

**Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу Бейбалаева Ветлугина Джабраиловича
«Математические модели динамических процессов во фрактальных и
пористых средах» на соискание ученой степени доктора физико-
математических наук по специальности 1.2.2. Математическое
моделирование, численные методы и комплексы программ.**

В настоящее время математический аппарат дифференциальных уравнений с производными дробного порядка используется для математического моделирования динамических процессов в сложно-структурированных физических средах, возникающих в неравновесных внешних условиях. Одним из научных направлений, получившее свое развитие, является исследование и практическое использование эффектов памяти в горных породах при решении задач геоконтроля и прогнозирования глубинных температур. Память представляет собой фундаментальное свойство горных пород накапливать, хранить и воспроизводить информацию об испытанных в прошлом воздействиях. Структура такого материала как горная порода обладает иерархией и определенным подобием в большом масштабном диапазоне. При построении математических моделей нелокальных динамических процессов для формализации эффектов памяти в физической системе используют дробную производную по времени, а для описания течения процессов в объектах со сложной структурой и многофазным составом – производную дробного порядка по координате. В связи с большими трудностями, возникающими при поиске аналитических решений уравнений с дробными производными, наряду с аналитическими методами развиваются численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка. Диссертационная работа Бейбалаева В.Д. посвящена усовершенствованию и развитию новых методов исследования динамических процессов во фрактальных и пористых средах с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций, а также разработке

эффективных алгоритмов численного моделирования нелокальных процессов теплопереноса и реализация этих методов в виде комплексов объектно-ориентированных программ. Поскольку математическое описание нестационарных процессов во фрактальных структурах обладает рядом специфических особенностей развитие соответствующих подходов, основанных на математическом аппарате интегродифференцирования дробного порядка, при расчетно-теоретическом моделировании делает направление исследований Бейбалаева В.Д. актуальным.

В диссертационной работе Бейбалаева В.Д. разработаны разностные методы и алгоритмы численного решения начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, проведено качественное исследование линейных и нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка, нелокальных процессов теплопереноса с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций. На основе экспериментальных данных по теплопроводности горных пород разработаны эмпирические модели для расчета теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления. Представленные разностные методы решения начальной задачи для систем дифференциальных уравнений дробного порядка и результаты качественного исследования линейных и нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, могут служить фундаментальной основой разработки и численного анализа дробно-дифференциальных моделей динамических систем. Представленные разностные схемы решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка и результаты комплексного исследования нестационарных процессов теплопроводности являются фундаментальной основой для разработки и численного анализа математических моделей нестационарных процессов теплопроводности во фрактальных и пористых средах. Результаты исследования нестационарных процессов неизотермической фильтрации, включающие эффекты памяти и

пространственные корреляции через производные дробного порядка, и теплопроводности горных пород имеют широкое прикладное значение. От решения данных проблем зависит возможность реализации различных процессов при нефтедобыче, функционировании геотермальных систем и прогнозировании глубинных температур, связанных с понятием теплопроводности горных пород при высоких температурах и давлениях. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при исследовании различных динамических процессов в физических системах, связанных с понятием степенной долгосрочной памяти, и пространственными нелокальностями сложных сред, процессов и явлений.

Таким образом, диссертационная работа Бейбалаева В.Д. обладает как научной новизной в области математического моделирования, численных методов и комплексов программ, так и практической значимостью для исследования нелокальных динамических процессов в сложно-структурированных физических средах с эффектами памяти и пространственными нелокальностями.

Содержание диссертационной работы изложено на 271 странице и состоит из введения, семи глав, заключения, списка литературы и четырех приложений. Основные результаты диссертации опубликованы в 32 научных работах, включенных в перечень ведущих периодических изданий ВАК. В их число входит 20 статей, опубликованных в научных журналах, входящих в международные базы Web of Sciences и Scopus, изданы 3 монографии и получено три свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ, основные результаты представлены на конференциях и семинарах всероссийского и международного уровней. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Во введении приводится обоснование актуальности темы исследования, формулируются цель, задачи, объект и предмет исследования, научная новизна, положения, выносимые на защиту; описываются теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы исследования,

степень достоверности полученных результатов; приводятся сведения об апробации работы и личном вкладе автора.

Первая глава диссертации является вводной частью научных исследований. В ней приведены основные определения и свойства некоторых специальных функций, дробных интегралов и производных, а также теоремы, которые устанавливают связь дробной производной Римана-Лиувилля и Рисса с обычной производной.

Вторая глава посвящена разработке численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. В этой главе разработаны численные методы и алгоритмы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дробными производными Капуто и Римана-Лиувилля, а также доказаны теоремы о сходимости этих численных методов.

Третья глава посвящена разработке вычислительных алгоритмов решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. В этой главе построены разностные схемы для численного решения начально-краевой задачи, включающей уравнение теплопроводности с дробной производной Рисса по пространственной переменной, задачи Дирихле для уравнения Пуассона с дробной производной Римана-Лиувилля, начально-краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени.

