Впервые на основе экспериментальных данных проведено численное моделирование теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента, основанной на корреляционно-регрессионном анализе.

•Разработаны комплексы объектно-ориентированных программ для численного исследования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, нелокальных процессов теплопроводности с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций и теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в том, что результаты, которые получены в диссертационной работе, включающие в себя задачи исследования, разностные методы решения дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, теоремы об устойчивости и сходимости, внесет вклад в развитие фундаментальных основ математического моделирования нестационарных динамических процессов. Представленные разностные методы решения начальной задачи для систем дифференциальных уравнений дробного порядка и результаты качественного исследования линейных и нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, могут служить основой разработки и численного анализа дробно-дифференциальных моделей динамических систем. Представленные разностные схемы решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка и результаты комплексного исследования нестационарных процессов теплопроводности являются математической основой для разработки и численного анализа математических моделей нестационарных процессов теплопроводности в фрактальных и пористых средах. Результаты исследования нестационарных процессов неизотермической фильтрации, включающие эффекты памяти и пространственные корреляции через производные дробного порядка, и теплопроводности горных пород имеют прикладное значение. От решения данных проблем зависит возможность реализации различных процессов при нефтедобыче, функционировании геотермальных систем и прогнозировании глубинных температур, связанных с понятием теплопроводности горных пород при высоких температурах и давлениях.

По результатам исследований, проведенных в диссертации, автором разработаны программные комплексы для ЭВМ, которые использовались при выполнении трех проектов, поддержанных РФФИ, проекта по аналитической ведомственной целевой программе РНПВШ 2.1.1/2669, проекта по программе №3 фундаментальных исследований отделения математических наук РАН "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач".

Исследования по теме диссертации проводилось в рамках научно-исследовательских работ кафедры прикладной математики ***Дагестанского государственного университета и Института Проблем геотермии и возобновляемой энергетики филиала ОИВТ РАН.***

Достоверность и обоснованность результатов полученных в диссертационной работе результатов подтверждаются применением фундаментальных методов исследования динамических процессов, корректными постановками задач и математической обоснованностью полученных решений. Полученные в работе результаты исследования динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, и нестационарных процессов теплопроводности обосновываются вычислительными экспериментами. Результаты численного моделирования теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления подтверждаются их адекватностью и согласованностью с экспериментальными данными.

Апробация результатов

Основные положения и выводы диссертации были предметом систематического обсуждения на научных семинарах кафедры прикладной математики и института Проблем Геотермии, в докладах ежегодных преподавательских конференций математического факультета Дагестанского государственного университета и прошла апробацию на следующих научных мероприятиях: Международный Российско-Болгарский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2010 г.; VIII Всероссийская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, 2011 г; II Международный Российско-Казахский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2011 г.; II Международный Российско-Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2012 г; XII Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». Владикавказ, 2015 г.; XIII Международная конференция «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». Дивноморское, 2016 г.; V Международная конференция «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы». Махачкала, 2017 г.; XII Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». Махачкала, 2017 г.; VII Российская национальная конференция по теплообмену, Москва, 2018 г.; "XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter, ELBRUS 2017.; XIV Международная научно-практическая конференция «Новые идеи в науках о земле». Москва, 2019.; XI Всероссийская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара, 2019 г.; XIII Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». Махачкала, 2019 г.; III Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы исследования нефтегазовых пластовых систем», Развилка, Московская обл., 2020 г.; III Международная конференция «Современные проблемы теплофизики и энергетики». Москва, РФ, 2020 г.; XIV Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», Махачкала, 2021 г.; II Международном научно-практическом семинаре и выставке «Экспериментальные методы исследования пластовых систем: проблемы и решения» (ИПС-2023). Развилка, Московская обл., 2023 г.; XV Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», Махачкала, 2023 г.; VII Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2023г.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 32 работы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов докторских диссертаций, включая 20 в изданиях, входящих в международные реферативные базы WOS и Scopus, 3 монографии, получены 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Полный список публикаций приводится в конце автореферата.

Личный вклад автора

Во всех работах, опубликованных в соавторстве, все математические расчеты, выводы относительно полученных результатов, доказательства теорем, алгоритмы и выводы уравнений получены лично автором.

В монографии [1] результаты двух глав принадлежат лично автору. Монография [2] без соавторов. В монографии [3] эмпирические модели расчета теплопроводности горных пород и результаты вычислительных экспериментов принадлежат автору. Работы [3, 23, 24] без соавторов. В работе [4] численный метод решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с дробными производными и доказательство теоремы о сходимости получены лично автором. В работе [5] численные алгоритмы решения начальной задачи разработаны лично автором. В работах [6, 7, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 19] эмпирические уравнения для расчета теплопроводности горных пород и результаты вычислительных экспериментов получены лично автором. В работе [11] постановка задачи и выводы относительно результатов анализа решений принадлежат автору. В работе [15] разностная схема решения начально-краевой задачи неизотермической фильтрации и доказательство теоремы о сходимости разностной схемы получены лично автором. В работе [18] вычислительные эксперименты по анализу процессов нагрева и охлаждения воды, закачиваемой в скважину, проведены автором. В работе [20] аналитическое решение второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени и Рисса по пространственной переменной получено лично автором. В работе [21] автором получено аналитическое решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени и граничными условиями третьего рода и проведен вычислительный эксперимент по анализу полученных решений. В работе [22] автором построен численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности и доказана теорема о сходимости. В работе [25] аналитические решения линеаризованных систем и алгоритмы численного исследования нелинейных систем получены лично автором. В работе [26] аналитические решения и результаты исследования поведения фазовых траекторий получены лично автором. В работе [27] численные алгоритмы решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка и доказательства теорем о сходимости получены лично автором. В работе [28] построение численного метода и доказательство теоремы о сходимости принадлежат лично автору. В работе [30] численное решение дифференциального уравнения и результаты вычислительного эксперимента получены автором. В работах [31, 34] эмпирические модели расчета теплопроводности горных пород и результаты вычислительных экспериментов получены лично автором. В работах [33, 34] построение численного решения задач, доказательство теорем о сходимости и вычислительные эксперименты по анализу полученных решений принадлежат лично автору.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, списка литературы и четырех приложений. Общий объём диссертации 271 страница, включая 77 рисунков и 10 таблиц. Основной текст диссертации составляет 245 страниц. Список литературы состоит из 211 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится обоснование актуальности темы исследования, формулируются цель, задачи, объект и предмет исследования, научная новизна, положения, выносимые на защиту; описываются теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы исследования, степень достоверности полученных результатов; приводятся сведения об апробации работы и личном вкладе автора.

Первая глава диссертации является вводной частью научных исследований. В ней приведены основные определения и свойства некоторых специальных функций, дробных интегралов и производных, а также теоремы, которые устанавливают связь дробной производной Римана-Лиувилля и Рисса с обычной производной.

Теорема 1.1. Пусть функция $f(x) \in C^n([a,b])$ обладает достаточной гладкостью на отрезке $\Omega = [a,b]$. Тогда имеет место равенство:

$$\lim_{\alpha \to 1}\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha}} ds = \left(\frac{d}{dx} f\right)(x),$$

где $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{d}{dt}\int\limits_0^t\dfrac{u(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}ds$ - дробная производная Римана-Лиувилля:

Теорема 1.2. Пусть функция $f(x)\in C(\Omega)$, где $\Omega=(-\infty,+\infty)$ и пусть $f(x)$ на всей числовой прямой обладает достаточной гладкостью. Тогда имеет место равенство

$$^{R}D^{\alpha}\left(^{R}D^{\alpha}(f(x)\right)={}^{R}D^{\beta}f(x),$$

где $\beta=2\alpha,\dfrac{1}{2}<\alpha<1$, где $^{R}D^{\alpha}f(x)=\dfrac{1}{2\Gamma(1-\alpha)\cos(\pi(1-\alpha)/2)}\dfrac{d}{d\xi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{f(t)dt}{|x-t|^{\alpha}}$ - дробная производная Рисса.

