

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

*На правах рукописи*

Хасамбиев Мохаммад Вахаевич  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ  
НАСЛЕДСТВЕННОЙ МЕХАНИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
МЕТОДОВ ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

1.2.2. Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
проф. Андреев Александр Сергеевич

Ульяновск – 2024

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗУЧАЕМЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	9
1.1. Моделирование деформационно-прочностных свойств дорожно- строительных материалов .....	9
1.2. Моделирование процессов переноса химической субстанции в гидрогеологической среде с анизотропной структурой .....	16
1.3. Основные положения теории дробного исчисления и качественные исследования интегро-дифференциальных уравнений дробного типа .....	21
Глава 2. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИОННО-ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИМЕРБЕТОНА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ $D_{0x}^\alpha u(x) + aD_{0x}^\beta u(x) - b(u(x) - u_0) = 0$ .....	29
2.1. Математическое моделирование осцилляционных свойств полимербетона .....	29
2.2. О качественном анализе фрактальных моделей нелинейного осциллятора с вязкоупругим демпфированием .....	33
2.3. Теоремы о вещественности и простоте первых собственных чисел уравнения модели осциллятора с ВУ демпфированием.....	42
2.4. Численные методы для математического моделирования движения осциллятора с ВУ демпфированием.....	53
2.5. Сравнение результатов решений краевой задачи для модели осциллятора с ВУ демпфированием, полученных при использовании метода Лапласа и численными методами .....	61
2.6. Сравнение с экспериментальными исследованиями .....	66

2.7. Исследование краевой задачи, описывающей колебания струны в среде с фрактальной геометрией .....	73
Глава 3. ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ .....	80
3.1. Определение фрактальной размерности слоисто-геологической среды .....	80
3.2. О решении уравнения, моделирующего плотность потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности.....	85
3.3. Задача нахождения плотности потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности.....	91
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	103
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	106
Приложение 1 .....	117

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность работы.**

Основой для строительства домов, туннелей, портов, плотин, дорог и т. д. являются материалы из цемента, битума и полимеров, включая цементный раствор, бетон, асфальт и асфальтобетон в том числе, с полимерными наполнителями. Развитие передовых и эффективных методов испытаний в последние десятилетия показало, что свойства указанных материалов на макроуровне, например, механические свойства, устойчивость, проницаемость и долговечность неразрывно связаны с их структурой в микро- и мезо-масштабах [99]. Особенно важно, что эта структура вызвала изменение классических соотношений вязкоупругих (ВУ) свойств, определяемых зависимостями между прилагаемыми напряжениями и возникающими деформациями нагруженных механических конструкций. Изучение этой структуры и свойств имеет определяющее значение для эффективного применения таких материалов в строительстве. Однако указанные вязкоупругие соединения можно проектировать и использовать только после предварительного математического моделирования напряженно-деформированного состояния (Нап.Деф.Сос.) этих материалов [3]. При этом должна быть учтена оценка адекватности построенных моделей физических соотношений данных вязкоупругих материалов, основанная на результатах экспериментальных данных.

Научные исследования и эксперименты показали, что микроструктура и свойства материалов имеют сложные и нерегулярные особенности, математическое моделирование которых удастся эффективно провести на основе фрактальной теории. Применение дробных производных для выявления этих особенностей позволило преобразовать модельные уравнения в новый эффективный инструмент описания и анализа реологического явления вязкоупругости строительных, а также полимерных и других материалов.

Одной из основных задач диссертации является разработка нового подхода в нахождении деформационно-прочностных характеристик, являющихся определя-

ющими в расчетах нежестких дорожных покрытий, в определении закона изменения их вязкоупругих свойств в процессе эксплуатации. Полагается, что для ее решения необходимо с учетом эмпирических данных построить модель, описывающую изменение деформационно-прочностных характеристик полимербетона, полученного на основе полиэфирной смолы (ПЭС), при воздействии на него внешней нагрузки. При этом требуется учесть, что движение гранул, входящих в состав полимербетона, моделируется дифференциальным уравнением второго порядка, содержащим дробную производную в младшем члене, порядок которой больше единицы.

Необходимость проведения изыскательских и научных работ в области ирригации и мелиорации, сейсмологии и вулканологии, экологии и других сферах деятельности человечества активизировала исследования по математическому моделированию распространения химических субстанций в геологической среде с проведением соответствующих экспериментов по адекватности построенных математических моделей реальным процессам. Разработка математических моделей диффузии инородных частиц через водоносные слои земной поверхности началась более полувека назад. Развитие вычислительной техники позволило активизировать и значительно углубить исследования в данной области науки.

Классическое уравнение адвекции-диффузии Фика по моделированию процесса распространения химических субстанций в водоносной геологической среде определяется параметрами, характеризующими процесс в целом. Наличие трещин, разломов и другой различной неоднородности не позволяет использовать это уравнение для точного моделирования. Преодоление ограничений дисперсий Фика заключается в переформулировке классического уравнения в дробное уравнение адвекции-диффузии с использованием производных дробного, а не целого порядка [38]. Такая форма уравнения переноса улучшает моделирование аномальной диффузии, особенно в неоднородных пористых средах с водными растворами различных химических субстанций. Уравнение переноса с дробными производными, которое используется в данной диссертации, является пространственно нелокальным и моделирует поведения частиц, испытывающих большие переходы.

Задача об аналитическом решении начально-краевой задачи для пространственно-дробного уравнения адвекции-диффузии является не полностью изученной. В данной работе эта вторая основная задача решается методом разделения переменных. На основе полученных результатов проводится моделирование плотности потока радона на различных глубинах земной поверхности. Продолжением содержания указанной задачи является имеющая практически важную ценность параметрическая идентификация (ПИ) дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии по результатам, полученным в ходе натурных измерений. В данной диссертации эта задача решается принципиально новыми способами.

**Степень разработанности темы исследования.** Несмотря на многочисленные исследования по развитию и применению дробного исчисления в математическом моделировании самых различных систем и процессов, многие задачи в этой области науки остаются актуальными. Отсутствие простых аналитических решений, эффективных методов качественного и численного анализа фрактального исчисления не позволяет определить в достаточной степени идентификацию параметров построенных математических моделей для выявления их адекватности соответствующим природным системам и процессам на основе сравнительного анализа модельных и экспериментальных результатов.

Данная работа посвящена развитию математического моделирования с методикой идентификации параметров разрабатываемых моделей напряженно-деформированного состояния полимерного материала сложной структуры и распространения химической субстанции в слоистой геологической среде на основе новых качественных и численных методов исследования дифференциальных уравнений с дробными производными.

**Цель работы** – вывод новых методов качественного анализа дифференциальных уравнений с дробными производными, развитие способов математического моделирования Нап.Деф.Сос. полимербетонной смеси и распространения радона в слоистой среде на основе методов фрактального анализа, разработка численных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений с дробными производными, алгоритмов и программ для исследуемых прикладных задач.

Для достижения этой цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи:**

1. Вывод теоретических методов исследования предельного поведения решений дифференциальных уравнений с дробными производными.

2. Разработка методики построения математических моделей Нап.Деф.Сос. полимербетонной смеси и распространения радона в слоистой среде с использованием аппарата дробного анализа.

3. Оценка адекватности и разработка алгоритмов идентификации параметров обоснованных математических моделей Нап.Деф.Сос. полимербетона и распространения радона в слоистой среде.

4. Разработка разностных методов и программ решения модельных дробных дифференциальных уравнений.

**Объект исследования.** Моделирование процессов Нап.Деф.Сос. полимербетона и переноса радона в слоистой геологической среде.

**Предмет исследования.** Методы построения осцилляционных моделей с ВУ демпфированием и методики идентификации параметров моделей Нап.Деф.Сос. полимербетона и модели процесса переноса радона в слоистой геологической среде с помощью фрактальных дифференциальных уравнений.

**Научная новизна.**

1. Получены новые методы теоретического и численного анализа решений дифференциальных уравнений с дробными производными.

2. Обоснована новая методика идентификации параметров моделей Нап.Деф.Сос. полимербетона и модели процесса переноса радона в слоистой геологической среде.

3. Разработано программно-математическое обеспечение по нахождению устойчивых приближенных решений для краевой задачи типа Штурма-Лиувилля, моделирующей процесс переноса радона в слоистой геологической среде.

4. Разработано программно-математическое обеспечение по нахождению устойчивых решений краевых задач для уравнения Бегли-Торвика.

5. Представлено авторское программное обеспечение для нахождения приближенного решения первой краевой задачи для дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии (ДДУАД), описывающего процесс переноса радона в слоистой геологической среде.

**Практическая значимость.**

Методообразующая идея определения параметров моделей, исходя из характерных точек, полученных в эксперименте, может быть использована не только для параметрической идентификации параметров дробных моделей, но и для широкого класса моделей, основанных на производных целого порядка. Таким образом предложенный в диссертации метод ПИ параметров в дробных моделях является в определенном смысле универсальным.

В содержание диссертационной работы включены результаты, полученные автором самостоятельно.

**Апробация работы.** Материалы диссертации докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры высшей математики МГСУ, кафедры информационной безопасности и теории управления УлГУ, были доложены на различных конференциях.

**Публикации.** Основные научные результаты диссертационной работе опубликованы в 15 печатных работах, 7 из которых опубликованы в изданиях, относящихся к перечню Высшей Аттестационной Комиссии, 1 работа – в издании, индексируемом в Scopus, 7 – в других изданиях, в том числе, в сборниках материалов Международных и Всероссийских научно-технических конференций, получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ (см. Приложение 1).

**Объем и структура диссертационной работы.** Содержание данной работы изложено на 117 страницах печатного текста, имеется 17 рисунков и 5 таблиц. Диссертационная работа включает в себя введение, три главы, заключение, список литературы и приложение.

## **Глава 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗУЧАЕМЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ**

### **1.1. Моделирование деформационно-прочностных свойств дорожно-строительных материалов**

В решении задачи продления срока службы асфальтобетонных дорожных покрытий одним из наиболее значимых факторов выступает качество битумов, которые используются при производстве асфальтобетонных смесей. В последнее время в мировой практике дорожного строительства стало преобладать мнение, согласно которому качество битумов можно значительно улучшить с помощью модификации их полимерными материалами. Следует отметить, что одной из быстро развивающихся технологий строительства и ремонта дорожных покрытий является применение в этой области модифицированных битумов. В производстве асфальтобетонов в качестве битумоминеральных материалов обычно используют искусственные строительные конгломераты. При этом, нефтяные битумы (в самостоятельном виде или в составе композиции с разными связующими) используются как вяжущие элементы. В данном технологическом процессе также используются разные эмульсионные и минеральные смеси. С помощью использования разных исходных материалов, различного оборудования и разных технологий в процессе производства асфальтобетона могут быть получены различные виды битумоминеральных смесей, в значительной степени отличающихся друг от друга.

Среди всех прочих строительных материалов, используемых в области строительства дорожных покрытий, в качестве более распространенного материала можно выделить асфальтовый бетон. Асфальтовый бетон представляет собой строительный материал, для получения которого необходимо подвергнуть уплотнению специально подобранную смесь, в результате чего асфальтобетон затвердевает. При строительстве дорожных покрытий в качестве асфальтобетонной смеси обычно используют смесь, состоящую из битума, щебня и различных минеральных

порошков. В этом процессе также могут быть использованы разные добавки. В случае отсутствия в асфальтобетоне таких компонентов, как щебень или гравий, смесь асфальтобетона называют песчаным асфальтобетоном.

В зависимости от того, какая температура используется при укладке, асфальтобетоны принято делить на горячие и холодные. При приготовлении горячих асфальтобетонов используются вязкие дорожные битумы, при этом должна поддерживаться температура в районе 140-150° С. Укладку горячих асфальтобетонов производят при температуре не ниже 120° С.

Для получения холодных асфальтобетонов используются жидкие дорожные битумы. Холодные асфальтобетоны приготавливаются при поддержании температуры 110-125° С. При укладке холодных асфальтобетонов необходимо поддерживать температуру не ниже 5° С.

Если асфальтобетон подвергнуть надлежащему уплотнению, то он может приобрести необходимые ему физико-механические свойства. В зависимости от используемых технологий укладки и уплотнения асфальтобетонные смеси делят на жесткие асфальтобетоны, пластичные и литые. Жесткие и пластичные смеси из асфальтобетона уплотняются с помощью различных видов катков – тяжелых, средних и легких. Асфальтобетонные смеси, относящиеся к литым асфальтобетонам, обычно в уплотнении не нуждаются. Но в случае возникновения такой необходимости, для их уплотнения могут быть использованы легкие катки. Структура и свойства асфальтобетона, являющиеся его индивидуальной характеристикой, в большей степени зависят от свойства битумного вяжущего материала, используемого при приготовлении асфальтобетонной смеси. Термин «структура» в переводе с латинского языка означает строение, состав, порядок. В отношении асфальтобетона под этим термином подразумеваются устойчивые связи, которые сохраняют его целостную структуру. В работах [10, 11, 19] было установлено, что свойства битумоинеральных материалов зависят от свойств нефтяных битумов. Авторы указанных исследований рассматривают битумоинеральный материал в качестве

системы, в которой между зернами минерального заполнителя определена взаимосвязь посредством тонких пленок битумного вяжущего материала. Такая структура может определять систему асфальтобетонной смеси непосредственно.

Минеральный остов асфальтобетона, в котором содержится незначительное количество щебня (до 35%), принято называть бескаркасным остовом. В бескаркасном остове асфальтобетона зерна щебня могут как бы свободно плавать в растворе асфальтобетона. В случае увеличения количества щебневого составляющего асфальтобетона до его содержания в нем до 40%, получается так называемый, полукаркасный минеральный остов. В полукаркасном минеральном остове преобладающей составляющей частью является асфальтовый раствор, который частично раздвигает зерна щебня, содержащиеся в нем. В таком остове между отдельными зернами щебня образуются отдельные контакты посредством тонких пленок ориентированного битума. В формировании микроструктуры асфальтобетона участвуют зерна минерального заменителя асфальтобетонной смеси, которые объединены с асфальтовяжущим веществом. Следует отметить, что при наполнении системы гранулами минерального заполнителя происходит снижение ее прочности в связи с тем, что в результате этого появляется свободный неструктурированный битум. Однако, при этом, значительное содержание минерального заполнителя в системе может оказывать положительное влияние на плотностную и деформационную характеристики асфальтобетонной смеси. Минеральный песок представляет собой одну из самых активных составляющих минеральной смеси асфальтобетона. Характер его взаимодействия с битумом определяет микроструктуру асфальтобетона. В случае незначительного содержания минерального песка в асфальтовом вяжущем составе, его отдельные зерна, с формировавшимися на них ориентированными прослойками битумного вяжущего вещества, не могут взаимодействовать друг с другом. Это приводит к значительному снижению прочности микроструктуры асфальтобетона. Для того чтобы повысить прочность микроструктуры асфальтобетона, необходимо повысить количество минерального заполнителя в асфальтобетонной смеси. Если довести его содержание в асфальтобетоне до оптимальной отметки, то пленки из битума, сформировавшиеся на поверхностях зерен

минерального заполнителя перейдут в полностью ориентированное состояние. При этом произойдет сокращение расстояния между отдельными зернами минерального заполнителя и, как следствие, будет достигнуто повышение прочности асфальтобетона до максимальной отметки. В случае же дальнейшего увеличения содержания минерального заполнителя в асфальтобетоне, при доведении его содержания выше оптимальной отметки, произойдет значительное снижение прочности микроструктуры асфальтобетона. Это связано с тем, что в таком случае происходит резкое увеличение числа пор между минеральными зернами, что приводит к нехватке битумного вяжущего вещества для их обволакивания.

Из вышеизложенного следует, что для того, чтобы асфальтобетон имел оптимальную микроструктуру, необходимо определить содержание в нем минерального заполнителя и битума в оптимальных соотношениях.

Асфальтобетон представляет собой одну из разновидностей полиструктурных материалов. Поэтому определение оптимальных соотношений между его различными структурами (микро-, мезо- и макроструктура) может способствовать получению состава асфальтобетонной смеси, которая имеет заданную структуру и необходимые свойства.

Асфальтовый бетон является одним из представителей твердых тел. Он отличается от подобных твердых тел тем, что он обладает собственной формой и имеет определенный объем. Асфальтобетону свойственно высокое сопротивление изменению собственной формы и объема при наличии внешних сил, оказывающих воздействие на него. Но, насколько продолжительно асфальтобетон может сохранять свою форму и объем в определенной мере зависит от таких факторов, как температура, оказывающая воздействие на него, и продолжительность воздействия на него внешних сил. При повышении температуры, воздействующей на асфальтобетон, и увеличении периода воздействия на него внешних сил, происходит резкое снижение сопротивляемости асфальтобетона под действием внешних сил.

В России реальные сроки службы дорожных покрытий из асфальтобетона в действительности значительно ниже сроков, обозначенных в нормативных доку-

ментах, что напрямую связано с ухудшением транспортно-эксплуатационных показателей всей дорожной системы в России в целом. Указанные факторы в результате приводят к повышению объемов финансирования, направленного на ремонтные работы дорожных конструкций. В связи с этим повышение сроков эксплуатации дорожных покрытий из асфальтобетона определено в настоящее время как одно из значительно важных и актуальных направлений дорожной отрасли в Российской Федерации.

Известно, что в асфальтобетоне, который подвергается неоднократным физическим нагрузкам, накапливаются усталостные процессы, которые в результате приводят к разрушению асфальтобетона. При многократных, непрерывных физических нагрузках в асфальтобетоне происходит образование и накопление так называемых микродефектов, в результате чего, с течением времени происходит значительное снижение запаса прочности асфальтобетона. В последнее время развивается высокоскоростное, интенсивное движение транспортных средств по дорожным конструкциям из асфальтобетонной смеси. Поэтому, для того чтобы дать объективную оценку усталостного срока службы асфальтобетонных покрытий автомобильных дорог, возникает необходимость перехода к новым методам их испытания. Эти новые методы должны по условиям нагружения соответствовать реальной картине воздействия на дорожное покрытие из асфальтобетона транспортного потока.

Следует отметить, что климатические факторы, а также процессы усталости и старения, протекающие в асфальтобетоне, имеют значительное влияние на изменение характеристик асфальтобетона в течение периода его службы. В этом заключается отличительная особенность асфальтобетона от других строительных материалов, используемых в дорожном строительстве. Эта особенность асфальтобетонной смеси вызывает необходимость достаточно глубокого анализа деформационного поведения асфальтобетона в условиях разных режимов воздействия на него климатических условий и нагрузок, связанных с воздействием на него транспортного потока.

Также следует отметить, что в российских стандартах эксплуатации дорожных конструкций из асфальтобетонной смеси нет методики для определений усталостной прочности асфальтового бетона при воздействии на него многократных физических нагрузок. Указанный недостаток может влиять на решение задачи выбора типа асфальтобетонной смеси и приводить к ошибочным результатам. При этом также возможны ошибки в решении задачи целесообразности выбора тех или иных модифицирующих добавок.

Перечень приложений дробного дифференциального уравнения может быть расширен с применением его для таких материалов, как пластмасса, полимербетон и др., поведение которых объединяет, в частности, такие свойства, как упругость и вязкость и т. д. Такие материалы принято называть вязкоупругими. Отметим, что вязкость и упругость занимают противоположные точки в широком спектре свойств ВУ композитов. Указанные выше вязкоупругие соединения можно проектировать и использовать в различных сферах и областях техники только после предварительного математического моделирования напряженно-деформированного состояния (Нап.Деф.Сос.) этих материалов. При этом должна быть учтена оценка адекватности построенных моделей физических соотношений данных ВУ материалов с использованием результатов экспериментальных данных.

Способ математического моделирования Нап.Деф.Сос. ВУ материалов, основанный на дробном исчислении, был разработан и изложен в работах A. Gement, D. Blend, R. Bagley, P. Torvik и др. [36, 37].

Создание новых и наиболее точных математических подходов к моделированию Нап.Деф.Сос., порождает другую, не менее важную проблему – проблему ПИ математических моделей с операторами дробного дифференцирования. Отсюда возникает необходимость в поиске новых методик ПИ моделей по имеющимся опытным данным. Следует отметить, что все эти задачи не рассматриваются в ранее упомянутых работах и их решения представлены в данной диссертационной работе. Значения параметров моделей Нап.Деф.Сос. полимербетона, особенно порядка оператора дробного дифференцирования, необходимы для прогнозирова-

ния его деформационно-прочностных характеристик, построения адекватных математических моделей с целью исследования поведения этого материала в условиях почти периодических нагрузок (авто- и ЖД пути, и т. д.).

Активные исследования по математическому моделированию деформационно-прочностных свойств дорожно-строительных материалов с решением соответствующих прикладных задач ведется научным коллективом под руководством проф. Т. С. Алероева [1–6, 13–15, 17, 18, 32–34].

В диссертации для моделирования исследуемых процессов широко применяется модель фрактального осциллятора [17]. Исследованию нелинейных колебаний такого осциллятора, имеющего множество применений, в том числе, в таких областях, как авиастроение [38], анализ микроскопических структур [18] и других посвящены работы Л. Сербина, D. Ingman, J. Suzdalnitsky и др. [20, 25, 63, 64, 92].

Актуальные задачи теории и численного анализа уравнений с дробными производными, математического моделирования различных процессов на основе этих уравнений являются предметом научных исследований Р. И. Паровика. Из многочисленных его работ выделим следующие работы, имеющие непосредственное отношение к настоящей диссертации. В работах [79, 80] предложены и исследованы модели фрактальных нелинейных осцилляторов с использованием явных конечно-разностных схем, уравнения которых содержат как производные констант, так и переменные дробные порядки Герасимова-Капуто и Римана-Лиувилля. Показана сходимость конечно-разностных схем и получены оценки вычислительной точности метода, построены осциллограммы и фазовые траектории. В работе [81] схема конечной разности построена для более широкого класса фрактальных линейных и нелинейных осцилляторов. Доказана ее устойчивость и сходимость, результаты представлены в виде соответствующих теорем. В работе [82] исследована устойчивость точек покоя некоторых фрактальных осцилляторов. Рассмотрены примеры применения доказанных теорем об устойчивости к фрактальному нелинейному осциллятору – фрактальному осциллятору Дуффинга. Результаты исследования устойчивости точек покоя подтверждены построением

фазовых траекторий рассматриваемых фрактальных осцилляторов на основе численных методов. В работе [22] в продолжение результатов работ [79, 82] проведено исследование хаотических режимов дробного аналога осциллятора типа Дуффинга. В качестве одной из прикладных задач в [23, 97] представлена математическая модель накопления радона в камере, которая учитывает наследственные свойства среды, в которой мигрирует радон [29].

## **1.2. Моделирование процессов переноса химической субстанции в гидрогеологической среде с анизотропной структурой**

Проведение научных работ в гидрологии, сейсмологии и других областях науки привело к необходимости математического моделирования распространения химических веществ в гидрогеологической среде и проведения экспериментов по соответствию построенных математических моделей реальным процессам.

Модели диффузии инородных частиц через водоносные слои земной поверхности разрабатывались более полувека назад [51, 58, 95, 98]. Результаты экспериментов по концентрации сточных вод в пористой геологической среде показали преимущество построенной в работе [46] емкостной математической модели по сравнению с диффузионной.

Развитие вычислительной техники позволило активизировать и значительно углубить исследования в указанных выше областях науки. Модели процессов переносимости грунтовыми водами растворенного вещества при течении через гетерогенные образования анизотропной структуры с применением численного анализа по идентификации соответствующих параметров разработаны и исследованы в работах [42, 43, 44, 49].

Моделирование процесса переноса загрязняющих веществ в водоносных горизонтах показало изменение скорости диффузии с необходимостью изменения соответствующей модели на основе дробного исчисления [65].

В работе [56] построена «многофакторная модель переноса смеси загрязняющих веществ в водоносном слое», позволяющая учесть мелкомасштабные изменения скорости диффузии и состав смеси. Модель подтверждена экспериментальными результатами [57].

В работе [70] представлена математическая модель переноса несорбирующегося химического вещества. Соответствующие численное моделирование и лабораторные эксперименты показали, что на процесс переноса вещества преимущественно влияют локальные вариации межобластной диффузии почвы.

Результаты крупномасштабных экспериментов для изучения переноса и растворения веществ в водоносном горизонте представлены в работах [53, 59, 96]. Эти результаты широко применяются в исследованиях по моделированию процессов по распространению химической субстанции в водоносном слое.

В классической постановке математическая модель распространения химической субстанции в водоносном слое описывается дифференциальным уравнением адвекции-диффузии согласно закону Фика [76]. Аномальная или нефиковская дисперсия являлась предметом тщательного изучения физиками со времён открытия явления непрерывного во времени случайного блуждания (continuous time random walk или, сокращенно, CTRW) Монтроллем и Вайсом (*Montroll E.W., Weiss G.H.*) [73]. Открытие случайного блуждания расширило прогнозные возможности моделей, построенных на основе стохастических процессов броуновского движения, что лежит в основе классического уравнения переноса (УП). CTRW присваивает движениям отдельных частиц пространственно-временное распределение, известное как «переходная плотность». Когда хвост достаточно тяжёл (степенной закон), нефиковская дисперсия наблюдается на всех временных и пространственных масштабах. В работах Берковиц и Шер (*Berkowitz B., Scher H.*) [40, 41], а также в статье Пэйнтер и соавт. (*Painter S., Cvetkovic V., Selroos J. O.*) [77] приведены примеры использования CTRW для описания переноса в трещиноватой породе. Многочисленные авторы показали сходство между движениями, описываемыми уравнениями с тяжёлыми хвостами плотности, и уравнениями переноса с дробными производными. Такие движения могут иметь «тяжёлые хвосты», т. е. чрезвычайно

продолжительную корреляцию и дробные производные во времени, как показано в работах: Комптэ (*Compte A.*) [45], Гиона и Роман (*Giona M., Roman H. E.*) [54], и/или в пространстве, например, в работах: Горенфло и Маинарди (*Gorenflo R., Mainardi F.*) [55]; Сайчев и Заславский (*Saichev A.I., Zaslavsky G.M.*) [85]; Бенсон (*Benson D. A.*) [38], Чавез (*Chaves A. S.*) [47]; Меершарт и соавт. (*Meerschaert M.M., Benson D.A., Bäumer B.*) [72].

