

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

**Колегова Любовь Владимировна**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ РОБОТАМИ-  
МАНИПУЛЯТОРАМИ**

1.2.2. Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**Диссертация**

на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук, профессор  
Андреев Александр Сергеевич

Ульяновск – 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	<b>4</b>
<b>ГЛАВА I. О МЕТОДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА В УПРАВЛЕНИИ</b> .....	<b>17</b>
§ 1.1. Развитие метода функционалов Ляпунова для неавтономной системы функционально-дифференциальных уравнений .....	18
§ 1.2. Нелинейное управление лагранжевой системой .....	25
§ 1.3. Стабилизация вращательного движения твердого тела .....	29
§ 1.4. Стабилизация программных положений управляемой механической системы без измерения скоростей .....	31
<b>Выводы по первой главе</b> .....	<b>46</b>
<b>ГЛАВА II. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ МНОГОЗВЕННЫМИ РОБОТАМИ-МАНИПУЛЯТОРАМИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ И ПРИЗМАТИЧЕСКИМИ ШАРНИРАМИ</b> .....	<b>47</b>
§ 2.1. Математическая модель ПИД-регулятора с учётом запаздывания .....	48
§ 2.2. Отслеживание траектории манипулятора в случае достаточных сил вязкого трения .....	52
§ 2.3. Отслеживание траектории манипулятора управлением с запаздыванием по фазовым переменным .....	57
§ 2.4. Структура обратной связи при отсутствии сил вязкого трения без измерения скоростей .....	61
<b>Выводы по второй главе</b> .....	<b>69</b>
<b>ГЛАВА III. О ПРИМЕНЕНИИ РАЗРАБОТАННОГО КОМПЛЕКСА ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ ТРЕХЗВЕННОГО И ШЕСТИЗВЕННОГО РОБОТОВ- МАНИПУЛЯТОРОВ</b> .....	<b>70</b>
§ 3.1. Численный метод, алгоритмы и комплекс программ математического моделирования процесса управления роботами- манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами .....	71

§ 3.2. Математическая модель трехзвенного индустриального манипулятора .....	80
§ 3.3. Модель управления в задаче о стабилизации программного установившегося манипулятора в пространстве .....	83
§ 3.4. Решение задачи глобального отслеживания траектории .....	91
§ 3.5. Отслеживание траектории шестизвенного робота-манипулятора .....	94
<b>Выводы по третьей главе</b> .....	<b>102</b>
<b>Заключение</b> .....	<b>104</b>
<b>Литература</b> .....	<b>106</b>
<b>Приложение 1</b> .....	<b>117</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Одним из важных направлений интенсивного развития роботизированного производства является широкое применение управляемых механических систем, в том числе, многозвенных роботов-манипуляторов. Это развитие сопровождается повышением требований к универсальности, точности, надежности, энергозатратности и другим факторам эффективности структуры управления такими системами. Актуальной является разработка структур управления многозвенными роботами-манипуляторами с учетом неполноты измерений состояния объекта, а также с запаздывающей обратной связью.

**Степень разработанности темы исследований.** Математические модели многих современных механических систем представляют собой нелинейные системы дифференциальных уравнений высокой размерности. Один из подходов к построению структуры управления такими системами связан с идеей декомпозиции. Декомпозиция позволяет свести исследование модели сложной системы к исследованию моделей подсистем меньшей размерности или более простой структуры.

Основной подход к идее декомпозиции для решения задач управления механическими системами, в том числе, роботов-манипуляторов, широко представлен работами научных школ Е. С. Пятницкого [13, 14, 16] и Ф. Л. Черноусько [1, 2, 18]. Он состоит в том, что для управляемых механических систем специальный выбор управления может привести возмущенное движение системы в программное движение при режиме полной компенсации динамического взаимовлияния между подсистемами, т. е. при режиме декомпозиции. Решение таких задач достигается при помощи релейных или кусочно-непрерывных управлений. Функционирование декомпозированной системы происходит в скользящем режиме, который характеризуется тем, что движение системы происходит вдоль поверхности

переключения управления и сопровождается частыми переключениями управления. Обоснованные по этому принципу кусочно-непрерывные и релейные законы управления обладают рядом преимуществ, таких, как простота реализации, возможность достижения цели управления за конечное время и т. д. Но на практике эти законы обнаруживают ряд недостатков, к которым, в частности, относятся: значительные энергетические потери, обусловленные использованием максимальных по модулю значений управляющих воздействий; а также высокочастотные колебания компонент вектора состояния системы, которые приводят к нежелательным вибрациям механических элементов систем управления. Это обусловлено тем, что вследствие несовершенства устройств переключения управления и наличия запаздывания в структуре обратной связи при движении системы в скользящем режиме возникают биения (чаттер), сопровождающиеся быстрыми переключениями управления, что и приводит к возникновению высокочастотной не моделируемой динамики в системе [15].

