На правах рукописи

Хасамбиев Мохаммад Вахаевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ НАСЛЕДСТВЕННОЙ МЕХАНИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ульяновск – 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ульяновский государственный университет» на кафедре информационной безопасности и теории управления

Научный руководитель: **Андреев Александр Сергеевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Орлов Виктор Николаевич**
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», кафедра высшей математики, профессор кафедры

Анкилов Андрей Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет», кафедра «Высшая математика», заведующий кафедрой

Ведущая организация: ФГБУН Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения РАН

Защита состоится «25» сентября 2024 г. в 13.00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.422.04 при ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет», расположенном по адресу: г. Ульяновск, ул. Набережная реки Свияги, д. 106, корп. 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа – https://www.ulsu.ru, с авторефератом – на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации – https://vak.minobrnauki.gov.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан «____» ___________ 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Волков Максим Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Основой для строительства домов, туннелей, портов, плотин, дорог и т. д. являются материалы из цемента, битума и полимеров, включая цементный раствор, бетон, асфальт и асфальтобетон в том числе, с полимерными наполнителями. Развитие передовых и эффективных методов испытаний в последние десятилетия показало, что свойства указанных материалов на макроуровне, например, механические свойства, устойчивость, проницаемость и долговечность неразрывно связаны с их структурой в микро- и мезо-масштабах[1]. Особенно важно, что эта структура вызвала изменение классических соотношений вязкоупругих (ВУ) свойств, определяемых зависимостями между прилагаемыми напряжениями и возникающими деформациями нагруженных механических конструкций. Изучение этой структуры и свойств имеет определяющее значение для эффективного применения таких материалов в строительстве. Однако указанные вязкоупругие соединения можно проектировать и использовать только после предварительного математического моделирования напряженно-деформированного состояния (Нап.Деф.Сос.) этих материалов[2]. При этом должна быть учтена оценка адекватности построенных моделей физических соотношений данных вязкоупругих материалов, основанная на результатах экспериментальных данных.

Научные исследования и эксперименты показали, что микроструктура и свойства материалов имеют сложные и нерегулярные особенности, математическое моделирование которых удается эффективно провести на основе фрактальной теории. Применение дробных производных для выявления этих особенностей позволило преобразовать модельные уравнения в новый эффективный инструмент описания и анализа реологического явления вязкоупругости строительных, а также полимерных и других материалов.

Одной из основных задач диссертации является разработка нового подхода в нахождении деформационно-прочностных характеристик, являющихся определяющими в расчетах нежестких дорожных покрытий, в определении закона изменения их вязкоупругих свойств в процессе эксплуатации. Полагается, что для ее решения необходимо с учетом эмпирических данных построить модель, описывающую изменение деформационно-прочностных характеристик полимербетона, полученного на основе полиэфирной смолы (ПЭС), при воздействии на него внешней нагрузки. При этом требуется учесть, что движение гранул, входящих в состав полимербетона, моделируется дифференциальным уравнением второго порядка, содержащим дробную производную в младшем члене, порядок которой больше единицы.

Необходимость проведения изыскательских и научных работ в области ирригации и мелиорации, сейсмологии и вулканологии, экологии и других

[1] *Wang L. et al.* Investigation and application of fractal theory in cement-based materials: A review //Fractal and Fractional. – 2021. – Т. 5. – №. 4. – С. 247.

[2] *Алероев Т.С.* Исследование характеристик полимербетона методами дробного исчисления // Вестник Академии наук Чеченской Республики. – 2019. – № 4 (47). – С. 5–8.

сферах деятельности человечества активизировала исследования по математическому моделированию распространения химических субстанций в геологической среде с проведением соответствующих экспериментов по адекватности построенных математических моделей реальным процессам. Разработка математических моделей диффузии инородных частиц через водоносные слои земной поверхности началась более полувека назад. Развитие вычислительной техники позволило активизировать и значительно углубить исследования в данной области науки.

Классическое уравнение адвекции-диффузии Фика по моделированию процесса распространения химических субстанций в водоносной геологической среде определяется параметрами, характеризующими процесс в целом. Наличие трещин, разломов и другой различной неоднородности не позволяет использовать это уравнение для точного моделирования. Преодоление ограничений дисперсий Фика заключается в изменении формулировки классического уравнения в дробное уравнение адвекции-диффузии с использованием производных дробного, а не целого порядка[3]. Такая форма уравнения переноса улучшает моделирование аномальной диффузии, особенно в неоднородных пористых средах с водными растворами различных химических субстанций. Уравнение переноса с дробными производными, которое используется в данной диссертации, является пространственно нелокальным и моделирует поведение частиц, испытывающих большие переходы.

Задача об аналитическом решении начально-краевой задачи для пространственно-дробного уравнения адвекции-диффузии является не полностью изученной. В данной работе эта вторая основная задача решается методом разделения переменных. На основе полученных результатов проводится моделирование плотности потока радона на различных глубинах земной поверхности. Продолжением содержания указанной задачи является имеющая практически важную ценность параметрическая идентификация (ПИ) дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии (ДДУАД) по результатам, полученным в ходе натурных измерений. В данной диссертации эта задача решается принципиально новыми способами.

Степень разработанности темы исследования

Несмотря на многочисленные исследования по развитию и применению дробного исчисления в математическом моделировании самых различных систем и процессов, многие задачи в этой области науки остаются актуальными. Отсутствие простых аналитических решений, эффективных методов качественного и численного анализа фрактального исчисления не позволяет определить в достаточной степени идентификацию параметров построенных математических моделей для выявления их адекватности соответствующим природным системам и процессам на основе сравнительного анализа модельных и экспериментальных результатов.

[3] *Benson D. A.* The fractional advection-dispersion equation: Development and application. – University of Nevada, Reno, 1998.

Представим кратко основные исследования, относящиеся к задачам. изучаемых в данной диссертационной работе.

В этом плане примечательно то, что активные систематические исследования по теории дробного исчисления и его приложениям положили работы M. Caputo, F. Mainardi[4], R. Bagley, P. Torvik[5,6] и др. по моделированию Нап.Деф.Сос. вязкоупругих материалов (пластмасса, стекло, различные композиты и др.). В этом моделировании должна быть учтена оценка адекватности построенных моделей физических соотношений данных ВУ материалов с использованием результатов экспериментальных данных, что другую, не менее важную проблему – проблему ПИ математических моделей с операторами дробного дифференцирования. Активные исследования по математическому моделированию деформационно-прочностных свойств дорожно-строительных материалов с решением соответствующих прикладных задач, в том числе, по нахождению новых методик ПИ построенных моделей, ведется научным коллективом под руководством проф. Т. С. Алероева[2,7,8,9].