Дисперсия второго порядка появляется тогда, когда хвосты распределения «тонки» настолько, что большие или занимающие много времени движения исключаются. Обычно необходимое количество движений с «тонкими хвостами» должно быть также включено до того, как процесс будет удачно описываться Локальной теоремой Муавра — Лапласа и до наступления эргодичности или фиковской диффузии. Во время такой дофиковской фазы перемещения в локальном УП можно использовать коэффициенты дисперсии, зависящие от масштаба, однако процесс описывается более точно нелокальной функцией, как показано в работах: Неуман (*Neuman S.P.*) [75], Кушман и соавторы (*Cushman J. H., Hu X., Ginn T. R.*) [48]. Решения некоторых нелокальных уравнений получаются из преобразований Фурье и Лапласа для относительно гомогенной среды (см., напр., Денг и соавторы (*Deng F. W., Cushman J. H., Delleur J. W.*) [52]).

Классическое УП с локальным (или асимптотически постоянным) тензором дисперсии является весьма удобным уравнением для прогноза, т. к. позволяет с лёгкостью получать решения. Уравнения с дробными производными столь же удобны. Общие нелокальные виды УП подходят в меньшей степени, т. к. их решения получаются путём числовой свёртки. Подробное числовое моделирование путём создания случайного количества полей  $K$  и последующего моделирования по методу Монте-Карло является столь же требовательным и обычно используется для сбора сведений о поведении дофиковского факела. Уравнение УП с дробными производными, которое используется в данной работе, является пространственно нелокальным и моделирует поведение частиц, испытывающих большие переходы. Такие перемещения могут быть вызваны неоднородностью (как показано в статье Бэнсон и

соавт. (*Benson D. A. et al.*) [39]) и пространственной автокорреляцией, что обосновано в статье Бэнсон (*Benson D. A.*) [38]. Если вероятность перехода следует степенному закону, то аналитические решения УП могут быть использованы в качестве независимых моделей перемещения в процессе образования плюма.

Одномерное дробное дифференциальное уравнение адвекции-диффузии (далее в тексте – ДДУАД) с постоянными параметрами имеет вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -V \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + DD_{0+}^{\alpha} u(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1,$$

где  $u(x,t)$  – водная концентрация,  $V$  – величина скорости, величина  $D$  определяется распространением процесса, а  $\alpha$  ( $1 < \alpha < 2$ ) – порядок дробного дифференцирования. ДДУАД значительно адекватнее моделирует процесс переноса в сложных системах с аномальными диффузиями.

Область применения ДДУАД в последнее время значительно расширилась. Такие уравнения используются при математическом моделировании в теории управления, в теории поля, в физике твердого тела, а также и в других различных областях науки. В связи с этим была проделана большая работа для нахождения численного решения и фундаментального решения этого ДДУАД.

Некоторые авторы рассматривали численное приближение для ДДУАД. *Huang F.*, *Liu F.* и другие ученые предложили явные и неявные эйлеровы аппроксимации для ДДУАД переменного порядка с нелинейным исходным членом [61, 90]. В работе [61] с использованием преобразования Фурье-Лапласа получено фундаментальное решение пространственно-временного ДДУАД с задачей Коши. В работе Панди и соавт. (*Pandey R.K.*, *Singh O.P.*, *Baranwal V.K.*) [78] предложен аналитический алгоритм для решения пространственно-временного дробного адвекционного диффузионного уравнения на основе способа гомотопического анализа. Шен и соавторы (*Shen S. J.*, *Liu F. W.*, *Anh V.*, *Turner I.*) [92] получили фундаментальное решение для пространственно-дробного УАД Рисса с начальным условием. Кроме того, они дали явное и неявное конечно-разностное приближение для

его решения. В работах [61, 92, 101] с использованием двух дробно-центрированных разностных схем предложена новая усложненная дробная, конечно-разностная схема аппроксимации Рисса для решения пространственно-дробного УАД.

Надо отметить, что в исследованиях перечисленных выше авторов имеется существенный недостаток – отсутствие единого подхода в исследовании ДДУАД. Задача об аналитическом решении начально-краевой задачи для пространственно-дробного УАД является не полностью изученной. В данной работе эта задача решается методом разделения переменных. На основе полученных результатов проводится моделирование плотности потока радона на различных глубинах земной поверхности.

Совершенно иная ситуация возникает в процессе переноса, который описывается ДДУАД, на больших расстояниях от излучателя в отношении достаточно малых скоплений диффундирующего вещества по сравнению с процессом переноса, который описывается обычным уравнением с частными производными параболического типа.

Перенос, описываемый ДДУАД на достаточно значительных расстояниях от источника, обладает совершенно иным поведением в отношении незначительных концентраций диффундируемого вещества по сравнению с переносом, описываемым уравнением классической диффузии. Указанные незначительные концентрации диффундируемого вещества или, как их принято называть по-другому – «далекие хвосты распределений», в случае диффузии в фрактальной среде, описываемой ДДУАД, убывают согласно степенному закону. По мнению многих ученых, существование этих «далеких хвостов распределений» является достаточно весомым фактором, из-за которого возникает необходимость пересмотра бытовавших до сих пор представлений о безопасности, которые основывались на представлениях о скорости затухания процесса диффузии по экспоненциальному закону.

В настоящее время перед представителями гидрогеологической науки возникла достаточно интересная задача, имеющая практически важную ценность – это

задача параметрической идентификации (далее – ПИ) ДДУАД по результатам, полученным в ходе натуральных измерений. В данной работе эта задача решается принципиально новыми способами.

Многочисленные наблюдения в сейсмологии и вулканологии за изменениями физических свойств верхнего слоя земной коры и накопления химических элементов в ее водоносном слое и на ее поверхности, их анализ привели к выводу о том, что одним из основных проявлений сильных землетрясений является изменение содержания радиоактивного вещества радона. Анализ работ по математическому моделированию содержания радона в зависимости от изменения пористости и проницаемости верхнего слоя и дальнейшее их развитие переходом от описания моделей посредством обыкновенных дифференциальных уравнений к соответствующему описанию фрактальными уравнениями [24] является одним из направлений активных исследований научной группы д.ф.-м.н. Р. И. Паровика по применению дробного исчисления к теоретическому и численному решению ряда прикладных задач [24].

### **1.3. Основные положения теории дробного исчисления и качественные методы исследования интегро-дифференциальных уравнений дробного типа**

В настоящее время область математики, называемая дробным интегро-дифференцированием, интересует многочисленных исследователей, поскольку физические процессы, протекающие во фрактальной и вязкоупругой средах, описываются динамическими системами со сложными дробно-интегральными операторами. Случайно блуждающая частица, в отличие от сплошной среды, в вязкоупругой и фрактальной средах удаляется от места старта медленнее, поскольку не все направления движения становятся для нее доступными. Физические величины начинают изменяться медленнее первой производной за счет того, что замедление

диффузии во фрактальных и ВУ средах существенно возрастает. Учесть этот эффект можно только в интегрально-дифференциальном уравнении, содержащем производную по времени дробного порядка.

Заметим, что операции дробного интегро-дифференцирования являются обобщением обычных операций интегро-дифференцирования. В том случае, когда операторы дробного дифференцирования и интегрирования имеют целые показатели, эти операторы являются аналогами соответствующих операторов целого дифференцирования и целого интегрирования. Несмотря на то, что интегро-дифференциальное исчисление произвольного порядка, как область математики, насчитывает более чем трехвековую историю, однако только в последние десятилетия оно начало активно развиваться. Первые упоминания о производных нецелого порядка встречаются в письмах Лейбница к Лопиталю. В то же время появляются публикации таких физиков и математиков, как: Laplas, Fourier, Riemann и др.

Из советских математиков большой вклад в развитие дробного исчисления внес известный математик М. М. Джрбациян. Работы М. М. Джрбацияна по решению краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными заложили основы теории таких задач. Также отметим весьма содержательную книгу о дробном исчислении (Oldham K., Spanier J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974), написанную специалистами по физической химии К. Олдхэм и Дж. Спэньер. Хотя в этой монографии авторы излагают лишь классические вопросы теории дробного исчисления, она вызвала большой интерес к дробному исчислению у механиков и химиков.

Безусловно, в наше время дробное интегро-дифференциальное исчисление находится в стадии своего активного становления и трудно найти, на данный момент, область естествознания, где бы не применялись способы дробного исчисления.

Существует несколько определений дробного порядка и дробной производной. Этот факт усложняет выбор численных методов для решения задач, сопутствующих уравнениям с дробными интегралами и производными, так как они

напрямую зависят от вида выбранных интегралов и производных. Следовательно, возникает необходимость сравнения результатов, которые были получены при использовании разных определений и численных методов [7, 66].

Дадим определение операции дробного дифференцирования, которое используется в теории переноса и моделировании деформационно-прочностных характеристик ВУ материалов.

Допустим, что функция  $f(x)$  принадлежит пространству суммируемых функций на полуинтервале  $(a, b]$  и  $\alpha > 0$ .

Дробный интеграл Римана-Лиувилля функции  $f(x)$  определяется равенством [83]

$$I_u^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(v)dv}{(x-v)^{1-\alpha}}, \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  есть порядок дробного интеграла,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty v^{\alpha-1} e^{-v} dv$$

есть соответствующее значение Гамма-функции.

Допустим, что  $u = u(x)$  принадлежит пространству суммируемых функций на полуинтервале  $(a, b]$ ,  $0 \leq m - 1 < \alpha \leq m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Равенство

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left( \int_0^x \frac{u(\beta) d\beta}{(x-\beta)^{\alpha+1-m}} \right) \quad (1.2)$$

называется производной Римана – Лиувилля дробного порядка  $\alpha$ , а равенство

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{u^{(m)}(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} \quad (1.3)$$

– производной Капуто (Капуто – Герасимова) такого же порядка [84].

Производная Римана-Лиувилля от полинома, как и в случае целой производной, вычисляется исходя из формулы

$$D^\alpha x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad x > 0. \quad (1.4)$$

В дробном исчислении особое место занимает функция Миттаг-Леффлера [88, 89]:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}, \quad (1.5)$$

которая является обобщением ряда для экспоненты при  $n! = \Gamma(n+1)$  на  $\Gamma(\alpha n+1)$  и остается инвариантной, если на неё подействовать оператором дробного дифференцирования:

$$D^\alpha E_\alpha(z^\alpha) = E_\alpha(z^\alpha).$$

Если положить  $\alpha = 1$ , то дробный интеграл (1.1) обращается в обычный интеграл Римана, а формула (1.2) в случае, когда  $\alpha = 1$  и  $m = 1$  выражает обычную производную целочисленного порядка.

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) + \int_{x_0}^x \frac{g(y(\tau)) d\tau}{(x-\tau)^\alpha}, \quad (1.6)$$

где  $x_0, x \in R$ , ( $x_0 \leq x$ ),  $y \in R^n$ ,  $R^n$  –  $n$ -мерное линейное пространство с нормой  $\|x\|^2 = x^T x = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ ,  $f: R \times R^n \rightarrow R^n$  и  $g: R^n \rightarrow R^n$  есть непрерывные функции,  $\alpha$  есть некоторый параметр,  $0 < \alpha < 1$ ,  $(\cdot)^T$  – операция транспонирования). Его можно определить как уравнение дробного типа.

Полагаем, что функции  $f(x, y)$  и  $g(y)$  ограничены и удовлетворяют условиям Липшица, т. е. выполняются следующие неравенства

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\| &\leq m_1 \quad \forall (x, y) \in R \times K, \\ \|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)\| &\leq L_1(|x_2 - x_1| + \|y_2 - y_1\|) \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^+ \times K, \\ \|g(y)\| &\leq m_2, \quad \|g(y_2) - g(y_1)\| \leq L_2 \|y_2 - y_1\| \quad \forall y, y_1, y_2 \in K, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где постоянные  $m_1, m_2, L_1$  и  $L_2$  определяются в зависимости от  $H = \text{const} > 0$  соответственно для каждого компактного множества  $K = \{y \in R^n: \|y\| \leq H\}$ .

При условиях (1.7) для каждой начальной точки  $(x_0, y_0) \in R^+ \times R^n$  существует единственное решение  $y = y(x, x_0, y_0)$ ,  $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$  уравнения (1.6), определенное при  $x \in [x_0, x_0 + \nu)$  ( $\nu > 0$ ), непрерывно зависящее от  $(x_0, y_0)$  и параметра  $\alpha \in (0, 1)$ .

Следуя [35], введем для функции  $f(x, y)$  семейство сдвигов  $F = \{f_s(x, y) = f(x + s, y), s \in R\}$ . Это семейство сдвигов в силу условий (1.7) является предкомпактным в метризуемом функциональном пространстве  $Q$  функций  $q: R \times R^n \rightarrow R^n$  с метрикой

$$\rho(q_1, q_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\|q_2 - q_1\|_l}{1 + \|q_2 - q_1\|_l},$$

$$\|q_2 - q_1\|_l = \sup(\|q_2 - q_1\| \forall (x, y) \in [-l, l] \times K_l),$$

$$K_l = \{y \in R^n: \|y\| \leq H_l\}, 0 < H_1 < H_2 < \dots < H_l < \dots, H_l \rightarrow \infty \text{ при } l \rightarrow \infty\}.$$

Тем самым семейство сдвигов  $F$  имеет компактную оболочку  $S^+(F)$  и для любой последовательности функций  $\{f_l(x, y) = f(x_l + x, y)\}$ , определяемой последовательностью  $\{x_l, x_l \rightarrow \infty \text{ при } l \rightarrow \infty\}$ , найдутся подпоследовательность  $\{x_{l_j}\}$ ,  $\{l_j\} \subset \{l\}$  и функция  $q^* \in Q$ , такие, что  $f_{l_j} \rightarrow q^*$  в  $Q$  при  $l_j \rightarrow \infty$ . Множество всех предельных функций  $q^*$  обозначим через  $Q^*$ .

Пусть  $z: R \rightarrow R^n$  есть некоторая непрерывная функция. Для каждого  $x \in R$  определим функцию  $z_x(s) = z(x + s)$ ,  $s \leq 0$ .

Введем пространство  $B_\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) как вещественное линейное векторное пространство функций  $z: (-\infty, 0) \rightarrow R^n$  таких, что функция  $e^{\alpha s} z(s)$  является ограниченной и равномерно непрерывной по  $s \in (-\infty, 0]$ . Пространство  $B_\alpha$  с полунормой  $|||z||| = \sup(e^{\alpha s} \|z(s)\|, s \leq 0)$  удовлетворяет для каждой непрерывной функции  $z: R \rightarrow R^n$ , такой, что  $z_x \in B_\alpha$ , следующим условиям:

1)  $z_x$  непрерывна по  $x$  относительно  $|||z|||$ ;

2) существует неотрицательная функция  $\theta(\gamma) \geq 0$ ,  $\theta(\gamma) \rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow \infty$ , такая, что

$$\|z_x\| \leq \sup(\|z(s)\|, \tau \leq s \leq x) + \theta(x - \tau) |||z_\tau|||;$$

3) существует некоторая постоянная  $\mu > 0$ , такая, что  $\|z(x)\| \leq \mu |||z_x|||$ .

По отношению к пространству  $B_\alpha$  может быть определено интегро-дифференциальное уравнение с бесконечным запаздыванием

$$\frac{dz(x)}{dx} = q(x, z(x)) + \int_{-\infty}^x \frac{g(z(\tau))d\tau}{(x-\tau)^\alpha}, \quad z \in B_\alpha \quad (1.8)$$

в том числе уравнения, соответствующие функциям  $q^* \in Q^*$ .

Областью определения уравнения (1.8) является область  $R \times B_\alpha$ . Функция  $z \in B_\alpha$  есть решение (1.8), если она имеет непрерывную производную  $dz(x)/dx$ , таким образом, что уравнение (1.8) обращается в тождество.

Для исследования качественного поведения решений уравнения (1.6) важным является следующее определение [35].

**Определение 1.1.** Точка  $p \in R^n$  называется предельной точкой решения  $y = y(x, x_0, y_0)$  уравнения (1.6), если существует последовательность  $x_l \rightarrow \infty$ , такая, что  $y(x_l, x_0, y_0) \rightarrow p$  при  $l \rightarrow \infty$ . Множество предельных точек образует предельное множество  $\Omega(x_0, y_0)$  решения  $y = y(x, x_0, y_0)$ .

Имеет место следующее свойство  $\Omega(x_0, y_0)$ , называемое квазиинвариантностью [35].

**Теорема 1.1.** Пусть  $y = y(x, x_0, y_0)$  есть определенное и ограниченное при всех  $x > x_0$  решение уравнения (1.6), точка  $p \in \Omega(x_0, y_0)$ . Тогда существует предельное уравнение (1.8) и решение  $z = z(x)$  этого уравнения, такое, что  $z(0) = p$ ,  $\{z(x), x \in R\} \subset \Omega^+(x_0, y_0)$ .

Введем функционал Ляпунова следующего вида

$$V(x, y_x) = V_1(x, y(x)) + \int_{x_0}^x V_2(s, y(x), y(s))ds, \quad (1.9)$$

определяемый вдоль непрерывно дифференцируемой функции  $y: [x_0, +\infty) \rightarrow R^n$ ,  $y_x = y(x+s)$  ( $x_0 - x \leq s \leq 0$ ), где  $V_1: R \times R^n \rightarrow R$  и  $V_2: R \times R^{2n} \rightarrow R^+$  есть функции, непрерывно дифференцируемые по своим аргументам.

Пусть  $y = y(x) = y(x, x_0, y_0)$  есть некоторое решение уравнения (1.6), определенное при всех  $x \geq x_0$ . Вдоль такого решения может быть найдена производная от функционала  $V(x, y_x)$  согласно формуле [35]:

$$V'(x, y_x) = \frac{\partial V_1(x, y(x))}{\partial x} + \left( \frac{\partial V_1(x, y(x))}{\partial y} + \int_{x_0}^x \frac{\partial V_2(s, z, y(s))}{\partial z} \Big|_{z=y(x)} ds \right)^T \times \\ \times \left( f(x, y(x)) + \int_{x_0}^x \frac{g(y(\tau)) d\tau}{(x - \tau)^\alpha} \right) + V_2(x, y(x), y(x)) \quad (1.10)$$

Будем полагать, что вдоль каждого решения  $y = y(x)$  такая производная удовлетворяет неравенству

$$V'(x, y_x) \leq -W(y_x) \leq 0, \quad (1.11)$$

где  $W: B_\alpha \rightarrow R^+$  есть некоторый функционал.

В соответствии с результатами работы [35] справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.2.** Пусть

1) некоторое решение  $y = y(x) = y(x, x_0, y_0)$  уравнения (1.6) определено и является ограниченным при всех  $x \geq x_0$ ,  $\|y(x, x_0, y_0)\| \leq H = \text{const} \forall x \geq x_0$ ;

2) имеется функционал  $V = V(x, y_x)$ , производная которого (1.10) вдоль решения  $y = y(x)$  удовлетворяет неравенству (1.11).

Тогда для каждой предельной точки  $p \in \Omega^+(x_0, y_0)$  найдется предельное уравнение (1.8) и его решение  $z = z(x)$ ,  $x \in R$ , такое, что  $z(0) = p$ ,  $\{z(x), x \in R\} \subset \Omega^+(x_0, y_0)$ ,  $W(z_x) \equiv 0$ .

Предположим, что  $f(x, 0) \equiv 0$ ,  $g(0) \equiv 0$ , так что уравнение (1.6) имеет нулевое решение  $y(x, x_0, 0) \equiv 0$ . Введем класс функций типа Хана  $\mathcal{K} = \{h \in C(R^+ \rightarrow R^+), h(0) = 0, h(u)$  монотонно возрастает} [35].

**Теорема 1.3.** Пусть

1) для уравнения (1.6) имеется функционал вида (1.9) такой, что  $V(x, 0) \equiv 0$ ,  $V_1(x, y(x)) \geq a(\|y(x)\|)$  с производной (1.10), удовлетворяющей неравенству (1.11);

2) любое предельное уравнение вида (1.8) может иметь решение  $z = z(x)$ , такое, что  $\{z_x, x \in R\} \subset \{W(z_x) = 0\}$ , если только  $z(x) \equiv 0$ .

Тогда решение  $y = 0$  уравнения (1.6) асимптотически устойчиво.

**Теорема 1.4.** Пусть

1) для уравнения (1.6) имеется функционал вида (1.9), такой, что  $V(x, 0) = 0$  и в любой достаточно малой окрестности точки  $y = 0$  при некотором  $x = x_0 = 0$  найдутся точки  $y_0$ , такие, что  $V(x_0, y_0) < 0$ , при этом производная этого функционала (1.10) удовлетворяет неравенству (1.11);

2) любое предельное уравнение (1.8) не может иметь решение  $z = z(x)$ , такое, что  $\{z_x, x \in R\} \subset \{W(z_x) = 0\}$ ,  $V_1(x, z(x)) \leq V_0 \forall x \in R$ .

Тогда решение  $x = 0$  уравнения (1.6) неустойчиво.

Заметим, что к уравнению (1.6) сводятся дифференциальные уравнения дробного типа второго и более высокого порядков, содержащих членов с производными Римана – Лиувилля и Капуто более низкого порядка от неизвестных функций. Представленные выше теоремы позволяют провести эффективный качественный анализ предельного поведения решений таких уравнений. В диссертации они будут использованы для такого анализа решений фрактального осциллятора.

**Глава 2. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ  
ДЕФОРМАЦИОННО-ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ПОЛИМЕРБЕТОНА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ**

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) + aD_{0x}^{\beta}u(x) - b(u(x) - u_0) = 0$$

В данной главе исследуется задача о моделировании характеристик деформации и прочности полимербетона на основе ДДУАД вида:

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) + aD_{0x}^{\beta}u(x) - b(u(x) - u_0) = 0, \text{ где } 1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 1. \quad (2.1)$$

Отметим, что при  $\alpha = 2$  и  $\beta = 1$ , уравнение (2.1) переходит в одномерное адвективно-диффузионное уравнение  $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + a \frac{\partial u(x)}{\partial x} - b(u(x) - u_0) = 0$ , которое описывает процесс переноса радона в пористой среде [39].

При  $\alpha = 2$ , уравнение (2.1) переходит в уравнение Bagley-Torvik, на основе которого моделируются осцилляционные процессы целого ряда физических явлений.

Данная глава посвящена исследованию модели деформационно-прочностных характеристик полимербетона с помощью уравнения Bagley-Torvik.

### **2.1. Математическое моделирование осцилляционных свойств полимербетона**

Экспериментальные исследования по определению основных деформационно-прочностных характеристик полимербетона проводились на вибротесте, изображенному на Рисунке 2.1. Результаты исследования приведены в Таблице 2.1.

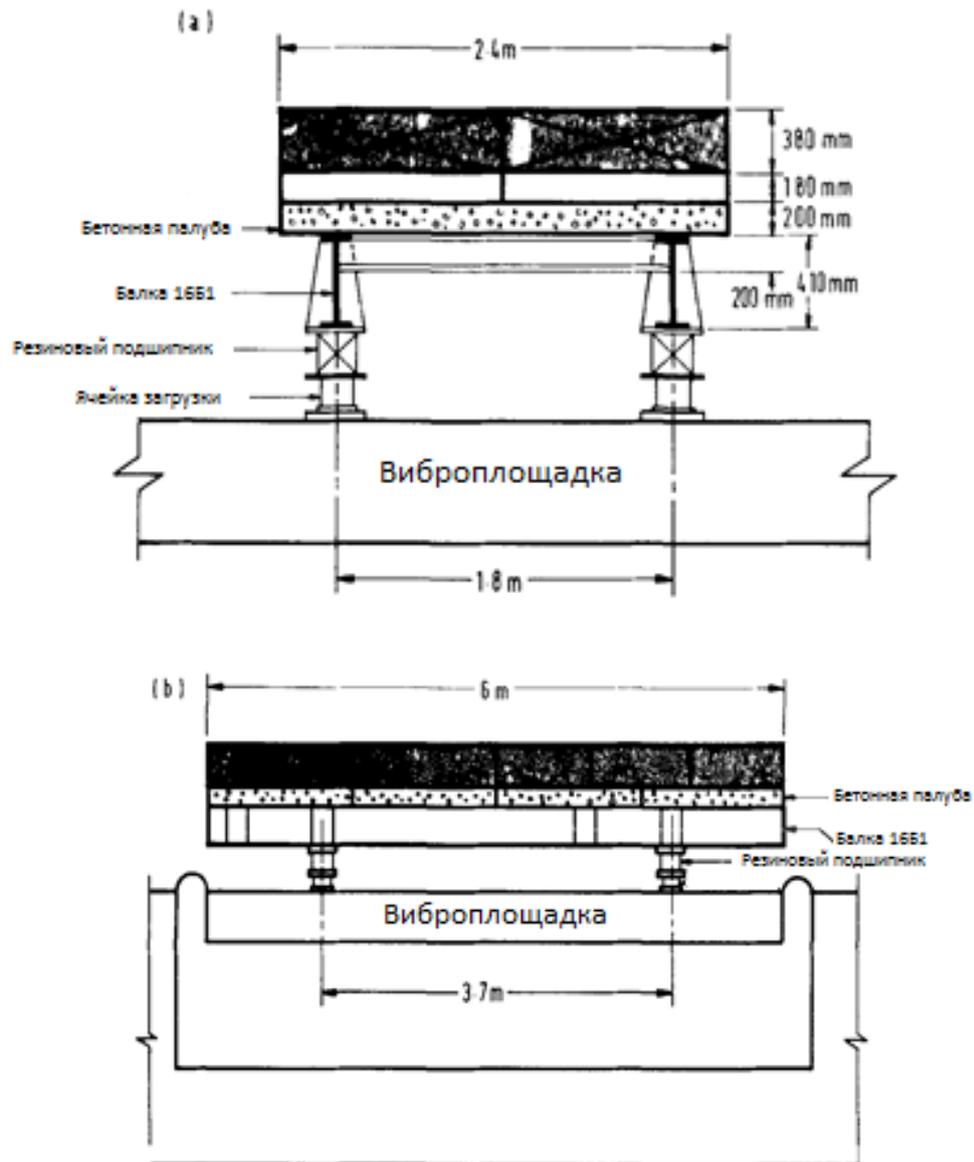


Рис. 2.1. Испытания мостового полотна на вибротесте: а) поперечное сечение; б) продольное сечение

Табл. 2.1. Деформационно-прочностные характеристики полимербетона на основе диана и дихлорангидрида-1,1-дихлор-2,2 ди (*n*-карбоксифенил) этилена

Вид асфальтобетона	Температура, °С	Модуль упругости, МПа	Модуль деформации, МПа	Пластичность	Вязкость, МПа·с
1	2	3	4	5	6
1	0	5000	2300	0.20	$2 \cdot 10^7$
2	0	3000	1000	0.28	$1 \cdot 10^6$
3	0	2500	650	0.35	$5 \cdot 10^4$
4	0	3000	1000	0.28	$1 \cdot 10^6$
5	0	2500	650	0.35	$5 \cdot 10^4$

1	2	3	4	5	6
6	0	2000	420	0.40	$5 \cdot 10^3$
7	0	5000	2300	0.20	$2 \cdot 10^7$
8	0	4000	1600	0.23	$8 \cdot 10^6$
9	0	3000	1000	0.28	$1 \cdot 10^6$
10	0	2000	420	0.40	$5 \cdot 10^3$
1	20	2500	650	0.35	$5 \cdot 10^4$
2	20	1750	330	0.43	$1 \cdot 10^3$
3	20	1250	170	0.50	$1 \cdot 10^2$
4	20	1750	330	0.43	$1 \cdot 10^3$
5	20	1250	170	0.50	$1 \cdot 10^2$
6	20	1000	130	0.52	$5 \cdot 10^1$
7	20	2500	650	0.35	$5 \cdot 10^4$
8	20	2000	420	0.40	$5 \cdot 10^3$
9	20	1750	330	0.43	$1 \cdot 10^3$
10	20	1000	130	0.52	$5 \cdot 10^1$

На основе анализа таких экспериментальных исследований была предложена математическая модель, описываемая уравнением [33]

$$my'' + \eta D^\alpha y + ky = F(x), \quad (2.2)$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, при этом дробная производная имеется в младшем члене [67], параметр  $m$  обозначает массу осциллятора; параметры демпфирования обозначены как  $\eta$ ,  $\alpha$ ; коэффициент жесткости пружины обозначен через  $k$ ; внешнее воздействие, приложенное к осциллятору, обозначено функцией  $F(x)$ ;  $D^\alpha$  – производная Римана-Лиувилля.