Глава II посвящена разработке вычислительных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка.

Главным результатом **§1** разностная аппроксимация дробной производной Римана-Лиувилля.

Для дробной производной Римана-Лиувилля получена разностная аппроксимация:

$$D_{0t}^{\alpha}u(t_{n+1/2})=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\rho_{\mathrm{k}}u(t_{n-k+1})+O(\tau^2),$$

$$\rho_0=q_0-p_0,\ \rho_1=2p_0-p_1+2q_1-q_0,$$

$$\rho_k=(-p_{k-2}+2p_{k-1}-p_k)+(k-2)q_{k-2}-(2k-1)q_{k-1}-(k+1)q_k,\ k\geq 2$$

$$p_k=\frac{\tau^{-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left[(k+1)^{2-\alpha}-k^{2-\alpha}\right],\ q_k=\frac{\tau^{-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left[(k+1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\right].$$

$$n=0,1,2,\ldots.$$

Главным результатом §**2** являются численные методы решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с производными дробного порядка Капуто. Исследована задача Коши для системы дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто вида:

$$\begin{aligned}&\partial_{ot}^{\alpha}u(t)=f(t,u),t>0,\\&u(0)=u^{(0)},\end{aligned}\qquad(1)$$

где $0<\alpha<1$, $\partial_{ot}^{\alpha}u(t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\dfrac{u'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds$ - дробная производная Капуто.

Для решения задачи Коши (1) для системы дифференциальных уравнений предложены расчетные формулы:

$$y_0=u_0,$$

$$y_1=y_0+\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}f(t_n,y_n),$$

$$y_{n+1}=y_n-\tau^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1}-y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha}-t_{n-k}^{1-\alpha})+\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}f(t_n,y_n),$$

$n=1,2,\ldots$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица с константой L по второму аргументу, и пусть $\psi_j^{(1)}$ невязка, определенная равенством:

$$\psi_n^{(1)}=-\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha}-t_{n-k}^{1-\alpha})+f(t_{n,}u_n).$$

Тогда для погрешности метода при $n\tau\le a$ и $\tau^{\alpha}<\dfrac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)L}$ справедлива оценка

$\|y-u\|\le\dfrac{\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}{1-q}\|\psi^{(1)}\|+O(\tau^{2+\alpha})$, где $q=(1-\alpha^2)+\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)L.$

В **§3** построен численный метод решения задача Коши для системы дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля:

$$\begin{aligned}&D_{0t}^{\alpha}u(t)=f(t,u),\quad t>0\\&D_{0t}^{\alpha-1}u(0)=u^{(0)},\end{aligned}\qquad(2)$$

где $0<\alpha<1$.

Для решения задачи Коши (2) получены расчетные формулы:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\rho_k y_{n-k+1}-f(t_{n+1/2,}y_{n+1/2})=0,$$

$$y_{n+1/2}=y_n+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{\tau}{2}\right)^{\alpha}f(t_n,y_n),$$

где $I_{0t}^{1-\alpha}u(0)=u^0$ $n=0,1,2,..$ $\rho_0=q_0-p_0$, $\rho_1=2p_0-p_1+2q_1-q_0$,

$$\rho_k=(-p_{k-2}+2p_{k-1}-p_k)+(k-2)q_{k-2}-(2k-1)q_{k-1}-(k+1)q_k,\ k\ge2$$

$$p_k=\frac{\tau^{-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left[(k+1)^{2-\alpha}-k^{2-\alpha}\right],\ q_k=\frac{\tau^{-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left[(k+1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\right].$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть правая часть уравнения (2) удовлетворяет условию Липшица с константой A по второму аргументу, и пусть $\psi_j^{(1)}$ невязка определена равенством $\psi_n^{(1)}=-\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau}\sum_{k=0}^{n}\rho_k u_{n-k+1}+f(t_{n+1/2,}u_{n+1/2})$. Тогда для погрешности метода при $n\tau \le a$ и $q<1$ справедлива оценка $\|y-u\| \le \frac{\tau^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)}{1-q}\|\psi^{(1)}\|$, где $q = A\tau^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)$.

Глава III посвящена разработке вычислительных алгоритмов решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка.

В **§1** области $D = \{(x,t): 0 < x < R, 0 < t < T\}$ для численного решения начально-краевой задачи:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = C(x,t)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{3}$$

$$u(x,0) = \psi(x),$$

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(R,t) = \mu_2(t), \tag{4}$$

где $0 < \alpha \le 1$, $C(x,t) \ge 0$, построена разностная схема с весами:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\sum_{k=0}^{n+1}\left(u_m^{k+1}-u_m^{k}\right)\left(t_{n-k+1}^{1-\alpha}-t_{n-k}^{1-\alpha}\right) = C_m^n(\sigma\Lambda u_m^{n+1} + (1-\sigma)\Lambda u_m^n) + \varphi_m^n, \tag{5}$$

$$m = 1,2,\ldots,M-1, n = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$u_m^0 = \psi(x_m),\ m = 0,1,2,\ldots,M,\ u_0^n = \mu_1(t_n),\ u_m^n = \mu_2(t_n),\ \ n = 1,\ldots,N, \tag{6}$$

где $C_m^n = C(x_m, t_n)$, $f_m^n = f(x_m, t_n)$, $\Lambda u_m^{n+1} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}$,

$\Lambda u_m^n = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$.

Доказана теорема.

Теорема 3.1. Пусть разностная схема (5), (6) аппроксимирует начально-краевую задачу (3.1) и (3.2) и пусть имеет место неравенство $\|u^{n+1}\| \le \|u^0\| + \frac{T}{\varepsilon}\max_{0\le j\le n}\|\varphi^j\| + \frac{g\tau^{\alpha}}{\varepsilon}$, $\quad r = \max\left|c_s^{/}(t)\right| = const, g = r\cdot T^{1-\alpha} = const$, $\quad 0 < \varepsilon < 1$, тогда разностная схема (3.5), (3.6) устойчива по начальным данным и по правой части.

В **§2** для численного решения начально-краевой задачи:

$$u_t(x,t) = C(x,t)\,{}^{R}D^{\beta}u(x,t) + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$u(-L,t) = \mu_1(t) \ \text{ и } u(L,t) = \mu_2(t),$$

где $0 < \alpha \le 1, 1 < \beta \le 2, C(x,t) \ge 0$, ${}^{R}D^{\beta}u(x,t) -$ частная дробная производная Рисса, построена разностная схема:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = \frac{C_i^{n+1}}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)h^{\beta}}\left[\sum_{k=0}^{i+1} q_k u_{i-k+1}^{n+1} + \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k u_{i+k-1}^{n+1}\right] + f_i^{n+1}, \tag{7}$$

$i=1,2,\dots,K-1, n=0,1,\dots,N-1,$

$u_i^0=\varphi(x_i), i=0,1,\dots,K,\ u_0^n=\mu_1(t_n),\ u_K^n=\mu_2(t_n),\ n=1,2\dots,N.$ (8)

Доказана теорема о безусловной устойчивости разностной схемы.