Активным исследованиям по моделированию диффузии инородных частиц через водоносные слои земной поверхности положили работы De Josselin de Jong G.[10], Henry H. R.[11] и др. Вначале за основу модели было принято дифференциальное уравнение адвекции-диффузии по закону Фика (Neuman S. P., Zhang Y. K.[12]). В современных работах принято, что в соответствии с аномальной или нефиковской дисперсии более адекватным является дробное дифференциальное уравнение адвекции-диффузии[3,12]. Соответственно перед представителями гидрогеологической науки задача, имеющая практически важную ценность – это задача параметрической идентификации ДДУАД по результатам, полученным в ходе натурных измерений (Сербина Л.И. [13]). Широкие и активные исследования по созданию принципиально новых математических моделей динамических процессов в геосферах Земли ведутся научной группой под руководством Р.И. Паровика. Проводимые теоретические работы сопровождаются разработкой новые алгоритмов комплексов

---

[4] *Caputo M., Mainardi F.* Linear models of dissipation in anelastic solids // La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977). – 1971. – Т. 1. – №. 2. – С. 161-198.

[5] *Bagley R.L., Torvik P.J.* A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity // Journal of Rheology. – 1983. – Vol. 27, no. 3. – P. 201–203.

[6] *Bagley R.L., Torvik P.J.* Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21, no. 5. – P. 741–748.

[7] *Алероев Т.С.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02/Алероев Темирхан Султанович. – М., 2000. – 136 с.

[8] *Ерохин С.В., Алероев Т.С. Параметрическая идентификация порядка дробной производной в модели Бегли-Торвика // Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30, № 7. – С. 93–102.*

[9] *Кехарсаева Э.Р., Алероев Т.С.* Модель деформационно-прочностных характеристик хлорсодержащих полиэфиров на основе производных дробного порядка // Пластические массы. – 2001. – № 3. – С. 35–36.

[10] *De Josselin de Jong G.* Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits // Eos, Transactions American Geophysical Union. – 1958. – Vol. 39, no. 1. – P. 67–74.

[11] *Henry H. R.* Effects of dispersion on salt encroachment in coastal aquifers // In "Seawater in Coastal Aquifers". US Geological Survey, Water Supply Paper. – 1964. – Vol. 1613. – P. C70–C80.

[12] *Neuman S. P., Zhang Y. K.* A quasi-linear theory of non-Fickian and Fickian subsurface dispersion: 1. Theoretical analysis with application to isotropic media //Water Resources Research. – 1990. – Vol. 26, no. 5. – P. 887–902.

[13] *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2002. – 144 с.

программ численного решения и анализа предложенных математических моделей[14,15,16,17].

Данная работа посвящена развитию математического моделирования с методикой идентификации параметров разрабатываемых моделей напряженно-деформированного состояния полимерного материала сложной структуры и распространения химической субстанции в слоистой геологической среде на основе новых качественных и численных методов исследования дифференциальных уравнений с дробными производными.

Объект исследования

Моделирование процессов Нап.Деф.Сос. полимербетона и переноса радона в слоистой геологической среде.

Предмет исследования

Методы построения осцилляционных моделей с ВУ демпфированием и методики идентификации параметров моделей Нап.Деф.Сос. полимербетона и модели процесса переноса радона в слоистой геологической среде с помощью фрактальных дифференциальных уравнений.

Цель и задачи диссертационной работы

Цель работы – вывод новых методов качественного анализа дифференциальных уравнений с дробными производными, развитие способов математического моделирования Нап.Деф.Сос. полимербетонной смеси и распространения радона в слоистой среде на основе методов фрактального анализа, разработка численных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений с дробными производными, алгоритмов и программ для исследуемых прикладных задач.

Для достижения этой цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи:**

1. Вывод теоретических методов исследования предельного поведения решений дифференциальных уравнений с дробными производными.

2. Разработка методики построения математических моделей Нап.Деф.Сос. полимербетонной смеси и распространения радона в слоистой среде с использованием аппарата дробного анализа.

3. Оценка адекватности и разработка алгоритмов идентификации параметров обоснованных математических моделей Нап.Деф.Сос. полимербетона и распространения радона в слоистой среде.

4. Разработка разностных методов и программ решения модельных дробных дифференциальных уравнений.

---

[14] *Паровик Р.И.* Существование хаотических режимов дробного аналога осциллятора типа Дуффинга // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 378–393.

[15] *Паровик Р., Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. и др.* Математическое моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности: отчет о НИР № 22-11-00064 от 12.05.2022. М.: Российский научный фонд, 2022.

[16] *Parovik R.I.* Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. – 2016. – Vol. 26, no. 3.

[17] *Parovik R.I.* Research of the stability of some hereditary dynamic systems // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. – 2018. – Vol. 1141, no. 1. – P. 012079.

Методы исследования

Результаты диссертационной работы получены на основе математического моделирования физических процессов, теории дифференциальных уравнений, математического, численного и фрактального анализа, статистических методов корреляционно-регрессионного анализа. Программная реализация численных решений исследованных модельных задач выполнена в среде Matlab R2017b.

Научная новизна

1. Получены новые методы теоретического и численного анализа решений дифференциальных уравнений с дробными производными.

2. Обоснована новая методика идентификации параметров моделей Нап.Деф.Сос. полимербетона и модели процесса переноса радона в слоистой геологической среде.

3. Разработано программно-математическое обеспечение по нахождению устойчивых приближенных решений для краевой задачи типа Штурма-Лиувилля, моделирующей процесс переноса радона в слоистой геологической среде.

4. Разработано программно-математическое обеспечение по нахождению устойчивых решений краевых задач для уравнения Бегли-Торвика.

5. Представлено авторское программное обеспечение для нахождения приближенного решения первой краевой задачи для дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии, описывающего процесс переноса радона в слоистой геологической среде.

Положения, выносимые на защиту:

1. Результаты по качественному анализу движений нелинейного фрактального осциллятора с вязкоупругим демпфированием при различных предположениях относительно выражения свойства вязкоупругости через производные Римана- Лиувилля и Капуто первого и второго порядков, применяемые для решения задачи о параметрической идентификации моделей напряженно-деформированного состояния полимербетона.

2. Модель напряженно-деформированного состояния полимербетона в форме дифференциального уравнения второго порядка, содержащего дробную производную в младшем члене, порядок которой больше единицы.

3. Теоремы о собственных значениях уравнения Бегли-Торвика, моделирующего изменение параметров деформации и прочности полимербетона при нагружении.

4. Алгоритмы и программы численного решения уравнения фрактального линейного осциллятора с показателем дробной производной $1<\alpha<2$ посредством трех методов: разностного, квадратичного алгоритма и преобразования. Сравнение на основе дисперсионного анализа результатов численных решений уравнения Бегли-Торвика с экспериментальными.

5. Решение краевой задачи для уравнения колебаний струны с дробной производной порядка $\alpha \in (1,2)$ по пространственной переменной методом

Фурье с алгоритмом и программой вычисления соответствующих коэффициентов ряда Фурье с целью идентификации параметра α.