Механическую систему, совершающую колебательные движения (осциллятор), моделируемую уравнением (2.2), некоторые авторы называют фрактальным осциллятором [21, 74]. Схематично такой осциллятор изображен на Рисунке 2.2.

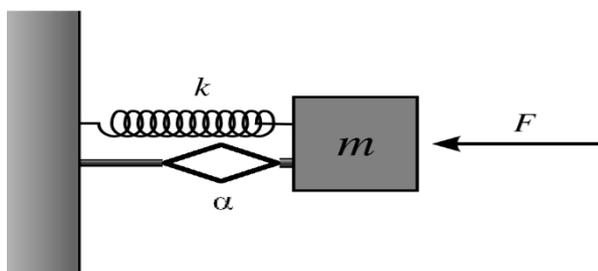


Рис. 2.2. Схема фрактального осциллятора

Уравнения вида (2.2), называемые также уравнениями Bagley-Torvik, моделируют также колебания мембраны в ньютоновской жидкости, в частности, в воде и других физических явлениях. Независимо от природы жидкости дробная производная в уравнении для жидкости имеет порядок  $3/2$ . С помощью подборов других параметров достигается адекватность модели (2.2) колебаниям мембраны.

Одной из основных задач данной диссертации является выявление различных характеристик полимербетона при воздействии различных нагрузок. При этом в качестве экземпляра для пробы использовались образцы полимербетона, содержащие ПЭС. Структура полимербетона представляет собой комплект гранул минерального заполнителя (щебня), находящийся в ВУ сфере.

В одной из моделей уравнение колебания гранул массой  $m = 1$  задаётся следующим образом [33]

$$y(x)'' + 1.8D^\alpha y(x) + 93y(x) = F(x), \quad (2.2a)$$

где  $b = 1.8$  – модуль вязкости ПЭС,  $k = 93$  – модуль жесткости ПЭС,  $y(x)$  – смещение. В нашем случае порядок дробной производной  $D^\alpha$  считается зависимым от природы среды, в которой и происходит колебание гранул согласно исследуемой модели.

Полагается, что порядок дробной производной имеет следующую оценку:  $1.3 < \alpha < 1.8$ . Ранее различные краевые задачи для уравнения (2.2) изучены при  $0 < \alpha < 1$ . В частности, в работе [2] показано, что оператор, порожденный уравнением (2.2) (в случае, когда  $F(x) = 0$ ) и краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 0, \quad (2.2b)$$

обладает комплексом осцилляционных свойств. Также выписаны все собственные функции этого оператора и доказано, что эта система собственных функций образует базис в  $L_2(0;1)$ .

## 2.2. О качественном анализе фрактальных моделей нелинейного осциллятора с вязкоупругим демпфированием

Существенная нелинейность дифференциальных уравнений с составляющими дробного исчисления значительно затрудняет возможность их аналитического решения, привлекая разработку эффективных методов их численного анализа [79]. При этом также актуальной является проблема разработки методов качественного анализа свойств таких уравнений на основе развития известных методов для классических уравнений.

В этом разделе проводится исследование качественных свойств решений нелинейных фрактальных уравнений второго порядка, возникающих в моделировании вязкоупругого материала, на основе методики исследования классических уравнений типа Вольтерра.

Исследуем качественные свойства решений нелинейного уравнения второго порядка, имеющего дробную производную [67]. Это уравнение представляет собой одну из моделей типа Bagley-Torvik осциллятора с вязкоупругим демпфированием. Для такого исследования применим следующие построения теории дробных производных.

**Определение 2.1.** [86] *Дробный интеграл Римана-Лиувилля функции  $u \in C(R^+ \rightarrow R)$  определяется равенством*

$$I_u^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u(v)dv}{(x-v)^{1-\alpha}}, \quad (2.3)$$

где  $\alpha \in R^+$  есть порядок дробного интеграла,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty v^{\alpha-1} e^{-v} dv$$

есть соответствующее значение Гамма-функции.

Имеет место следующая теорема об эквивалентности определения  $I_u^\alpha(x)$  интегральному оператору [60].

**Теорема 2.1.** *Дробный интеграл (2.3) при  $0 < \alpha < 1$  эквивалентен интегральному оператору*

$$I_u^\alpha(x) = \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta)w(\beta, x)d\beta, \quad \mu_\alpha(\beta) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \beta^{-\alpha},$$

$$\frac{\partial w(\beta, x)}{\partial x} = -\beta w(\beta, x) + u(x), \quad w(\beta, 0) = 0. \quad (2.4)$$

Рассмотрим модель осциллятора, описываемого нелинейным уравнением второго порядка, для которого выполнены условия существования и единственности решения [62, 67]

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + k(x)\mathcal{D}^\alpha u(x) + f(u(x)) = 0 \quad (0 < \alpha < 1), \quad (2.5)$$

где  $k \in C^1(R^+ \rightarrow [k_0, k_1])$  ( $k_0 > 0$ ),  $k'(x) \leq 0$ ,  $f \in C(R^+ \rightarrow R)$ ,  $\mathcal{D}^\alpha u(x)$  есть производная Капуто

$$\mathcal{D}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u'(\beta)d\beta}{(x-\beta)^{1-\alpha}}, \quad u'(x) = \frac{du(x)}{dx}. \quad (2.6)$$

В соответствии с равенствами (2.3) и (2.4) для дробной производной найдем выражение

$$\mathcal{D}^\alpha u(x) = I_{u'}^\alpha(x) = \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta)w(\beta, x)d\beta,$$

$$\frac{\partial w(\beta, x)}{\partial x} = -\beta w(\beta, x) + u'(x). \quad (2.7)$$

Обозначим через  $M$  множество

$$M = \{ (u, u') \in R^2: f(u) = 0, u' = 0 \}.$$

**Теорема 2.2.** Каждое ограниченное решение уравнения (2.5)  $(u(x), u'(x))$ , такое, что  $u^2(x) + (u'(x))^2 \leq H = \text{const} \forall x \in R^+$ , неограниченно приближается к множеству  $M$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $(u(x), u'(x)) \rightarrow M$  при  $x \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Введем функционал

$$V = \frac{1}{2}(u')^2 + k \int_0^u f(\tau) d\tau + \frac{1}{2}k \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta) w^2(\beta, x) d\beta.$$

В силу ограниченности решения  $(u(x), u'(x))$  и условия относительно  $k = k(x)$  находим ограниченность снизу функционала  $V$ , т. е.

$$(\exists V_0 = \text{const}) \quad (\forall (x, u, u') \in R^+, \quad \Gamma = \{(u, u') \in R^2: u^2(u')^2 \leq H\}) \\ V(x(u(x), u'(x))) \geq V_0 = \text{const}.$$

Производная  $V$  в силу уравнения (2.5) имеет оценку

$$\begin{aligned} V'(x, u, u') &= u'(x) \left( -k(x) D^\alpha u(x) - f(u(x)) + f(u(x)) u'(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} k'(x) \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta) w^2(\beta, x) d\beta \right) \\ &\quad + k(x) \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta) w(\beta, x) (-\beta w(\beta, x) + u'(x)) d\beta \\ &\leq -k(x) \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta) \beta w^2(\beta, x) d\beta \leq \\ &\leq -W(x) = -k_0 \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta) \beta w(\beta, x) d\beta \leq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Решение  $(u(x), u'(x))$  уравнения (2.5), на котором  $W = 0$ , должно удовлетворять второму равенству (2.7), из которого следует, что для этого решения  $u'(x) \equiv 0$ .

Уравнение, предельное к уравнению (2.5), является следующим

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^* D^\alpha u(x) + f(u(x)) = 0 \quad (0 < \alpha < 1), \quad (2.9)$$

где  $k^* = \text{const}$ ,  $k^* \in [k_0, k_1]$ .

Решение  $(u^*(x), u^{*'}(x))$  уравнения (2.9), для которого  $(u^*(x))' \equiv 0$ , должно также удовлетворять равенству  $f(u(x)) \equiv 0$ .

В соответствии с теоремой из [35], имеем  $(u(x), u'(x)) \rightarrow M$  при  $x \rightarrow \infty$ , т. е. получаем требуемое доказательство.

Из условий  $f(0) = 0$ ,  $f(u)u > 0 \quad \forall u \in (-H_0, H_0) \setminus \{0\}$  ( $H_0 > 0$ ) следует, что  $F(u)$  удовлетворяет условию  $F(u) \geq h(|u|)$ .

Как следствие Теоремы 2.2 имеем следующие выводы об устойчивости нулевого решения  $u = u' = 0$  уравнения (2.5).

**Теорема 2.3.** *В дополнение к условиям Теоремы 2.2 предположим, что  $f(0) = 0$ ,  $f(u)u > 0 \quad \forall u \in (-H_0, H_0) \setminus 0$  ( $H_0 > 0$ ). Тогда решение  $u = u' = 0$  уравнения (2.5) асимптотически устойчиво.*

**Доказательство.** При заданном предположении для функционала  $V$  на решениях уравнения (2.5) имеем оценку

$$V(x, u_x, u'_x) \geq \frac{1}{2} \left( (u'(x))^2 + h(|u(x)|) \right), \quad \dot{V}(x, u_x, u'_x) \leq -W(x) \leq 0.$$

В соответствии с теоремами 2.2 и из [35] получаем требуемое доказательство. При этом заметим, что при  $H_0 = \infty$  из условия  $F(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow +\infty$  ( $u \rightarrow$

$-\infty$ ) асимптотическая устойчивость решения  $u = u' = 0$  уравнения (2.5) будет глобальной.

**Теорема 2.4.** *В дополнение к условиям Теоремы 2.2 относительно уравнения (2.5) предположим также, что  $f(0) = 0$ , для некоторого значения  $H_0 > 0$  имеет место неравенство  $f(u)u < 0 \forall u \in [-H_0, 0]$  или  $u \in (0, H_0]$ . Тогда решение  $u = u' = 0$  уравнения (2.5) неустойчиво.*

**Доказательство.** Для любого малого значения  $\delta$ ,  $0 < \delta < H_0$ , выберем начальную точку  $0 = (u(0), u'(0))$  такую, что  $u'(0) = 0$ ,  $f(u(0))u(0) < 0$ .

Для значений функционала  $V$  находим

$$V(0,0,0) = 0, \quad V(0, u_0, (u_0)') = F(u(0)) = \int_0^{u(0)} f(\tau) d\tau < 0.$$

Рассмотрим модель осциллятора, описываемого нелинейным уравнением второго порядка, имеющим дробную производную Римана-Лиувилля [67] первого порядка

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k(x)D^\alpha u(x) + f(u(x)) = 0 \quad (0 < \alpha < 1), \quad (2.10)$$

где функции  $k = k(x)$  и  $f = f(u)$  определяются так же, как в уравнении (2.5),

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \int_0^x \frac{u(\beta) d\beta}{(x - \beta)^{1-\alpha}} \right)$$

есть указанная производная.

Преобразуем  $D^\alpha u(x)$  известным образом [25]

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \int_0^x \frac{u(\beta) d\beta}{(x - \beta)^{1-\alpha}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \int_0^x \frac{u(x-s) ds}{s^{1-\alpha}} \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{u(0+)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{u'(x-s) ds}{s^{1-\alpha}} \right) = \\
&= \frac{u(0+)}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u'(\beta) d\beta}{(x-\beta)^{1-\alpha}} = \\
&= \frac{u(0+)}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}} + \mathcal{D}^\alpha u(x) \tag{2.11}
\end{aligned}$$

где  $u(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} u(x)$ ,  $D^\alpha(u(x))$  есть производная Капуто, определяемая равенством (2.6).

При  $u(0+) = 0$  уравнение (2.10) сводится к уравнению (2.4). При  $u(0+) \neq 0$ ,  $\frac{u(0+)}{x^{1-\alpha}} \rightarrow 0$ , если  $x \rightarrow 0$ , предельное поведение решений уравнения (2.10) определяется предельным поведением решений уравнения (2.5).

Рассмотрим модель осциллятора, описываемого нелинейным уравнением второго порядка, имеющим дробную производную Римана-Лиувилля [67] второго порядка

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k(x) D^2 u(x) + f(u(x)) = 0, \tag{2.12}$$

где функции  $k = k(x)$  и  $f = f(u)$  определяются так же, как в уравнении (2.5),

$$D^2 u(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u(\beta) d\beta}{(x-\beta)^{1-\alpha}} \right), \quad (0 < \alpha < 1)$$

Преобразуем эту производную с учетом равенств (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) и (2.11):

$$\begin{aligned}
D^2u(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \int_0^x \frac{u(\beta)d\beta}{(x-\beta)^{1-\alpha}} \right) \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^x \frac{u'(\beta)d\beta}{(x-\beta)^{1-\alpha}} + \frac{u(0+)}{x^{1-\alpha}} \right) \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left( \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta)w(\beta, x)d\beta + \frac{u(0+)}{x^{1-\alpha}} \right) \\
&= \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta)(-\beta w(\beta, x) + u'(x))d\beta + \frac{(\alpha-1)u(0+)}{x^{2-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим предельное поведение решений, для которых начальное условие  $u(0+)$  удовлетворяет соотношению  $u(0+)/x^{2-\alpha} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Соответственно, задача о предельном поведении таких решений сводится к исследованию решений уравнения

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = k(x) \int_0^\infty \mu_\alpha(\beta)(\beta w(\beta, x) - u(x))d\beta - f(u(x)) = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w(\beta, x)}{\partial x} = -\beta w(\beta, x) + u'(x), \quad w(\beta, 0) = 0.$$

Докажем следующую теорему, аналогичную Теоремам 2.2, 2.3 и 2.4.

### Теорема 2.5.

*I. Каждое ограниченное при всех  $x \geq 0$  решение  $(u(x), u'(x))$  уравнения (2.13) неограниченно приближается при  $x \rightarrow \infty$  к множеству  $M = \{f(u(x)) = 0, u'(x) = 0\}$ .*

*II. При условии  $f(0) = 0, f(x)x > 0 \forall x \in \{0 < |x| < H, H > 0\}$  решение  $u' = u = 0$  уравнения (2.13) асимптотически устойчиво.*

*III. При ином условии  $f(0) = 0, f(x)x < 0 \forall x \in [-H_0, 0)$  и (или)  $x \in (0, H_0]$  ( $H_0 > 0$ ) решение  $u' = u = 0$  уравнения (2.13) неустойчиво.*

**Доказательство.** Выберем функционал Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}(u'(x))^2 + F(u(x)) + \frac{1}{2}k(x) \int_0^{\infty} \mu_{\alpha}(\beta) \beta w^2(\beta, x) d\beta.$$

Для производной этого функционала в силу уравнения (2.13), используя вычисления доказательства Теоремы 2.2, находим

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, u(x), u'(x)) &= \frac{1}{2}k'(x) \int_0^{\infty} \mu_{\alpha} \beta w^2(\beta, x) d\beta + k(x) \int_0^{\infty} \mu_{\alpha}(\beta) (\beta w(\beta, x) - u'(x)) u'(x) d\beta \\ &+ k(x) \int_0^{\infty} \mu_{\alpha}(\beta) \beta w(\beta, x) (-\beta w(\beta, x) + u'(x)) d\beta \\ &\leq \int_0^{\infty} \mu_{\alpha}(\beta) \left( -k(x)(u'(x))^2 + 2\beta k(x) u'(x) w(\beta, x) \right. \\ &\quad \left. - k(x) \beta^2 w^2(\beta, x) \right) d\beta = - \int_0^{\infty} k(x) \mu_{\alpha}(\beta) (u'(x) - \beta w(\beta, x))^2 d\beta \\ &\leq -W(x, u'(x)) \leq 0. \end{aligned}$$

Множество  $\{W(x, u'(x)) = 0\} = \{(x, u'(x)): u'(x) \equiv \beta w(\beta, x)\}$  согласно уравнению (2.13) может содержать лишь решения, для которых соответствующие им решения  $(u(x), u'(x))$  таковы, что  $u(x) \equiv 0, f(u(x)) \equiv 0$ . На основании работы [35] имеем первое утверждение теоремы. Из него, как при выводе Теорем 2.3 и 2.4, получаем 2-е и 3-е утверждения теоремы. Теорема доказана.

Ниже на Рисунке 2.3 представлено численное моделирование нелинейного осциллятора (2.12) на основе [66] при следующих значениях параметра  $k(x) = \text{const} = 2$  и функции  $f(u) = 0.35 \sin(u)$ .

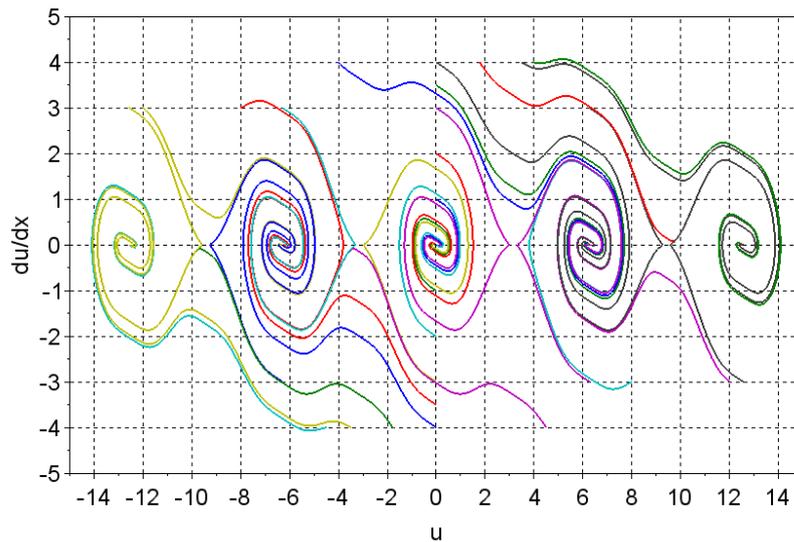


Рис. 2.3. Фазовый портрет нелинейного осциллятора

Из Рисунка 2.3 видно, что данный фазовый портрет является адекватным классическому изображению траекторий математического маятника.

Рассмотрим осциллятор, описываемый уравнением

$$u''(x) + cD^\alpha u(x) + ku(x) = a \cos(\omega x).$$

Как и для классического линейного осциллятора, из асимптотической устойчивости нулевого решения этого уравнения следует сходимость всех его решений к одному решению [100] (см. Рисунок 2.4).

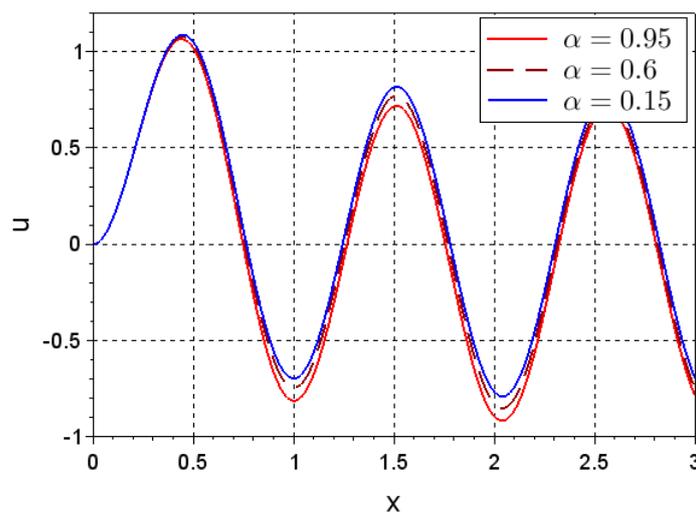


Рис. 2.4. Интегральные кривые линейного осциллятора при указанных значениях  $\alpha$ ,  $a = 30$ ,  $c = 1$ ,  $k = 2$ ,  $\omega = 6$

Таким образом, в диссертационной работе на основе применения прямого метода Ляпунова представлено решение задачи о качественном анализе нелинейного осцилляционного фрактального уравнения с вязкоупругим демпфированием. Обоснованное предельное поведение решений линейного осциллятора позволяет провести графически параметрическую идентификацию для порядка  $\alpha$  дробной производной в моделях [15], описываемых рассмотренными типами уравнений.

### 2.3. Теоремы о вещественности и простоте первых собственных чисел уравнения модели осциллятора с ВУ демпфированием

Данный раздел посвящен исследованию основных осцилляционных свойств оператора, порожденного уравнением Бегли-Торвика (2.2) и краевыми условиями Дирихле, моделирующим изменение характеристик деформации и прочности полимербетона при его нагружении [15].

**Теорема 2.6.** Пусть  $\frac{b}{m} < 1.3$ , тогда первое собственное значение проблемы

$$y''(x) + \frac{b}{m} D^\alpha y(x) + \frac{k}{m} y(x) = F(x), \quad (\alpha \in (1,2)),$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0$$

положительное и имеет кратность, равную единице.

**Доказательство.** Изучим методами теории возмущений, оператор

$$T\left(\frac{b}{m}\right) = T + \frac{b}{m} T_1, \text{ здесь}$$

$$Ty = \begin{cases} -y'', \\ y(0) = 0, y(1) = 0, \end{cases}$$

а  $T_1 = D_{0x}^\alpha$ . Известно, что все собственные значения  $T$  простые, поэтому им соответствующие значения возмущённого оператора  $\lambda_m\left(\frac{b}{m}\right)$  и им соответствующие собственные функции  $\varphi_m\left(\frac{b}{m}\right)$  аналитичны [33]

$$\lambda_m\left(\frac{b}{m}\right) = \lambda_m^{(0)} + \frac{b}{m} \lambda_m^{(1)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \lambda_m^{(2)} + \dots + \left(\frac{b}{m}\right)^n \lambda_m^{(n)} + \dots \quad (2.14)$$

$$\varphi_m\left(\frac{b}{m}\right) = \varphi_m^{(0)} + \frac{b}{m} \varphi_m^{(1)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \varphi_m^{(2)} + \dots + \left(\frac{b}{m}\right)^n \varphi_m^{(n)} + \dots \quad (2.15)$$

Воспользуемся известными соотношениями для оценки соответствующего радиуса сходимости  $r_0$  рядов (2.14) – (2.15)

$$r_0 = \min_{\zeta \in \Gamma} (a \|R(\zeta, T)\| + b \|TR(\zeta, T)\| + c)^{-1}. \quad (2.16)$$

В соотношении (2.16) в качестве  $\Gamma$  берем окружность  $\left|\zeta - \frac{1}{\pi^2}\right| = \frac{\rho}{2}$ , где  $\rho$  – расстояние от  $\frac{1}{\pi^2}$  до остальных собственных значений  $T$ , а величины  $a, b, c$  будут найдены в дальнейшем.

Очевидно, что  $c = 0$  [16]. Теперь вычислим величины  $a, b, c$  с учетом соотношения

$$\|I^\alpha \varphi\|_p \leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \|\varphi\|_p, \quad (2.17)$$

где  $I^\alpha$  – операция дробного интегро-дифференцирования Капуто порядка  $\alpha$ .

Положим, что  $(a, b)$  – открытый интервал,  $X = C[a, b]$  или  $L^p(a, b)$ .  $T$  и  $A$  – максимальные операторы, определённые равенствами  $Ty = -y''$  и  $Ay = y'$ . Было доказано [16], что если  $A - T$  - ограничен и его  $T$ -граница равна нулю, то справедливо соотношение [16]

$$\|y'\|_p \leq \frac{b-a}{n-1} \|y''\|_p + \frac{2n(n+1)}{(n-1)(b-a)} \|y\|_p, \quad (2.18)$$

где  $n \geq 2$ .

Можно показать, что из (2.17) и (2.18) вытекает соотношение

$$\|D_x^\alpha y\|_p \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|y''\|_p \quad (2.19)$$

(в виду того, что,  $n$  – любое неотрицательное число, то  $T$  – границу  $T_1$  можно сделать каким угодно маленьким числом). Из соотношения (2.16) следует, что за  $a$  следует принять  $\frac{2m(m+1)}{m-1}$ , точно так же  $b$  можно заменить как  $\frac{1}{m-1}$ .