Имеются значительные теоретические и практические сложности в разработке непрерывных моделей управления роботами-манипуляторами, удовлетворяющих факторам неполного измерения состояния, неизвестности массоинерционных и других параметров системы, учета положительного влияния неуправляемых сил, дефицита управляющих воздействий, неполноты измерения фазовых координат, минимизации энергозатрат на управление, учета запаздывания в структуре обратной связи и других факторов.

Проведенный анализ работ в этом направлении показывает, что целый ряд результатов посвящен задачам об устойчивости и стабилизации установившихся движений роботов-манипуляторов и других управляемых механических систем. При этом, эффективным способом реализации управления являлось построение структуры управляемых сил в соответствии с классической классификацией структуры действующих сил [8, 9]. В начале интенсивного развития робототехники в начале 1980-х годов в наибольшей

степени это направление проявилось в разработках по применению пропорционально-дифференциальных (ПД-) регуляторов. В пионерских работах [77, 81, 82] предложены различные типы схем управления для достижения свойства глобальной асимптотической устойчивости для опорной траектории манипуляторов. В работе [71] спроектирован так называемый «ПД+» контроллер, который представляет собой ПД- контроллер плюс вариация вычисленного крутящего момента. Эта схема управления основана на известном методе линеаризации обратной связью [45]. В [74] на основе полуопределенной функции Ляпунова был предложен закон управления с изменяющимися по времени коэффициентами обратной связи. В работах [70, 71] доказано свойство равномерной глобальной асимптотической устойчивости для опорной траектории манипуляторов с использованием ПД управления с вычисляемым моментом. Такая схема управления имеет простую структуру с явными нижними границами для коэффициентов управления. Расширение закона управления «ПД+» до «ПД с насыщением плюс вычисленный крутящий момент» было предложено в работе [32] для решения проблемы глобального отслеживания траектории для манипуляторов роботов с насыщением входных сигналов. В работе [83] предложена схема управления: «ПД-регулятор плюс управление на основе скользящих режимов» для решения задачи робастного управления. В работе [70] предложен ПД закон управления плюс вычисляемый крутящий момент для решения задачи глобального управления роботизированных систем с ограниченными постоянными возмущениями на основе метода линеаризации обратной связи. К числу недостатков разработанных в этих работах законов управления манипуляторами является их зависящая от параметров динамики сложная структура, что в немалой степени вызвано использованием широко известных методов теории устойчивости движений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение цилиндрического фазового пространства с построением соответствующих нелинейных регуляторов позволяет улучшить достижимость полуглобальной стабилизации

программных движений манипуляторов с цилиндрическими шарнирами в плане использования ограниченного управления и уменьшения энергозатратности на него [34].

Определенным недостатком применяемых ПД-контролеров является тот факт, что они плохо справляются с устранением малых отклонений состояния процесса от контрольной точки. Они могут обеспечивать малую, но не нулевую погрешность, то есть просто удерживают процесс недалеко от контрольной точки, что связано с принципом работы контроллера [79].

Возникла идея добавления в структуру управления интегральной составляющей, с большим успехом впервые примененная в работах [40, 41] для стабилизации заданного положения робота-манипулятора с компенсацией действия сил тяжести в его программном положении. Новый тип регуляторов получил название пропорционально-интегро-дифференциальных, (иначе называемых, пропорционально-интегро-дифференцирующих), кратко, ПИД-регуляторов.

Пропорционально-интегро-дифференцирующие (ПИД-) регуляторы получили широкое распространение в управлении техническими, в том числе, механическими системами. Такие регуляторы используются во 90–95 % контуров управления [88], их структура компактна и проста, они позволяют достичь цели для большинства манипуляционных роботов.

Однако применение ПИД-регуляторов имеет свои недостатки. Для ряда известных ПИД-регуляторов изменение цели управления или параметров объекта управления, вообще говоря, требует новой настройки коэффициентов регулятора. Появились справочники по применению ПИД-регуляторов из-за недостатков также их автоматизированной настройки [69]. Как отмечено в монографии [14], многие разработанные законы управления по своей специфике не являются универсальными, а именно, предназначены для стабилизации только одного режима движения управляемого объекта. Это связано, в основном, с теми же причинами, указанными выше для ПД-регуляторов.