В четвертой главе исследованы линейные и нелинейные динамические системы, описываемые производными дробного порядка. Проведено качественное исследование линейной динамической системы, отображаемой системой двух линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто в случае действительных корней характеристического уравнения. При исследовании нелинейных динамических систем дробный «брюсселятор» и нелокальная модель «хищник-жертва» при малых отклонениях от положения равновесия использован метод линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка, который

позволяет свести исходные задачи к более простым, для которых возможно получить аналитические решения. При больших отклонениях от положения равновесия для исследования этих динамических систем в диссертации используются алгоритмы приближенного решения на основе разработанных в диссертации численных методов. В этой главе проведено численное исследование фрактальных характеристик микроструктуры газоразрядных каналов и динамики электронов в них. Установлено, что с ростом фрактальной размерности и степенного показателя, характеризующего быстроту расширения каналов, скорость электронов возрастает.

Пятая глава посвящена исследованию нелокальных процессов теплопроводности во фрактальных и пористых средах. В этой главе исследованы процессы промерзания, неизотермической фильтрации, нелокальные процессы теплопроводности для полуограниченного тела и нелокальные процессы конвективного теплообмена с внешней средой для полуограниченного тела с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций через дробные производные.

Шестая глава посвящена исследованию температурных и барических закономерностей изменения теплопроводности горных пород. Проведены исследования теплопроводности песчаника, мергеля, гранитов, гранулитов, аргиллитов и известняка в достаточно широком диапазоне температур 273К – 523К и давлений до 400МПа, характерных для реальных природных условий. Построены эмпирические модели теплопроводности горных пород с применением корреляционно-регрессионного анализа и вычислительного эксперимента на основе полученных экспериментальных данных.

Седьмая глава посвящена описанию комплексов объектно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов на основе разработанных численных алгоритмов.

В заключении работы подведены итоги проведенных исследований и сформулированы основные результаты. К их числу можно отнести следующие ниже выводы.

1. Разработаны численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Доказаны теоремы о сходимости этих численных методов.

2. Проведено качественное исследование линейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями. Проведено исследование поведения фазовых траекторий нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, методом линеаризации.

3. Исследованы фрактальные характеристики микроструктуры газоразрядных каналов и динамика электронов в них. Установлено, что микроструктура отпечатков канала на поверхности плоского электрода разряда носит фрактальный характер и определены значения ее фрактальной размерности.

4. Исследованы нелокальные процессы промерзания, неизотермической фильтрации, нелокальные процессы теплопроводности для полуограниченного тела и нелокальные процессы конвективного теплообмена с внешней средой для полуограниченного тела с учетом фрактальности среды и эффектов памяти. Установлено, что переход к дробным производным позволяет описать замедление процессов относительно классического решения.

5. Построены эмпирические модели теплопроводности горных пород и проведено численное моделирование теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления с применением корреляционно-регрессионного анализа и вычислительного эксперимента на основе полученных экспериментальных данных.

6. Разработаны комплексы объектно-ориентированных программ для численного исследования нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, а также нелокальных процессов

теплопроводности с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций и теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления.

Диссертационная работа Бейбалаева В.Д. является законченным научным исследованием. Достоверность и обоснованность результатов полученных в диссертационной работе подтверждаются применением фундаментальных методов исследования динамических процессов, корректными постановками задач и математической обоснованностью полученных решений. Полученные в работе результаты исследования динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, и нестационарных процессов теплопроводности обосновываются вычислительными экспериментами. Результаты численного моделирования теплопроводности горных пород в зависимости от температуры и давления подтверждаются их адекватностью и согласованностью с экспериментальными данными.

Замечания по диссертации:

1. В конце глав не сформулированы выводы.

2. В схеме (3.5) весовой параметр σ принадлежит отрезку от 0 до 1. В работе сказано $\sigma \geq 0$. Верхнее значение суммы $k = n+1$ подставим в u^{k+1} и получаем u^{n+2} . Как это согласуется с расчетом u^{n+1} ? В формуле (3.7) пределы суммирования уже от 1 до $n - 2$. Данные утверждения требуют большего обоснования.

3. Перед формулой (3.45) говорится, что все условия принципа максимума выполнены, но проверка наличия диагонального преобладания $D(z) = A(z) - \sum_{\xi \in III(z)} B(z, \xi) \geq 0$ отсутствует. В данном случае $\Pi(x)$ лучше обозначить $\Pi(z)$ (шаблон с центром в точке z).

4. Для формул (3.25), (3.26), (3.37) и (3.38) непонятно почему утверждается второй порядок точности.

5. Переход к неравенству на стр. 86 (глава 3, § 4) не обоснован.

Несмотря на приведенные замечания диссертационная работа Бейбалаева Ветлугина Джабраиловича отвечает всем требованиям Положения

о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 №842, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Бейбалаев Ветлугин Джабраилович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Я, Чистяков Александр Евгеньевич, даю согласие на включение своих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку.

Официальный оппонент, профессор кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» ФГБОУ ВО «Донской государственной технической университет», доктор физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ,


Чистяков Александр Евгеньевич

Подпись, ученую степень и должность

Чистякова А.Е. удостоверяю

Ученый секретарь ФГБОУ ВО ДГ

« 08 » 08 2024 г.




В.Н. Анисимов

Адрес основного места работы: 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
Телефон: +79508593872
Адрес эл. почты: cheese_05@mail.ru