В выражении (2.19) за  $\Gamma$  можно взять окружность  $|\zeta - (m\pi)^2| = \frac{\rho}{2}$ , здесь  $\rho$  – расстояние от  $(m\pi)^2$  до всех оставшихся собственных значения  $T$ . Тогда имеем

$$r_0 \leq \frac{1}{\frac{2m(m+1)}{(m-1)\left(m-\frac{1}{2}\right)} + 1 + \frac{(m+1)^2}{(m-1)\left(m-\frac{1}{2}\right)}}.$$

Конечно, тут имеется в виду, что

$$R(\zeta) = \frac{1}{\text{dist}(\zeta; \sum(T))},$$

$$TR(\zeta) = I + \zeta R(\zeta).$$

И наконец покажем, что все собственные значения проблемы (2.2а) – (2.2б) положительны. Вернемся к выражениям (2.14), (2.15)

$$\lambda_1\left(\frac{b}{m}\right) = \lambda_1^{(0)} + \frac{b}{m} \lambda_1^{(1)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \lambda_1^{(2)} + \dots + \left(\frac{b}{m}\right)^n \lambda_1^{(n)} + \dots \quad (2.20)$$

$$\varphi_1\left(\frac{b}{m}\right) = \varphi_1^{(0)} + \frac{b}{m} \varphi_1^{(1)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \varphi_1^{(2)} + \dots + \left(\frac{b}{m}\right)^n \varphi_1^{(n)} + \dots \quad (2.21)$$

Для  $\lambda_1^{(n)}$  и  $\varphi_1^{(n)}$  имеются формулы [33]

$$\lambda_1^{(n)} = \sum_{k=1}^n (\tilde{A}_k \varphi_1^{(n-k)}, \varphi_1^{(0)}), \quad \varphi_1^{(n)} = \sum_{k=1}^n R(\lambda_1^{(k)} - \tilde{A}_k) \varphi_1^{(n-k)}, \quad (2.22)$$

где  $R$  – приведенная резольвента  $T$ , которая имеет вид

$$S(x, y) = \left[ -y \cos \sqrt{\lambda_1^{(0)}} y \sin \sqrt{\lambda_1^{(0)}} x + (1-x) \sin \sqrt{\lambda_1^{(0)}} y \cos \sqrt{\lambda_1^{(0)}} x + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda_1^{(0)}} y \sin \sqrt{\lambda_1^{(0)}} x \right], \quad y \leq x,$$

Очевидно, что  $R$  переводит  $H_0$  ( $H_0$  – ортогональное дополнение функции  $\sin \sqrt{\lambda_1^{(0)}} x$ ) в себя и аннулирует  $\sin \sqrt{\lambda_1^{(0)}} x$ , а  $\tilde{A}_1 = T_1$ ,  $\tilde{A}_k = 0$  при  $k = 2, 3, \dots$ . Таким образом из (2.22) имеем,

$$\lambda_1^{(1)} = (T_1 \phi_1^{(0)}, \phi_1^{(0)}).$$

В силу того, что  $\text{Im} \lambda_1^{(1)} = 0$ , имеем  $\phi_1^{(1)} = R(\lambda_1^{(1)} - B_1) \phi_1^{(0)}$ . В силу того, что ядра  $R$  и  $T_1$  не являются комплексными, имеем  $\text{Im} \lambda_1^{(1)} = 0$ . Итак, последовательно можно доказать, что  $\text{Im} \lambda_1^{(n)} = \text{Im} \phi_1^{(n)} = 0$  для всех  $n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )

В работе [71] была приведена функции влияния для проблемы

$$y'' + \frac{b}{m} D_{0x}^\alpha y = \frac{k}{m} y, \quad (2.23)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (2.23a)$$

при  $0 < \alpha < 1$ .

Вывод, приведенный в этой работе, показывает, что точно так же функция влияния может быть выведена и когда  $1 < \alpha < 2$ . Другим способом, в 2000 году, когда  $1 < \alpha < 2$ , функция влияния проблемы (2.23) -(2.23a) выведена в [1, 2].

Далее введем следующее обозначение:  $\Omega = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}$ . Известно, что про-

блеме (2.23) -(2.23a) сопутствует соотношение

$$y(x) + \frac{b}{m} \cdot \Omega \left[ - \int_0^x \frac{y(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}} + \int_0^1 x \cdot \frac{y(\tau) d\tau}{(1-\tau)^{\alpha-1}} \right] = \lambda \int_0^1 G(x, \tau) y(\tau) d\tau.$$

Поэтому

$$y(x) = \frac{\lambda}{J + \frac{b}{m}K} \cdot \int_0^1 G(x, \tau) y(\tau) d\tau;$$

$$Ky = \Omega \cdot \left[ \int_0^x \frac{y(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}} - \int_0^1 \frac{xy(\tau) d\tau}{(1-\tau)^{\alpha-1}} \right].$$

Ясно,

$$\begin{aligned} K^2 y &= K(Ky) = \Omega^2 \cdot \left[ \int_0^x \frac{(Ky) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}} - \int_0^1 x \cdot \frac{(Ky) d\tau}{(1-\tau)^{\alpha-1}} \right] = \\ &= \Omega^2 \cdot \left[ \int_0^x \frac{1}{(x-\tau)^{\alpha-1}} \left\{ \int_0^\tau \frac{y(\xi) d\xi}{(\tau-\xi)^{\alpha-1}} \right\} d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{x}{(1-\tau)^{\alpha-1}} \int_0^\tau \frac{y(\xi) d\xi}{(\tau-\xi)^{\alpha-1}} d\tau + \int_0^1 \frac{x}{(1-\tau)^{\alpha-1}} \int_0^1 \frac{y(\xi) d\xi}{\tau(1-\xi)^{\alpha-1}} d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\rho^{-1})} \int_0^x \frac{y(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-(2/\rho)}} - \\ &\quad - \int_0^1 \left[ (x^{1/\rho} - 1) \frac{x(1-\xi)^{(1/\rho)-1}}{\Gamma(\rho^{-1})\Gamma(2+\rho^{-1})} + \frac{x(1-\xi)^{(2/\rho)-1}}{\Gamma(\rho^{-1} + \rho^{-1})} \right] y(\tau) d\xi, \end{aligned}$$

здесь  $\rho^{-1} = 2 - \alpha$ .

$$\begin{aligned} K^3 y &= K(K^2 y) = \Omega^2 \cdot \left[ \int_0^x \frac{(K^2 y) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}} - \int_0^1 x \cdot \frac{(K^2 y) d\tau}{(1-\tau)^{\alpha-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})\Gamma(2\rho^{-1})} \int_0^x (x-\tau)^{(1/\rho)-1} \left\{ \int_0^\tau \frac{y(\xi) d\xi}{(\tau-\xi)^{1-(2/\rho)}} \right\} d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} \int_0^1 x \frac{K^2 y d\tau}{(1-\tau)^{1-(1/\rho)}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})\Gamma(2\rho^{-1})} \int_0^x y(\xi) \left[ \int_\xi^x \frac{(\tau-\xi)^{(2/\rho)-1} d\tau}{(x-\tau)^{1-(1/\rho)}} \right] d\xi - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} \int_0^1 \frac{K^2 y d\tau}{x(1-\tau)^{1-(1/\rho)}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(3\rho^{-1})} \int_0^x \frac{y(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-(3/\rho)}} - \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} \int_0^1 x \cdot \frac{K^2 y d\tau}{(1-\tau)^{1-(1/\rho)}}.$$

Без труда устанавливается соотношение

$$\begin{aligned} \frac{y}{I + \frac{b}{m}K} &= \left( I + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b}{m} \right)^n K^n \right) y = \int_0^x \frac{E_{\rho} \left[ \frac{b}{m} (x-\tau)^{(1/\rho)}; \rho^{-1} \right]}{(x-\tau)^{1-(1/\rho)}} y(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^1 \sum \sum c_{ij} (1-\tau)^{\gamma_j} x^{\nu_i} d\tau. \end{aligned}$$

Последнее соотношение можно использовать для доказательства наличия основных осцилляционных свойств проблемы (2.23) - (2.23а). Как было сказано ранее, когда  $1 < \alpha < 2$ , функция влияния  $G_2(x, \tau)$  приведена в [67].

Функция  $G_2(x, \tau)$  выписывается следующим образом

$$\begin{aligned} G_2(x, \tau) &= G_1(x, \tau) - \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}} \left( \frac{b}{m}, 2 \right)_{\tau}} \int_{\tau}^1 E_{\rho} \left[ \frac{b}{m} (\eta - \tau) \right]^{\beta} d\eta \cdot \\ &\cdot \int_0^1 G(x, t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt, \end{aligned}$$

здесь

$$G_1(x, \tau) = \begin{cases} (1-x) \int_{\tau}^x E_{\beta} \frac{b}{m} t, \\ -x - \int_x^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t-\tau)^{\beta} \right] dt, & x \geq \tau. \\ -x \int_{\tau}^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t-\tau)^{\beta} \right] dt. & x \leq \tau \end{cases}$$

С помощью этой функции, путем не сложных преобразований, можно установить следующее, очень важное для приложений, утверждений (которое для достаточно маленьких значений  $\frac{b}{m}$  впервые было установлено в [32]).

**Теорема 2.7.** Пусть  $\frac{b}{m} \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ , тогда первое собственное значение задачи (2.2а)-(2.2б) является положительным, имеющим кратность, равную единице и собственная функция в интервале  $I = \{0 < x < 1\}$  не обращается в нуль.

В самом деле, из [32] следует, что проблеме (2.2а) – (2.2б) сопутствует соотношение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G_2(x, \tau) y(\tau) d\tau, \quad (2.24)$$

Здесь

$$G_2(x, \tau) = G_1(x, \tau) - \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_{\tau}^1 E_{\rho}\left[\frac{b}{m}(\eta - \tau)\right]^{\beta} d\eta \times \\ \times \int_0^1 G(x, t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta}\left[\frac{b}{m}t^{\beta}\right] dt, \quad (2.25)$$

$$G_1(x, \tau) = \begin{cases} (1-x) \int_{\tau}^x E_{\beta}[\varepsilon(t - \tau)] dt, \\ -x - \int_x^1 E_{\beta}\left[\frac{b}{m}(t - \tau)^{\beta}\right] dt, & x \geq \tau, \\ -x \int_{\tau}^1 E_{\beta}\left[\frac{b}{m}(t - \tau)^{\beta}\right] dt, & x \leq \tau \end{cases} \quad (2.26)$$

$$a \ E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\Gamma(\mu + \kappa\rho^{-1})} \quad \text{и} \quad E_{\rho}[z] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\Gamma(1 + \kappa\rho^{-1})} \quad [89].$$

Установим, что  $G_2[x, r]$  положительна. Чтобы это установить, нам нужны будут оценки для

$$E_{\beta}\left[\frac{b}{m}(t - \tau)^{\beta}\right] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{b}{m}(t - \tau)^{\beta}\right)^{\kappa}}{\Gamma(1 + \kappa\beta^{-1})}.$$

Ясно, что

$$1 < \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{b}{m}(t-\tau)\right)^{\kappa}}{\Gamma(1+\kappa\beta^{-1})} \leq \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{b}{m}\right)^{\kappa}.$$

Из чего следует, что если  $\frac{b}{m} < 1/3$ , то  $1 < E_{\beta} \left[ \frac{b}{m}(t-\tau)^{\beta} \right] < 3/2$ .

Так как,

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-\alpha}} \left[ 1 + \frac{\frac{b}{m} \xi^{\beta}}{\Gamma(1+\beta^{-1})} + \frac{\left(\frac{b}{m}\right)^2 \xi^{2\beta}}{\Gamma(1+2\beta^{-1})} + \dots \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \frac{\Gamma(1)\beta}{\Gamma(\beta^{-1}+1)} x^{\beta} + \frac{b}{m} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)2\beta}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)} x^{2\beta} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)} x^{3\beta} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

то

$$\int_0^1 G(x,t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt = \int_0^x t(x-1) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt + \int_x^1 x(t-1) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt.$$

Преобразуем следующий интеграл

$$\int_0^x t(x-1) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt.$$

Легко увидеть, что выполняется равенство

$$\int_0^x t(x-1) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt = x \int_0^x t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt - \int_0^x t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt.$$

Таким образом, если имеет место неравенство  $x \geq t$ , то получим следующее соотношение

$$\begin{aligned}
G_2(x, \tau) &= G_1(x, \tau) - \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_{\tau}^1 E_{\rho} \left[ \frac{b}{m} (\eta - \tau) \right]^{\beta} d\eta \times \int_0^1 G(x, t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt = \\
&= (1-x) \int_{\tau}^x E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau) \right] dt - x - \int_x^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau)^{\beta} \right] dt - \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_{\tau}^1 E_{\rho} \left[ \frac{b}{m} (\eta - \tau) \right]^{\beta} d\eta \times \\
&\quad \times \int_0^1 G(x, t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt.
\end{aligned}$$

Аналогично найдем оценку для соотношения

$$-(1-x) \int_{\tau}^x E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau) \right] dt + x + \int_x^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau)^{\beta} \right] dt.$$

Заметим, что при выполнении условия  $0 < \frac{b}{m} < 1/3$  имеет место неравен-

СТВО

$$x + \int_x^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau)^{\beta} \right] dt > 1.$$

Тогда получим следующую оценку:

$$(1-x) \int_{\tau}^x E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau) \right] dt < 3/4.$$

Используя полученные выше оценки, найдем, что выполняется неравенство

$$-(1-x) \int_{\tau}^x E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau) \right] dt + x + \int_x^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau)^{\beta} \right] dt > 1/3.$$

Полученные выше соотношения позволяют определить знакоположительность функции влияния для случая, когда  $x \geq t$ .

При выполнении неравенства  $x \leq \tau$ , получим

$$\begin{aligned}
G_2(x, \tau) &= G_1(x, \tau) - \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_{\tau}^1 E_{\rho} \left[ \frac{b}{m}(\eta - \tau) \right]^{\beta} d\eta \times \\
&\times \int_0^1 G(x, t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt = -x \int_{\tau}^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau)^{\beta} \right] dt - \\
&- \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_{\tau}^1 E_{\rho} \left[ \frac{b}{m} (\eta - \tau) \right]^{\beta} d\eta \times \int_0^1 G(x, t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt = \\
&= -x \int_{\tau}^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau)^{\beta} \right] dt \left[ 1 + \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_0^1 G(x, t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt \right] = \\
&= -x \int_{\tau}^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau)^{\beta} \right] dt \times \left[ 1 + \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_0^x t(x-1) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ ct^{\beta} \right] dt + \right. \\
&+ \left. \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_0^x x(t-1) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt \right] = -x \int_{\tau}^1 E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} (t - \tau)^{\beta} \right] dt \times \\
&\times \left[ 1 + \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_0^x t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt - \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_0^x t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt \right] - \\
&- x \int_{\tau}^1 E_{\beta} \left[ \varepsilon (t - \tau)^{\beta} \right] dt \left[ \frac{\varepsilon}{E_{\frac{1}{\beta}}(\varepsilon, 2)} \int_x^1 t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \varepsilon t^{\beta} \right] dt - \frac{\varepsilon}{E_{\frac{1}{\beta}}(\varepsilon, 2)} \int_0^x D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \varepsilon t^{\beta} \right] dt \right].
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$I_1 = \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_0^x t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt, \quad I_2 = \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_0^x D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta} \left[ \frac{b}{m} t^{\beta} \right] dt. \quad (2.28)$$

Используя (2.28), получим следующее соотношение

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\frac{b}{m}}{\mathbb{E}_{\frac{1}{\beta}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_x} \int_0^x t D_{0t}^{\alpha-1} \mathbb{E}_\beta \left[ \frac{b}{m} t^\beta \right] dt} = \frac{\frac{b}{m}}{\Gamma(2-\alpha) \mathbb{E}_{\frac{1}{\beta}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_x} \times} \\
&\times \int_0^x t \left[ \frac{\Gamma(1)\beta t^\beta}{\Gamma(\beta^{-1}+1)} + \frac{b}{m} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)2\beta t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)} + \dots \right] dt = \\
&= \frac{\frac{b}{m}}{\Gamma(2-\alpha) \mathbb{E}_{\frac{1}{\beta}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_x} \left[ \frac{\Gamma(1)\beta x^{\beta+1}}{\Gamma(\beta^{-1}+1)(\beta+1)} + \frac{b}{m} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)2\beta x^{2\beta+1}}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)(2\beta+1)} + \right. \\
&\left. + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)x^{3\beta+1}}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)(3\beta+1)} + \dots \right]} \times \\
&\times \left[ \frac{\Gamma(1)x^\beta}{\Gamma(\beta^{-1}+2)} + \frac{b}{m} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)(2\beta)x^{2\beta}}{\Gamma(2\beta^{-1}+2)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)x^{3\beta}}{\Gamma(3\beta^{-1}+2)} + \dots \right]
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\frac{b}{m}}{\mathbb{E}_{\frac{1}{\beta}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_x} \int_0^x D_{0t}^{\alpha-1} \mathbb{E}_\beta \left[ \frac{b}{m} t^\beta \right] dt} = \frac{\frac{b}{m}}{\Gamma(2-\alpha) \mathbb{E}_{\frac{1}{\beta}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_x} \times} \\
&\times \int_x^1 \left[ \frac{\Gamma(1)\beta t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta^{-1}+1)} + \frac{b}{m} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)2\beta t^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)t^{3\beta-1}}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)} + \dots \right] dt = \\
&= \frac{\frac{b}{m}}{\Gamma(2-\alpha) \mathbb{E}_{\frac{1}{\beta}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_x} \times} \\
&\times \left[ \frac{\Gamma(1)t^\beta}{\Gamma(\beta^{-1}+1)\beta} + \frac{b}{m} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2\beta+1)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)} + \dots \right] = \\
&= \frac{\frac{b}{m}}{\Gamma(2-\alpha) \mathbb{E}_{\frac{1}{\beta}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_x} \left( \frac{\Gamma(1)}{\beta\Gamma(\beta^{-1}+1)} + \frac{b}{m} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)} + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2\beta+1)}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)} + \dots \right)}
\end{aligned}$$

Из установленных неравенств вытекает

$$\left[ 1 + \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_0^x t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta}\left[\frac{b}{m} t^{\beta}\right] dt - \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_x} \int_0^x t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta}\left[\frac{b}{m} t^{\beta}\right] dt + \right. \\ \left. + \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)} \int_x^1 t D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta}\left[\frac{b}{m} t^{\beta}\right] dt - \frac{\frac{b}{m}}{E_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{b}{m}, 2\right)_0} \int_0^x D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta}\left[\frac{b}{m} t^{\beta}\right] dt \right] > 0,$$

что и показывает достоверность Теоремы 2.7.

**Замечание 2.1.** Методика вывода функции влияния проблемы (2.2а) – (2.2б), когда  $0 < \alpha < 1$ , впервые была приведена в [2].

#### 2.4. Численные методы для математического моделирования движения осциллятора с ВУ демпфированием

**Решение на основе разностного метода.** Рассмотрим следующую задачу с граничными условиями:

$$my'' + bD_{0x}^{\alpha}y + ky = 0, \quad (2.29)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (2.29 \text{ а})$$

здесь производная Капуто дробного порядка обозначена через  $D_{0x}^{\alpha}y$ ,  $1 < \alpha < 2$ .

Производную дробного порядка (2.29) запишем в виде

$$D_{0x}^{\alpha}y = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y''(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt. \quad (2.30)$$

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на  $N$  равных частей. Тогда  $x_i = ih$ , где  $h = 1/N$  – шаг равномерной сетки  $\sigma_N = \{x_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Через  $y_k$  обозначим значение  $y(x_k)$  непрерывной функции  $\omega(x)$  в узле  $x_k$  сетки  $\sigma_N$ . Функцию целочисленного аргумента  $\omega_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) можно рассматривать как сеточную функцию.

Производные первого и второго порядка аппроксимируем соответствующими им разностными аналогами

$$y'(x) = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (2.31)$$

$$y''(x) = \frac{\Delta^2 y_{k-1}}{h^2} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]. \quad (2.32)$$

Для (2.30), учитывая (2.31), (2.32) и (2.29 а), можно записать:

$$\begin{aligned} D_{0x_i}^\alpha y &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y''(t)}{(x-t)^\alpha} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{\Delta^2 y_{k-1}}{h^2} (x_i - t)^{-\alpha} dt \right) = \\ &= \frac{1}{h^2 \Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^i \Delta y_{k-1}^2 (x_{i-k+1}^{1-\alpha} - x_{i-k}^{1-\alpha}) = \\ &= \frac{h^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^i (\Delta y_{k-1}^2 \Delta S_{i-k}^\alpha), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где  $\Delta S_{i-k}^\alpha = x_{i-k+1}^\alpha - x_{i-k}^\alpha$  – степенная сеточная функция.

Учитывая замену  $a_{ik} = \frac{h^{-1-\alpha} \Delta S_{i-k}^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}$ , получим  $D_{0x_i}^\alpha y = \sum_{k=1}^i \Delta y_{k-1}^2 \cdot a_{ik}$

Отсюда следует, что разностный аналог задачи (2.29) -(2.29 а) может быть представлен в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{b}{m} \cdot \sum_{k=1}^i (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) a_{ik} + \frac{k}{m} \cdot y_i = f_i, & i=1, \dots, N-1 \\ y_0 = y(0) = 0, \\ y_N = y(1) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$my'' + bD_{ox}^{\alpha+1} y + ky = f(x), \quad (2.34)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \gamma. \quad (2.34 \text{ а})$$

Для данной задачи разностная схема будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{b}{m} \cdot \sum_{k=1}^i (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) a_{ik} + \frac{k}{m} \cdot y_i = f_i, & i = 1, \dots, N-1 \\ y_0 = y(0) = 0, \\ y_1 = h\gamma \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + (y_0 - 2y_1 + y_2) a_{11} + q_1 \cdot y_1 = f_1, \\ \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} + (y_0 - 2y_1 + y_2) a_{21} + (y_1 - 2y_2 + y_3) a_{22} + q_2 \cdot y_2 = f_2, \\ \frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{h^2} + (y_0 - 2y_1 + y_2) a_{31} + (y_1 - 2y_2 + y_3) a_{32} + \\ + (y_2 - 2y_3 + y_4) a_{33} + q_3 \cdot y_3 = f_3, \\ \dots \end{cases}$$

**Численное решение с помощью квадратичного алгоритма.** В [33] рассмотрена следующая задача Коши: в классе  $C^2(0,1) \cap C[0,1]$  найти решение уравнения

$$u'' + \alpha D_{0x}^\alpha u + \lambda u = 0, \quad (2.35)$$

удовлетворяющего условиям

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Здесь порядок дробной производной строго меньше единицы. Для ее решения помножим это уравнение на  $(x-t)$  и проинтегрируем его почленно по  $t$  от 0 до  $x$ :

$$\int_0^x [u''(x-t) + \alpha D_{0x}^\alpha u(x-t) + \lambda u(x-t)] dt = 0.$$

Первое слагаемое под знаком интеграла может быть вычислено путем интегрирования по частям и подстановкой в него начальных условий:

$$\int_0^x u''(t)(x-t) dt = \int_0^x (x-t) du'(t) = (x-t)u'(t) \Big|_0^x + \int_0^x u'(t) dt = -x + u(x).$$

Второе слагаемое может быть преобразовано следующим образом:

$$\int_0^x \alpha(x-t) D_{0x}^\alpha u(t) dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t) \left( \int_0^t \frac{u(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi \right)' dt.$$

$$\int_0^x (x-t) d \int_0^t \frac{u(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi = (x-t) \int_0^t \frac{u(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi + \int_0^x \left\{ \int_0^t \frac{u(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi \right\} dt.$$

В силу начальных условий первое слагаемое обращается в нуль, а во втором слагаемом можно поменять порядок интегрирования:

$$\int_0^x \left\{ \int_0^t \frac{u(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi \right\} dt = \int_0^x \left\{ \int_{\xi}^x \frac{u(\xi)}{(1-\xi)^\alpha} dt \right\} d\xi =$$

$$= \int_0^x u(\xi) \left\{ \int_{\xi}^x (t-\xi)^{-\alpha} dt \right\} d\xi = \int_0^x \frac{u(\xi)(x-\xi)^{1-\alpha}}{1-\alpha} d\xi =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x u(\xi)(x-\xi)^{1-\alpha} d\xi.$$

Таким образом, уравнение (2.35) равносильно уравнению Вольтерра [33]

$$u(x) = - \int_0^x \left[ \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \lambda(x-t) \right] dt - x. \quad (2.35a)$$

Обозначая

$$K_1(x,t) = \begin{cases} \frac{\alpha(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \lambda(x-t), & 0 \leq t < x < 1, \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

Получим, как в [33], последовательность ядер рекуррентных соотношений

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K_n(x,t_1) K_1(t_1,t) dt_1.$$

По индукции находим выражения для ядер и резольвенты

$$K_n(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k \alpha^k \lambda^{n-k}}{\Gamma(2n-k\alpha)} (x-t)^{2n-1-k\alpha}.$$

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m \alpha^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (x - t)^{2n-1-m\alpha} \right]$$

Отсюда получаем решение уравнения (2.35) или (2.35a)

$$u(x, \lambda) = x - \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m \alpha^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (x - t)^{2n-1-m\alpha} \right] t dt,$$

$$u(x, \lambda) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m \alpha^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (x - t)^{2n-1-m\alpha} \right].$$

При  $x = 1$ :

$$u(1, \lambda) = \omega(\lambda) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m \alpha^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (1 - t)^{2n-1-m\alpha} \right].$$

Значит, собственные функции задачи имеют вид

$$\chi_i(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m \alpha^m \lambda_i^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} x^{2n-1-m\alpha} \right],$$

где  $\lambda_i$  – корни функции  $\omega(\lambda)$ .

В случае, когда порядок дробной производной больше единицы, проведение подобных вычислений сопряжено со значительными аналитическими трудностями. Поэтому была высказана гипотеза: решение поставленной задачи Коши в случае, когда порядок дробной производной больше единицы имеет такой же вид

$$u(x, \lambda) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m \alpha^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (x - t)^{2n-1-m\alpha} \right]$$

как и в случае, когда дробная производная имеет порядок меньше 1 [25]. Решение продолжимо по параметру  $\alpha$  на отрезок  $[1, 2]$ . Проверка этой гипотезы проводится сравнением соответствующих графиков для уравнения (2.36).

**Решение задачи Коши для уравнения модели осциллятора с ВУ демпфированием на основе преобразования Лапласа.** Преобразованием Лапласа называется такое интегральное преобразование [12, 50], которое связывает функцию  $F(p)$ , являющуюся функцией комплексного переменного (образ или изображение) с функцией  $f(t)$ , которая является функцией действительного переменного

(оригинал). Суть этого подхода состоит в том, что любую функцию времени  $f(t)$  отображается в виде образа  $F(p)$ , т. е. каждой функции ставится в соответствие некоторый образ, который от времени не зависит.

Преобразованием Лапласа от функции  $f(t)$  (оригинал) называется функция:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Здесь функция  $f(t)$  называется оригиналом преобразования Лапласа, а функция  $F(p)$  – изображением преобразования Лапласа.

Заметим, что между функциями  $f(t)$  и  $F(p)$  имеется взаимно-однозначное соответствие, т. е. если дана функция  $f(t)$ , то всегда можно определить  $F(p)$ , и если дана функция  $F(p)$ , то всегда можно найти  $f(t)$ .

Используя преобразование Лапласа, можно решить множество задач в различных областях математики, физики, радиотехники, экономики и т. д. Часто для того, чтобы найти решение некоторой задачи, проводят преобразование Лапласа для заданного уравнения или искомой функции. Например, задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами решается преобразованием Лапласа, также можно решать и интегральные уравнения и т. д.

Решим уравнение (2.29) с использованием преобразования Лапласа. Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$y'' + D_{\alpha}^{\alpha} y = \lambda y, \quad (2.36)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (2.36 \text{ а})$$

Здесь параметр  $\alpha$  есть любое число из интервала  $(0; 1)$ .