6. Моделирование процесса адвекции радона в сложных геологических средах с учетом неоднородной слоистой фрактальной структуры геологической среды. Решение соответствующей краевой задачи одномерного фрактального дифференциального уравнения адвекции-диффузии на основе видоизменения метода Фурье. Теорема об однозначном определении порядка дробной производной при условии существования единственного решения в форме Фурье. Приближенное решение этой задачи на основе разработанных алгоритма и программы, написанной в среде Matlab R2017b.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Диссертационная работа Хасамбиева Мохаммада Вахаевича соответствует научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки) по пунктам:

1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений».

3. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

4. «Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурного эксперимента на основе его математической модели».

Теоретическая и практическая значимость

Методообразующая идея определения параметров моделей, исходя из характерных точек, полученных в эксперименте, может быть использована не только для параметрической идентификации параметров дробных моделей, но и для широкого класса моделей, основанных на производных целого порядка. Таким образом предложенный в диссертации метод ПИ параметров в дробных моделях является в определенном смысле универсальным.

Достоверность и обоснованность результатов достигнута строгими математическими доказательствами теорем, корректными постановками исследуемых модельных уравнений со строгими их решениями на основе соответствующего математического аппарата дифференциальных уравнений и численных методов, подтверждением и адекватностью результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

Апробация результатов

Материалы диссертации и отдельные ее вопросы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры высшей математики МГСУ и конференциях, в том числе:

- Конференция XI школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (НИИ ПМА КБНЦ РАН, Нальчик, 2013);

- XI Всероссийская научно-практическая и учебно-методическая конференция «Фундаментальные науки в современном строительстве» (Московский государственный строительный университет, Москва, 2014);
- Конференция XII школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (НИИ ПМА КБНЦ РАН, Нальчик, 2014);
- XII Всероссийская научно-практическая и учебно-методическая конференция «Фундаментальные науки в современном строительстве» (Московский государственный строительный университет, Москва, 2015);
- VII Международная научная конференция «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения» (Махачкала, 2015);
- XXIV Международная научно-практическая конференция "Опережающее развитие Гражданского строительства В ФОРМИРОВАНИИ СРЕДЫ ОБИТАНИЯ " (ФОРМА-2021) (Московский государственный строительный университет, Москва, 2021);
- II Научная конференция “Моделирование и методы структурного анализа” (ММСА-2023) (Московский государственный строительный университет, Москва, 2023);
- Семинары кафедры высшей математики МГСУ, кафедры информационной безопасности и теории управления УлГУ.

Публикации

Основные научные результаты диссертационной работы опубликованы в 18 печатных работах: 7 из которых опубликованы в изданиях, относящихся к перечню Высшей аттестационной комиссии; 2 работы – в изданиях, индексируемых в международной системе цитирования Scopus; получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ; 8 работ опубликованы в других изданиях, в том числе, в сборниках материалов международных и всероссийских научно-технических конференций.

Личный вклад автора

Все выносимые на защиту результаты и положения получены лично автором. Постановка задач в работах [1, 2, 3, 8, 9] принадлежит д.ф.-м.н. Т. С. Алероеву, указавшему также методы их решения. Другие соавторы работ [2, 3, 8, 9] принимали участие в обработке экспериментальных данных и (или) в обсуждении полученных результатов. Авторский вклад в этих работах составляет 2/3. Постановка задач в работах [4, 14, 15, 17] принадлежит д.ф.-м.н. А.М. Гачаеву, указавшему также методы их решения. С соавтором работы [17] Р.Т.Успажиевым состоялось подробное обсуждение результатов этой работы. Авторский вклад в работах [4, 14, 15, 17] составляет 3/4. Авторский вклад в работах [5, 6, 16] состоит в анализе влияния вязкоупругих свойств материалов и среды на исследованные процессы и составляет 1/4. Соавтор работы [13] Исаева Л. М. принимала участие в анализе и обсуждении результатов численных экспериментов. В работе [18] соавторами предложена методика решения задачи и проведено обсуждение численных результатов. Авторский вклад в работах [13, 18] составляет 4/5. Содержание работ [7, 10, 11, 12], одна из которых входит в список ВАК, принадлежит автору полностью.

Структура и объем диссертации

Содержание данной работы изложено на 117 страницах печатного текста, имеется 17 рисунков и 5 таблиц. Диссертационная работа включает в себя введение, три главы, заключение, список литературы и приложение. Список литературы состоит из 101 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** автором проводится обоснование актуальности проблемы, сформулированы цели и задачи, научная новизна, положения, выносимые на защиту; обозначены теоретическая и практическая значимость работы, внедрение результатов, методология и методы исследования, степень достоверности результатов; приведены сведения об апробации работы и личном вкладе автора.

В **первой главе** диссертации проводится моделирование изучаемых в диссертационной работе задач и представлены некоторые новые методы их исследования.

В **первом разделе первой главы** представлен анализ: физических свойств современных сложных дорожно-строительных материалов (асфальтобетон, полимербетон и другие), особенностей изменения конструкций из них в процессе эксплуатации. Одним из имеющихся важных выводов является необходимость и важность проведения математического моделирования напряженно-деформационного состояния указанных материалов с целью теоретико-численного выявления их вязкоупругих свойств, в наибольшей степени отвечающих результатам экспериментальных данных. Отмечается, что основным способом такого моделирования в настоящее время признан фрактальный анализ.

Создание новых и наиболее точных математических подходов к моделированию Нап.Деф.Сос., порождает другую, не менее важную проблему – проблему ПИ математических моделей с операторами дробного дифференцирования. Значения параметров моделей Нап.Деф.Сос. полимербетона, особенно порядка оператора дробного дифференцирования, необходимы для прогнозирования его деформационно-прочностных характеристик, построения адекватных математических моделей с целью исследования поведения этого материала в условиях почти периодических нагрузок (авто- и ЖД пути и т. д.).

Активные исследования по математическому моделированию деформационно-прочностных свойств дорожно-строительных материалов с решением соответствующих прикладных задач ведутся научным коллективом под руководством проф. Т. С. Алероева[2].

Во **втором разделе первой главы** представлен анализ работ по моделированию процессов переноса химической субстанции в гидрогеологической среде с анизотропной структурой. Проведение научных работ в гидрологии, сейсмологии и других областях науки привело к необходимости математического моделирования распространения химических веществ в гидрогеологической среде и проведения экспериментов по соответствию построенных математических моделей реальным процессам.

В классической постановке математическая модель распространения химической субстанции в водоносном слое описывается дифференциальным уравнением адвекции-диффузии согласно закону Фика[18]. Аномальная или нефиковская дисперсия являлась предметом тщательного изучения физиками со времён открытия явления непрерывного во времени случайного блуждания Монтроллем и Вайсом *(Montroll E.W., Weiss G.H.)*[19]. Открытие случайного блуждания расширило прогнозные возможности моделей, построенных на основе стохастических процессов броуновского движения, что лежит в основе классического уравнения переноса. В достаточной степени указанные открытые физические процессы описываются одномерным пространственно-дробным дифференциальным уравнением адвекции-диффузии. Задача об аналитико-численном решении начально-краевой задачи для этого уравнения является не полностью изученной. В данной работе эта задача решается методом разделения переменных. На основе полученных результатов проводится моделирование плотности потока радона на различных глубинах земной поверхности. Отметим, что работы по математическому моделированию содержания радона на основе фрактальных уравнений является одним направлений активных исследований научной группы д.ф.-м.н. Р. И. Паровика по применению дробного исчисления к теоретическому и численному решению ряда прикладных задач[15].