Теорема 3.2. Разностная схема (7,8) безусловна устойчива.

В **§3** для численного решения в области $D=\{(x,t): 0<x<a, 0<y<b\}$ задачи Дирихле для уравнения Пуассона с дробной производной Римана-Лиувилля:

$$D_{0x+}^{\beta}u(x,y)+D_{0y+}^{\beta}u(x,y)=-f(x,y), \tag{9}$$

$$u\big|_{\partial D}=\psi(x,y),$$

где $1<\beta\le 2$, построена разностная схема:

$$\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{k=0}^{n+1}q_k u(x_{n-k+1},y_m)+\frac{1}{l^{\beta}}\sum_{p=0}^{m+1}q_p u(x_n,y_{m-p+1})=-f(x_n,y_m),\ (x_n,y_m)\in\omega, \tag{10}$$

$u(x_n,y_m)=\psi(x_n,y_m),\quad (x_n,y_m)\in\gamma$, где ω,γ - множество внутренних и граничных узлов сетки

$$\Omega_{h,l}=\left\{(x_n,y_m): x_n=n\cdot h, n=0,1,\dots,N, y_m=m\cdot l, m=0,1,\dots,M, N=\frac{a}{h}, M=\frac{b}{l}\right\}.$$

Доказана теорема.

Теорема 3.4. Пусть разностная схема (10) аппроксимирует дифференциальную задачу (9), тогда для погрешности метода справедлива оценка: $\|z\|_{C(\omega)}\le\frac{(a^2+b^2)}{2\Gamma(\beta+1)}\|F\|_{C(\omega)}+\|\psi\|_{C(\omega)}$, где a и b постоянные не зависящие от шагов сетки. Следовательно, разностная схема (10) устойчива по правой части и по граничным условиям.

В **§4** для численного решения в области $D=\{(x,t): 0<x<L, 0<t\le T\}$ начально-краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)+f(u), \tag{11}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(L,t)=\mu_2(t),$$

где $0<\alpha<1$, $k(u)$, $f(u)$- достаточно гладкие функции и $0<c_1\le k(u)\le c_2$, построена разностная схема:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\frac{y_m^{i+1}-y_m^i}{\tau}\left(t_{n-i+1}^{1-\alpha}-t_{n-i}^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{h}\left(k_{m+1/2}^n\frac{y_{m+1}^{n+1}-y_m^{n+1}}{h}-k_{m-1/2}^n\frac{y_m^{n+1}-y_{m-1}^{n+1}}{h}\right)+f\left(y_m^n\right) \tag{12}$$

$m=1,2,\dots,M-1, n=0,1,\dots,N-1,$

$y_m^0=\varphi(x_m),\quad m=0,1,2,\dots,M,$

$y_0^n=\mu_1(t_n),\quad y_K^n=\mu_2(t_n),\quad n=1,2\dots,N,$ где $y_m^n=y(x_m,t_n)-$ приближенное решение задачи (11).

Доказана теорема о безусловной устойчивости разностной схемы (12).

Теорема 3.5. Неявная разностная схема (12) безусловно устойчива.

В Главе IV исследованы линейные и нелинейные динамические системы, описываемые производными дробного порядка.

В **§1,2** проведено исследование динамической системы, описываемой дробным дифференциальным уравнением вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) + \omega^{\alpha} x(t) = F(t),$$

где $1 < \alpha < 2$, $F(t)$ – вынуждающая сила. Рассмотрен случай, когда вынуждающая сила является функцией Миттаг–Леффлера $F(t) = f_0^{\alpha/2} \mathrm{E}_{\alpha,1}[-(\Omega t)^{\alpha}]$.

В **§3** проведено качественное исследование линейных динамических системы, описываемых системой двух линейных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) = ax + by,$$

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = cx + dy,$$

где $0 < \alpha < 1$, a, b, c, d - некоторые постоянные параметры.

Установлены топологические изменения в фазовой плоскости при переходе к дробным производным.

Результатом **§4** является исследование поведения фазовых траекторий нелинейной динамической системы «брюсселятор», описываемой дробными дифференциальными уравнениями методом линеаризации при различных значениях параметра дробной производной. Линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha} x(t) &= (b-1)x + a^2 y, \\ \partial_{0t}^{\alpha} y(t) &= -bx - a^2 y, \end{aligned} \tag{13}$$

где $0 < \alpha < 1$, a, b – некоторые постоянные параметры.

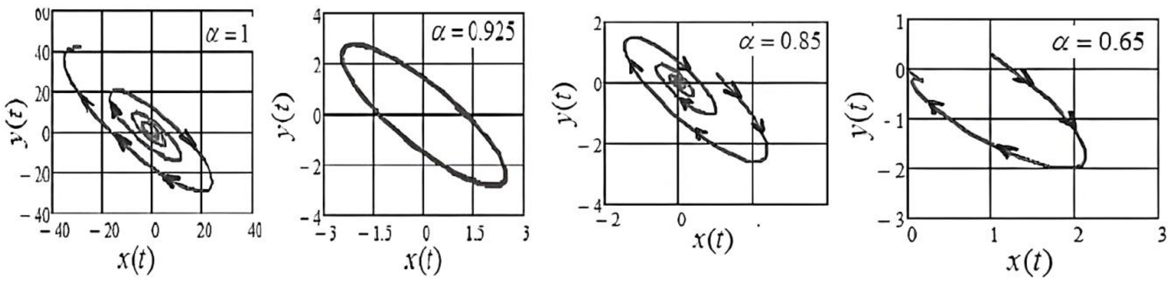

Рис. 1. Фазовые траектории при различных значениях α и $b > 1 + a^2$

На рис. 1 приведены фазовые траектории при различных значениях параметра дробной производной. Установлено, что учет эффектов памяти приводит к принципиально новым результатам, когда в системе возможны переходы между различными особыми точками фазовой траектории.

В **§5** проведено численное исследование поведения фазовых траекторий нелинейной динамической системы Дуффинга, описываемой дробными дифференциальными уравнениями при различных значениях параметра дробной производной. Установлены топологические изменения в фазовой плоскости при переходе к дробным производным.

§6 посвящен исследованию поведения фазовых траекторий нелинейной динамической системы «хищник-жертва», описываемой дробными дифференциальными уравнениями методом линеаризации при различных значениях параметра дробной производной, то есть системы вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) = -\frac{cb}{d} y, \quad \partial_{0t}^{\alpha} y(t) = \frac{ad}{b} x, \tag{14}$$

где $0 < \alpha < 1$, $c > 0$ – коэффициент убыли хищников, $y-$ их численность в данный момент времени, y_0 – их численность в начальный момент времени, $b > 0$ – коэффициент убыли жертв при встрече с хищником, $d > 0$ – коэффициент, зависящий от того, как часто встреча хищника с жертвой заканчивается трапезой, x_0 – их численность в начальный момент времени, α – параметр, учитывающий информацию о «прошлом» системы.

На рис. 2 приведены фазовые траектории при различных значениях α. Установлено, что при переходе к дробной производной происходит топологическое изменение фазовой плоскости. При этом параметр дробной производной становится управляющим параметром системы. Следовательно, переход к дробным производным позволяет учитывать необратимые процессы.

При больших отклонениях от положения равновесия линейное приближение становится неприменимым. В этом случае для исследования поведения фазовых траекторий исходных нелинейных систем воспользовались вычислительными алгоритмами на основе численных методов решения задачи Коши для дробного дифференциального уравнения.