**Теорема 2.8.** *Собственное значение задачи (2.36) (2.36 а) равно  $\lambda$ , если и только если  $\lambda$  есть нуль функции [3]*

$$N(\lambda) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^s \frac{ds}{s^2 + s^{\alpha} + \lambda}. \quad (2.37)$$

**Доказательство.** Проинтегрируем уравнение (2.36) с учетом граничных условий дважды от нуля до единицы. Тогда, пользуясь формулой перестановки Дирихле и свойствами Гамма-функции Эйлера, получим,

$$y(x) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\alpha (x-\xi)^{1-\alpha} y(\xi) d\xi - \lambda \int_0^x dt \int_0^t y(\xi) d\xi = y'(0)x. \quad (2.38)$$

Пусть  $Y(x)$  изображение функции  $y(x)$ , т. е.  $y(x) \stackrel{\cdot}{=} Y(s)$ .

Находим для изображения свертки имеем

$$\int_0^\alpha (x-\xi)^{1-\alpha} u(\xi) d\xi \stackrel{\cdot}{=} \Gamma(2-\alpha) \cdot \frac{Y(s)}{s^{2-\alpha}}.$$

Изображение функции  $\int_0^x dt \int_0^t y(\xi) d\xi$  равно  $\frac{Y(s)}{s^2}$ .

Следовательно, уравнение для изображения имеет вид

$$Y(s) \left( 1 + \frac{1}{s^{2-\alpha}} + \frac{\lambda}{s^2} \right) = y'(0) \left( \frac{1}{s^2} \right).$$

Отсюда имеем, что  $Y(s) = \frac{y'(0)}{s^2 + s^\alpha + \lambda}$ .

Пользуясь обратным преобразованием, найдем

$$y(x) = \frac{y'(0)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^s ds}{s^2 + s^\alpha + \lambda}. \quad (2.39)$$

Из (2.39) получаем, что  $\lambda$  представляет собой собственное значение для (2.36) – (2.36 а) если и только если  $\lambda$  есть нуль функции [3]

$$N(\lambda) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^s ds}{s^2 + s^\alpha + \lambda}, \quad \cdot$$

Заметим, что под функцией комплексного переменного  $\frac{1}{s^2 + s^\alpha + \lambda}$  понимается та ветвь этой многозначной функции, которая на вещественной положительной оси плоскости принимает вещественные значения.

Численное моделирование решения (2.39) в среде Matchad 14 подтвердили представленную выше гипотезу.

Численно решим неоднородную задачу для моделирования колебаний полимербетона. Соответствующая неоднородная задача ставится следующим образом

$$u''(x) + cD^\alpha u(x) + \lambda u(x) = f(x),$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1,$$

где  $c$ ,  $\lambda$  и  $\alpha$  – параметры системы, причем  $1 < \alpha < 2$ . Функция  $f(x)$  представляет собой воздействие внешней силы.

Как и ранее, проинтегрируем обе части этого уравнения от 0 до  $x$  и преобразуем левую часть.

$$u''(x) + cD^\alpha u(x) + \lambda u(x) = f(x)$$

$$\int_0^x u''(t)dt + c \int_0^x D^\alpha u(t)dt + \lambda \int_0^x u(t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

$$u'(x) + \frac{c}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \right] + \lambda \int_0^x u(t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

Проинтегрируем полученное выражение еще раз от 0 до  $x$ :

$$u(x) + \frac{c}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} u(t)dt + \lambda \int_0^x \int_0^t u(\tau)d\tau dt = \int_0^x \int_0^t f(\tau)d\tau dt$$

Обозначим правую часть  $\int_0^x \int_0^t f(\tau)d\tau dt = g(x)$

Чтобы решить последнее уравнение воспользуемся преобразованием Лапласа.

Обозначим изображение по Лапласу функции  $u(x)$  через  $U(s)$ , иными словами, имеет место равенство

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t)dt.$$

Предположим, что решение уравнения принадлежит классу функций, для которого имеется сходимость интеграла Лапласа. Используя свойства преобразования Лапласа (в частности, формулу для свертки двух функций), получим

$$U(s) - \frac{u_1}{s^2} - \frac{u_0}{s} + cU(s)s^{\alpha-2} + \lambda \frac{U(s)}{s^2} = G(s),$$

где  $G(s)$  – образ функции  $g(x)$ . Тогда изображение по Лапласу имеет следующее выражение

$$U(s) = \frac{s^2 G(s) + u_0 s + u_1}{s^2 + c s^\alpha + \lambda}.$$

Отсюда получим решение исходного уравнения на основе обратного преобразования Лапласа

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} U(s) ds.$$

В следующем разделе представлены результаты численного моделирования решений уравнения (2.40) на основе этой формулы в среде MathCad14.

## **2.5. Сравнение результатов решений краевой задачи для модели осциллятора с ВУ демпфированием, полученных при использовании метода Лапласа и численными методами**

Результаты методики численного моделирования решений дробного осциллятора представлены на примере уравнения

$$y''(x) + \mu D^\alpha y(x) + y(x) = \sin(\Omega x),$$

где  $D^\alpha y(x)$  есть дробная производная порядка  $\alpha$  для значений

$$(\alpha, \mu) = (5/4; 0.94), \quad (\alpha, \mu) = (3/2; 3.68), \quad (\alpha, \mu) = (7/4; 1.03),$$

$$\Omega = 1, 2, 0.5.$$

Графики, полученные разными методами, практически совпадают. Ниже на Рисунках 2.5–2.13 приведены результаты численного моделирования, полученные методом Лапласа. Представлены соответственно графики свободных колебаний,

колебаний под действием периодической нагрузки, вынужденных колебаний дробного осциллятора.

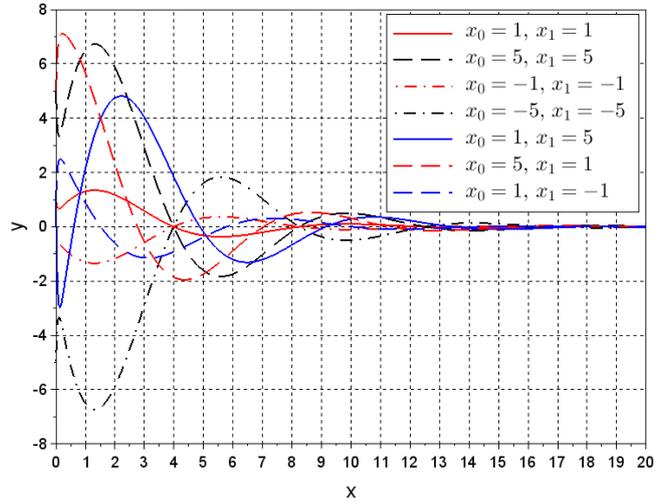


Рис. 2.5. Результаты моделирования при  $(\alpha, \mu) = (5/4; 0.94)$  и различных начальных условиях

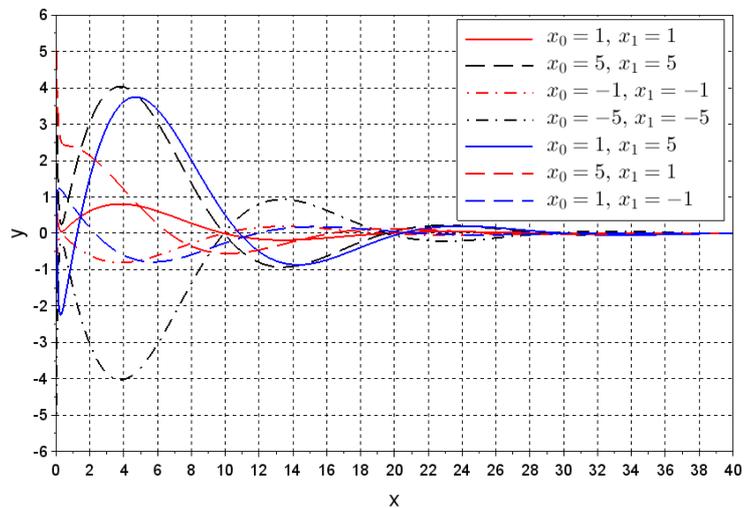


Рис. 2.6. Результаты моделирования при  $(\alpha, \mu) = (3/2; 3.68)$  и различных начальных условиях

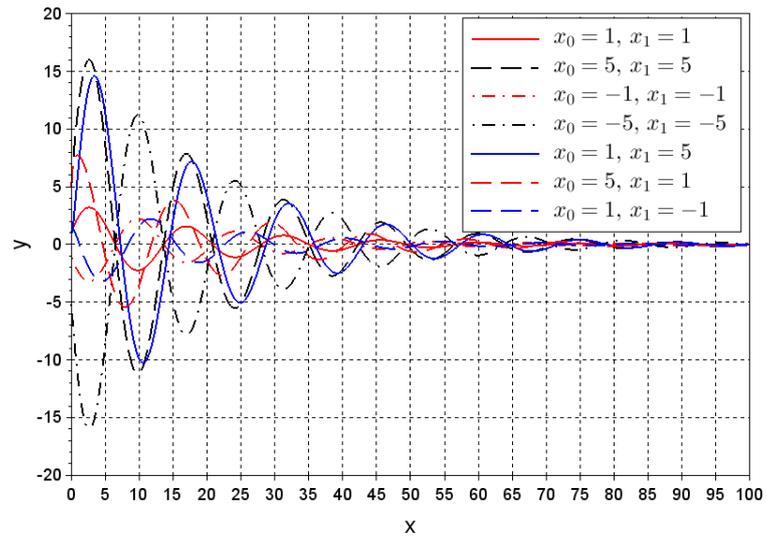


Рис. 2.7. Результаты моделирования при  $(\alpha, \mu) = (7/4; 1.03)$  и различных начальных условиях

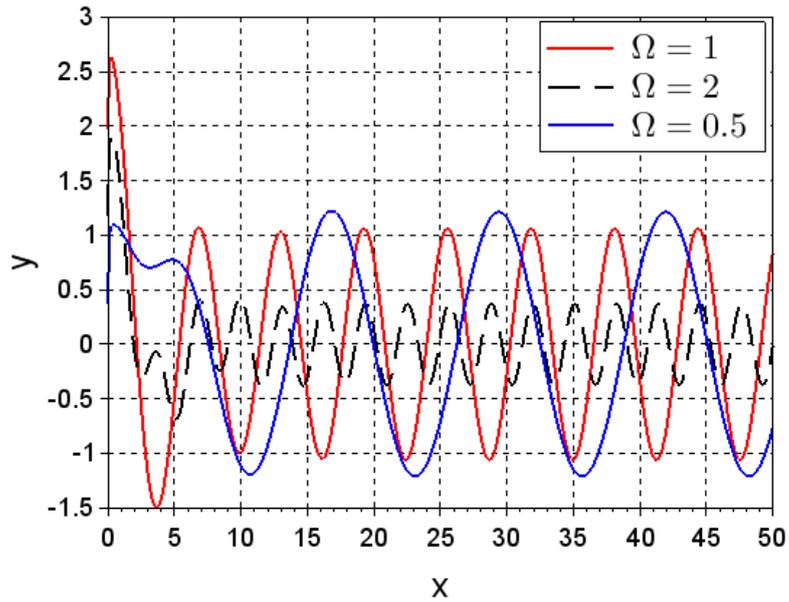


Рис. 2.8. Результаты моделирования при  $(\alpha, \mu) = (5/4; 0.94)$ , различных значениях  $\Omega$  и одном ненулевом начальном условии

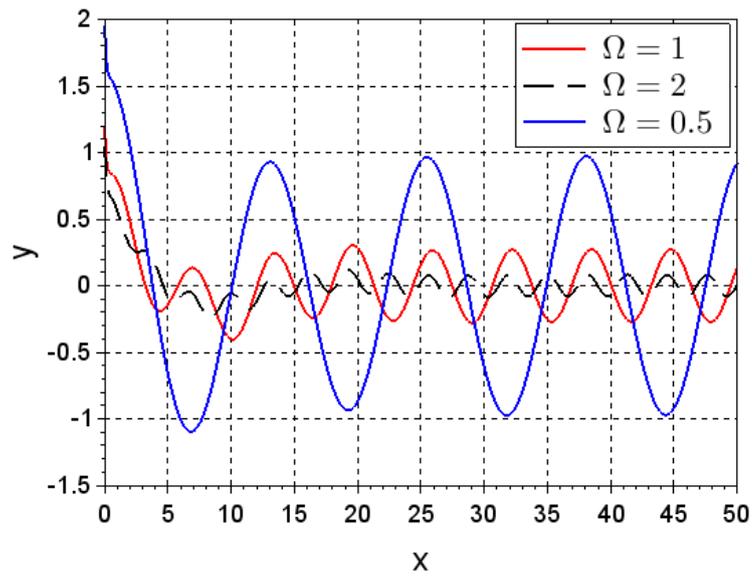


Рис. 2.9. Результаты моделирования при  $(\alpha, \mu) = (3/2; 3.68)$ , различных значениях  $\Omega$  и одном ненулевом начальном условии

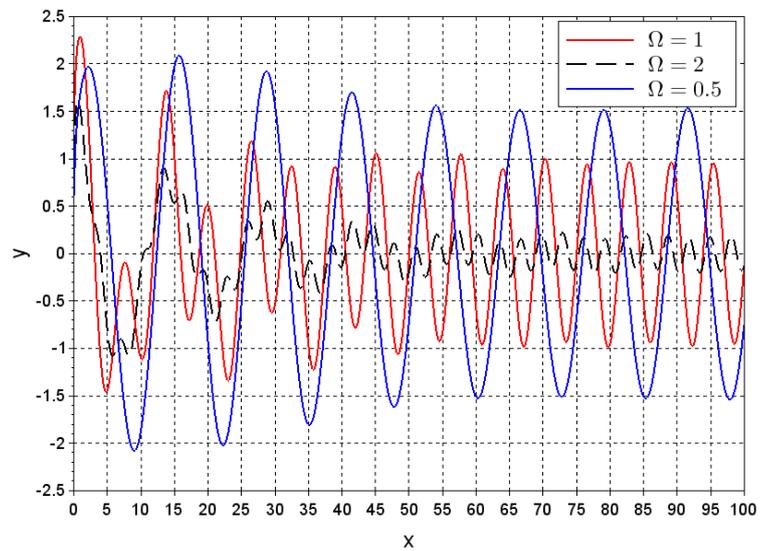


Рис. 2.10. Результаты моделирования при  $(\alpha, \mu) = (7/4; 1.03)$ , различных значениях  $\Omega$  и одном ненулевом начальном условии

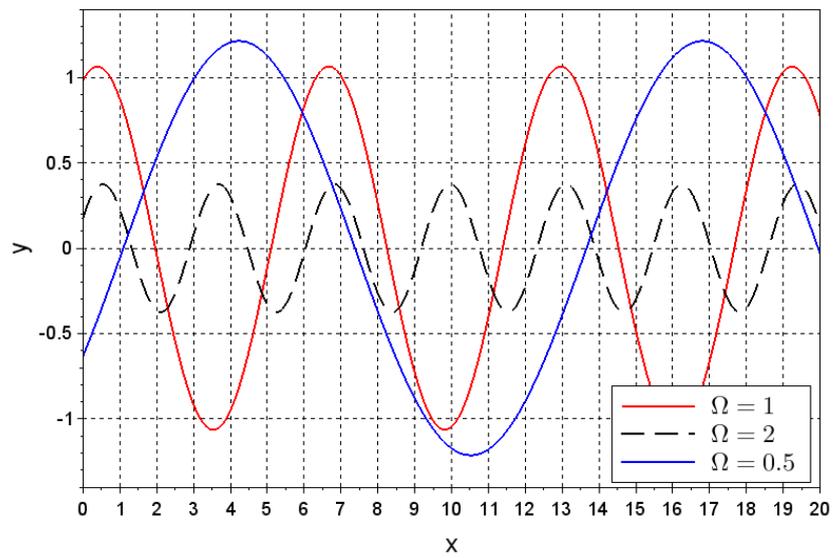


Рис. 2.11. Графики вынужденных колебаний осциллятора при  $(\alpha, \mu) = (5/4; 0.94)$  и различных значениях  $\Omega$

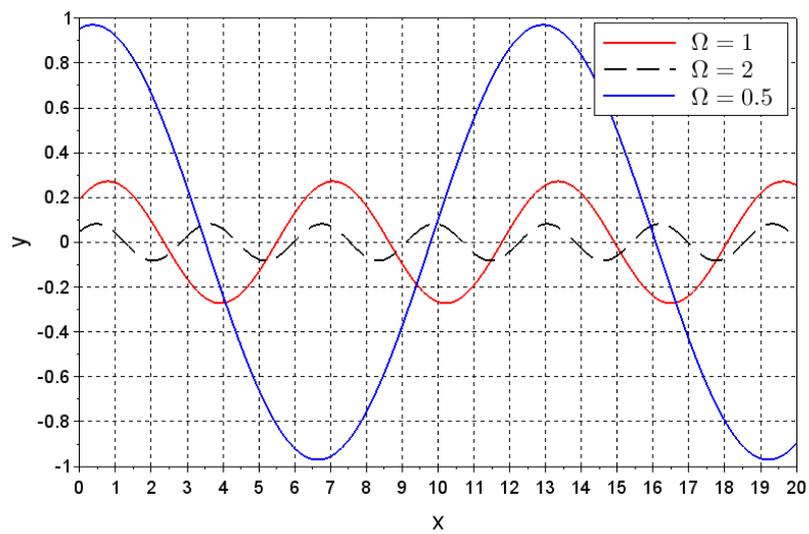


Рис. 2.12. Графики вынужденных колебаний осциллятора при  $(\alpha, \mu) = (3/2; 3.68)$  и различных значениях  $\Omega$

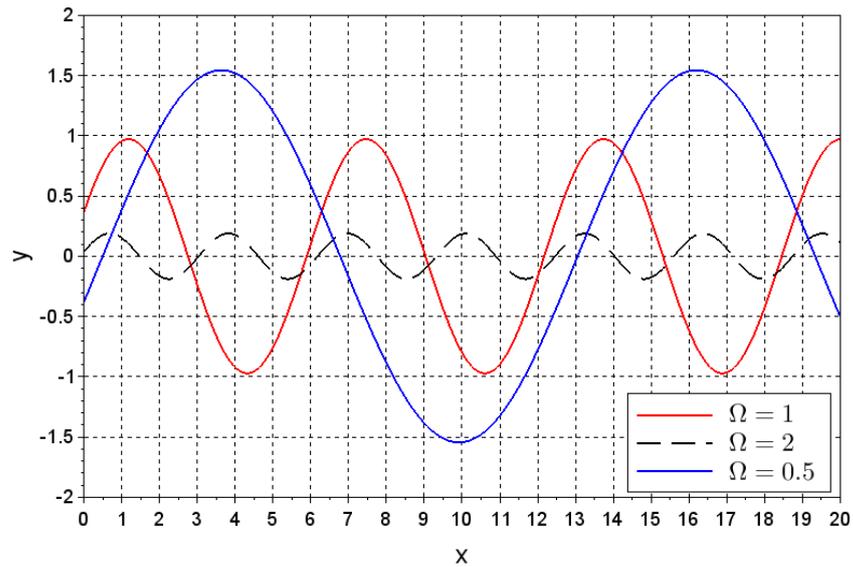


Рис. 2.13. Графики вынужденных колебаний осциллятора при  $(\alpha, \mu) = (7/4; 1.03)$  и различных значениях  $\Omega$

## 2.6. Сравнение с экспериментальными исследованиями

Как уже отмечалось ранее, уравнение движения гранул [33] под действием внешней силы  $F(x)$  имеет вид

$$y(x)'' + 1.8D^\alpha y(x) + 93y(x) = F(x), \quad (2.40)$$

где модуль вязкости ПЭС имеет значение  $b = 1.8$ , а модуль жесткости  $k = 93$ , масса гранулы равна  $m = 1$ , а смещение обозначено через  $y(x)$  [13].

В ходе экспериментальных исследований было проведено испытания полимербетона на основе ПЭС (диан и дихлорангидрид – 1,1 – дихлор – 2,2 – диэтилен [18]). Ранее [18] было установлено, что напряженно-деформированное состояние данных образцов хорошо описывается моделью колебания полимербетона, а также были найдены их параметры:  $c = 1.2$ ,  $\lambda = 89$ ,  $\alpha = 1.49$ . В первой серии экспериментов на образцы воздействовала периодическая нагрузка с постоянной частотой. Во втором случае образцы подвергались кратковременной ударной нагрузке. В

обоих случаях температура образцов и окружающей среды сохранялась постоянной. Усредненные измеренные значения относительной деформации образцов для обоих случаев представлены в Таблице 2.2 [13].

Табл. 2.2. Значения экспериментальных данных для полимербетона [13]

Время (с)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Деформация (периодическая нагрузка)	0.59	- 0.05	- 0.38	0.039	0.17	- 0.029	- 0.009	0.018	0.1	- 0.019	0.02
Деформация (ударная нагрузка)	0.4	0.36	- 0.17	- 0.18	0.09	0.08	- 0.08	- 0.08	0.05	0.04	0.041

На Рисунке 2.14 представлены результаты численного моделирования решения уравнения (2.40) при значениях:  $\alpha = 1.4, 1.47, 1.6$ ; и соответствующих значениях параметров периодической нагрузки.

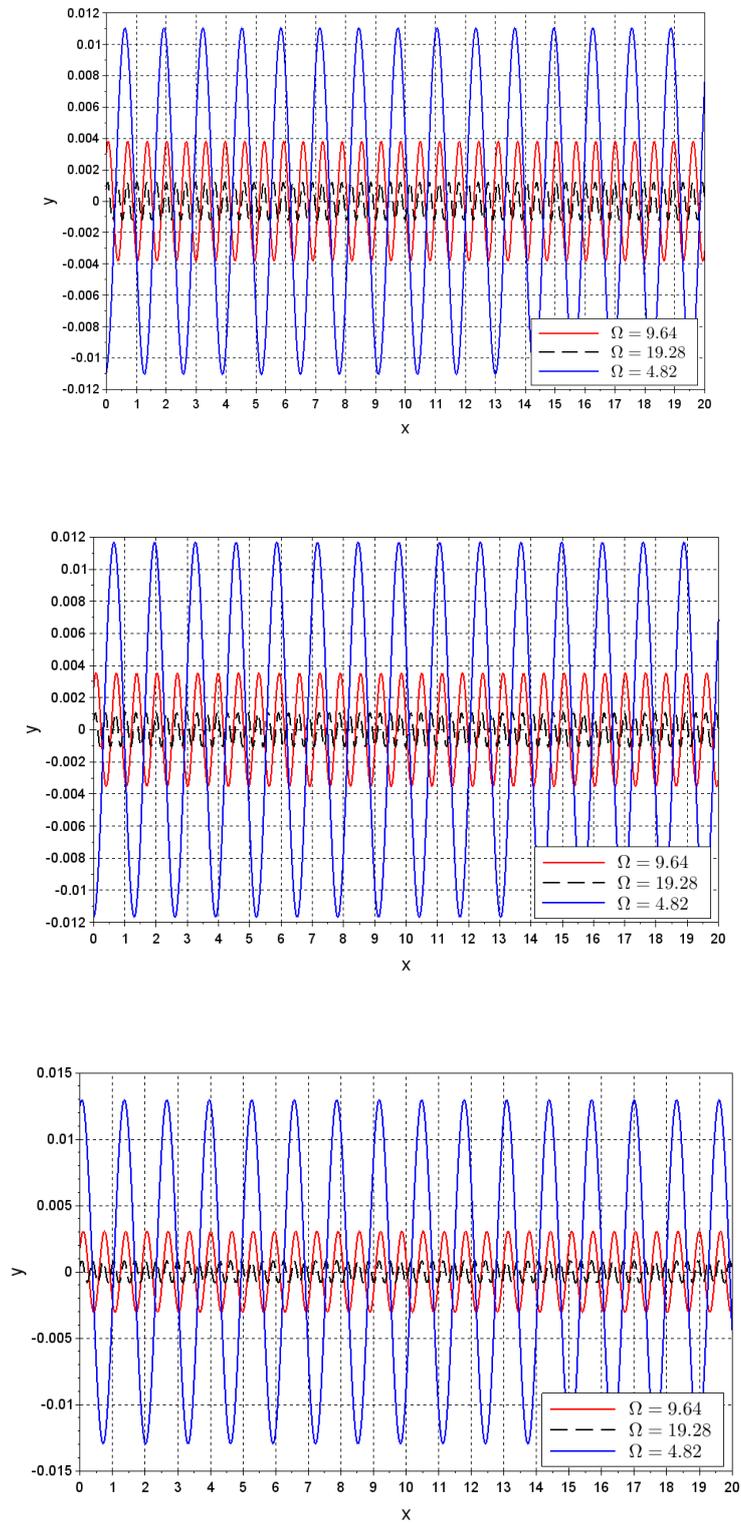


Рис. 2.14. Графики вынужденных колебаниях осциллятора (2.40) при указанных значениях параметров

Дадим качественную оценку численной модели осциллятора с вязкоупругим демпфированием на основе дисперсионного анализа.

Введем понятие показателя качества математической модели (коэффициент детерминации) и обозначаем его символом  $R^2$ :

$$R^2 = 1 - \frac{(n-1) \cdot D_{ост.}}{(n-2) \cdot D_{общ.}}, \quad (2.41)$$

где  $D_{общ.}$  – общая дисперсия, вычисляемая по формуле

$$D_{общ.} = \left( U^O - \bar{U}^O \right)^2, \quad (2.42)$$

$D_{ост.}$  – остаточная дисперсия, вычисляемая по формуле:

$$D_{ост.} = \left( U^O - U^T \right)^2. \quad (2.43)$$

В формуле (2.42)  $U^O$  – значение экспериментальных данных,  $\bar{U}^O$  – среднее значение экспериментальных данных. В формуле (2.43)  $U^T$  – значение теоретических результатов.

С помощью коэффициента детерминации осуществляется идентификация параметров математической модели и обосновывается ее адекватность исследуемому нами процессу.

Доверительный интервал ожидаемого прогнозируемого значения  $U^T_{прогн.}(x_{прогн.})$  имеет вид:

$$\begin{aligned} U^T_{точ.прогн.} - U^T_{точ.прогн.} \cdot (1 - R^2) &\leq U^T_{прогн.}(x_{прогн.}) \leq \\ &\leq U^T_{точ.прогн.} + U^T_{точ.прогн.} \cdot (1 - R^2), \end{aligned} \quad (2.44)$$

где  $U^T_{точ.прогн.}$  – точечное значение прогнозируемого состояния исследуемой модели.