Если процесс очень медленный, для компенсации ошибки может потребоваться много времени, даже при значительном воздействии интегральной составляющей. Также если установлен слишком большой коэффициент подстройки, контроллер будет излишне компенсировать отрицательное отклонение, что приведет к даже большему положительному отклонению [79]. Поэтому разработка и использование ПИД-регуляторов является предметом многочисленных исследований уже на протяжении 40 лет. Эти исследования посвящены повышению эффективности ПИД-управления путем различной реализации дифференцирующей части регулятора, а также борьбой с насыщением интегральной составляющей. Основные исследования по развитию типов ПИД-регулятора применительно к манипуляторам были направлены на обоснование нелинейных составляющих регулятора с целью достижения полуглобальной и глобальной стабилизации программного положения манипулятора, как управляемой голономной механической системы с ограниченным управлением [20, 21, 22, 28, 30, 45, 46, 47, 49, 50] и др.

При этом все методы исследования задач о применении ПИД-регуляторов основаны на введении дополнительных дифференциальных уравнений, построении функций Ляпунова с использованием классических теорем Ляпунова, Барбашина-Красовского, Ла-Салля. В работе [30] представлены существенные изменения структуры ПИД-регуляторов для применения в управлении движениями механических систем. Изменения состоят в учете динамики объекта, применении нелинейных зависимостей от его координат и новых типов интегральных составляющих. Такие регуляторы могут быть классифицированы как нелинейные регуляторы с интегральной составляющей. Развитие этого направления в моделировании структуры управления роботов-манипуляторов на основе таких регуляторов, в том числе, с учетом запаздывания, представляется актуальной задачей.



В начале 1990-х годов в связи с интенсивным развитием робототехники возник интерес к задаче построения управления движением без измерения скоростей.

Важность и актуальность задачи по построению управления, обеспечивающего стабилизацию движений управляемых механических систем без измерения скоростей, состоит в отсутствии необходимости применения датчиков скоростей, установка которых является неэффективной из-за зашумленности измеряемых сигналов и значительного повышения стоимости управляемой системы [46, 48]. Среди различных подходов к решению задачи по построению управления, обеспечивающего стабилизацию движений управляемых механических систем без измерения скоростей отметим работу [49] по применению численного дифференцирования, работу [67] с использованием наблюдателей для оценки скоростей, работы [25, 33, 50, 60, 61, 65, 70, 75] с применением фильтров первого порядка, работу [87] на основе адаптивного управления. Основным математическим аппаратом исследования в этих работах являлся прямой метод Ляпунова с подбором функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теорем Ляпунова и теорем из [3] об асимптотической устойчивости для неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [32, 33, 34, 35, 37] представлен новый подход в решении задачи о стабилизации установившихся программных движений голономных механических систем. Этот подход позволяет решать эту задачу без построения динамических фильтров путем обоснования применимости нелинейных регуляторов с интегральной составляющей, исходя из новых результатов по исследованию свойств устойчивости функционально-дифференциальных уравнений посредством функционалов Ляпунова [24, 28].

На первых этапах развития робототехники трехзвенный манипулятор являлся одним из основных промышленных роботов. В настоящее время такой манипулятор имеет достаточно широкое применение в научных лабораториях, для выполнения простых операций в промышленности, например,

при сварке, резке листового металла, а также в качестве составляющего устройства сложных робототехнических систем [90, 91]. В этих работах исследованы различные аспекты и особенности применения пропорционально-интегро-дифференцирующего регулятора (ПИД-регулятор) в зависимости от цели исследуемой конкретной задачи рассмотрены в работах. В работе [91] предложен метод, разработанный на основе преобразования координат, позволяющий достичь глобальной стабилизации нулевого положения равновесия горизонтального трехзвенного манипулятора посредством неполного управления с измерением только его положения. Как отмечается в этой работе регулятор без измерения скорости, не требующий установки датчиков скоростей, снижает стоимость всей структуры управления и позволяет избежать начального влияния на нее, вызванного "шумами" скоростей. Исследования в указанных и в других работах из-за сложности моделирования динамики ограничиваются моделью трехзвенного манипулятора простой («классической») конструкции, а именно, с двумя совпадающими главными центральными моментами инерции звеньев.

**Целью диссертационной работы** является математическое моделирование структуры управления на основе нелинейных регуляторов многозвенными роботами-манипуляторами с учетом их динамики и различных факторов обратной связи.

**Задачами диссертационной работы являются:**

- разработка новых моделей структуры управления движениями голономных механических систем с учетом их нелинейной динамики на основе регуляторов с существенно нелинейной интегральной составляющей;
- обоснование новых моделей структуры управления с нелинейной обратной запаздывающей связью роботов-манипуляторов с цилиндрическими и призматическими шарнирами;

- разработка численного метода, алгоритмов и программ численного моделирования процессов управления многозвенными роботами-манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами;
- математическое и численное моделирование процессов стабилизации различных типов программных движений трехзвенного индустриального манипулятора;
- применение новых моделей регуляторов в управлении шестизвенным манипулятором, сконструированным в научно-исследовательском технологическом институте им. С. П. Капицы Ульяновского государственного университета для эксплуатации в дистанционном режиме в горячей камере реактора.