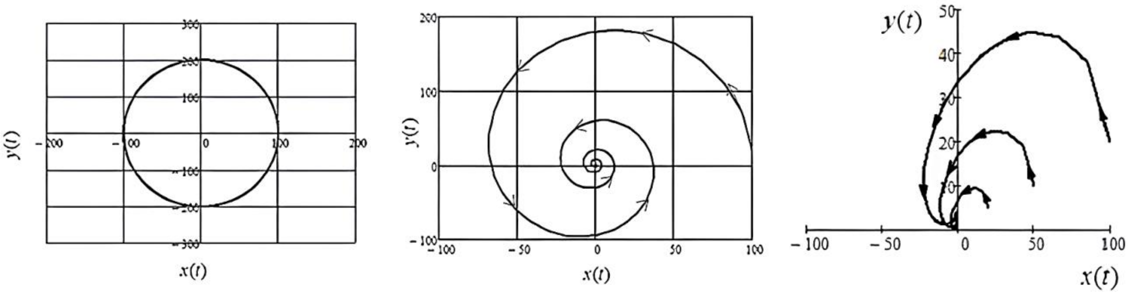

Рис. 2. Фазовые траектории при различных значениях α.

В **§7** этой главы исследованы динамические системы состояния, которых зависят на определенном промежутке времени $[t_n, t_{n+1}]$ от некоторого случайного фактора. В качестве величины, учитывающей этот фактор, взят показатель дробной производной. Рассмотрен случай, когда на определенном отрезке времени $[t_n, t_{n+1}]$ состояние системы зависит от некоторой случайной величины α_n.

В §**8** проведено численное исследование фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамику электронов в них.

Для описания в работе [41], было предложено следующее дифференциальное уравнение дробного порядка с переменной частотой столкновений электронов:

$$\frac{m}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} v(t) = eE - m v_m(t) \cdot v(t), \tag{15}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha}\nu(t)$- дробная производная Капуто, $0<\alpha<1$, τ – характерное время, t – безразмерное время (отнесенное к τ), α – доля разрешенных состояний, которая соответствует фрактальной размерности одномерного кантовского множества, e и m – заряд и масса электрона, ν_m – его эффективная частота столкновений, $\nu(t)$ – скорость движения электрона во фрактальной среде. Для численного решения задачи Коши для уравнения (15) разработан алгоритм и проведен вычислительный эксперимент по анализу полученного решения. Построены графики зависимостей скорости электронов от расстояния для различных значений параметра дробной производной. Показано, решения задачи представляют собой обобщенный режим движения электронов, описывающий переход от дрейфового движения к ускоренному. Установлено, что с ростом фрактальной размерности и степенного показателя, характеризующего быстроту расширения каналов, скорость электронов возрастает.

Глава V посвящена исследованию нелокальных процессов теплопроводности в фрактальных и пористых средах.

В **§1** на основе задачи Стефана численно исследованы процессы промерзания для сред, в которых не выполняется принцип локального равновесия, что приводит к необходимости учета особенностей теплопереноса на межфазной границе с учетом нелокальных эффектов по времени (эффект памяти). В качестве математической модели процесса промерзания во фрактальных средах исследована задача:

$$\partial_{0t}^{\alpha}T_1(x,t)=D_1\frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<\xi(t),t>0, \tag{16}$$

$$T(x,0)=T_0,$$

$$T(0,t)=T_c,\ \frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=0,\ t>0,\ x=\xi(t):\begin{cases}T_1=T_2=T_з,\\ \lambda_1\dfrac{\partial T_1}{\partial x}-\lambda_2\dfrac{\partial T_2}{\partial x}=Q_f\partial_{0t}^{\alpha}\xi(t),\end{cases} \tag{17}$$

где $0<\alpha<1$, $T_c<T_з<T_0$. На рис. 3 приведены графики численного решения задачи (16), (17) при различных значениях параметра α.

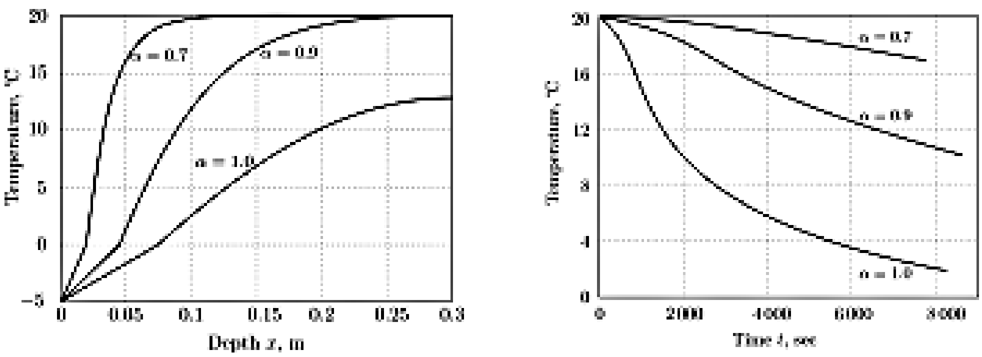

Рис. 3. Графики зависимостей температуры от пространственной переменной и времени при различных значениях параметра дробной производной.

Установлено, что переход к дробным производным позволяет описать замедление процесса промерзания грунта относительно классического решения.

В **§2** на основе нелинейного закона Дарси исследованы нелокальные процессы неизотермической фильтрации с учетом эффектов памяти. Численно исследована система дифференциальных уравнений вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha} P(r,t) - \frac{\partial}{\partial r}\left(D_P(P,T)\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\right) + V_P(P,T)\frac{\partial P(r,t)}{\partial r} = \frac{\beta}{\gamma}\partial_{0t}^{\alpha} T(r,t),$$

$$\partial_{0t}^{\alpha} T(r,t) - \frac{\partial}{\partial r}\left(D_T(P,T)\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right) + V_T(P,T)\frac{\partial T(r,t)}{\partial x} = \frac{\beta}{\gamma}\cdot\partial_{0t}^{\alpha} P(x,t),$$

$$P(x,0) = P_0, \quad T(x,0) = T_0, \qquad P(0,t) = d_1 = const, \quad \left.\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_k} = 0,$$

$$T(0,t) = d_2 = const, \quad \lambda_{\text{пл}} \left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_c} = \lambda_{гр} \left.\frac{\partial T_{гр}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_c},$$

$$D_P(P,T) = \frac{l_0^2 k\cdot\rho(p,t)}{t_0 m\cdot\rho_0\mu(P,T)\cdot\gamma}, \qquad V_P(P,T) = \frac{l_0 k}{m\cdot\mu(P,T)}\left(\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\beta}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

$$D_T(P,T) = \frac{\lambda}{c_P\rho(P,T)}, \qquad V_T(P,T) = \frac{l_0 k}{\mu(P,T)}\frac{\partial P(r,t)}{\partial r},$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t)$ – производная Капуто, $0<\alpha<1$, P – давление, T – температура, $D_P(P,T)>0$ и $D_T(P,T)>0$ – заданные функции, зависящие от давления и температуры, γ – коэффициент изотермической сжимаемости, β – коэффициент теплового расширения, r – радиальная координата, $\lambda_{пл}$ – коэффициент теплопроводности пласта, $\lambda_{гр}$ – коэффициент теплопроводности внешнего пласта, P_0, T_0 – начальное давление и температура, d_1, d_2 – давление и температура на границе области.

Построены графики динамики изменения давления и температуры в пласте. Установлено, что при переходе к дробным производным происходит замедление фильтрационных процессов, что характерно средам с фрактальной структурой.