Доверительный интервал ожидаемого прогнозируемого значения позволяет оценить ожидаемое значение прогноза исследуемого процесса. Значимость коэффициента детерминации  $R^2$  устанавливаем с помощью статистического критерия Стьюдента.

Наблюдаемое значение  $t_{набл.}$  критерия Стьюдента вычисляется по формуле:

$$t_{набл.} = \sqrt{\frac{R^2 \cdot (n-2)}{1-R^2}}. \quad (2.45)$$

Критическое значение критерия Стьюдента

$$t_{крит}(\alpha, n-2), \quad (2.46)$$

где  $\alpha$  – уровень значимости, а  $n$  – количество экспериментальных данных.

Рассматривается математическая модель осциллятора с вязкоупругим демпфированием в виде задачи Коши для дифференциального уравнения, содержащего дробную производную

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + cD^\alpha U(x) + \lambda U(x) = 0 \quad (2.47)$$

с заданными начальными условиями

$$U(x)|_{x=0} = 0, \quad U'(x)|_{x=0} = 1, \quad (2.48)$$

где  $D^\alpha U(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{U(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}}$  ( $1 < \alpha < 2$ ) – производная дробного порядка  $\alpha$

в смысле Римана-Лиувилля [83, 84].

На основании вводимого показателя качества модели определяем оптимальное значение параметра  $\alpha$  уравнения с дробной производной (2.47), для которой показатель качества  $R^2$  по своему значению является максимальным. Для этого рассчитываем теоретические значения для модели исследуемого процесса по формуле решения задачи Коши (2.47) -(2.48), полученной в работе [72] с использованием последовательности рекуррентных ядер и записанной в виде степенного ряда:

$$U(x) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \frac{C_n^m c^m \lambda^{n-m} x^{2n+1-m\alpha}}{\Gamma(2n - m\alpha + 2)}, \quad (2.49)$$

Экспериментальные значения  $U_i^O$  исследуемой модели осциллятора с вязкоупругим демпфированием, полученные опытным путем на вибротесте [73] и теоретические значения  $U_i^T$ , определенные по формуле (2.49), приведены ниже в Таблице 2.3.

Табл. 2.3. Экспериментальные и теоретические значения для модели осциллятора с вязкоупругим демпфированием

$i$	$U_i^O, \text{мм}$	$U_i^T, \text{мм}$
1	0.060000	0.056000
2	-0.038000	-0.016000
3	-0.009800	-0.028100
4	0.018000	0.008000
5	-0.009700	-0.026000
6	-0.010871	-0.011200
7	0.010000	0.013000

В приведенной выше Таблице 2.3  $U_i^O$  – экспериментальные данные, полученные опытным путем, а  $U_i^T$  – теоретические данные, полученные путем математических расчетов по формуле (2.49). На Рисунке 2.15 представлена иллюстрация корректности соответствия значений экспериментальных данных  $U^O$ , обозначенных на этом рисунке красным цветом, со значениями  $U^T$ , полученными аналитическим путем, обозначенных синим цветом.

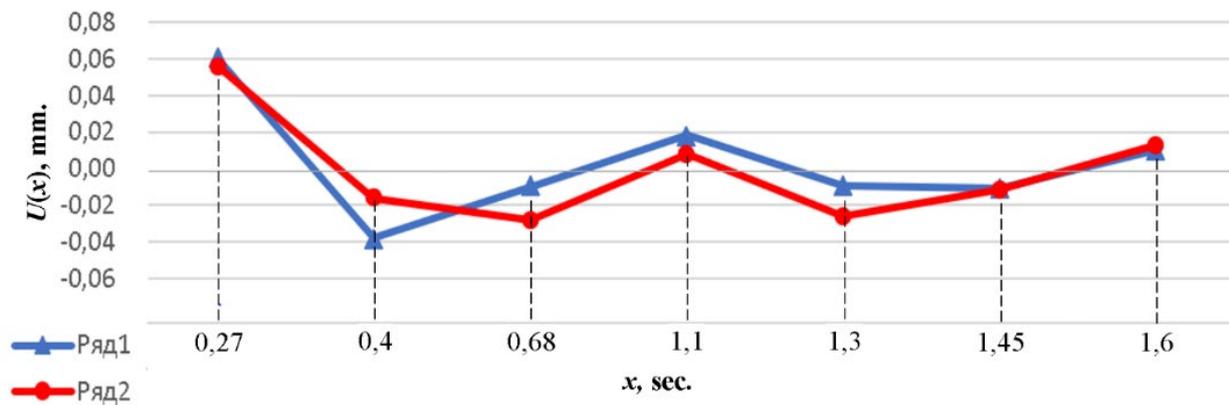


Рис. 2.15. Графическая иллюстрация теоретических и экспериментальных значений исследуемого процесса. Красным цветом обозначены экспериментальные данные –  $U^O$ , синим цветом обозначены значения математической модели –  $U^T$

По формулам (2.42) и (2.43) для данных,  $n = 7$ , имеющихся в Таблице 2.3, рассчитываем значения общей дисперсии  $D_{общ}$  и остаточной дисперсии  $D_{ост}$ :

$$D_{общ} = 0,008392 \text{ и } D_{ост} = 0,001210. \quad (2.50)$$

Далее, используя полученные результаты (2.50), по формуле (2.41) определяем значение показателя качественной оценки  $R^2$  исследуемой модели:

$$R^2 = 0,8270. \quad (2.51)$$

Для оценки значимости полученного в данном исследовании значения коэффициента качества модели (коэффициента детерминации)  $R^2$  сравним наблюдаемое значение  $t_{набл.} = 4,8895$  критерия Стьюдента, вычисляемое по формуле (2.45), с критическим значением  $t_{крит} = 2,5706$  критерия Стьюдента, взятым со степенью свободы  $n - 2 = 5$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ . Так как наблюдаемое значение критерия Стьюдента превосходит критическое значение критерия Стьюдента, то основная гипотеза:  $H_0 : R^2 = 0$ , незначимости коэффициента детерминации  $R^2$  отвергается и принимается конкурирующая гипотеза:  $H_1 : R^2 \neq 0$ , значимости коэффициента детерминации  $R^2$ .

Чтобы построить доверительный интервал (2.44), рассчитаем по формуле (2.49) для  $x = 1,8$  теоретическое значение точечного прогноза:  $U_{точ\ прог}^T(1,8)$  ожидаемого состояния (2.47) – (2.48). В нашем случае получаем

$$U_{точ\ прогн}^T(1,8) = 0,011163. \quad (2.52)$$

Затем, на основе полученного точечного прогноза (2.52) и показателя качественной оценки (2.51), по формуле (2.44) строим доверительный интервал ожидаемого прогнозируемого значения  $U_{прогн.}^T(x_{прогн.})$  исследуемой модели (2.47) – (2.48):

$$0,0092 \leq U_{прогн.}^T(1,8) \leq 0,0131.$$

## 2.7. Исследование краевой задачи, описывающей колебания струны в среде с фрактальной геометрией

Теория дробного исчисления привлекает постоянное внимание ученых в различных сферах науки и техники. В работе [71] представлен широкий обзор исследований ведущих мировых ученых по дробному исчислению и его применению. Отметим, что дробные производные по пространственной переменной применяются при моделировании аномальных диффузий и дисперсий, а дробные производные по времени – при моделировании некоторых эволюционных процессов с памятью.

Рассмотрим уравнение с дробной производной вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_0 D_{0t}^\alpha u + C_1 D_{0x}^\beta u + F,$$

которое, в частности, описывает колебания струны с учетом трения в среде с фрактальной геометрией. В настоящей диссертации это уравнение исследуется при изучении различных физико-химических особенностей полимербетона.

Пусть дана первая краевая задача для уравнения колебаний струны с дробной производной порядка  $\alpha$  по пространственной переменной в области  $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_1 D_{0x}^\alpha u, \quad 0 < \alpha < 2, \quad (2.53)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2.54)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2.55)$$

$$u(x, 1) = \psi(x). \quad (2.56)$$

Здесь  $m$  и  $C_1$  – некоторые постоянные,  $D_{0x}^\alpha u$  – дробная производная Римана-Лиувилля порядка  $\alpha$ ,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – некоторые заданные функции.

Дробная производная порядка  $\alpha$  функции  $f(x)$  в точке  $x$  ( $0 \leq m - 1 < \alpha < m$ ,  $m \in N$ ) задается по формуле [25]:

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} \right).$$

в частном случае, когда  $\alpha = 1/2$ ,  $m = 1$ , получим:

$$D^{1/2} f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1/2}} \right).$$

Заметим, что при  $1 < \alpha < 2$  по определению Римана-Лиувилля дробная производная записывается в виде:

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}} \right).$$

Найдем решение задачи (2.53) – (2.54) – (2.55) – (2.56) на основе метода Фурье, представим это решение в виде следующего произведения функций:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.57)$$

Подставляя выражение (2.57) в уравнение (2.53), для функции  $X(x)$  получим двухточечную задачу Дирихле вида:

$$X''(x) + C_1 D_{0x}^\alpha X = \lambda X(x) \quad (2.58)$$

$$X(0) = X(1) = 0. \quad (2.59)$$

Решение задачи (2.58) – (2.59) представлено в работах [27, 28]. Было дано доказательство теоремы, согласно которой характеристические числа задачи (2.58) – (2.59) совпадают с корнями функции

$$\omega(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_n^k \lambda_j^{n-k} (-C_1)^k}{\Gamma(2n - k\beta + 2)} (1-x)^{2n+1},$$

а соответствующие собственные функции  $X_j(x)$  имеют выражение

$$X_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_n^k \lambda_j^{n-k} (-C_1)^k}{\Gamma(2n - k\beta + 2)} x^{2n+1-k\alpha}, \quad j=1,2,3,\dots \quad (2.60)$$

Здесь  $\lambda_j$  –  $j$ -ое собственное число задачи (2.58) – (2.59).

Собственные функции (2.60) образуют полную [30, 31], но не ортогональную систему. Построим следующую систему [3, 4]:

$$\tilde{X}_j(x) = (1-x) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_n^k \lambda_j^{n-k} (-C_1)^k}{\Gamma(2n - k\beta + 2)} (1-x)^{2n+1-k\alpha}, \quad j=1,2,3,\dots, \quad (2.61)$$

которая является биортогональной к системе собственных функций

$$X_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_n^k \lambda_j^{n-k} (-C_1)^k}{\Gamma(2n - k\beta + 2)} x^{2n+1-k\alpha}.$$

Чтобы найти эту систему, вместе с задачей (2.58) – (2.59) рассмотрим задачу, сопряженную к (2.58) – (2.59). Для постановки задачи, сопряженной к (2.58) – (2.59), в классе  $C^2(0,1) \cap C([0,1])$  рассмотрим следующую задачу Коши: найти решение уравнения

$$u'' + \frac{d^\alpha}{d(1-x)^\alpha} u + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = -1,$$

где  $\frac{d^\alpha}{d(1-x)^\alpha}$  – оператор, сопряженный к оператору дробного дифференцирования

$D_{0x}^\alpha$  порядка  $\alpha$  [2]. Можно показать, что задача (2.58) – (2.59) эквивалентна решению интегрального уравнения

$$u(x) = - \int_x^1 K(x,t) u(t) dt + (1-x),$$

где ядро  $K(x,t)$  имеет вид:

$$K(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < x < 1, \\ \frac{(t-x)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \lambda(t-x), & 0 < x < t < 1. \end{cases}$$

Применяя итерационный процесс, определим последовательность итерированных ядер через рекуррентные соотношения

$$K_{n+1}(x,t) = \int_x^1 K_n(x,\tau) K_1(\tau,t) d\tau.$$

Ясно, что

$$K_n(x,t,\lambda) = \sum_{m=0}^n \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (t-x)^{2n-1-m\alpha}.$$

Тогда резольвента примет вид

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^n \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (t - x)^{2n-1-m\alpha}.$$

Поэтому, соответствующее решение интегрального уравнения примет следующий вид

$$u(x) = (1 - x) + \int_x^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^n \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)} (t - x)^{2n-1-m\alpha} \right) (1 - t) dt,$$

из чего следует, что присоединенные функции имеют вид

$$\tilde{X}_j(x) = (1 - x) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_n^k \lambda_j^{n-k} (-C_1)^k}{\Gamma(2n - k\beta + 2)} (1 - x)^{2n+1-k\alpha}.$$

Конечно, система функций  $\{\tilde{X}_j(x)\}$  является системой собственных функций задачи

$$X''(x) + D_{x1}^{\alpha} X = \lambda X(x), \quad (2.62)$$

$$X(0) = X(1) = 0, \quad (2.63)$$

сопряженной к задаче (2.58) – (2.59), а собственные числа этих двух задач, как было отмечено выше, совпадают. Здесь  $D_{x1}^{\alpha}$  – оператор дробного дифференцирования с началом в точке  $X$  и концом в 1, т.е. оператор сопряженный к оператору дробного дифференцирования  $D_{0x}^{\alpha}$ .

Таким образом, решение задачи (2.53)-(2.54)-(2.55)-(2.56) можно записать стандартным образом:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\pi n t) + B_n \sin(\pi n t)) \chi_n(x). \quad (2.64)$$

Для нахождения постоянных  $A_n$  и  $B_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , воспользуемся начальным и граничным условиями (2.55) и (2.56). Чтобы найти  $A_n$ , в формуле (2.64) положим  $t = 0$ . Тогда получим

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \chi_n(x) = \varphi(x).$$

Учитывая, что системы  $\{X_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$  и  $\{\tilde{X}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$  биортогональны, получим,

что

$$A_n = C \int_0^1 \varphi_0(x) \tilde{X}_n(x) dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Чтобы найти  $B_n$ , продифференцируем обе части (2.64) по переменной  $t$ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n) (-A_n \sin(\pi n t) + B_n \cos(\pi n t)) \cdot \chi_n(x) = \psi(x). \quad (2.65)$$

Положим в (2.65)  $t = 0$ , получим

$$\psi(x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \chi_n(x). \quad (2.66)$$

Из (2.66) следует, что

$$\pi n B_n = \int_0^1 \psi(x) \tilde{X}_n(x) dx,$$

или, что то же самое,

$$B_n = \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \psi(x) \tilde{X}_n(x) dx.$$

Заметим, что уравнение (2.58) может быть использовано при моделировании характеристик деформации и прочности полимербетона, как было указано в работах [32, 33].

Одной из основных задач, возникающих при исследовании моделей, использующих дробные производные, является идентификация параметров модели, а также порядка дробной производной.

В настоящей диссертационной работе с целью апробации полученных теоретических результатов были использованы экспериментальные данные из работы [17]. После сравнения экспериментальных данных из [17] с расчетными (для значения  $\alpha = 1.47$ ), получаем вывод об адекватности построенной модели.

В настоящей диссертационной работе будем рассматривать только поперечные колебания материала, предполагая, что все движения происходят в одной плоскости и, что гранула движется перпендикулярно оси  $Ox$ . Введем следующее

обозначение:  $u(x, t)$  – смещение гранулы с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$  в поперечном направлении. Тогда для моделирования изменения характеристик деформации и прочности полимербетона при его нагружении получим следующую первую краевую задачу [6]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_1 D_{0t}^{1.47} u, \quad 0 < \beta < 2, \quad (2.67)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2.68)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2.69)$$

$$u(x, 1) = \psi(x), \quad (2.70)$$

решение которой, согласно формуле (2.64), имеет следующий вид [6]

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\pi n t) + B_n \sin(\pi n t)) \chi_n(x). \quad (2.71)$$

где

$$\begin{aligned} \{X_j\}_{j=1}^{\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_n^k \lambda_j^{n-k} (-C_1)^k}{\Gamma(2n - k\beta + 2)} x^{2n+1-1,47k}, \\ \{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\infty} &= (1-x) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_n^k \lambda_j^{n-k} (-C_1)^k}{\Gamma(2n - k\beta + 2)} (1-x)^{2n+1-1,47k}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Используя пакет прикладных программ высокого уровня MATLAB, вычислим собственные числа  $\lambda_j$  для  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , приняв  $\alpha = 1.47$ ,  $c = 1.8$ . Полученные собственные значения краевой задачи представлены в Таблице 2.4.

Табл. 2.4. Собственные значения краевой задачи (2.67) -(2.68) -(2.69) -(2.70)

собственное число	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
значение собственного числа	16.6	59.4	125.0	213.4	323.4

Тогда приближенное решение задачи (2.67) -(2.68) -(2.69) -(2.70) примет вид [3]:

$$u(x, t) \approx \sum_{n=1}^5 (A_n \cos(\pi n t) + B_n \sin(\pi n t)) \chi_n(x). \quad (2.73)$$

Из формулы (2.73) получаем приближенное решение задачи (2.67) – (2.68) – (2.69) – (2.70), при условии, что функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  являются непрерывно дифференцируемыми.

### **Глава 3. ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Для построения математических моделей процесса адвекции радона в сложных геологических средах можно воспользоваться диффузионно-адвекционной моделью. Особенностью этой модели является также то, что она в некоторых частных случаях обладает достаточно простым аналитическим решением.

Геологическая среда представляет собой неоднородную слоистую фрактальную структуру, состоящую из различных слоев, которые в достаточной мере отличаются друг от друга своими физическими и геологическими характеристиками. Это приводит к определенным затруднениям при решении одной из самых актуальных задач, возникающих перед сейсмологами в настоящее время, в частности, при решении задачи моделирования переноса радона в слоистой геологической среде, которая максимально приближена к действительной геологической среде.

В случае, когда рассматриваются неоднородные фрактальные среды, особенно в том случае, когда коэффициенты уравнения переноса представлены функциями, а не постоянными величинами, решение такой задачи аналитическим методом невозможно [2]. В данной главе представлены численные методы решения стационарного уравнения переноса радона и слоистой геологической среде.

#### **3.1. Определение фрактальной размерности слоисто-геологической среды**

Одним из показателей сложности процесса по величине является, так называемая, фрактальная размерность. Фрактальная размерность обычно используется для предсказания поведения системы. С помощью фрактальной размерности также можно диагностировать нестабильные состояния.

Коэффициент Херста  $K_H$  с фрактальной размерностью  $D$ , которая иначе называется размерностью Хаусдорфа или дробной размерностью, связан со значением величины

$$H = 2 - D. \quad (3.1)$$

Для того, что найти коэффициент  $K_H$ , можно применять различные методики. При этом самым часто применяемым является  $R/S$ -анализ.

Заметим, что эмпирический закон Хёрста представляется следующей формулой

$$H = \frac{\lg\left(\frac{R}{S}\right)}{\lg\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (3.2)$$

где максимальный размах ряда обозначен через  $R$ , среднеквадратическое отклонение наблюдений обозначено через  $S$ , а  $n$  – количество наблюдений.

Рассматриваемый ряд динамики разобьем на определенное конечное количество промежутков, имеющих одинаковые длины. Далее, в каждом из этих промежутков найдем значения величин размаха  $R$  и стандартного разброса  $S$ . Таким образом, введем в рассмотрение ряд динамики, имеющий длину  $M$ , что означает, что число вариантов в данном ряде динамики равно  $K$ . Преобразуем рассматриваемый ряд в ряд длины  $N = K - 1$  согласно следующим выражениям

$$N_i = \log\left(\frac{K_{i+1}}{K_i}\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, (M - 1).$$

Произведем деление рассматриваемого промежутка времени на какое-то количество  $A$  смежных промежутков, имеющих определенную длину  $n$ , где ряд динамики  $N$  определяется по следующей формуле  $N = An$ . Далее, упомянутые выше смежные промежутки обозначим через  $I_a$ ,  $a = \overline{1, A}$ , при этом среднестатистическое значение вычисляется следующим образом:

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k,a}.$$

Ряд динамики из накопленных отклонений от среднего значения для каждого подпериода  $I_a$  находится согласно выражению:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a). \quad (3.3)$$

Найдем размах каждого подпериода  $I_a$  как разность между максимальным и минимальным значениями накопленных отклонений (3.1) в пределах данного подпериода:

$$R_{I_a} = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a}), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3.4)$$

при этом выборочное стандартное отклонение для каждого подпериода  $I_a$  найдем в виде квадратного корня от среднего по накопленным отклонениям в заданном подпериоде:

$$S_{I_a} = \sqrt{\left( \left( \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a)^2 \right)}. \quad (3.5)$$

Стандартным образом получаем

$$(R/S)_n = (1/A) = \sum_{i=1}^A \left( \frac{R_{I_a}}{S_{I_a}} \right). \quad (3.6)$$

Рассмотрим следующее соотношение

$$\lg \left( \frac{R}{S} \right) = \lg c + H \lg n, \quad (3.7)$$

в котором  $\lg n$  выступает в роли факторного признака.

С помощью МНК, можно получить промежуток, который отсекается на оси  $Y$ , длина которого и определяет в конечном счете значение для  $\lg c$ , при этом величина  $H$  и будет определять значение искомого  $K_H$ .

В статистической физике рассматриваются траектории частиц, подверженных броуновскому (хаотическому) движению, называемых блужданиями. Выделяют два вида крупномасштабного поведения частиц в броуновском движении:

1. Отдельное случайное блуждание является фрактальным или масштабно инвариантным, если оно содержит достаточно большое количество шагов.

2. Распределение вероятности для положения конечной точки блуждания подчиняется простому континуальному закону – уравнению диффузии [91].

Упомянутые типы крупномасштабного поведения частиц в броуновском движении являются универсальными и не зависят от микроскопических данных блуждания.

Проведем более подробное исследование следующего уравнения переноса.

В непрерывном пределе, в определенных случаях, в множестве непостоянных, изломанных казуальных блужданий начинает происходить естественное коллективное поведение. Развитие вышеупомянутых поведений характеризуется следующим уравнением переноса:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

здесь  $D$  представляет собой коэффициент переноса.

Соотношение (3.8) характеризует плотность вероятности  $P(x, t)$  и лимит несмещенного броуновского движения:

$$Prob \{случайная точка \in (x, x + dx)\} \equiv P(x, t). \quad (3.9)$$

Естественные начальные условия, для которых имеет следующий вид  $P(x, 0) = \delta(x)$ , что отвечает тому, что случайная точка начинает свое движение из начала координат.

Предположим, что имеет место следующее соотношение [91]:

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x P(x, t) dx = 0. \quad (3.10)$$

Тогда будет иметь место следующее равенство:

$$\langle x^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx = 0. \quad (3.11)$$

Для доказательства того, что плотность вероятности распределена по нормальному закону, применим метод анализа размерности.

В последние годы некоторые ученые-сейсмологи указывают на преобразования реологических свойств горных пород в процессе подготовки землетрясения. В [94] приводится, что в районе возможного землетрясения хрупкому разрушению

свойственно псевдовязкое течение горных пород. Это псевдовязкое течение может повлиять на область концентрации радона, при этом аномалии могут проявляться в разных формах.

Сравнение проведенных исследований метеорологических величин в бункере, оснащенном под землей, и в наземном контейнере в летнее время, за счет значительных колебаний температуры в контейнере, отражает изменение атмосферного давления, которое достаточно четко прослеживается на приведенном ниже Рисунке 3.1. На этом Рисунке 3.1 отражается процесс изменения объемной активности радона, происходившего в течение периода времени с двадцатого июля до двадцать девятое августа две тысячи шестого года в районе аэрации и под земной поверхностью.

Из анализа Рисунка 3.1 можно сказать, что в период с 13.08.2006 по 22.08.2006, наблюдалось возрастание амплитуды объемной активности радона [23] как в подземном бункере, так и в наземном контейнере.

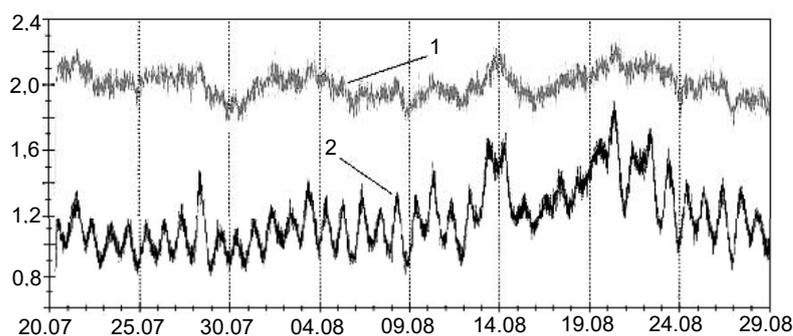


Рис. 3.1. Динамика объемной активности радона за период 20 июля – 29 августа 2006 года [23]:

1 – зона аэрации, 2 – поверхность пола подземного бункера

На Рисунке 3.2 изображена расчетная кривая поверхностного плазменного резонанса, которая определена согласно приведенной выше методике на основе программы «РЭКСЭМ», где:

$$h_1 = 20 \text{ см}, h_2 = 120 \text{ см}, D = 55 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$v = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}, \lambda = 21 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

Отметим, что в расчетных кривых поверхностного плазменного резонанса преобладание амплитуды над фоном для аномального периода составляет более 160 процентов, что подтверждает более высокую чувствительность ППР по сравнению с динамическими параметрами ОА Rn [23].

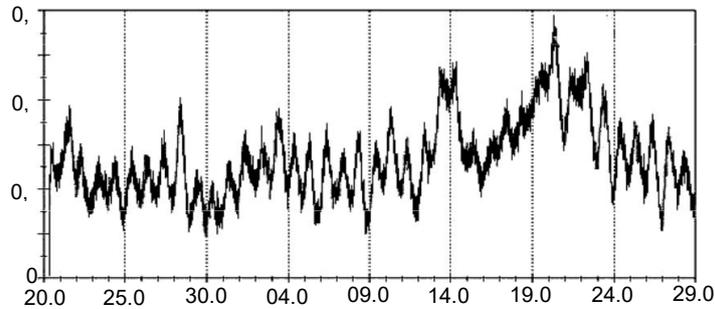


Рис. 3.2. Вычисления плотности потока радона за период 20 июля – 29 августа 2006 года [23]

Определяя значение  $K_H$  ряда динамики, приведенного на Рисунках 3.1 и 3.2, приходим к выводу, что  $H \approx 0.7$ .

### 3.2. О решении уравнения, моделирующего плотность потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности

Пусть дана краевая задача для одномерного дифференциального уравнения дробного порядка:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial x^\beta}, \quad (3.12)$$

$$u(0+, t) = u(1, t) = 0, \quad (3.12a)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3.12b)$$

Если  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta = 2$ , то уравнение (3.12) моделирует физические процессы, возникающие в классической механике (обратные задачи динамики), а также в гидродинамике при моделировании движения тела в вязкой жидкости. Кроме того, уравнение (3.12) используется при моделировании динамики тепловых

потоков в задачах теплопроводности и при электрохимическом анализе поверхностей электродов в задачах диффузии [26], а также при изучении физических процессов стохастического переноса, в физике конденсированных сред при использовании понятия фрактала и т. д. Задачи фильтрации жидкости в сильно-пористых (фрактальных) средах приводят также к постановке и решению краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка.