**Научная новизна.** Все полученные в диссертации результаты являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Модель управления лагранжевой механической системы с нестационарными голономными связями на основе нелинейных регуляторов с интегральной составляющей наиболее общего вида. Эффективность модели демонстрируется построением управления, обеспечивающего программную ориентацию твердого тела.
2. Модели управления без измерения скоростей трехзвенным манипулятором классического типа для приведения его в заданное положение или заданное постоянное вращение вокруг вертикально расположенного базового звена.
4. Математические модели управления на основе различных нелинейных регуляторов многозвенными манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами. Особенности структур управления состоят в учете нелинейной динамики системы, их робастности относительно массоинерционных параметров манипуляторов, в возможности неполного измерения фазовых координат, в учете и оценки возможного запаздывания в структуре обратной связи.

5. Численный метод, алгоритмы и программы для численного моделирования процесса управления многозвенными манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами. Соответствующие результаты по моделированию и анализу процессов стабилизации программных движений трехзвенного манипулятора классического типа.

6. Математическая модели динамики трехзвенного индустриального и шестизвенного манипуляторов с результатами математического и численного моделирования процессов управления их программными движениями с использованием различных новых типов нелинейных регуляторов.

#### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Математическое и численное моделирование процесса управления многозвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическими шарнирами на основе новых типов нелинейных регуляторов показали их высокую эффективность в части универсальности, возможной неполноты измерения фазовых координат, робастности относительно массоинерционных параметров, по меньшей энергозатратности при глобальной стабилизации программных движений, возможности вычисления допустимого запаздывания в структуре обратной связи. Тем самым, результаты работы могут быть рекомендованы для конструирования и перенастройки структуры управления промышленными многозвенными манипуляторами.

В научно-исследовательском технологическом институте им. С.П. Капицы Ульяновского государственного университета сконструирован шестизвенный манипулятор для эксплуатации в дистанционном режиме в горячей камере реактора. В работе представлены различные модели управления таким манипулятором. Математическое и численное моделирование процессов управления показало удовлетворительное совпадение теоретических результатов с экспериментальными.

### **Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

Содержание диссертации соответствует пунктам «1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», «3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента». «4. Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели» паспорта специальности научной специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечены строгим математическим обоснованием разработанных моделей управления многозвенными роботами-манипуляторами с анализом их эффективности, строгим обоснованием и корректным применением разработанного численного метода, использованием современных методов разработки алгоритмов, сравнением полученных результатов моделирования по применению новых моделей в управлении классическим трехзвенным манипулятором с известными результатами, а также использованием при разработке программного комплекса апробированного лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения. Все теоретические положения подтверждены результатами вычислительных экспериментов.

**Методы исследования.** Теоретические результаты диссертации получены с применением методов качественной теории обыкновенных и функционально-дифференциальных уравнений, теории управления, численных методов, методов математического моделирования и современных технологий научного программирования.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных конференциях, школах и семинарах:

1. XIV Международная научная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления", Москва, Россия, 30 мая – 1 июня 2018 г.
2. 1-я Международная конференция по системам управления, математическому моделированию, автоматизации и энергоэффективности, СУММА-2019, Липецк, Россия, 20–22 ноября 2019 г.
3. XIII Всероссийское совещание по проблемам управления, ВСПУ-2019, Москва, 17–20 июня 2019 года.
4. XV Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", 15–18 июля 2021 года, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва.
5. Международная научная конференция по механике "IX ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ". Санкт-Петербург, 09–12 марта 2021 года, Санкт-Петербургский государственный университет.
6. Научно-техническая конференция «Интегрированные системы управления», 18–19 мая 2021 г., г. Ульяновск. ФНПЦ АО НПО «Марс».
7. V научная школа «Динамика сложных сетей и их приложений», 13–15 сентября 2021 г., г. Калининград, Россия.
8. Международная научно-практическая конференция «Цифровые технологии, инновационные идеи и перспективы их применения в сфере производства», 12 июня 2021 года, Андижан, Узбекистан.
9. XVI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Россия, Москва, ИПУ РАН, 1–3 июня 2022 г.
10. X Международная научная молодежная школа-семинар «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского, Россия, Саранск, МГУ им. Н. П. Огарёва, 14–18 июля 2022 года.