В **§3** исследованы нелокальные процессы теплопроводности для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций. Получено аналитическое решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробными производными вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha} T(\xi,\tau) = \bar{a}\,{}^R D_{0x}^{2\beta} T(\xi,\tau), \; \tau>0, 0<\xi<\infty, \tag{18}$$

$$\xi = 0: \; \lambda^{2\beta}\,{}^R D_{0\xi}^{\beta} T(\xi,\tau) + q_c = 0, \; T(\infty,\tau) = T_0, \left.\frac{\partial T(\xi,\tau)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\infty} = 0, \tag{19}$$

$$T(\xi,\tau_0) = T_0, \; 0 \le \xi < +\infty,$$

где $\partial_{0t}^{\alpha}T(\xi,\tau)$ – частная дробная производная Капуто, ${}^{R}D_{0x}^{2\beta}T(\xi,\tau)$ – частная дробная производная Рисса на полуоси, $0<\alpha\le 1, \frac{1}{2}<\beta\le 1$, $T(\xi,\tau)$ - температура, $\tau=t/t_0, \xi=x/x_0$ - безразмерные время и координата, t_0, x_0 – характерное время и координата, $\bar{a}$ – безразмерный коэффициент температуропроводности, $q_c=-\frac{Q}{\lambda}$, $Q=\frac{P}{S}$ – удельная мощность поверхностного тепловыделения, *Вт/м*^{2}, P – мощность теплового источника, *Вт*, S – площадь нагреваем грань области, *м*^{2}.

Установлено, что пространственные корреляции и эффекты памяти оказывают различное влияние на окончательное решение. При уменьшении показателя пространственной производной (β) наблюдается ускорение процессов теплопроводности без существенного влияния на характер пространственных и временных зависимостей. В то время как уменьшение показателя временной производной (α) приводит к существенному замедлению процессов, меняя при этом характер нелинейности временных зависимостей.

В **§4** проведено исследование нелокальных процессов конвективного теплообмена с внешней средой для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти. Получено аналитическое решение третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с частным дробным производным Капуто по времени вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha}T(x,t)=\bar{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t),\ t>0, 0<x<\infty, \tag{20}$$

$$T(x,0)=T_0,\quad T(0,\tau)=T_s,$$

$$\kappa\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x}+h\cdot[T_f-T_s]=0,\quad T(\infty,\tau)=T_0,\ \frac{\partial T(\infty,\tau)}{\partial x}=0, \tag{21}$$

где $\bar{a}=at_0^{\alpha}$ имеет размерность m^2, то есть безразмерность влияет только на временную переменную. Однако, имея в виду, что в полубесконечной среде нет характерного масштаба длины, можно рассмотреть результаты работы [31]Hristov J., где масштаб длины в таком случае уравнения дробной диффузии может быть определен как $x_0=\sqrt{at^{\alpha}}$ с размерностью длины $[m]$. Для значения параметра дробной производной $\alpha=1$ мы получаем масштаб длины в классическом уравнении диффузии. На этой основе мы можем определить переменную подобия $\eta_{\alpha}=x\big/\sqrt{at^{\alpha}}$, которая для значения параметра дробной производной $\alpha=1$ соответствует переменной подобия Больцмана $\eta=x\big/\sqrt{at}$.

Решение задачи (20), (21) имеет вид:

[31]Hristov J. Constitutive fractional modeling // – In: Contemporary Mathematics. Mathematical Modelling: Principle and Theory, Edited by: Hemen Dutta. – 2023. – Vol. 786. – P. 37-140.

$$\frac{T(x,\tau)-T_0}{(T_f-T_0)}=\Theta(x,\tau)=$$

$$=\beta\sqrt{a}\cdot\int_0^\tau \phi\left(-\frac{\alpha}{2},1,-\frac{1}{\sqrt{a}}x\cdot s^{-\alpha/2}\right)\cdot(\tau-s)^{\alpha/2-1}\times E_{\alpha/2,\alpha/2}(-\beta\sqrt{a}(\tau-s)^{\alpha/2})ds.$$

На рис. 4 приведены графики зависимостей температуры от координаты и времени. Установлено, что при переходе к дробной производной по времени происходит замедление процесса теплообмена за счет температуры среды, что характерно фрактальным структурам с памятью.

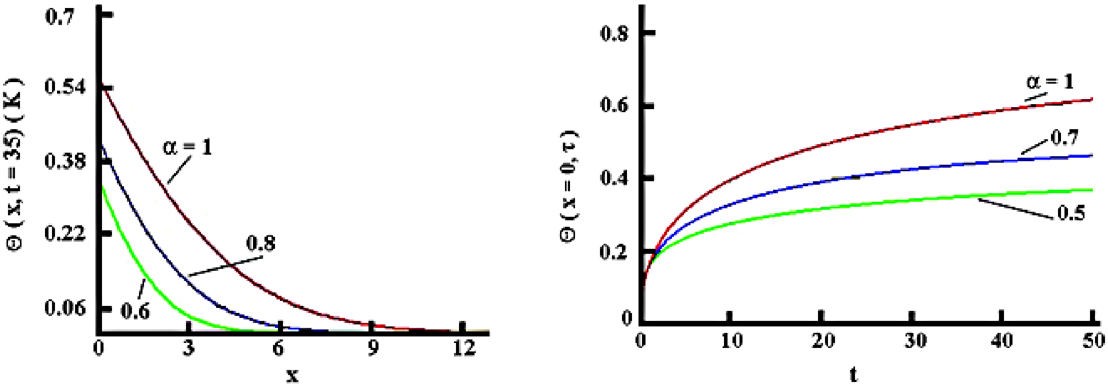

Рис. 4. Графики зависимостей температуры от координаты и времени при различных значениях параметра α .

Глава VI посвящена исследованию температурных и барических закономерностей изменения теплопроводности горных пород. Были проведены исследования теплопроводности песчаника, мергеля, гранитов, гранулитов, аргиллитов и известняка в достаточно широком диапазоне температур $273K-523K$ и давлений до $400\,МПа$, характерных для природных условий. Построены эмпирические модели теплопроводности горных пород с применением корреляционно-регрессионного анализа и вычислительного эксперимента на основе, полученных экспериментальных данных.

В **§1** были исследованы температурные и барические зависимости теплопроводности природных образцов мелкозернистого песчаника и мергеля из месторождений Республики Дагестан. На основе экспериментальных данных с применением корреляционно-регрессионного анализа и вычислительного эксперимента получены эмпирические уравнения для расчета теплопроводности песчаника и мергеля. В случае песчаника уравнение имеет вид:

$$\lambda(P,T)=\lambda_0\cdot(0.0147\cdot\ln P+1.028)\cdot\left(T/T_0\right)^{0.0172\cdot\ln(P)-0.293}. \qquad (22)$$

При этом средняя ошибка аппроксимации $\overline{A}=\frac{0.1762}{9}\cdot 100\%=1.96\%$, а индекс детерминации $R^2=1-\frac{0.00031}{0.0169}=0.981$.

А в случае мергеля получено эмпирическое уравнение вида:

$$\lambda(P,T)=\lambda_0\cdot(0.0147\cdot\ln P+1.028)\cdot\left(T/T_0\right)^{0.0172\cdot\ln(P)-0.293} \qquad (23)$$

В случае мергеля, ошибка аппроксимации $\overline{A} = \frac{0.1479}{9} \cdot 100\% = 1.64\%$, а индекс детерминации $R^2 = 1 - \frac{0.00597}{0.0788} = 0.924$.