В **третьем разделе первой главы** излагаются основные понятия теории дробного исчисления. В работе используются следующие определения.

Допустим, что функция $f(x)$ принадлежит пространству суммируемых функций на полуинтервале $(a,b]$ и $\alpha > 0$. Дробный интеграл Римана-Лиувилля функции $f(x)$ определяется равенством[20]

$$I_u^{\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(\nu)d\nu}{(x-\nu)^{1-\alpha}}, \qquad (1)$$

где α есть порядок дробного интеграла,

---

[18] *Neuman S. P.* Eulerian-Lagrangian theory of transport in space-time nonstationary velocity fields: Exact nonlocal formalism by conditional moments and weak approximation // Water Resources Research. – 1993. – Vol. 29, no. 3. – P. 633–645.

[19] *Montroll E. W., Weiss G. H.* Random walks on lattices. II // Journal of Mathematical Physics. – 1965. – Vol. 6, no. 2. – P. 167–181.

[20] *Petráš I.* Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. – Springer Science & Business Media, 2011.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \nu^{\alpha-1} e^{-\nu} d\nu$$

есть соответствующее значение Гамма-функции.

Допустим, что $u = u(x)$ принадлежит пространству суммируемых функций на полуинтервале $(a, b]$, $0 \leq m - 1 < \alpha \leq m,\ \ m = 1,2, \ldots$.

Равенство

$$D^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left(\int_0^x \frac{u(\beta) d\beta}{(x - \beta)^{\alpha+1-m}} \right) \tag{2}$$

называется производной Римана – Лиувилля дробного порядка α , а равенство

$$\mathcal{D}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x \frac{u^{(m)}(\tau) d\tau}{(x - \tau)^{\alpha+1-m}} \tag{3}$$

– производной Капуто (Капуто – Герасимова) такого же порядка[21].

Производная Римана-Лиувилля (2) от полинома, как и в случае целой производной, вычисляется исходя из формулы

$$D^{\alpha} x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} x^{k-\alpha},\ \alpha \geq 0,\ x > 0. \tag{4}$$

В дробном исчислении особое место занимает функция Миттаг-Леффлера[22]:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}, \tag{5}$$

которая является обобщением ряда для экспоненты при $n! = \Gamma(n+1)$ на $\Gamma(\alpha n + 1)$ и остается инвариантной, если на неё подействовать оператором дробного дифференцирования $D^{\alpha} E_{\alpha}(z^{\alpha}) = E_{\alpha}(z^{\alpha})$.

На основе работы[23] излагается методика исследования качественных свойств нелинейного интегро-дифференциального уравнения дробного типа

$$\frac{dy(x)}{dx} = f\big(x, y(x)\big) + \int_{x_0}^{x} \frac{g\big(y(\tau)\big) d\tau}{(x - \tau)^{\alpha}}, \tag{6}$$

где $x_0, x \in R, (x_0 \leq x), y \in R^n, R^n$ – n-мерное линейное пространство с нормой $\|x\|^2 = x^T x = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$, $f: R \times R^n \to R^n$ и $g: R^n \to R^n$ есть непрерывные функции, α есть некоторый параметр, $0 < \alpha < 1$, ($(\cdot)^T$ – операция транспонирования).

---

[21] *Petráš I.* (ed.). Handbook of Fractional Calculus with Applications. – De Gruyter, 2019.

[22] *Sedletskii A. M.* Asymptotic formulas for zeros of a function of Mittage-Leffler type // Anal. Math. – 1994. – Vol. 20. – P. 117–132.

[23] *Andreev A.S., Peregudova O.A.* On the stability and stabilization problems of Volterra integro-differential equations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 14, no. 3. – P. 387–407.

Во **второй главе** произведено исследование модели деформационно-прочностных характеристик полимербетона с помощью дифференциального уравнения, содержащего производную дробного порядка. Предложен принципиально новый способ параметрической идентификации порядка дробной производной этой модели. Исследование проводилось над образцами полимербетонной смеси, приготовленной на основе полиэфирной смолы.

В **первом разделе второй главы** представлены результаты экспериментальных исследований по определению основных деформационно-прочностных характеристик полимербетона, которые проводились на вибротесте. На основе анализа таких экспериментальных исследований была предложена математическая модель, описываемая уравнением[24]

$$my'' + \eta D^{\alpha}y + ky = F(x), \tag{7}$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, при этом дробная производная имеется в младшем члене[21], параметр m обозначает массу осциллятора; параметры демпфирования обозначены как η, α; коэффициент жесткости пружины обозначен через k; внешнее воздействие, приложенное к осциллятору, обозначено функцией $F(x)$; D^{α} – производная Римана-Лиувилля.

Структура полимербетона представляет собой комплект гранул минерального заполнителя (щебня), находящийся в ВУ сфере. Уравнение колебания гранул (7) задаётся следующим образом

$$y''(x) + 1.8D^{\alpha}y(x) + 93y(x) = F(x), \tag{8}$$

где $\eta = 1.8$ – модуль вязкости полиэфирной смолы (ПЭС), $k = 93$ – модуль жесткости ПЭС, $m = 1$ – масса гранулы, параметр α, $1.3 < \alpha < 1.8$, $y(x)$ – смещение. Уравнение (8) является дальнейшим предметом исследования.

Во **втором разделе второй главы** проводится исследование качественных свойств решений нелинейных фрактальных уравнений второго порядка, возникающих в моделировании вязкоупругого материала, на основе методики исследования из раздела 1.3.

Рассмотрена модель осциллятора, описываемого нелинейным уравнением второго порядка, для которого выполнены условия существования и единственности решения[25]

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + k(x)\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\alpha}u(x) + f\big(u(x)\big) = 0 \quad (0 < \alpha < 1), \tag{9}$$

где $k \in C^1(R^+ \to [k_0, k_1])$ $(k_0 > 0)$, $k'(x) \le 0$, $f \in C(R^+ \to R)$, $\boldsymbol{\mathcal{D}^{\alpha}} = \mathcal{D}^{\alpha}$ есть производная Капуто первого порядка (при значениях α, $(0 < \alpha < 1)$), или $\boldsymbol{\mathcal{D}^{\alpha}} = D^{\alpha}$ есть производные Римана-Лиувилля первого $(0 < \alpha < 1)$) и второго $(1 < \alpha < 2)$ порядков.