11. 9-я Международная конференция по управлению, принятию решений и информационным технологиям (CoDIT), Рим, Италия, 3–6 июля 2023 г.

#### **Личный вклад.**

В работах [17, 31] автору принадлежит подбор параметров управления трехзвенного манипулятора и численное моделирование процесса сходимости возмущенного его движения к программному установившемуся движению. В работе [35] автору принадлежит анализ выбора параметров управления и численное моделирование процесса управления трехзвенным манипулятором. В работе [36] автором выполнено моделирование процесса управления трехзвенной рукой робота. В работе [37] автором выполнено численное моделирование исследованной задачи. Работа [38] в основном, за исключением учета особенностей моделирования движения лагранжевой механической системы, выполнена автором. Работы [10, 11] выполнены автором самостоятельно. В работе [4] автором проведено численное моделирование робота. Работа [54] в основном, за исключением постановки задачи, выполнена автором. В работе [39] автором выполнены исследования по динамике и управлению шестизвенным манипулятором. В работе [6] автору принадлежит анализ имеющихся работ, моделирование динамики и управления роботом. В работе [12] автору принадлежат результаты по моделированию управления трехзвенным манипулятором.

Таким образом, автору принадлежит более двух третей выполненных исследований в совместных работах с другими авторами, опубликованных по теме диссертации.

#### **Опубликованность результатов исследования.**

Результаты исследования опубликованы в 14 печатных работах, из них 7 статей опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ, которые также индексируются в международной системе цитирования Scopus. Получено одно свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 13 параграфов, заключения, литературы и приложения. Объем диссертации составляет 117 страниц.



# ГЛАВА 1. О МЕТОДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА В УПРАВЛЕНИИ

В первой главе исследуется проблема разработки новых математических методов моделирования структуры управления роботоманипуляторов, имеющих цилиндрические шарниры. Моделирование динамики таких роботов наиболее адекватно проводить в цилиндрическом фазовом пространстве. При таком подходе достигается эффект полуглобальной стабилизации движений манипуляторов при уменьшении энергозатратности на управляющие воздействия.

Применение регуляторов с нелинейной интегральной составляющей приводит к необходимости моделирования на основе функционально-дифференциальных уравнений с правой частью, периодической по части зависимых координат. В § 1.1 излагаются использованные в диссертации результаты работ [32, 34] по развитию метода функционалов Ляпунова в исследовании предельных свойств решений указанных уравнений.

В последнее время активной областью исследований по разработке структуры управления механических систем является задача о применении в обратной связи управления нелинейных регуляторов с интегральными составляющими. В § 1.2 излагаются результаты применения утверждений § 1.1 для обоснования такой структуры с наиболее общей формой нелинейной интегральной составляющей. В § 1.3 в качестве приложения результатов §§ 1.1, 1.2 обосновывается построение модели такого управления в задаче об ориентации твердого тела относительно инерциальной и неинерциальной систем координат.

В § 1.4 решается задача об обосновании структуры управления, обеспечивающей стабилизацию установившихся движений голономной механической системы с частью угловых координат.

### § 1.1. Развитие метода функционалов Ляпунова для неавтономной системы функционально-дифференциальных уравнений.

В соответствии с работой [24] применим следующие построения.

Пусть  $R^p$  – линейное вещественное пространство  $p$ -векторов  $x$  с некоторой нормой  $|x|$ ; пусть  $h_0 > 0$  – какое-то вещественное число; пусть  $C$  – банахово пространство непрерывных функций  $\varphi: [-h_0, 0] \rightarrow R^p$  с нормой

$$\|\varphi\| = \max(|\varphi(s)|, -h_0 \leq s \leq 0).$$

Для каждого положительного действительного  $H, 0 < H < \infty$  обозначим через  $C_H$  подмножество  $C$  следующим образом:  $C_H = \{\varphi \in C: \|\varphi\| \leq H\}$ . Для каждой непрерывной функции  $x: R \rightarrow R^p$  и каждого  $t \in R^+$  функция  $x_t \in C$  определяется равенством  $x_t(s) = x(t + s), -h_0 \leq s \leq 0$ .

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1.1}$$

где  $\dot{x}(t)$  – верхняя правая производная,  $f: R \times C \rightarrow R^p$  – непрерывная функция, удовлетворяющая при каждом  $H, 0 < H < \infty$ , условиям

$$\begin{aligned} |f(t, \varphi)| &\leq m(H), \\ |f(t_2, \varphi^{(2)}) - f(t_1, \varphi^{(1)})| &\leq L(H)(|t_2 - t_1| + \\ &+ \|\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}\|) \\ \forall (t, \varphi), (t_1, \varphi^{(1)}), (t_2, \varphi^{(2)}) &\in R \times C_H. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

При выполнении условий (1.1.2) для любой начальной точки  $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  существует единственное решение  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  из (1.1.1),  $x_t(\alpha, \varphi) = \varphi$ , определенное на некотором интервале  $[\alpha - h_0, \beta)$ ,  $\beta > \alpha$ .