Так как ошибки аппроксимации меньше 7%, то данные уравнения (22) и (23) хорошо согласуется с экспериментальными данными, а так как $R^2 > 0.8$, то точность подбора уравнений высокая. На рис. 5 приведены графики зависимости теплопроводности песчаника и мергеля от температуры при различных значениях давления согласно уравнениям (22), (23) и экспериментальным данным. Как мы видим из рисунка 6 экспериментальные данные хорошо согласуются с эмпирическими.

Установлено, что под действием гидростатического давления интенсивный рост теплопроводности газонасыщенного песчаника происходит в основном до 100 мПа, а далее плавно переходит на насыщение, что и указывает на уплотнение пространства между зернами структуры и возникновение под давлением дополнительного рассеяния.

Аналогичным образом в параграфах 2, 3, 4, 5 были исследованы природные образцы гранитов, гранулитов, аргиллитов и известняка. Во всех случаях получили ошибку аппроксимации $\overline{A} \leq 1.4\%$, а индекс детерминации $R^2 \geq 0.91$. Все полученные уравнения хорошо согласуются с экспериментальными данными и точность подбора уравнений высокая.

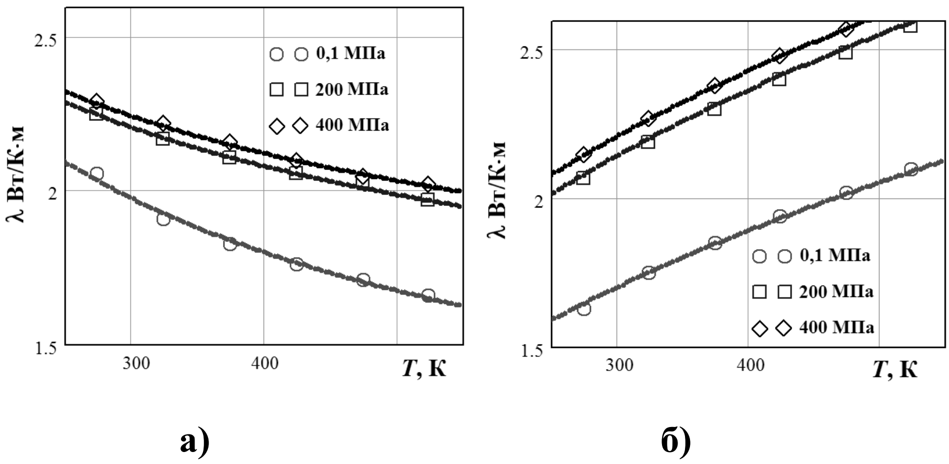

Рис. 5. Зависимость теплопроводности песчаника (а) и мергеля (б) от температуры при различных давлениях.

Глава VII посвящена описанию комплексов объектно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов на основе разработанных численных алгоритмов.

В **§ 1** приведено описание и структура комплекса программ моделирования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями. Разработанный комплекс объектно-ориентированных программ имеет модульную структуру и предназначен для исследования фазовой плоскости нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями.

В **§ 2** приведено **о**писание и структура комплекса программ компьютерного моделирования нелокальных процессов теплопереноса в фрактальных средах. Разработанный комплекс объектно-ориентированных программ имеет модульную структуру и предназначен для исследования нелокальных процессов теплопереноса в фрактальных средах.

В **§ 3** приведено описание и структура комплекса программ для расчета теплопроводности горных пород. Разработанный комплекс объектно-ориентированных программ имеет модульную структуру и предназначен для расчета теплопроводности горных пород и моделирования коэффициентов эмпирического уравнения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработаны численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Доказаны теоремы о сходимости этих численных методов.
2. Проведено качественное исследование линейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями. Проведено исследование поведения фазовых траекторий нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, методом линеаризации.
3. Исследованы фрактальные характеристики микроструктуры газоразрядных каналов и динамика электронов в них. Установлено, что микроструктура отпечатков канала на поверхности плоского электрода разряда носит фрактальный характер и определены значения ее фрактальной размерности.
4. Исследованы нелокальные процессы промерзания влажного грунта и неизотермической фильтрации с учетом фрактальности среды и эффектов памяти. Установлено, что переход к дробным производным позволяет описать замедление процесса промерзания относительно классического решения.
5. Проведено комплексное исследование нелокальных процессов теплопроводности для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций. Получено аналитическое решение второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробными производными и проведен вычислительный эксперимент по анализу решений в зависимости от значений параметров дробных производных Капуто и Рисса.
6. Проведено комплексное исследование нелокальных процессов конвективного теплообмена с внешней средой с учетом эффектов памяти. Получено аналитическое решение начально-краевой задачи Робена для нестационарной теплопроводности с дробной по времени производной Капуто в полубесконечной области с конвективным теплообменом (закон Ньютона) на

границе и проведен вычислительный эксперимент по анализу решения в зависимости от параметра дробной производной.

7. Построены эмпирические модели теплопроводности горных пород и проведено численное моделирование теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления с применением корреляционно-регрессионного анализа и вычислительного эксперимента на основе, полученных экспериментальных данных.

8. Разработаны комплексы объектно-ориентированных программ для численного исследования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, а также нелокальных процессов теплопроводности с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций и теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов

1) в журналах, входящих в международные реферативные базы SCOPUS, WOS

1. ***Beybalayev V.D.*** Mathematical Model of transfer in fractal structure mediums // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2010. – T. 2, no. 1. – P. 91–97.

2. ***Beybalaev V.D.,*** *Meilanov R.P.* The Dirihlet problem for the fractional Poissons equation with Caputo Derivativesr // Thermal Science. – 2012. – Vol. 16, no. 2. – P. 385–394.

3. ***Beybalaev V.D.****, Shabanova M.R.* A Finite Difference scheme for solution of a fractional heat Diffusion wave equation without initial conditions // Thermal Science. – 2015. – Vol. 19, no. 2. – P. 531–536.

4. *Emirov S.N.,* ***Beybalaev V.D.*** *[et al.]* Study of the thermal conductivity of SiC–BeO ceramics at high pressures and temperatures // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2017. – Vol. 71. – P. 290–292.

5. *Emirov S.N.,* ***Beybalaev V.D.****, Gadzhiev G.G. [et al.]* To the description of the temperature and pressure dependences of the thermal conductivity of sandstone and ceramics // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – P. 891, 012335. – DOI:10.1088/1742-6596/891/1/012335.

6. ***Beybalaev, V.D.*** *[et al.]* To the fractal equation of state // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – P. 891(1).

7. *Magomedov R.A., Meilanov R.R.,* ***Beybalaev V.D.*** *[et al.]* Generalization of thermodynamics in of fractional-order derivatives and calculation of heat-transfer properties of noble gases // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 2018. – Vol. 133, no. 2. – P. 1189–1194. – DOI:10.1007/s10973-018-7024-2.

8. *Emirov S.N.,* ***Beybalaev V.D.*** *[et al.]* Temperature and Baric Patterns of Changes in the Thermal Conductivity of Composite Materials // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2018. – T. 82, no. 7. – P. 888–891.

9. *Meilanov R.R., Akhmedov E.N.**, Beybalaev V.D**. [et al.]* To the theory of non-local non-isothermal filtration in porous medium // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – P. 946, 012076. – DOI:10.1088/1742-6596/946/1/012076.

10. *Emirov S.N., **Beybalaev V.D.**, Amirova A.A. [et al.]* Thermal Conductivity Temperature-Pressure Dependence of Rocks and Ceramics // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1172. – DOI:10.1088/1742-6596/1172/1/012006.