Если  $\alpha = 1$  и  $\beta \in (1,2)$ , то уравнение (3.12) моделирует поведение временных рядов, в частности, финансовых рынков (последовательность измерений некоторых процессов во времени).

Рассмотрим следующую краевую задачу для ДДУАД:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{0+}^{\alpha} u(x,t), \quad (3.13)$$

$$u(0+,t) = u(1,t) = 0, \quad (3.13 \text{ а})$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (3.13 \text{ б})$$

где  $1 < \alpha < 2$ .

Имеет место следующая теорема [86].

**Теорема 3.1. Функция**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \quad (3.14)$$

является решением задачи (3.13) – (3.13 а) – (3.13 б).

**Доказательство.**

Будем искать непрерывное в замкнутой области  $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$  нетривиальное решение однородного ДДУ (3.13), удовлетворяющее граничным условиям (3.13 а) и начальному условию (3.13 б).

Как принято в методе разделения переменных, для решения поставленной задачи рассмотрим сначала основную вспомогательную задачу: найти решение уравнения (3.13), не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям (3.13 а) и представимое в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (3.15)$$

где  $X(x)$  является функцией только переменной  $x$ ,  $T(t)$  – функцией только переменной  $t$ .

Подставляя предполагаемую форму решения (3.15) в уравнение (3.13) и производя деление обеих частей полученного в результате этой подстановки равенства на произведение  $X(x)T(t) \neq 0$ , получим соотношение:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{D_x^\alpha X(x)}{X(x)}. \quad (3.16)$$

Так как левая часть уравнения (3.16) зависит только от  $t$ , а правая – только от  $x$ , то в уравнении (3.16) можно положить

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{D_x^\alpha X(x)}{X(x)} = \lambda, \quad (3.17)$$

где параметр  $\lambda = const$ ,

Анализируя выражение (3.17), найдем следующие уравнения

$$D_x^\alpha X(x) = \lambda X(x), \quad (3.18)$$

$$T'(t) = \lambda T(t). \quad (3.19)$$

Из граничных условий (3.13 а) получим:

$$X(0) = X(1) = 0. \quad (3.20)$$

Итак, из (3.18) и (3.20) получаем двухточечную краевую задачу Дирихле для определения функции  $X(x)$ :

$$D_x^\alpha X(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(1) = 0, \quad (3.21)$$

изученную в работе [67], где было показано, что только для собственных значений  $\lambda_n$ , являющихся нулями функции  $E_{\alpha,\alpha}(\lambda)$ , существуют собственные функции задачи (3.21), равные

$$X_n(\lambda_n, x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha). \quad (3.22)$$

Очевидно, что собственным значениям  $\lambda_n$  соответствуют решения уравнения (3.19):

$$T_n(\lambda_n, t) = \varphi_n \exp\{\lambda_n t\},$$

где  $\varphi_n$  – пока неизвестные коэффициенты.

Тогда легко найти, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(\lambda_n, x)T_n(\lambda_n, t) = \varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^\alpha), \quad n = 1, 2, \dots$$

представляют собой частные решения уравнения (3.13), удовлетворяющие нулевым граничным условиям (3.13 а).

Перейдем к решению задачи (3.13) – (3.13 а) – (3.13 б).

Составим следующий ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^\alpha). \quad (3.23)$$

Заметим, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет граничным условиям (3.13 а), так как этим условиям удовлетворяют все члены ряда (3.23).

Требую выполнения начального условия (3.13 б), получаем:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^\alpha). \quad (3.24)$$

В работе [67] было показано, что система функций  $\{X_n(\lambda_n, x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$  образует базис в  $L_2(0, 1)$ . Так как базис  $\{X_n(\lambda_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$  не является ортогональным, то вместе с системой  $\{X_n(\lambda_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$  введем в рассмотрение систему  $\{z_n(\lambda_n, x)\}_{n=1}^{\infty} = \{(1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n (1-x)^\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ , биортогональную к системе  $\{X_n(\lambda_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$  [67]. Отметим, что система  $\{z_n(\lambda_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$  представляет собой систему собственных функций сопряженной задачи [67].

Найдем неизвестные коэффициенты  $\varphi_n$  с помощью системы функций  $\{z_n(\lambda_n, x)\}_{n=1}^{\infty} = \{(1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n (1-x)^\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\varphi_n = (\varphi(x), z_n), \quad (3.25)$$

где  $(\varphi(x), z_n)$  – скалярное произведение функций  $\varphi(x)$  и  $z_n$ .

Рассмотрим теперь ряд (3.24) с коэффициентами  $\varphi_n$ , определяемыми по формуле (3.25) и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (3.13) – (3.13 а) – (3.13 б). Для этого нужно доказать, что функция, определяемая рядом (3.23), дифференцируема, удовлетворяет уравнению (3.13) в области  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$  и непрерывна в точках границы этой области (при  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ).

Так как уравнение (3.13) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно один раз по  $t$  и дважды по  $x$  ( $1 < \alpha < 2$ ).

Так как достаточно большие по модулю нули  $\lambda_n$  функции  $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)$  находятся вне замкнутого угла  $\left\{ \lambda_n : |\arg(\lambda_n)| \leq \frac{\alpha\pi}{2} \right\}$ , то  $\arg(\lambda_n) > \frac{\pi}{2}$  [92]. Тогда имеют место следующие соотношения [82]:

$$|\exp\{\lambda_n t\}| < 1, \quad (3.26)$$

$$|E_{\alpha,\beta}(\lambda_n)| \leq \frac{1}{1+|\lambda_n|}. \quad (3.27)$$

Для достаточно больших (по абсолютной величине) нулей  $\lambda_n$  функции  $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n)$  также справедливо следующее соотношение [82]:

$$\begin{aligned} \lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} &= 2n\pi i - (1+\alpha) \left[ \ln(2n\pi) + \frac{\pi}{2}i \right] + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)} + O(1) = \\ &= \left[ -(1+\alpha) \ln(2n\pi) + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)} + O(1) \right] + \left[ 2n\pi - \frac{\pi}{2}(1+\alpha) \right] i, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} |\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}}|^2 &= \left[ -(1+\alpha) \ln(2n\pi) + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)} + O(1) \right]^2 + \left[ 2n\pi - \frac{\pi}{2}(1+\alpha) \right]^2 \sim \\ &\sim [(1+\alpha) \ln(2n\pi)]^2 + (2n\pi)^2 \sim O(n^2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\lambda_n| \sim O(n^\alpha). \quad (3.28)$$

С учетом (3.26) и (3.27) получаем:

$$|\varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)| \leq |\varphi_n| \cdot |E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)| \leq |\varphi_n| \frac{1}{1+|\lambda_n| x^\alpha} \leq |\varphi_n| \frac{1}{|\lambda_n| x^\alpha}.$$

Рассмотрим теперь мажорирующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|}. \quad (3.29)$$

Используя эквивалентность (3.28), мажоранту (3.29) запишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad (1 < \alpha < 2). \quad (3.30)$$

Как видно, ряд (3.30) является сходящимся обобщенным гармоническим рядом, из чего следует абсолютная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  для любых  $0 \leq x \leq 1$  и  $0 \leq t \leq T$ .

Покажем теперь, что при  $t \geq \bar{t} \geq 0$  ( $\bar{t}$  – любое вспомогательное число) ряды производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x; t)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n^2(x; t)}{\partial x^2}$$

сходятся равномерно. Сформулируем дополнительные требования, которым должна удовлетворять функция  $\varphi(x)$ . Предположим сначала, что  $\varphi(x)$  ограничена,  $|\varphi(x)| < M$ , тогда имеет место оценка

$$|\varphi_n| = 2 \left| \int_0^1 \varphi(\xi) z_n(\xi) d\xi \right| < 2M, \quad (3.31)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} \right| &< 2M |\lambda_n \exp\{\lambda_n \bar{t}\} x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^{\alpha})| < \\ &< 2M |\lambda_n| \frac{1}{1 + |\lambda_n|} < 2M |\lambda_n| \frac{1}{|\lambda_n|} < 2M \quad \text{для } t \geq \bar{t}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

и аналогично, учитывая, что

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dz} \right)^m [z^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(z^{\alpha})] &= z^{\beta-m-1} E_{\alpha, \beta-m}(z^{\alpha}), \\ \left| \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} \right| &= 2M \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 [x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^{\alpha})] \exp\{\lambda_n \bar{t}\} \right| = \\ &= 2M |x^{\alpha-3} E_{\alpha, \alpha-2}(\lambda_n x^{\alpha})| \exp\{\lambda_n \bar{t}\} < 2M \quad \text{для } t \geq \bar{t}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Из соотношений (3.32) и (3.33) следует, что при  $t > 0$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  представляет собой функцию, дифференцируемую почленно один раз по  $t$  и два раза по  $x$ , а значит, имеющую производную порядка  $\alpha$ , так как  $1 < \alpha < 2$ .

Покажем, что если функция  $\varphi(x)$  непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  определяет непрерывную функцию при  $t \geq 0$ .

Имеет место неравенство

$$|u(x, t)| < |\varphi_n| \quad (\text{при } t \geq 0, 0 \leq x \leq 1). \quad (3.34)$$

Из (3.34) получаем равномерную сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  при  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , что и доказывает справедливость сделанного выше утверждения, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции  $\varphi(x)$  ряд из модулей коэффициентов Фурье сходится, если  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ .

### **3.3. Задача нахождения плотности потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности**

Для того, чтобы найти решение задачи определения плотности потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности, рассмотрим метод приближенного решения первой краевой задачи для ДДУАД

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D_{0+}^{\alpha} u(x, t).$$

Сделаем вначале постановку задачи определения плотности потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности.

Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D_{0+}^{\alpha} u(x, t), \quad (3.35)$$

удовлетворяющее следующим условиям

$$u(x, 0) = k, \quad (3.35a)$$

$$-D\eta \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(t), \quad (3.356)$$

$$u(x_i, t_j) = c_{ij}, \quad (3.35в)$$

где  $k$  – фоновая концентрация на заданной глубине для данного района мониторинга,  $\varphi(t)$  – плотность потока радона.

Имеет место формула:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^\alpha).$$

В этой формуле бесконечную сумму заменим суммой  $N$  первых слагаемых. Тогда при  $N = 50$  получим

$$u(x, t) \approx \sum_{n=1}^{50} \varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^\alpha).$$

Для идентификации параметра  $\alpha$  (порядка дробной производной) используется **теорема**, согласно которой,

*Если существует единственное решение*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \left[ \int_0^t f_n(t) e^{-\lambda_n t} dt + \varphi_n \right] x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_n x^{\alpha-1}) \quad (3.36)$$

*краевой задачи*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u^\alpha(x, t)}{\partial x^\alpha} + f(x, t), \quad (3.37)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (3.37 а)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (3.37 б)$$

*то дробный порядок  $\alpha$  может быть определен однозначно функцией  $u(x, 0) = \varphi(x)$  и методом идентификации, предложенным в первой главе.*

Рассмотрим **доказательство** приведенной выше теоремы.

Подчинив решение (3.36) краевой задачи (3.37) – (3.37 а) – (3.37 б) начальному условию (3.37 б), приходим к равенству:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \omega_n(x), \quad (3.38)$$

где  $\omega_n(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)$  – система функций, образующая неортогональный базис в гильбертовом пространстве  $L_2(0,1)$ . Для того чтобы определить коэффициенты  $\varphi_n$  в равенстве (3.38) вместе с системой функций  $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)$  будем рассматривать систему функций  $\{z_n\}_{n=1}^\infty = (1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n (1-x)^\alpha)$  – биортогональную к системе  $\{\omega_n\}$ . Вообще говоря, система  $\{z_n\}$  – это система собственных функций задачи, сопряженной рассматриваемой краевой задаче (3.37) – (3.37 а) – (3.37 б).

Умножая обе части равенства (3.38) на систему функций  $z_k(x)$ , получим:

$$\varphi(x)z_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \omega_n(x) z_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

Известно, что для нулей  $\{\lambda_n\}$  функции  $E_{\alpha,\beta}(\lambda)$  ( $\alpha < 2$ ,  $\beta$  – произвольное вещественное число) таких, что

$$\mu \leq |\arg(\lambda)| \leq \pi, \text{ где } \mu \in (\pi\alpha/2, \min(\pi, \alpha\pi)),$$

справедлива следующая оценка

$$|E_{\alpha,\beta}(\lambda)| \leq \frac{C}{1+|\lambda_n|}, \quad (3.40)$$

где  $C$  – произвольное вещественное число.

Для достаточно больших по абсолютной величине нулей  $\{\lambda_n\}$  функции  $E_{\alpha,\beta}(\lambda)$  справедливо следующее соотношение

$$\begin{aligned} \lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} &= 2n\pi i - (1+\alpha) \left[ \ln(2n\pi) + \frac{\pi}{2} i \right] + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)} + O(1) = \\ &= \left[ -(1+\alpha) \ln(2n\pi) + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)} + O(1) \right] + \left[ 2n\pi - \frac{\pi}{2}(1+\alpha) \right] i, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} |\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}}| &= \left[ -(1+\alpha) \ln(2n\pi) + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)} + O(1) \right]^2 + \left[ 2n\pi - \frac{\pi}{2}(1+\alpha) \right]^2 \sim \\ &\sim \left[ -(1+\alpha) \ln(2n\pi) \right]^2 + [2n\pi]^2 \sim O(n^2). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$|\lambda_n| \sim O(n^\alpha). \quad (3.41)$$

Используя оценку (3.40) и (3.41), для систем функций  $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^\infty$  и  $\{z_n(x)\}_{n=1}^\infty$  получим следующие оценки:

$$|\omega_n(x)| = |x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)| \leq \frac{C_1 x^{\alpha-1}}{1 + |\lambda_n x^\alpha|} \leq \frac{C_1}{|\lambda_n| x} \leq \frac{C_1}{n^\alpha x}, \quad C_1 = \text{const}; \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} |z_n(x)| &= |(1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n (1-x)^\alpha)| \leq \\ &\leq \frac{C_2 (1-x)^{\alpha-1}}{1 + |\lambda_n (1-x)^\alpha|} \leq \frac{C_2}{|\lambda_n| (1-x)} \leq \frac{C_2}{n^\alpha (1-x)}, \quad C_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Из оценок (3.42) и (3.43) следует, что в правой части равенства (3.39) функции  $\{\omega_n\}$  и  $\{z_n\}$  ограничены, поэтому обе части равенства (3.39) можно проинтегрировать на отрезке  $[0,1]$ :

$$\int_0^1 \varphi(x) z_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \int_0^1 \omega_n(x) z_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.44)$$

Равенство (3.44) можно записать в виде

$$(\varphi, z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (\omega_n, z_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.45)$$

где

$$(\varphi, z_k) = \int_0^1 \varphi(x) z_k(x) dx, \quad (\omega_n, z_k) = \int_0^1 \omega_n(x) z_k(x) dx.$$

Так как системы функций  $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^\infty$  и  $\{z_n(x)\}_{n=1}^\infty$  биортогональны друг другу, то из равенства (3.45) следует, что  $(\varphi, z_n) = \varphi_n (\omega_n, z_n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Отсюда получаем следующую формулу

$$\varphi_n = \frac{(\varphi, z_n)}{(\omega_n, z_n)}, \quad n=1, 2, \dots \quad (3.46)$$

Так как системы функций  $\{\omega_n(x)\}$  и  $\{z_n(x)\}$  являются также ортонормированными, то выполняется равенство  $(\omega_n, z_n) = \int_0^1 \omega_n(x)z_n(x)dx = 1$  и соответственно, формула (3.46) принимает вид

$$\varphi_n = (\varphi, z_n), n=1,2,\dots \quad (3.47)$$

Таким образом, используя (3.47), получаем, что коэффициенты Фурье  $\varphi_n$  в выражении для решения  $u(x, t)$  задачи (3.37) – (3.37 а) – (3.37 б) определяются через скалярное произведение функций  $\varphi(x)$  и  $z_n(x)$ :

$$\varphi_n = (\varphi, z_n) = \int_0^1 \varphi(x)z_n(x)dx, n=1,2,\dots$$

Перейдем к решению краевой задачи вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u^\beta(x,t)}{\partial x^\beta} + f(x,t), \quad (3.48)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (3.49)$$

$$u(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad (3.50)$$

где  $\frac{\partial u^\beta(x,t)}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(\tau,t)\partial\tau}{(x-\tau)^{\beta-1}}$  – производная дробного порядка  $1 < \beta < 2$

(в смысле Римана-Лиувилля).

Если условие  $u(x, 0) = \varphi(x)$  краевой задачи (3.36) – (3.37) – (3.38) совпадает с начальным условием (3.50) краевой задачи (3.48) – (3.49) – (3.50), то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n x^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\bar{\lambda}_n x^\beta) \quad \forall x \in (0,1) \quad (3.51)$$

Используя неравенство (3.41), левую часть равенства (3.51) оценим следующим образом

$$|\varphi_n x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)| \leq C x^{\alpha-1} \frac{1}{1 + |\lambda_n x^\alpha|}. \quad (3.52)$$

Заметим, что обе части равенства (3.51) являются аналитическими функциями в области  $\text{Re}(x) > 0$ , поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n x^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\bar{\lambda}_n x^\beta) \quad \forall x > 0. \quad (3.53)$$

Известно [8

2], что для функции  $z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda z^\alpha)$ , где  $0 < \alpha < 2$  и  $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$

справедливо равенство

$$z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda z^\alpha) = -\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\lambda^{-k-1}}{\Gamma(-\alpha k)} \frac{1}{z^{\alpha k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\alpha N+1}}\right), \quad (3.54)$$

где  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  и  $\mu \leq |\arg(\lambda z^\alpha)| \leq \pi$ .

Учитывая (3.54) для левой части равенства (3.53), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left[ -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2 x^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right) \right]. \quad (3.55)$$

Из (3.55) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} -\varphi_n \cdot \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2 x^{1+\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} -\bar{\varphi}_n \cdot \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}_n^2 x^{1+\beta}} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \cdot O\left(\frac{1}{x^{\beta+1}}\right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

Покажем, что из (3.56) следует, что  $\alpha = \beta$ . Действительно, положим, что  $x \rightarrow \infty$  при  $\alpha > \beta$ , тогда умножение обеих частей равенства (3.56) на  $x^{\beta+1}$  приводит к равенству

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} -\varphi_n \cdot \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2 x^{\alpha-\beta}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot O\left(\frac{1}{x^{\alpha-\beta}}\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} -\bar{\varphi}_n \cdot \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}_n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \cdot \end{aligned} \quad (3.57)$$

Рассмотрим теперь мажоранты рядов, полученных в левой и правой частях равенства (3.57). Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\bar{\lambda}_n^2} \right|. \quad (3.58)$$

Учитывая эквивалентность (3.42), для равенства (3.58) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{O(n^2)},$$

из чего следует сходимость мажорант  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \right|^2$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \right|$ , а, следовательно, и рядов в обеих частях равенства (3.57).

При условии, что  $x \rightarrow \infty$ , для левой части равенства (3.57) получаем значение равное нулю, а для правой части – значение, отличное от нуля. То есть, при  $\alpha > \beta$  или, вообще, при  $\alpha \neq \beta$  получаем противоречие с равенством (3.56).

Из всего вышеизложенного следует, что только при равных дробных параметрах  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. при  $\alpha = \beta$ , краевые задачи (3.36) – (3.37) – (3.38) и (3.48) – (3.49) – (3.50) при равных начальных условиях могут иметь одинаковые решения. Это означает, что краевая задача (3.36) – (3.37) – (3.38) имеет единственное решение при заданном порядке  $\alpha$  дробной производной.

Для построения приближенного решения задачи (3.36), (3.37), (3.38) предлагается следующий алгоритм, написанный в среде Matlab R2017b:

```
clear
clc
global a
a=3/2;
global s0 s1 s2 s3 s4 s5 s6 s7 s8 s9 s10
s0=1/(gamma(a+a*0));
s1=1/(gamma(a+a*1));
s2=1/(gamma(a+a*2));
s3=1/(gamma(a+a*3));
s4=1/(gamma(a+a*4));
s5=1/(gamma(a+a*5));
s6=1/(gamma(a+a*6));
s7=1/(gamma(a+a*7));
```

```

s8=1/(gamma(a+a*8));
s9=1/(gamma(a+a*9));
s10=1/(gamma(a+a*10));
p=[s10 s9 s8 s7 s6 s5 s4 s3 s2 s1 s0];
r=roots(p);
global l
l=sort(r)
for i=1:10
    [I11,cnt11]=quad(@(x)2*x.*(1-x).^(a-1).*(s0+s1*(l(i))*(1-x).^a).^1+s2*(l(i))*(1-x).^a).^2+...
        s3*(l(i))*(1-x).^a).^3+s4*(l(i))*(1-x).^a).^4+s5*(l(i))*(1-x).^a).^5+s6*(l(i))*(1-x).^a).^6+...
        s7*(l(i))*(1-x).^a).^7+s8*(l(i))*(1-x).^a).^8+s9*(l(i))*(1-x).^a).^9+s10*(l(i))*(1-x).^a).^10),0,0.5);
    [I12,cnt12]=quad(@(x)(4/3-2/3*x).*(1-x).^(a-1).*(s0+s1*(l(i))*(1-x).^a).^1+...
        s2*(l(i))*(1-x).^a).^2+ s3*(l(i))*(1-x).^a).^3+s4*(l(i))*(1-x).^a).^4+...
        s5*(l(i))*(1-x).^a).^5+s6*(l(i))*(1-x).^a).^6+ s7*(l(i))*(1-x).^a).^7+...
        s8*(l(i))*(1-x).^a).^8+s9*(l(i))*(1-x).^a).^9+s10*(l(i))*(1-x).^a).^10),0.5,1);
    ff(i)=I11+I12;
end
ff
sol=0;
for k=1:10
    sol=sol+ff(k)*x.^(a-1)
end
for i=1:10
    [I11,cnt11]=quad(@(x)2*x.*(1-x).^(a-1).*(s0+s1*(l(i))*(1-x).^a).^1+s2*(l(i))*(1-x).^a).^2+...
        s3*(l(i))*(1-x).^a).^3+s4*(l(i))*(1-x).^a).^4+s5*(l(i))*(1-x).^a).^5+s6*(l(i))*(1-x).^a).^6+...

```

```
s7*(l(i)*(1-x).^a).^7+s8*(l(i)*(1-x).^a).^8+s9*(l(i)*(1-x).^a).^9+s10*(l(i)*(1-x).^a).^10),0,0.5);
```

```
[I12,cnt12]=quad(@(x)(4/3-2/3*x).*(1-x).^(a-1).*(s0+s1*(l(i)*(1-x).^a).^1+s2*(l(i)*(1-x).^a).^2+...
```

```
s3*(l(i)*(1-x).^a).^3+s4*(l(i)*(1-x).^a).^4+s5*(l(i)*(1-x).^a).^5+s6*(l(i)*(1-x).^a).^6+...
```

```
s7*(l(i)*(1-x).^a).^7+s8*(l(i)*(1-x).^a).^8+s9*(l(i)*(1-x).^a).^9+s10*(l(i)*(1-x).^a).^10),0.5,1);
```

```
ff(i)=I11+I12;
```

```
end
```

```
ff
```

```
sol=0;
```

```
for k=1:10
```

```
sol=sol+ff(k)*x.^(a-1)
```

```
end
```

Получим следующие характеристики решения этого уравнения. Первые 10 нулей функции при замене её вида  $E_{\alpha,\alpha}(\lambda)$  при  $\alpha=3/2$ :

$$E_{\alpha,\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+\alpha)} + \frac{\lambda^2}{\Gamma(\alpha+2\alpha)} + \dots + \frac{\lambda^{10}}{\Gamma(\alpha+10\alpha)};$$

```
z1=-5.075432607289122 + 0.0000000000000000i
```

```
z2=-14.693125447872484 + 0.0000000000000000i
```

```
z3=-15.001776654315286 - 6.175190776985366i
```

```
z4=-15.001776654315286 + 6.175190776985366i
```

```
z5=-12.702880346631002 -14.665791021568882i
```

```
z6=-12.702880346631002 +14.665791021568882i
```

```
z7= -5.118110131503308 -24.274070062273850i
```

```
z8= -5.118110131503308 +24.274070062273850i
```

```
z9= 12.940470206313410 -33.473411767087732i
```

```
z10= 12.940470206313410 +33.473411767087732i
```

Располагаем модули нулей в порядке убывания: z10, z9, z8,..., z2, z1.