[24] *Aleroev T., Aleroeva H., Kirianova L.* One method for the boundary value problem eigenvalues calculating for a second-order differential equation with a fractional derivative // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. – 2019. – Vol. 10, no. 01.

[25] *Samko S. G.* Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. – Gordon and Breach, Newark, N. J., 1993.

На основе теорем из раздела 1.3 доказано, что при условиях $f(0)=0$, $f(u)u>0\ \forall u\in(-H_0,H_0)\setminus 0$ $(H_0>0)$ решение $u=u'=0$ уравнения (9) асимптотически устойчиво. При условиях $f(0)=0,\ f(u)u<0\ \forall u\in\left[-H_{0,}0\right)$ *или* $u\in(0,H_0]$ решение $u=u'=0$ уравнения (9) неустойчиво.

Выводятся дополнительные условия глобального притяжения $u=u'=0$, свойство притяжения множества изолированных положений равновесия $\{f(u)=0\}$. Представлен график численного моделирования нелинейного осциллятора (9) с производной Капуто первого порядка при следующих значениях параметра $k(x)=const\ =\ 2$ и функции $f(u)=0.35\sin(u)$. Фазовый портрет является адекватным классическому изображению траекторий математического маятника.

Отмечается, что для осциллятора, описываемого уравнением

$$u''(x)+c\mathcal{D}^{\alpha}u(x)+ku(x)=a\,cos(\omega x)\ \ (0<\alpha<1)$$

как и для классического линейного осциллятора, из асимптотической устойчивости нулевого положения следует сходимость всех его решений к одному решению.

Третий раздел второй главы посвящен исследованию основных осцилляционных свойств оператора, порожденного уравнением Бегли-Торвика и краевыми условиями Дирихле, моделирующим изменение характеристик деформации и прочности полимербетона при его нагружении.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $b/m<1.3$*, тогда первое собственное значение проблемы*

$$y''(x)+\frac{b}{m}D^{\alpha}y(x)+\frac{k}{m}y(x)=F(x),\quad \big(\alpha\in(1{,}2)\big), \tag{10}$$

$$y(0)=0,\ y(1)=0 \tag{11}$$

положительное и имеет кратность, равную единице.

Теорема 2. *Пусть* $b/m\in[0;1/3]$, *тогда первое собственное значение задачи (10)-(11) является положительным, имеющим кратность, равную единице и собственная функция в интервале* $I=\{0<x<1\}$ *не обращается в нуль.*

В **четвертом и пятом разделах второй главы** представлены результаты численного моделирования осциллятора с ВУ демпфированием

$$my''+bD_{0x}^{\alpha}y+ky=0, \tag{12}$$

здесь производная Капуто дробного порядка обозначена через $D_{0x}^{\alpha}y$, $1<\alpha<2$, на основе разностного метода, с помощью квадратичного алгоритма, на основе преобразования Лапласа.

Для примера рассмотрено уравнение вида (12):

$$y''(x) + \mu D^{\alpha} y(x) + y(x) = \sin(\Omega x),$$

где $D^{\alpha} y(x)$ есть дробная производная порядка α для значений

$$(\alpha, \mu) = (5/4; 0.94),\ (\alpha, \mu) = (3/2; 1.68),\ (\alpha, \mu) = (7/4; 1.03),\ \Omega = 1{,}2{,}0.5.$$

Графики, полученные разными методами, практически совпадают. Ниже на рисунках 1–5 приведены результаты численного моделирования, полученные методом Лапласа. Представлены соответственно графики свободных колебаний, колебаний под действием периодической нагрузки, вынужденных колебаний дробного осциллятора.

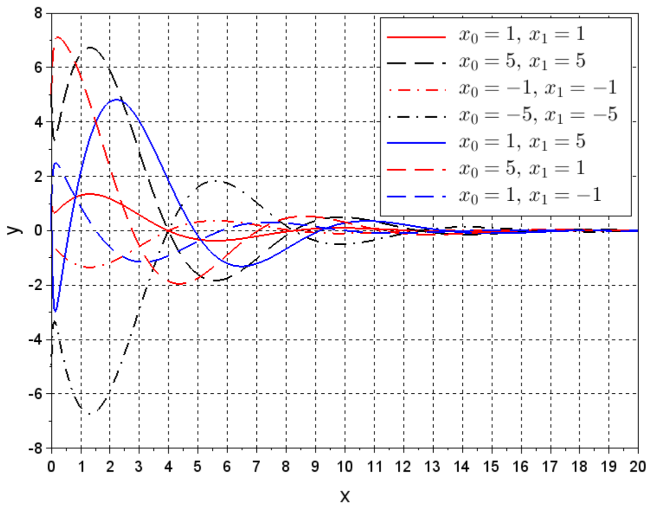

Рис. 1. Результаты моделирования при $(\alpha, \mu) = (5/4; 0.94)$ и различных начальных условиях

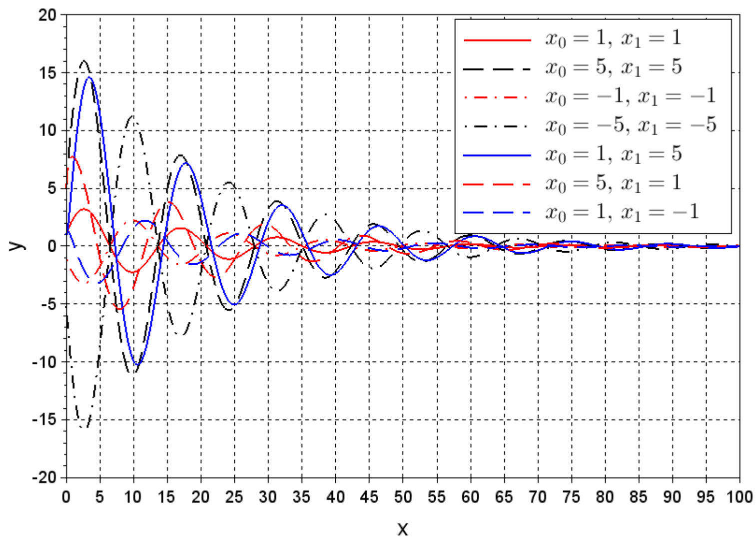

Рис. 2. Результаты моделирования при $(\alpha, \mu) = (7/4; 1.03)$ и различных начальных условиях