Пусть  $r_n$  – некоторая монотонно возрастающая последовательность,  $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots, r_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для каждого числа  $r_n$  обозначим через  $K_n \subset \mathbb{C}$  множество функций  $\varphi \in \mathbb{C}$ , таких как

$$|\varphi(s)| \leq r_n, |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leq m(r_n)|s_2 - s_1|$$

для всех  $s, s_1, s_2 \in [-h_0, 0]$ .

Заметим, что множества  $K_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) компактны. Определим множество

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

**Утверждение 1.1.1** [24]. Если  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  является решением (1.1.1), определенным и ограниченным на интервале  $[\alpha - h_0, \infty)$ , то  $x_t(\alpha, \varphi) \in D$  для всех  $t \in [\alpha + h_0, \infty)$ . В частности, если  $\varphi \in D$ , то  $x_t(\alpha, \varphi) \in D$  для всех  $t \in [\alpha, \beta)$ .

Пусть  $F$  – множество всех непрерывных функций  $f: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Определим сходимость в  $F$  по компактно-открытой топологии [6]; а именно, последовательность  $\{f_n \in F\}$  сходится к  $f \in F$ , если для каждого компакта  $K \subset \mathbb{R} \times D$  и для каждого  $\varepsilon > 0$  выполняется следующая оценка:  $|f_n(t, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$  для всех  $n \geq N(\varepsilon)$  и  $(t, \varphi) \in K$ . Эта сходимость метризуема.

**Утверждение 1.1.2** [24]. Пусть функция  $f: R \times \Gamma \rightarrow R^p$  удовлетворяет условиям типа (1.1.2). Тогда семейство сдвигов  $\{f_\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi), \tau \in R^+\}$  функции  $f$  предкомпактно в  $F$ .

**Определение 1.1.1** [24]. Для правой части  $f$  уравнения (1.1.1) обозначим через  $G(f)$  замыкание множества  $\{f_\tau(t, \varphi)\}$ . Совокупность уравнений

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t), f^* \in G(f) \quad (1.1.3)$$

образует семейство предельных уравнений для (1.1.1) [6].

Заметим, что в силу условий (1.1.2) каждая функция  $f^* \in G(f)$  удовлетворяет условиям (1.1.2). Следовательно, решение  $x = x^*(t, 0, \varphi)$  каждого уравнения (1.1.3) для каждой начальной функции  $\varphi \in C$  единственно.

**Определение 1.1.2** [24]. Пусть  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  – решение системы (1.1.1), определенное для всех  $t \geq \alpha - h_0$ . Множество

$$\omega^+(x(t, \alpha, \varphi)) = \{q \in R^p: \exists t_n \rightarrow \infty: \\ x(t_n, \alpha, \varphi) \rightarrow q \text{ при } n \rightarrow \infty\}$$

называется положительным предельным множеством решения  $x(t, \alpha, \varphi)$  в  $R^p$ .

**Определение 1.1.3.** Множество  $M \subset R^p$  называется квазиинвариантным относительно семейства предельных уравнений (1.1.3), если для каждой точки  $q \in M$  существует уравнение семейства (1.1.3) с решением  $x^*(t)$  этого уравнения таким, что выполняется  $x^*(0) = q, x^*(t) \in M$  для всех  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

**Теорема 1.1.1** [24]. Пусть  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  – некоторое решение уравнения (1.1.1), ограниченное для всех  $t \geq \alpha - h_0$ . Тогда множество

$\omega^+(x(t, \alpha, \varphi))$  квазиинвариантно относительно семейства предельных уравнений (1.1.3).

Пусть  $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывный функционал Ляпунова. Можно определить верхнюю правую производную от  $V$  вдоль решения  $x = x(t)$  уравнения (1.1.1) следующим образом [24]

$$\dot{V}^+(t, x_t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} (V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}) - V(t, x_t)).$$

Предположим, что верхняя правая производная  $V$  удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}^+(t, x_t) \leq -W(x(t)) \leq 0, \quad (1.1.4)$$

где  $W: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$  является непрерывной функцией.

**Теорема 1.1.2** [24]. Предположим, что:

1. Решение  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  уравнения (1.1.1) ограничено, т. е.

$$|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H = \text{const} \quad \forall t \geq \alpha - h_0;$$

2. Существует функционал Ляпунова  $V = V(t, \varphi)$  такой, что  $V(t, \varphi) \geq \mu \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}_H$ , при некотором  $\mu = \mu(H)$ , производная по времени  $\dot{V}^+(t, x_t)$  удовлетворяет неравенству (1.1.4).