Далее считаем  $\phi_n$ , при заданной

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ \frac{4-2x}{3}, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\phi_1 = 0.204044249996967 + 0.0000000000000000i$$

$$\phi_2 = 0.059191298033412 + 0.0000000000000000i$$

$$\phi_3 = 0.041445425608307 - 0.029133472405196i$$

$$\phi_4 = 0.041445425608307 + 0.029133472405196i$$

$$\phi_5 = -0.007734306888190 - 0.028282816498061i$$

$$\phi_6 = -0.007734306888190 + 0.028282816498061i$$

$$\phi_7 = -0.006571026762936 + 0.185853948184785i$$

$$\phi_8 = -0.006571026762936 - 0.185853948184785i$$

$$\phi_9 = 4.837789236364265 + 5.171710200942336i$$

$$\phi_{10} = 4.837789236364265 - 5.171710200942336i$$

Чтобы оценить порядок точности решения, возьмем в бесконечной сумме

$N=20$ . Счет проведем по той же схеме, что и ранее. Получим

$$z_1 = -5.07543002954341$$

$$z_2 = -17.4720153397254$$

$$z_3 = -32.5092964896613$$

$$z_4 = -35.4584486727518$$

$$z_5 = -36.5912859512712 - 10.693578910293i$$

$$z_6 = -36.5912859512712 + 10.693578910293i$$

$$z_7 = -35.5040145232784 - 20.9453869870746i$$

$$z_8 = -35.5040145232784 + 20.9453869870746i$$

$$z_9 = -31.9699760345811 - 32.0144183584324i$$

$$z_{10} = -31.9699760345811 + 32.0144183584324i$$

$$z_{11} = -25.2320876582448 - 43.7562793536097i$$

$$z_{12} = -25.2320876582448 + 43.7562793536097i$$

$$z_{13} = -14.2265649968089 - 55.8034941647279i$$

$$z_{14} = -14.2265649968089 + 55.8034941647279i$$

$$z_{15} = 2.77221443730327 - 67.4936280421291i$$

$$z_{16} = 2.77221443730327 + 67.4936280421291i$$

$$z_{17} = 29.1062261104992 - 77.4531074654252i$$

$$z_{18} = 29.1062261104992 + 77.4531074654252i$$

$$z_{19} = 73.7226858034134 - 81.9572626204321i$$

$$z_{20} = 73.7226858034134 + 81.9572626204321i$$

Далее считаем  $\phi_n$

$$\phi_1 = 0.137401421100116$$

$$\phi_2 = -0.0308223487266898$$

$$\phi_3 = -0.00272043831357143$$

$$\phi_4 = -0.000862402968477541$$

$$\phi_5 = 0.00327285462119446 + 0.00253480897830912i$$

$$\phi_6 = 0.00327285462119446 - 0.00253480897830912i$$

$$\phi_7 = 0.00860177592247567 - 0.00259899756689706i$$

$$\phi_8 = 0.00860177592247567 + 0.00259899756689706i$$

$$\phi_9 = 0.00104788292634568 - 0.010800335702171i$$

$$\phi_{10} = 0.00104788292634568 + 0.010800335702171i$$

$$\phi_{11} = -0.0128137962410719 + 0.112630001132604i$$

$$\phi_{12} = -0.0128137962410719 - 0.112630001132604i$$

$$\phi_{13} = 1.52094820160761 + 1.98293743502147i$$

$$\phi_{14} = 1.52094820160761 - 1.98293743502147i$$

$$\phi_{15} = 58.7183734083227 + 34.8297281262009i$$

$$\phi_{16} = 58.7183734083227 - 34.8297281262009i$$

$$\phi_{17} = 3176.87182573119 + 2643.67183509621i$$

$$\phi_{18} = 3176.87182573119 - 2643.67183509621i$$

$$\phi_{19} = -491228.693249359 + 1245129.74242596i$$

$$\phi_{20} = -491228.693249359 - 1245129.74242596i$$

Оценим разность

$$\left| \sum_{n=1}^{20} \delta_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha) - \sum_{n=1}^{10} \delta_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha) \right| \leq 0,17.$$

Последнее неравенство показывает, что плотность потока радона  $u(x, t)$  можно считать по формуле

$$u(x, t) \approx \sum_{n=1}^N \delta_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha).$$

Результаты, полученные в настоящей диссертационной работе численными методами, были сопоставлены с экспериментальными данными, взятыми из статьи П.П. Фирстова с соавт. (Фирстов П.П. и др. О связи динамики подпочвенного радона и водорода с сейсмической активностью Камчатки в июле – августе 2004 г. // Вулканология и сейсмология. 2006. № 4. С. 1–11). Некоторые экспериментальные данные из этой статьи приведены в Таблице 3.1 [23].

Табл. 3.1. Каталог землетрясений Камчатки с  $K \geq 10.5$  за период 12 июля – 30 августа 2004 года

№	Дата, дд. мм. г.	Время, ч.ч:мм:сс	Широта, гр. с.ш.	Долгота, гр. в.д.	Глубина, км.	Энергетический класс: экспериментальные данные	Энергетический класс: расчетные данные
1	14.07.2004	07:23:11	51.02	158.10	35	11.2	10 ±0.8
2	16.07.2004	08:24:49	49.79	156.99	19	12.5	11.8 ±0.8
3	26.07.2004	15:34:13	53.59	160.65	38	11.5	11.6 ±0.8
4	02.08.2004	06:23:01	53.82	168.74	20	11.4	11.8 ±0.8
5	04.08.2004	09:48:29	52.22	159.92	11	12.9	11.9 ±0.8
6	04.08.2004	09:51:04	52.29	159.96	11	12.2	12.3 ±0.8
7	04.08.2004	09:53:07	52.27	159.90	19	10.9	11.4 ±0.8
8	04.08.2004	11:03:31	52.24	159.84	5	13.0	12.8 ±0.8
9	04.08.2004	20:05:15	52.17	159.84	5	12.2	11.8 ±0.8
10	04.08.2004	21:15:11	52.15	159.86	4	13.0	12.4 ±0.8
11	04.08.2004	22:56:06	52.18	159.77	5	12.1	12.6 ±0.8
12	04.08.2004	23:56:41	52.22	159.94	6	10.9	11.8 ±0.8
13	16.08.2004	07:01:13	53.30	160.59	27	10.9	11 ±0.8
14	17.08.2004	08:19:51	55.39	166.43	37	11.2	11 ±0.8
15	18.08.2004	19:01:10	53.18	162.06	33	10.7	11 ±0.8
16	23.08.2004	14:07:15	54.27	161.34	35	10.5	11 ±0.8
17	25.08.2004	15:19:07	50.34	158.02	53	10.5	11 ±0.8
18	29.08.2004	00:55:05	55.31	166.31	40	11.5	11 ±0.8
19	30.08.2004	12:23:21	49.39	157.94	52	13.5	12.8 ±0.8

Анализ данных в Таблице 3.1 показывает, что имеет место практически полное совпадение натуральных измерений с расчетными показателями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представим основные результаты диссертационного исследования.

Проведено исследование по качественному анализу движений нелинейного фрактального осциллятора с вязкоупругим демпфированием при различных предположениях относительно выражения свойства вязкоупругости через производные Римана- Лиувилля и Капуто первого и второго порядков. Доказаны теоремы о притяжении движений к положениям равновесия, об асимптотической устойчивости и неустойчивости изолированного положения равновесия. Сделан вывод о том, то действие вязкоупругого демпфирования при принятых предположениях аналогично действию вязкого трения. Сделан вывод о предельных свойствах движений линейного фрактального осциллятора под действием возмущающей силы.

Исследована задача об основных осцилляционных свойствах оператора, порожденного уравнением Бегли-Торвика с краевыми условиями Дирихле, моделирующим изменение параметров деформации и прочности полимербетона при нагружении. Доказаны теоремы, определяющие условия, при которых первое собственное значение является положительным и имеет кратность равную 1, а соответствующая собственная функция не обращается в нуль на заданном интервале. Доказанные теоремы развивают и обобщают некоторые известные результаты.

Рассмотрена задача о численных методах решения уравнения фрактального линейного осциллятора с показателем дробной производной  $1 < \alpha < 2$ . Разработаны алгоритмы и программы численного решения посредством трех методов: разностного, квадратичного алгоритма и преобразования. Одно из полученных решений подтвердило теоретические выводы, указанные выше. Проведены численные решения на основе всех трех методов уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием. Результаты компьютерного моделирования выявили совпадение численных решений на основе всех этих методов с достаточной степенью точности. Проведена качественная оценка полученных численных моделей осциллятора на

основе дисперсионного анализа. Графики вынужденных колебаний осциллятора могут быть использованы для идентификации параметров фрактального уравнения Бегли-Торвика. В качестве приложения, на основе разработанного в диссертации подхода получено численное решение задачи об идентификации показателя в дробной производной уравнения, моделирующего изменение параметров деформации и прочности при нагружении одного типа полимербетона. Получено совпадение известных экспериментальных данных с результатами проведенного в диссертации численного решения, а также с имеющимися в работах разных авторов результатами решения данной задачи иными численными методами.

Исследована первая краевая задача для уравнения колебаний струны с дробной производной порядка  $\alpha \in (1,2)$  по пространственной переменной. Применением метода Фурье решение данной краевой задачи сведено к решению двухточечной задачи Дирихле. Решение этой задачи достигается нахождением соответствующих собственных значений и построением ортогональной системы собственных функций и биортогональной к ней системы. Разработан алгоритм вычисления соответствующих коэффициентов ряда Фурье. По разработанной программе проведены вычисления собственных значений по моделированию поперечных колебаний гранул в указанной выше прикладной задаче с целью идентификации параметра  $\alpha$ . Вновь получено отмеченное совпадение с экспериментальными данными.

Рассмотрена задача моделирования процесса адвекции радона в сложных геологических средах на основе диффузионно-адвекционной модели с учетом неоднородной слоистой фрактальной структуры геологической среды. Исследована задача по определению фрактальной размерности среды. На основе известных материалов по вычислению плотности радона найдено соответствующее значение коэффициента Херста.

Исследовано решение краевой задачи одномерного фрактального дифференциального уравнения адвекции-диффузии, моделирующего многие физические процессы, в том числе плотность потока радона по его концентрации на различных

глубинах земной поверхности. Получено решение этого уравнения на основе определенного видоизменения метода Фурье, представленного в п. 4. Доказана теорема об однозначном определении порядка дробной производной при условии существования единственного решения в форме Фурье. Для построения приближенного решения этой задачи разработаны алгоритм и программа, написанные в среде Matlab R2017b.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алероев Т.С.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02/Алероев Темирхан Султанович. – М., 2000. – 36 с.
2. *Алероев Т.С.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02/Алероев Темирхан Султанович. – М., 2000. – 136 с.
3. *Алероев Т.С.* Исследование характеристик полимербетона методами дробного исчисления // Вестник Академии наук Чеченской Республики. – 2019. – № 4 (47). – С. 5–8.
4. *Алероев Т.С., Хасамбиев М.В., Исаева Л.М.* Об одной краевой задаче для дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // Труды МАИ. – 2015. – № 81. – 14 с.
5. *Алероев Т.С., Хасамбиев М.В., Хамзатова З.У.* Некоторые вопросы теории линейных дифференциальных операторов дробного порядка и их применение // Труды МАИ. – 2015. – № 84. – 22 с.
6. *Алероева Х.Т., Алероев Т.С.* Некоторые применения дробного исчисления // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2019) : Сборник трудов конференции, Москва, 04–06 декабря 2019 года. – Москва: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, 2020. – С. 274–277.
7. *Бердышев А.С., Мадияров М.Н., Алимбекова Н.Б.* Моделирование процессов переноса на основе уравнении с частными производными дробного порядка // МАК: Математики – Алтайскому краю: Сборник трудов Всероссийской конференции по математике с международным участием, Барнаул, 27 июня

- 01 2019 года / Главный редактор профессор Н.М. Оскорбин. – Барнаул: Алтайский государственный университет, 2019. – С. 234–237.
8. *Гачаев А.М., Умалатов С.Д.* К гипотезе Миттаг - Леффлера // Естественные и математические науки в современном мире: Сборник научных трудов межвузовского семинара, Махачкала, 15 мая 2023 года. – Махачкала: Типография ФОРМАТ, 2023. – С. 39–43.
  9. *Гачаев А.М., Хасамбиев М.В.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка // Вестник Академии наук Чеченской Республики. – 2016. – № 2. – С. 5–8.
  10. *Гезенцевей Л.Б., Горельшнев Н.В., Богуславский А.М.* Дорожный асфальтобетон. – М.: Транспорт, 1985. – 350 с.
  11. *Горельшнев Н.В.* Асфальтобетон и другие битумоминеральные материалы. – М.: Можайск: Терра, 1995. – 176 с.
  12. *Диткин В.А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 542 с.
  13. *Елсайед А.* Методика параметрической идентификации порядка дробной производной в модели Бегли-Торвика // Научно-технический вестник Поволжья. – 2020. – № 4. – С. 66–69.
  14. *Ерохин С.В.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел с использованием методов дробного исчисления: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18/Ерохин Сергей Владимирович. – Пенза, 2016.
  15. *Ерохин С.В., Алероев Т.С.* Параметрическая идентификация порядка дробной производной в модели Бегли-Торвика // Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30, № 7. – С. 93–102.
  16. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 349 с.
  17. *Кехарсаева Э.Р., Алероев Т.С.* Модель деформационно-прочностных характеристик хлорсодержащих полиэфиров на основе производных дробного порядка // Пластические массы. – 2001. – № 3. – С. 35–36.

18. *Кехарсаева Э.Р., Пирожков В.Г.* Моделирование изменения деформационно-прочностных характеристик асфальтобетона при нагружении с помощью дробного исчисления // Сборник трудов 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред". – Москва: ИПРИМ РАН, 2016. – С. 104–109.
19. *Маньковский В.А., Сапунов В.Т.* Номографические свойства дробно-экспоненциальной Э-функции при описании линейной вязкоупругости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2000. – Т. 66, № 3. – С. 47–50.
20. *Мейланов Р.П., Янполов М.С.* Особенности фазовой траектории" фрактального" осциллятора // Письма в Журнал технической физики. – 2002. – Т. 28, № 1. – С. 67–73.
21. *Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г.* Математические модели нелинейной вязкоупругости с операторами дробного интегро-дифференцирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 147–161.
22. *Паровик Р.И.* Существование хаотических режимов дробного аналога осциллятора типа Дуффинга // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 378–393.
23. *Паровик Р.И., Фирстов П.П.* Алгоритм расчета плотности потока радона ( $^{222}\text{Rn}$ ) с поверхности земли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2008. – № 3 (4). – С. 96–101.
24. *Паровик Р., Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. и др.* Математическое моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности: отчет о НИР № 22-11-00064 от 12.05.2022. М.: Российский научный фонд, 2022.
25. *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2002. – 144 с.

26. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. – Ульяновск: УлГУ, 2008. – 512 с.
27. *Хасамбиев М.В.* Краевая задача для многомерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // Вестник МГСУ. – 2015. – № 6. – 8 с.
28. *Хасамбиев М.В., Алероев Т.С.* Краевая задача для одномерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // Вестник МГСУ. – 2014. – № 6. – 4 с.
29. *Яковлева В.С.* Диффузионно-адвективный перенос радона в многослойных геологических средах // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2009. – Т. 315, № 2.
30. *Agibalova A.V.* On the completeness of systems of root functions of differential operators of fractional order with matrix coefficients // Math. Notes. – 2010. – Vol. 88, no. 2. – P. 287–290.
31. *Agibalova A.V.* On the completeness of a system of eigenfunctions and associated functions of differential operators of the orders  $(2 - \varepsilon)$  and  $(1 - \varepsilon)$  // J. Math. Sci. – 2011. – Vol. 174, no. 4. – P. 425–436.
32. *Aleroev T., Aleroeva H., Kirianova L.* One method for the boundary value problem eigenvalues calculating for a second-order differential equation with a fractional derivative // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. – 2019. – Vol. 10, no. 01. – P. 1941004.
33. *Aleroev T.S., Erokhin S.V.* Parameter identification of fractional derivative order in Bagley–Torvik model // Matem. Mod. – 2018. – Vol. 30, no. 7. – P. 93–102.
34. *Andreev A., Aleroev T., Khasambiev M., Aleroeva H.* Differential Equations with Fractional Derivatives for Studying an Oscillator with Viscoelastic Damping // Proceedings of FORM 2021. Lecture Notes in Civil Engineering. – 2021. – Vol. 170. – Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-79983-043>
35. *Andreev A.S., Peregodova O.A.* On the stability and stabilization problems of Volterra integro-differential equations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 14, no. 3. – P. 387–407.

36. *Bagley R.L., Torvik P.J.* A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity // *Journal of Rheology*. – 1983. – Vol. 27, no. 3. – P. 201–203.
37. *Bagley R.L., Torvik P.J.* Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // *AIAA Journal*. – 1983. – Vol. 21, no. 5. – P. 741–748.
38. *Benson D. A.* The fractional advection-dispersion equation: Development and application. – University of Nevada, Reno, 1998.
39. *Benson D. A. et al.* Fractional dispersion, Lévy motion, and the MADE tracer tests // *Transport in porous media*. – 2001. – Vol. 42. – P. 211–240.
40. *Berkowitz B., Scher H.* On characterization of anomalous dispersion in porous and fractured media // *Water Resources Research*. – 1995. – Vol. 31, no. 6. – P. 1461–1466.
41. *Berkowitz B., Scher H.* Theory of anomalous chemical transport in random fracture networks // *Physical Review E*. – 1998. – Vol. 57, no. 5. – P. 5858–5869.
42. *Bhattacharya R., Gupta V.K.* Application of central limit theorems to solute dispersion in saturated porous media: from kinetic to field scales // *IN: Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Media*. Academic Press, Inc., San Diego, California. – 1990. – P. 61–96. 43 ref. NSF grant Nos. ECE-8513980, ECE-8513638, and DMS-8503358. – 1990.
43. *Brusseau M.L., Jessup R.E., Rao P.S.C.* Modeling the transport of solutes influenced by multiprocess nonequilibrium // *Water Resources Research*. – 1989. – Vol. 25, no. 9. – P. 1971–1988.
44. *Burns E.R.* Results of 2-dimensional Sandbox Experiments: Longitudinal Dispersivity Determination and Seawater Intrusion of Coastal Aquifers : Diss. – University of Nevada, Reno, 1994.
45. *Compte A.* Stochastic foundations of fractional dynamics // *Physical Review E*. – 1996. – Vol. 53, no. 4. – P. 4191–4193.
46. *Coats K. H., Smith B. D.* Dead-end pore volume and dispersion in porous media // *Society of Petroleum Engineers Journal*. – 1964. – Vol. 4, no. 01. – P. 73–84.

47. *Chaves A. S.* A fractional diffusion equation to describe Lévy flights // *Physics letters A.* – 1998. – Vol. 239, no. 1–2. – P. 13–16.
48. *Cushman J. H., Hu X., Ginn T. R.* Nonequilibrium statistical mechanics of preasymptotic dispersion // *Journal of Statistical Physics.* – 1994. – Vol. 75. – P. 859–878.
49. *Dagan G.* Time-dependent macrodispersion for solute transport in anisotropic heterogeneous aquifers // *Water Resources Research.* – 1988. – Vol. 24, no. 9. – P. 1491–1500.
50. *Davies B.* *Integral Transforms and Their Applications.* – Springer-Verlag, New York, 1978.
51. *De Josselin de Jong G.* Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits // *Eos, Transactions American Geophysical Union.* – 1958. – Vol. 39, no. 1. – P. 67–74.
52. *Deng F. W., Cushman J. H., Delleur J. W.* A fast Fourier transform stochastic analysis of the contaminant transport problem // *Water resources research.* – 1993. – Vol. 29, no. 9. – P. 3241–3247.
53. *Garabedian S. P. et al.* Large-scale natural gradient tracer test in sand and gravel, Cape Cod, Massachusetts: 2. Analysis of spatial moments for a nonreactive tracer // *Water Resources Research.* – 1991. – Vol. 27, no. 5. – P. 911–924.
54. *Giona M., Roman H. E.* A theory of transport phenomena in disordered systems // *The Chemical Engineering Journal.* – 1992. – Vol. 49, no. 1. – P. 1–10.
55. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus and stable probability distributions // *Archives of Mechanics.* – 1998. – Vol. 50, no. 3. – P. 377–388.
56. *Haggerty R., Gorelick S. M.* Multiple-rate mass transfer for modeling diffusion and surface reactions in media with pore-scale heterogeneity // *Water Resources Research.* – 1995. – Vol. 31, no. 10. – P. 2383–2400.
57. *Haggerty R., McKenna S.A., Meigs L.* Power-law behavior of groundwater tracer test breakthrough curves at late time // *Eos Trans. AGU. Fall Meet. Suppl.* – 1998. – Vol. 79 (45). – F294.

58. *Henry H. R.* Effects of dispersion on salt encroachment in coastal aquifers // In "Seawater in Coastal Aquifers". US Geological Survey, Water Supply Paper. – 1964. – Vol. 1613. – P. C70–C80.
59. *Hess K. M., Wolf S. H., Celia M. A.* Large-scale natural gradient tracer test in sand and gravel, Cape Cod, Massachusetts: 3. Hydraulic conductivity variability and calculated macrodispersivities // *Water Resources Research*. – 1992. – Vol. 28, no. 8. – P. 2011–2027.
60. *Hinze M., Schmidt A., Leine R.I.* The direct method of Lyapunov for nonlinear dynamical systems with fractional damping // *Nonlinear Dyn.* – 2020. – Vol. 102. – P. 2017–2037.
61. *Huang F., Liu F.* The fundamental solution of the space–time fractional advection–dispersion equation // *J. Appl. Math. Comput.* – 2005. – Vol. 18. – P. 339–350.
62. *Ibrahim B., Dong Q., Fan Z.* Existence for boundary value problems of two-term Caputo fractional differential equations // *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. – 2017. – No. 10. – P. 511–520.
63. *Ingman D., Suzdalnitsky J.* Control of damping oscillations by fractional differential operator with time-dependent order // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2004. – Vol. 193. – P. 5585–5595.
64. *Ingman D., Suzdalnitsky J.* Iteration method for equation of viscoelastic motion with fractional differential operator of damping // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2001. – Vol. 190. – P. 5027–5036.
65. *Kapoor V., Gelhar L. W.* Transport in three-dimensionally heterogeneous aquifers: 2. Predictions and observations of concentration fluctuations // *Water Resources Research*. – 1994. – Vol. 30, no. 6. – P. 1789–1801.
66. *Karniadakis G.E.* Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vol. 3. Numerical Methods. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 350 p. <https://doi.org/10.1515/9783110571684>

67. Kochubei A., Luchko Yu. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vol. 2. Fractional Differential Equations. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 590 p. <https://doi.org/10.1515/9783110571660>.
68. LeBlanc D. R. et al. Large-scale natural gradient tracer test in sand and gravel, Cape Cod, Massachusetts: 1. Experimental design and observed tracer movement // Water Resources Research. – 1991. – Vol. 27, no. 5. – P. 895–910.
69. Lévy P. Variables aléatoires. – Paris. Gauthier-Villars, 1937.
70. Li L. et al. Mass transfer in soils with local stratification of hydraulic conductivity // Water Resour. Res. – 1994. – Vol. 30, no. 11. – P. 2891–2900.
71. Malamud M.M., Oridoroga L.L. Analog of the Birkhoff theorem and the completeness results for fractional order differential equations // Russ. J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 8, no. 3. – P. 287–308.
72. Meerschaert M. M., Benson D. A., Bäumer B. Multidimensional advection and fractional dispersion // Physical Review E. – 1999. – Vol. 59, no. 5. – P. 5026–5028.
73. Montroll E. W., Weiss G. H. Random walks on lattices. II // Journal of Mathematical Physics. – 1965. – Vol. 6, no. 2. – P. 167–181.
74. Naber M. Linear fractionally damped oscillator // International Journal of Differential Equations. – 2010. – Vol. 2010.
75. Neuman S. P. Eulerian-Lagrangian theory of transport in space-time nonstationary velocity fields: Exact nonlocal formalism by conditional moments and weak approximation // Water Resources Research. – 1993. – Vol. 29, no. 3. – P. 633–645.
76. Neuman S. P., Zhang Y. K. A quasi-linear theory of non-Fickian and Fickian subsurface dispersion: 1. Theoretical analysis with application to isotropic media // Water Resources Research. – 1990. – Vol. 26, no. 5. – P. 887–902.
77. Painter S., Cvetkovic V., Selroos J.O. Transport and retention in fractured rock: Consequences of a power-law distribution for fracture lengths // Physical Review E. – 1998. – Vol. 57, no. 6. – P. 6917–6922.
78. Pandey R.K., Singh O.P., Baranwal V.K. An analytic algorithm for the space-time fractional advection–dispersion equation // Comput. Phys. Comm. – 2011. – Vol. 182. – P. 1134–1144.

79. *Parovik R.I.* Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 10, Iss. 1. – P. 16–21.
80. *Parovik R.I.* Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. – 2016. – Vol. 26, no. 3.
81. *Parovik R.I.* Mathematical model of a wide class memory oscillators // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, вып. 2. – С. 108–122.
82. *Parovik R.I.* Research of the stability of some hereditary dynamic systems // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. – 2018. – Vol. 1141, no. 1. – P. 012079.
83. *Petráš I.* Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. – Springer Science & Business Media, 2011.
84. *Petráš I.* (ed.). Handbook of Fractional Calculus with Applications. – De Gruyter, 2019.
85. *Saichev A. I., Zaslavsky G. M.* Fractional kinetic equations: solutions and applications // Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science. – 1997. – Vol. 7, no. 4. – P. 753–764.
86. *Samko S. G.* Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. – Gordon and Breach, Newark, N. J., 1993.
87. *Samorodnitsky G., Taqqu M.S.* Stable Non-Gaussian Models with Infinite Variance. – Chapman-Hall, New York, 1994.
88. *Sedletskii A. M.* Asymptotic formulas for zeros of a function of Mittag-Leffler type // Anal. Math. – 1994. – Vol. 20. – P. 117–132.
89. *Sedletskii A. M.* On zeros of functions of Mittag-Leffler type // Mat. Zametki. – 2000. – Vol. 68, no. 5. – P. 710–724.
90. *Serbina L.* The solution of an initial-boundary value problem of the filtration theory with nonlocal boundary Condition // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. – 2014. – Vol. 19, no. 3. – P. 488–502.

91. *Sethna J.P.* Entropy, Order Parameters, and Complexity. – Clarendon press Oxford, 2011. – 351 p.
92. *Shen S. J., Liu F. W., Anh V., Turner I.* The fundamental solution and numerical solution of the Riesz fractional advection–dispersion equation // IMA J. Appl. Math. –2008. – Vol. 73, no. 6. – P. 850–872.
93. *Tarasov V.E.* Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vol. 4 Applications in Physics, Part A. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 306 p.  
<https://doi.org/10.1515/9783110571707>
94. *Tarasov V.E.* Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vol. 5. Applications in Physics, Part B. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 319 p.  
<https://doi.org/10.1515/9783110571721>
95. *Taylor G. I.* Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube //Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1953. – Vol. 219, no. 1137. – P. 186–203.
96. *Thierrin J., Kitanidis P. K.* Solute dilution at the Borden and Cape Cod groundwater tracer tests // Water resources research. – 1994. – Vol. 30, no. 11. – P. 2883–2890.
97. *Tverdyi D. et al.* Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance // E3S Web of Conferences. EDP Sciences. – 2020. – Vol. 196. – P. 02027.
98. *Van Genuchten M. T., Wierenga P. J.* Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions // Soil Science Society of America Journal. – 1976. – Vol. 40, no. 4. – P. 473–480.
99. *Wang L. et al.* Investigation and application of fractal theory in cement-based materials: A review //Fractal and Fractional. – 2021. – T. 5. – №. 4. – C. 247.
100. *Wang Z.H., Du M.L.* Asymptotical behavior of the solution of a SDOF linear fractionally damped vibration system // Shock and Vibration. – 2011. – Vol. 18, no. 1-2. – P. 257–268.

101. *Zhuang P. H. et. al.* Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2009. – Vol. 47. – P. 1760–1781.

## Приложение 1.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
**№ 2020660079**

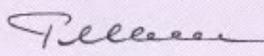
**«Расчет плотности потока радона на различных глубинах  
земной поверхности»**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Грозненский государственный нефтяной технический университет имени академика М.Д. Миллионщикова» (RU)*

Автор: *Хасамбиев Мохаммад Вахаевич (RU)*

Заявка № **2020618919**  
Дата поступления **11 августа 2020 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **27 августа 2020 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Иблиев**