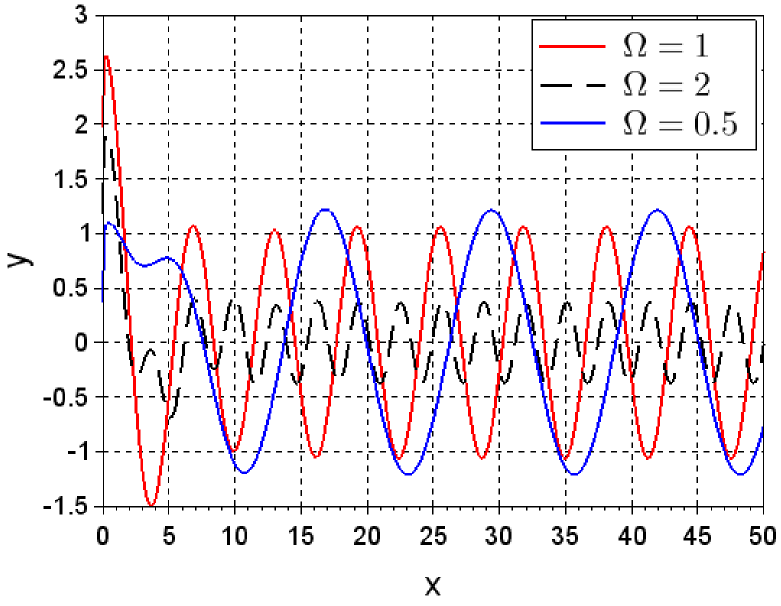

Рис. 3. Результаты моделирования при $(\alpha, \mu) = (5/4; 0.94)$, различных значениях Ω и одном ненулевом начальном условии

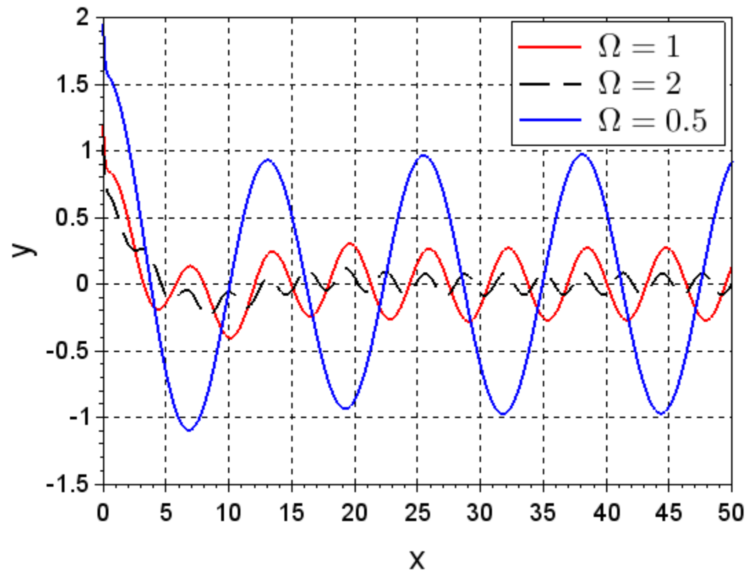

Рис. 4. Результаты моделирования при $(\alpha, \mu) = (3/2; 1.68)$, различных значениях Ω и одном ненулевом начальном условии

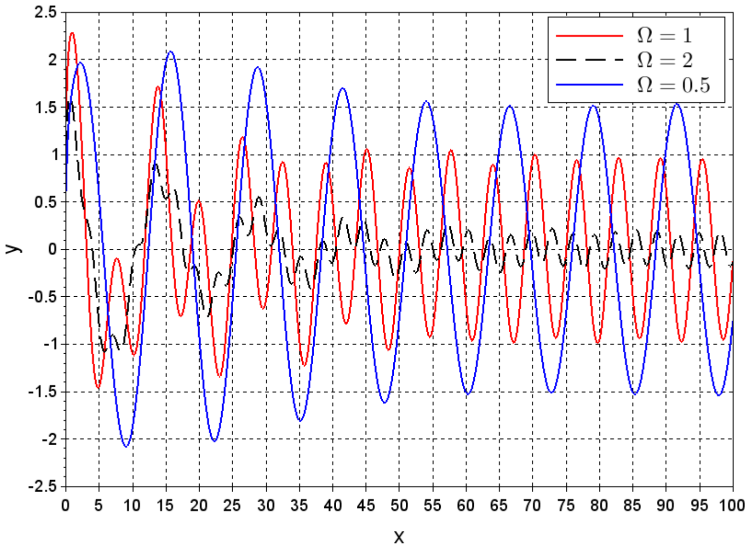

Рис. 5. Результаты моделирования при $(\alpha, \mu) = (7/4; 1.03)$, различных значениях Ω и одном ненулевом начальном условии

В **шестом разделе второй главы** предложен новый метод параметрической идентификации на основе анализа численного моделирования вынужденных колебаний. Проведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными результатами испытаний полимербетона на основе ПЭС (диан и дихлорангидрид – 1,1 – дихлор – 2,2 – диэтилен) в соответствии с уравнением (7) при значении параметра $\alpha = 1.49$. Вычисления на основе разработки показателя качества математической модели (коэффициент детерминации) показали высокую эффективность построенной модели и ее численного моделирования[26].

В **седьмом разделе второй главы** представлены результаты исследования краевой задачи, описывающей колебания струны в среде с фрактальной геометрией.

В **третьей главе** рассматриваются примеры применения дробных уравнений диффузии при моделировании сейсмических процессов.

В **первом разделе третьей главы** определяется фрактальная размерность слоисто-геологической среды. Фрактальная размерность используется для предсказания поведения системы и с ее помощью можно диагностировать нестабильные состояния.

Коэффициент Херста K_H с фрактальной размерностью D, которая иначе называется размерностью Хаусдорфа или дробной размерностью, связан со значением величины $H = 2 - D$.

[26] *Алероев Т.С., Хасамбиев М.В., Хамзатова З.У.* Некоторые вопросы теории линейных дифференциальных операторов дробного порядка и их применение // Труды МАИ. – 2015. – № 84. – 22 с.

Для того, чтобы найти коэффициент K_H, можно применять различные методики. В данной диссертационной работе применен R/S-анализ.

В последние годы некоторые ученые-сейсмологи указывают на преобразования реологических свойств горных пород в процессе подготовки землетрясения. В работе[27] приводится, что в районе возможного землетрясения хрупкому разрушению свойственно псевдовязкое течение горных пород. Это псевдовязкое течение может повлиять на область концентрации радона, при этом аномалии могут проявляться в разных формах.

Сравнение проведенных исследований метеорологических величин в бункере, оснащенным под землей, и в наземном контейнере в летнее время, за счет значительных колебаний температуры в контейнере, отражает изменение атмосферного давления, которое достаточно четко прослеживается на приведенном ниже Рисунке 6. На этом Рисунке 6 отражается процесс изменения объемной активности радона, происходившего в течение периода времени с двадцатого июля до двадцать девятое августа две тысячи шестого года в районе аэрации и под земной поверхностью. Из анализа Рисунка 6 можно сказать, что в период с 13.08.2006 по 22.08.2006 наблюдалось возрастание амплитуды объемной активности радона как в подземном бункере, так и в наземном контейнере.