Тогда  $\omega^+(x(t, \alpha, \varphi)) \subset M^*$ , где  $M^*$  – максимальное квазиинвариантное подмножество множества  $\{W(x) = 0\}$ .

Предположим, что  $f(t, 0) \equiv 0$ , поэтому уравнение (1.1.1) имеет нулевое решение  $x(t, \alpha, 0) \equiv 0$ .

Введем класс  $\mathcal{K}$  функций типа Хана  $a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  [53]. Имеет место следующая теорема об асимптотической устойчивости.

**Теорема 1.1.3** [24]. Предположим, что:

1) существует функционал Ляпунова  $V = V(t, x_t)$  такой, что

$$\begin{aligned} a_1(|x(t)|) \leq V(t, x_t) \leq a_2(\|x_t\|), \\ \dot{V}^+(t, x_t) \leq -W(x(t)) \leq 0, \end{aligned}$$

где  $a_1, a_2 \in \mathcal{K}$ ;

2) множество  $\{W(x) = 0\}$  не содержит решений ни одного предельного уравнения (1.1.3), кроме  $x = 0$ .

Тогда нулевое решение  $x = 0$  уравнения (1.1.1) равномерно асимптотически устойчиво. Если  $a_1(s) \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow \infty$ , то решение  $x = 0$  уравнения (1.1.1) равномерно глобально асимптотически устойчиво.

В работах [32, 34] проведена модификация представленных выше результатов в случае, когда правая часть (1.1.1) является периодической функцией по части зависимых переменных.

Пусть  $x = (y, z)^T = (y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_s)^T$ , где  $1 \leq m < p, s = p - m$ . Здесь и далее в этой главе  $(\cdot)^T$  – операция транспонирования,  $y \in \mathbb{R}^m$  и  $z \in \mathbb{R}^s$ . Нормы векторов  $y \in \mathbb{R}^m$  и  $z \in \mathbb{R}^s$  обозначаются через  $|y|$  и  $|z|$  соответственно. Выберем векторную норму  $x \in \mathbb{R}^p$  в виде  $|x| = |y| + |z|$ .

Пусть  $C_{(m)}$  и  $C_{(s)}$  – пространства непрерывных функций  $\psi: [-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $\theta: [-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}^s$  в соответствии с нормами  $\|\psi\| = \max(|\psi(s)|, -h_0 \leq s \leq 0)$  и  $\|\theta\| = \max(|\theta(s)|, -h_0 \leq s \leq 0)$ . Обозначим через  $\|\varphi\|$  следующую норму:

$$\|\varphi\| = \|\psi\| + \|\theta\|.$$

Предполагается, что для всех  $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C$  выполняется следующее равенство  $f(t, \psi + 2\pi 1_m, \theta) = f(t, \psi, \theta)$ , где  $\psi + 2\pi 1_m = (\psi_1 + 2\pi, \psi_2 + 2\pi, \dots, \psi_m + 2\pi)^T$ . Тогда решения  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  системы (1.1.1) можно

определить в пространстве  $T^m \times R^s$ , где  $T^m = \{y \in R^m: -\pi \leq y_j < \pi, j = 1, 2, \dots, m\}$ .

Вводится следующее определение положительного предельного множества  $\omega^+(x(t, \alpha, \varphi))$  решения  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  системы (1.1.1) в пространстве  $T^m \times R^s$ .

**Определение 1.1.4** [32, 34]. Точка  $q^T = (q^{(1)}, q^{(2)})^T, q \in T^m \times R^s$  называется предельной для  $x = x(t, \alpha, \varphi)$ , если существуют последовательность  $t_k \rightarrow \infty$  и последовательность  $L^{(k)} = (l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \dots, l_m^{(k)})^T, l_j^{(k)} \in Z, j = 1, 2, \dots, m$ , такие, что  $(y(t_k, \alpha, \varphi) - 2\pi L^{(k)}) \rightarrow q^{(1)}$  и  $z(t_k, \alpha, \varphi) \rightarrow q^{(2)}$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Доказываются следующие утверждения.

**Утверждение 1.1.3**[32, 34]. Пусть  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  – решение уравнения (1.1.1), ограниченное по  $z$ , а именно, существует положительное вещественное  $H$  такое, что  $\|z(t, \alpha, \varphi)\| \leq H_2 = \text{const}$  для всех  $t \geq \alpha$ . Тогда множество  $\omega(x(t, \alpha, \varphi))$  связно, компактно и квазиинвариантно относительно семейства предельных уравнений (1.1.3).