11. *Emirov S.N., Aliverdiev A.A., **Beybalaev V.D.** [et al.]* Temperature and Pressure Dependences of the Effective Thermal Conductivity of Granites // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2020. – Vol. 84, no. 9. – P. 1144–1146.

12. *Emirov S.N., Aliverdiev A.A., Zarichnyak Yu.P., **Beybalaev V.D***. Some features of the temperature-pressure dependence of the effective thermal conductivity of rocks // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – P. 1683(3):032044. – DOI:10.1088/1742-6596/1683/3/032044.

13. ***Beibalaev V.D.** [et al.]* Numerical Research of Non-Isothermal Filtration Process in Fractal Medium with Non-locality in Time // Thermal Science. – 2021. – Vol. 25, no.1B. – P. 465–475.

14. *Emirov S.N., Aliverdiev A.A., Beybalaev V.D., Amirova A.A.* On the Temperature and pressure dependences of the effective thermal conductivity of Granites // Thermal Science. – 2021. – Vol. 25, no. 4. – P. 2493–2501.

15. *Emirov, S.N., Aliverdiev, A.A., **Beybalaev, V.D.** [et al.]* Effect of Pressure on the Temperature Dependence of the Thermal Conductivity of Arsenic Chalcogenide with Different Ordering // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2021. – Vol. 85, no. 9. – P. 979–982.

16. *Alishaev M.G., Beybalaev **V.D.,** Aliev R.M., Aliverdiev A.A.* Heating and cooling of water injected into the well // Thermal Science. – 2021. – Vol. 25, no. 2. – P. 315–320.

17. *Aliev R.M., Aliverdiev A.A., **Beybalaev V.D.**, Zarichnyak Yu.P., Ramazanova E.N.* Effect of Pressure on the Temperature Dependence of the Effective Thermal Conductivity of Gallium Antimonide with Different Degrees of Ordering // Journal of Surface Investigation. – 2022. – Vol. 16, no. 3 – P. 338–342.

18. ***Beybalaev, V.D**., Aliverdiev A.A. [et al.]* Mathematical Model of Heat Conduction for a Semi-Infinite Body, Taking into Account Memory Effects and Spatial Correlations // Fractal and Fractional. – 2023. – Vol. 7(3), no. 265. – DOI: org/10.3390/fractalfract7030265.

19. ***Beybalaev V.D.,** Aliverdiev A.A., Hristov J.* Transient Heat Conduction in a Semi-Infinite Domain with a Memory Effect: Analytical Solutions with a Robin Boundary Condition // Fractal and Fractional. – 2023. – Vol. 7(10), no. 770. – DOI: org/10.3390/fractalfract7100770.

20. *Alishaev M.G., Aliverdiev A.A., Beybalaev **V.D.*** Problem of injection of dry steam into a reservoir without condensation in the well // High Temperature. – 2023. – Vol. 61, no 6. – P. 840–845. – DOI: 10.1134/s0018151x2306010x.

2) в журналах, рекомендованных ВАК РФ и не входящих в международные реферативные базы SCOPUS, WOS

21. ***Бейбалаев В.Д.***, *Шабанова М.Р.* Численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка // Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2010. – Вып. 5(21). – С. 244–252.

22. ***Бейбалаев В.Д.*** Одношаговые методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка. // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. 6. – С. 67–72.

23. ***Бейбалаев В.Д.*** О численном решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона с производными дробного порядка // Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2012. – Вып. 2(27). – С. 183–187.

24. ***Бейбалаев В.Д.,*** *Давудова Ф.Ф., Наврузова К.А.* Нелинейные динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 113–118.

25. *Назаралиев М.А.,* ***Бейбалаев В.Д.*** Динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка // Владикавказский математический журнал. – 2013. – Т.15, №1. – С. 30–40.

26. ***Бейбалаев В.Д.***, *Наврузова К.А., Гаджиева Т.Ю.* О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования // Вестник ДГУ. – 2014. – Вып. 6. – С. 53–61.

27. ***Бейбалаев В.Д.***, *Якубов А.З.* Анализ разностной схемы аналога волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования // Вестник Самарского ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2014. – Вып. 1(34). – С. 125–133.

28. *Тренькин А.А., Карелин В.И.,* ***Бейбалаев В.Д***. [и др.] Динамика электронов в ветвящихся системах газоразрядных каналов со спадающей концентрацией газа // Нелинейный мир. – 2017. – Т. 15, № 3. – С. 24–31.

29. *Эмиров С.Н****., Бейбалаев В.Д.***, *Рамазанова А.Э. [и др.]* О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности горных пород // Вестник НовГУ. – Т.103, №5. – 2017. – С. 52–66.

30. ***Бейбалаев В.Д***., *Аливердиев А.А., Магомедов Р.А. [и др.]* Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с операторами дробного дифференцирования // Вестник Самарского ГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 376–387.

31. ***Бейбалаев В.Д.***, *Малиева Ф.Ф.* О сходимости разностного метода решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования // Известия высших учебных заведений. Северо- Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2018. – № 2 (198). – С. 30–34.

32. *Эмиров С.Н.,* ***Бейбалаев В.Д.***, *Рамазанова А.Э. [и др.]* О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности композитных материалов // Известия РАН: Серия физическая. – 2018. – Т. 82, № 7. – С. 979–982.

Свидетельства о регистрации программ

33. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2023612642 Российская Федерация. Программная реализация алгоритма компьютерного моделирования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, методом фазовой плоскости: № 2023610970: заявлено 25.01.2023; опубликовано 06.02.2023 / ***Бейбалаев В.Д.***; правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Дагестанский государственный университет». – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ.

34. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2023615929 Российская Федерация. Программная реализация алгоритма компьютерного моделирования процессов промерзания во фрактальных средах: № 2023613586: заявлено 28.02.2023: опубликовано 20.03.2023/ ***Бейбалаев В.Д.***, *Аливердиев А.А.*; правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Дагестанский государственный университет». – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ.

35. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2023667228. Российская Федерация. Программная реализация алгоритма расчета теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления: № 2023666352: заявлено 04.08.2023: опубликовано 14.08.2023 / ***Бейбалаев В.Д.***, *Ахмедов Э.Н.*; правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Дагестанский государственный университет». – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ.

Монографии

36. *Мейланов Р.П.,* ***Бейбалаев В.Д.,*** *Шахбанова М.Р.* Прикладные аспекты дробного исчисления. – Palmarium Academic Publishing, 2012. – 135 с. – ISBN 978-3-8473-9347-4.

37. ***Бейбалаев В.Д.*** Математические модели динамических процессов в фрактальных и пористых средах. – Махачкала: Из-во ДГУ, 2022. – 278 с. – ISBN 978-5-9913-0227-1.

38. *Аливердиев А.А., Алиев Р.М.,* ***Бейбалаев В.Д.,*** *Григорьев Б.А., Заричняк Ю.П.* Теплопроводность горных пород в естественных условиях. – Махачкала: Из-во ДГУ, 2023. – 140 с. – ISBN: 978-9913-0281-4.

Научные статьи в журналах, не входящих в перечень ВАК по данной специальности и доклады конференций

1) научные статьи в журналах, не входящих в перечень ВАК по данной специальности

39. *Бейбалаев В.Д., Ибавов Т.И.* Об одном алгоритме подавления шума в изображениях на основе обобщенных дробных дифференциальных операторов Римана–Лиувилля // Вестник ДГУ. – 2015. – Т. 30, Вып. 6. – С. 93–98.