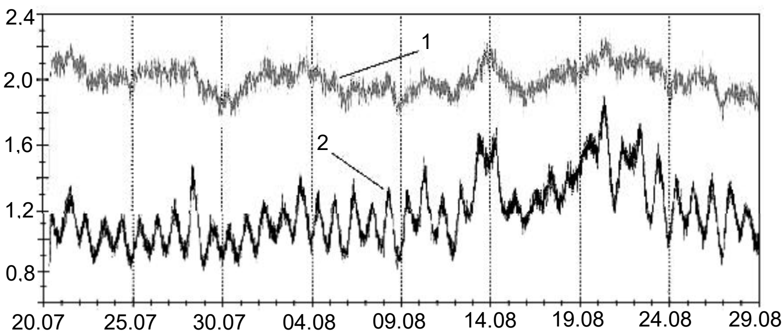

Рис. 6. Динамика объемной активности радона за период 20 июля – 29 августа 2006 года[28]: 1 – зона аэрации, 2 – поверхность пола подземного бункера

На Рисунке 7 изображена расчетная кривая поверхностного плазменного резонанса, которая определена согласно приведенной выше методике на основе программы «РЭКСЭМ» при значениях $h_1 = 20$ см, $h_2 = 120$ см, $D = 55 \cdot 10^{-8}$ м^2/с, $h_1 v = 5 \cdot 10^{-5}$ м/с, $\lambda = 21 \cdot 10^{-7}$с$^{-1}$.

Отметим, что в расчетных кривых поверхностного плазменного резонанса преобладание амплитуды над фоном для аномального периода составляет более 160 процентов, что подтверждает более высокую чувствительность ППР по сравнению с динамическими параметрами ОА Rn.

---

[27] *Tarasov V.E.* Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vol. 5. Applications in Physics, Part B. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 319 p.

[28] *Паровик Р.И., Фирстов П.П.* Алгоритм расчета плотности потока радона (222Rn) с поверхности земли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2008. – № 3 (4). – С. 96–101.

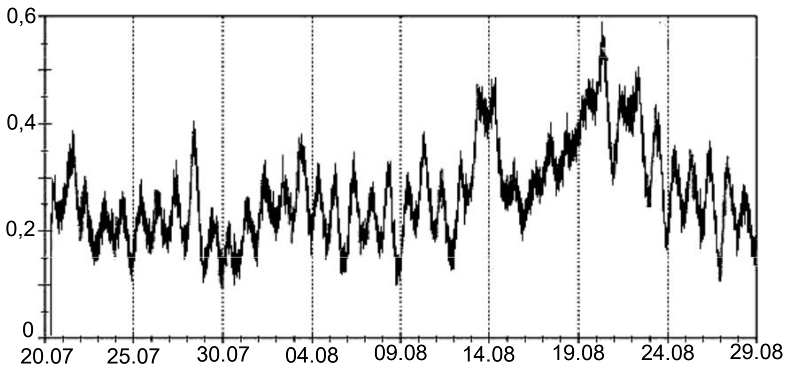

Рис. 7. Вычисления плотности потока радона за период 20 июля – 29 августа 2006 года

Определяя значение K_H ряда динамики, приведенного на Рисунках 6 и 7, приходим к выводу, что $H \approx 0.7$.

Во **втором и третьем разделах третьей главы** изучается решение уравнения, моделирующего плотность потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности.

Для того, чтобы найти решение задачи определения плотности потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности, рассмотрен метод приближенного решения первой краевой задачи для ДДУАД

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{0+}^{\alpha} u(x,t).$$

Здесь $u(x,t)$ может быть как плотностью потока радона, так и его объемной концентрацией. С помощью этого метода находится плотность плотности потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности, а также находится объемная концентрация радона (1/м^3).

Как известно, задача нахождения плотности потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности ставится следующим образом. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{0+}^{\alpha} u(x,t), \tag{13}$$

удовлетворяющее следующим условиям

$$u(x,0) = k, \tag{14}$$

$$-D\eta \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi(t), \tag{15}$$

$$u\left(x_i, t_j\right) = c_{ij}, \tag{16}$$

где k – фоновая концентрация на заданной глубине для данного района мониторинга, $\varphi(t)$ – плотность потока радона.

Получена следующая формула решения этой задачи:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \tag{17}$$

На ее основе доказана теорема об однозначном определении дробного порядка α уравнения (13) в зависимости от условий (14) – (16), которая может быть применена для соответствующе ПИ.

В формуле (17) бесконечную сумму заменим суммой N первых слагаемых. Тогда при $N = 50$ получим приближенное решение

$$u(x,t) \approx \sum_{n=1}^{50} \varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}).$$

Для построения приближенного решения задачи (13) – (16) предложен алгоритм и составлена программа для ЭВМ, написанная в среде Matlab R2017b[29]. Результаты, полученные численными методами, были сопоставлены с экспериментальными данными, взятыми из статьи П.П. Фирстова с соавторами[30]. Эти результаты практически совпадают с натурными измерениями, представленными в этой статье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационного исследования состоят в следующем.

Проведено исследование по качественному анализу движений нелинейного фрактального осциллятора с вязкоупругим демпфированием при различных предположениях относительно выражения свойства вязкоупругости через производные Римана- Лиувилля и Капуто первого и второго порядков. Доказаны теоремы о притяжении движений к положениям равновесия, об асимптотической устойчивости и неустойчивости изолированного положения равновесия. Сделан вывод о том, то действие вязкоупругого демпфирования при принятых предположениях аналогично действию вязкого трения. Сделан вывод о предельных свойствах движений линейного фрактального осциллятора под действием возмущающей силы.

Исследована задача об основных осцилляционных свойствах оператора, порожденного уравнением Бегли-Торвика с краевыми условиями Дирихле, моделирующим изменение параметров деформации и прочности полимербетона при нагружении. Доказаны теоремы, определяющие условия, при которых первое собственное значение является положительным и имеет кратность равную 1, а соответствующая собственная функция не обращается в нуль на заданном интервале. Доказанные теоремы развивают и обобщают некоторые известные результаты.

Рассмотрена задача о численных методах решения уравнения фрактального линейного осциллятора с показателем дробной производной $1 < \alpha < 2$. Разработаны алгоритмы и программы численного решения посредством трех методов: разностного, квадратичного алгоритма и преобразования. Одно из

[29] *Хасамбиев М.В.* Расчет плотности потока радона на различных глубинах земной поверхности. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020660079, М.: РОСПАТЕНТ, 27.08.2020.
[30] *Фирстов П.П. и др.* О связи динамики подпочвенного радона (222 Rn) и водорода с сейсмической активностью Камчатки в июле – августе 2004 г. // Вулканология и сейсмология. 2006. № 5. С. 49–59.

полученных решений подтвердило теоретические выводы, указанные выше. Проведены численные решения на основе всех трех методов уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием. Результаты компьютерного моделирования выявили совпадение численных решений на основе всех этих методов с достаточной степенью точности. Проведена качественная оценка полученных численных моделей осциллятора на основе дисперсионного анализа. Графики вынужденных колебаний осциллятора могут быть использованы для идентификации параметров фрактального уравнения Бегли-Торвика. В качестве приложения, на основе разработанного в диссертации подхода получено численное решение задачи об идентификации показателя в дробной производной уравнения, моделирующего изменение параметров деформации и прочности при нагружении одного типа полимербетона. Получено совпадение известных экспериментальных данных с результатами проведенного в диссертации численного решения, а также с имеющимися в работах разных авторов результатами решения данной задачи иными численными методами.

Исследована первая краевая задача для уравнения колебаний струны с дробной производной порядка $\alpha \in (1,2)$ по пространственной переменной. Применением метода Фурье решение данной краевой задачи сведено к решению двухточечной задачи Дирихле. Решение этой задачи достигается нахождением соответствующих собственных значений и построением ортогональной системы собственных функций и биортогональной к ней системы. Разработан алгоритм вычисления соответствующих коэффициентов ряда Фурье. По разработанной программе проведены вычисления собственных значений по моделированию поперечных колебаний гранул в указанной выше прикладной задаче с целью идентификации параметра α. Вновь получено отмеченное совпадение с экспериментальными данными.

Рассмотрена задача моделирования процесса адвекции радона в сложных геологических средах на основе диффузионно-адвекционной модели с учетом неоднородной слоистой фрактальной структуры геологической среды. Исследована задача по определению фрактальной размерности среды. На основе известных материалов по вычислению плотности радона найдено соответствующее значение коэффициента Херста.

Исследовано решение краевой задачи одномерного фрактального дифференциального уравнения адвекции-диффузии, моделирующего многие физические процессы, в том числе плотность потока радона по его концентрации на различных глубинах земной поверхности. Получено решение этого уравнения на основе определенного видоизменения метода Фурье, представленного выше. Доказана теорема об однозначном определении порядка дробной производной при условии существования единственного решения в форме Фурье. Для построения приближенного решения этой задачи разработаны алгоритм и программа, написанные в среде Matlab R2017b.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в рецензируемых научных изданиях, включенных в перечень ВАК РФ, международные реферативные базы данных Scopus

1. *Хасамбиев М. В., Алероев Т. С.* Краевая задача для одномерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // ВЕСТНИК МГСУ Издательство: Московский государственный строительный университет (Москва) ISSN: 1997-0935. – 2014. – № 6. – С. 71–76. (ВАК)
2. *Алероев Т. С., Хасамбиев М. В., Исаева Л. М.* Об одной краевой задаче для дробно дифференциального уравнения адвекции-диффузии [Электронный ресурс] // Электронный научный журнал «Труды МАИ». – 2015. – № 81. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=57717. (ВАК)
3. *Алероев Т. С., Хасамбиев М. В., Хамзатова З. У.* Некоторые вопросы теории линейных дифференциальных операторов дробного порядка и их применение [Электронный ресурс] // Электронный научный журнал «Труды МАИ». – 2015. – № 84. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=63010 (ВАК)
4. *Гачаев А. М., Хасамбиев М. В.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка // Вестник Академии Наук Чеченской Республики. – 2016. – № 2(31). – С. 5–8. (ВАК)
5. *Исраилов М. Ш., Хасамбиев М. В.* Об опытном определении коэффициента продольного взаимодействия грунта и трубопровода при сейсмических колебаниях // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2020. – № 5. – С. 8–18. DOI: 10.37153/2618-9283-2020-5-8-18 (ВАК)
6. *Исраилов М. Ш., Хадисов М.-Р. Б., Хасамбиев М. В.* Силы взаимодействия с грунтом и изгибные сейсмические колебания подземного трубопровода: модели, основанные на решениях Кельвина и Миндлина // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2021. – № 6. – С. 45–55. DOI: 10.37153/2618-9283-2021-6-45-54 (ВАК)
7. *Хасамбиев М. В.* Краевая задача для многомерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // ВЕСТНИК МГСУ. Издательство: Московский государственный строительный университет (Москва). ISSN: 1997-0935. – 2015. – № 5. – С. 35–42. (ВАК)
8. *Andreev A., Aleroev T., Khasambiev M., Aleroeva H.* Differential Equations with Fractional Derivatives for Studying an Oscillator with Viscoelastic Damping // Proceedings of FORM 2021. Lecture Notes in Civil Engineering. Springer, Cham. – 2022. – Vol. 170. – P. 473–483. https://doi.org/10.1007/978-3-030-79983-0_43 (Scopus, ВАК)
9. *Andreev A., Aleroev T., Khasambiev M., Aleroeva H.* Qualitative evaluation of the mathematical model of an oscillator with viscoelastic damping based on analysis of variance // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2023. – Vol. 2497, No 1. https://doi.org/10.1063/5.0103577 (Scopus, ВАК)

Свидетельство о регистрации программы

10. *Хасамбиев М. В.* Расчет плотности потока радона на различных глубинах земной поверхности. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020660079, М.: РОСПАТЕНТ, 27.08.2020.

Публикации в других изданиях

11. *Хасамбиев М. В.* Об одной краевой задаче для многомерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // Материалы XI Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». – Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2013. – С. 79–80.
12. *Хасамбиев М. В.* Краевая задача для дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // Материалы XII Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». – Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2014. – С. 77–79.
13. *Хасамбиев М. В., Исаева Л. М.* Об одной краевой задаче для дробного дисперсионного уравнения // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения: материалы седьмой Международной научной конференции. – Махачкала: Издательство ДГУ, 2015. – С. 171–172.
14. *Хасамбиев М.В., Гачаев А. М.* Краевая задача Дирихле для фрактального осцилляционного дифференциального уравнения дробного порядка // Материалы I Международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию ФГБОУ ВО "ГГНТУ им. акад. М.Д. Миллионщикова": в 2 томах. Грозненский государственный нефтяной технический университет имени академика М.Д. Миллионщикова. 2017, С. 464–467.
15. *Гачаев А. М., Хасамбиев М. В.* Об одной задаче Коши для дифференциального уравнения дробного порядка // Материалы V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» к 80-летию Адама Маремовича Нахушева. – Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2018. – С. 65.
16. *Исраилов М. Ш., Акчаматова Л. Р., Хасамбиев М. В.* Решения автомодельных задач дифракции нестационарных волн на полуплоскости при смешанных краевых условиях и защита от взрывных волн // Известия Чеченского государственного университета. – 2018. – № 4 (12). – С. 19–25.
17. *Гачаев А. М., Успажиев Р.Т., Хасамбиев М.В.* Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка // МОЛОДЕЖЬ, НАУКА, ИННОВАЦИИ: материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции. – Грозный: ГГНТУ, 2019. – С. 7–10.
18. *Андреев А. С., Сутыркина Е. А., Хасамбиев М. В.* О качественном анализе фрактальных моделей нелинейного осциллятора с вязкоупругим демпфированием // Научно-технический вестник Поволжья. – 2024. – № 5. – С. 22–27.

Научное издание

Хасамбиев Мохаммад Вахаевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

«Математическое моделирование задач наследственной механики
с использованием методов дробного исчисления»

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