40. *Эмиров С.Н., Алхасов Ш.М.,* ***Бейбалаев В.Д.*** *[и др.]* Описание температурно-барической зависимости теплопроводности естественных и искусственных композитов // ТПТ (Тепловые процессы в технике). – 2019. – Т. 11. – №3. – С. 34-38.

41. *Тренькин А.А,* ***Бейбалаев В.Д.,*** *Рагимханов Г.Б.* Динамика электронов во фрактальных системах ветвящихся газоразрядных каналов при различных режимах радиального расширения // Нелинейный мир. – 2019. – Т. 17, № 5. – С. 47–53.

42. *Эмиров С.Н., Аливердиев А.А*.**, *Бейбалаев В.Д.*** *[и др.]* О температурных и барических зависимостях эффективной теплопроводности гранитов // Известия РАН: Серия физическая. – 2020. – Т.84, № 9. – С. 1341–1343.

43. *Эмиров С.Н*.**, *Бейбалаев В.Д*.**, *Аливердиев А.А*. Расчет теплопроводности гранулитов в зависимости от давления и температуры // Вестник ДГУ. – 2020. – Т. 35, Вып. 3. – С. 31–35.

44. ***Бейбалаев В.Д.***, *Ибавов Т.И., Омарова А.Г.* Численное исследование нелинейного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2021. – Т. 36, № 2. – С. 47–53.

45. *Эмиров С.Н., Аливердиев А.А.,* ***Бейбалаев В.Д.*** *[и др.]* О влиянии давления на температурную зависимость теплопроводности халькогенида мышьяка разной упорядоченности // Известия РАН: Серия физическая. – 2021. – Т. 85, № 9. – С. 1273–1277.

46. *Эмиров С.Н., Аливердиев А.А., Рамазанова Э.Н.,* ***Бейбалаев В.Д***., *Заричняк Ю.П., Алиев Р.М.* Экспериментальные исследования температурно-барической зависимости эффективной теплопроводности флюидонасыщенных песчаников // Вести газовой науки. – 2021. – Т.47, № 2. – С. 95–100.

47. *Эмиров С.Н. Аливердиев А.А., Заричняк Ю.П., Алиев Р.М.,* ***Бейбалаев В.Д.***, *Рамазанова Э.Н., Амирова А.А.* Вклад водонасыщения в температурно-барическое поведение эффективной теплопроводности песчаников различной упорядоченности // Вести газовой науки. – 2021. – Т.47, № 2. – С. 101–107.

48. *Алишаев М.Г., Аливердиев А.А.,* ***Бейбалаев В.Д.*** Асимптотика подогрева горных пород добычной скважины // Вестник Новгородского государственного университета. – 2023. – Т. 132, № 3. – С. 438–445.

49. *Алишаев М.Г., Аливердиев А.А.,* ***Бейбалаев В.Д.*** Проблема нагнетания сухого пара в пласт без конденсации в скважине // Теплофизика высоких температур. – 2023. –Т. 61, вып. 6 – С. 915–919.

2) доклады конференций

50. *Назаралиев М.А.,* ***Бейбалаев В.Д.*** Нелинейные колебания в средах с фрактальной структурой // Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик, 2010. – С. 177–180.

51. ***Бейбалаев В.Д.*** Моделирование хаотического поведения динамических систем с фрактальной структурой // Сб. материалов восьмой Всероссийской

конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара, 2011. – С. 27–30.
52. *Назаралиев М.А.,* ***Бейбалаев В.Д.*** Двумерная модель теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Сб. трудов Международного Российско-Казахского симпозиума. – Нальчик, 2011. – С. 121–125.
53. *Назаралиев М.А.,* ***Бейбалаев В.Д.*** Численное моделирование нелинейных процессов теплопроводности в фрактальных структурах // Сб. материалов Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». – Владикавказ, 2013. – С. 188–189.
54. ***Бейбалаев В.Д.*** Об одной разностной схеме с весами для уравнения теплопроводности с оператором дробного дифференцирования // Сб. материалов XI Международной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». – Владикавказ, 2014. – С. 96–98.
55. ***Бейбалаев В.Д.,*** *Назаралиев М.А.* Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с оператором дробного дифференцирования // Сб. материалов XII Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». – Владикавказ, 2015. – С. 184–186.
56. *Назаралиев М.Ш.А.,* ***Бейбалаев В.Д****., Аливердиев А.А.* Численное решение краевой задачи для системы уравнений нелокальной неизотермической фильтрации // Сб. материалов Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики». – Нальчик, 2016. – С. 218–221.
57. ***Бейбалаев В.Д****., Назаралиев М.Ш.А., Аливердиев А.А.* О численном исследовании краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с дробными производными // Материалы V Международной конференции «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы». – Махачкала, 2017. – Т. 2. – С. 263–265.
58. *Эмиров С.Н.,* ***Бейбалаев В.Д.,*** *Гаджиев Г.Г.* Температурные и барические закономерности изменения теплопроводности песчаника и керамики // Сб. материалов VII Международной научной конференции «Химическая термодинамика и кинетика». – Великий Новгород, 2017. – С. 364–365.
59. *Эмиров С.Н.,* ***Бейбалаев В.Д.,*** *Аливердиев А.А.* Расчет теплопроводности песчаника в зависимости от давления // Сб. материалов XII Международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». – Махачкала, 2017. – С. 210–212.
60. ***Бейбалаев В.Д****., Эмиров С.Н., Гаджиев Г.Г.* К описанию температурной и барической зависимости теплопроводности керамики и песчаника // Сб. материалов Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики». – Москва, 2017. – Т.2. – С. 334–335.
61. *Эмиров С.Н.,* ***Бейбалаев В.Д****., Рамазанова А.Э.* К описанию температурно-барической зависимости теплопроводности горных пород и композитных материалов // Сб. материалов VII Российской Национальной конференции по теплообмену (РНКТ-7). – Москва, 2018. – Рег. № 199. – С. 4.

62. ***Бейбалаев В.Д.***, *Эмиров С.Н., Амирова А.А., Аливердиев А.А.* Закономерности изменения теплопроводности керамики в условиях высоких давлений и температур // Сб. материалов IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики». – КБР, Эльбрус, 2018. – С. 292.

63. ***Бейбалаев В.Д.,*** *Эмиров С.Н., Аливердиев А.А.* Численное исследование процессов теплопереноса в горных породах // Сб. материалов V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик, 2018. – С. 47.

64. *Аливердиев А.А.,* ***Бейбалаев В.Д.,*** *Эмиров С.Н.* О температуру закономерности изменения теплопроводности и теплоемкости гранита // Сб. материалов XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара, 2019. – С. 200–202.

65. ***Бейбалаев В.Д***., *Аливердиев А.А* Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса // Сб. материалов VI Международной конференции «Возобновляемая энергетика. – Махачкала, 2020. – С. 291–293.

66. ***Бейбалаев В.Д.,*** *Эмиров С.Н., Аливердиев А.А.* Описание температурно-барической зависимости эффективной теплопроводности аргиллитов // Сб. материалов XIV Международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета. – Махачкала, 2021. – С. 69–71.

67. ***Бейбалаев В.Д.***, *Аливердиев А.А.* Исследование температурных и барических закономерностей изменения теплопроводности известняков // Сб. трудов Международной научной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики». – Сумгаит, Азербайджан, 2023. – С. 125–127.

68. ***Бейбалаев В.Д.***, *Аливердиев А.А., Якубов А.З.* Математическая модель нестационарной теплопроводности, включающая эффекты памяти через дробную производную Капуто по времени // Сб. материалов VII Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик, 2023. – С. 57–58.