**Утверждение 1.1.4**[32, 34]. Пусть можно найти функционал Ляпунова  $V = V(t, \varphi)$  такой, что:

1.  $\exists k \in N: V(t, \psi + 2\pi k 1_m, \theta) = V(t, \psi, \theta); \quad V(t, \psi, \theta) \geq a(\|\theta\|) \geq \forall(t, \psi, \theta) \in R^+ \times C_{(m)} \times C_{(s)}, \quad a(\|\theta\|) \rightarrow \infty$  при  $\|\theta\| \rightarrow \infty$ ;
2. Верхняя правая производная по времени  $\dot{V}^+(t, x_t)$  вдоль решений (1.1.1) удовлетворяет соотношению (1.1.4), где функция  $W$  такова, что  $W(y + 2\pi 1_m, z) = W(y, z)$  для всех  $(y, z) \in T^m \times R^s$ .

Тогда для решения  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  уравнения (1.1.1) выполняется следующее  $\omega^+(x(t, \alpha, \varphi)) \subset M$ , где  $M$  – максимально квазиинвариантное подмножество множества  $E = \{(y, z) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^s : W(y, z) = 0\}$ .

Пусть  $f(t, 0) \equiv 0$ . Тогда система (1.1.1) имеет следующее множество всех точек равновесия

$$\{\psi(s) = 2\pi k, \theta(s) = 0, k = (k_1, k_2, \dots, k_m)^T \in \mathbb{Z}^m\} \quad (1.1.5)$$

Предположим, что на множестве функций  $\{\psi(s) = y^{(0)}, \theta(s) = z^{(0)}, y^{(0)} \in \mathbb{T}^m, z^{(0)} \in \mathbb{R}^s, \|y^{(0)}\| + \|z^{(0)}\| = \varepsilon > 0\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$  выполняется следующее неравенство  $\|f(t, y, z)\| \geq \delta(\varepsilon) > 0$ .

Тогда уравнение (1.1.1), а также предельные уравнения (1.1.3) не могут иметь положений равновесия, отличных от положений равновесия (1.1.5).

**Утверждение 1.1.5** [32, 34]. Пусть можно найти функционал Ляпунова  $V = V(t, \varphi)$  такой, что:

1.  $V(t, \psi + 2\pi 1_m, \theta) = V(t, \psi, \theta) \quad \forall (t, \psi, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ ;
2.  $a_1(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq a_2(\|\varphi\|) \quad \forall \varphi \in \{\|\varphi\| < \delta, \delta > 0\}$ ;
3.  $V(t, \psi + 4\pi 1_m, \theta) \geq a_3(\|\theta\|) \quad \forall (t, \psi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}_{(m)} \times \mathbb{C}_{(s)}$ ,  
 $a_3(\|\theta\|) \rightarrow \infty$  при  $\|\theta\| \rightarrow \infty$ ;
4. Верхняя правая производная  $\dot{V}^+$  вдоль решения (1.1.1) удовлетворяет неравенству (1.4), где функция  $W = W(x)$  равна  $2\pi$  – периодическая по  $y$ , т. е.  $W(y + 2\pi 1_m, z) = W(y, z)$ ;
5. Множество  $\{W(x) = 0\}$  не содержит решений предельных систем (1.1.3), кроме (1.1.6).

Тогда множество положений равновесия  $\{x \in \mathbb{R}^n : y = 4\pi k, k \in \mathbb{Z}^m, z = 0\}$  системы (1.1.1) является равномерно асимптотически устойчивым.



Соответственно, множество положений равновесия (1.1.5) является глобально притягивающим.

## § 1.2. Нелинейное управление лагранжевой системой.

Рассмотрим управляемую систему, положение которой определяется  $n$  обобщенными координатами, а движение описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -F\dot{q} + U, \quad (1.2.1)$$

где  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$  – вектор обобщенных координат,  $\dot{q} = dq/dt$ ,  $L = L_2 + L_1 + L_0$  – функция Лагранжа,  $2L_2 = \dot{q}^T A(t, q)\dot{q}$ ,  $L_1 = \dot{q}^T B(q)$ ,  $L_0 = L_0(t, q)$ ,  $A \in C^2(R^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n})$  – матрица инерции,  $B \in C^2(R^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $L_0 \in C^2(R^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $F \in C^1(R^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$  – матрица диссипативно-ускоряющих и гироскопических сил,  $U$  – управляющие силы (здесь и далее символ  $(\cdot)^T$  обозначает операцию транспонирования,  $\|q\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2$ ).

Предположим, что матрица инерции  $A = A(t, q)$  невырождена и ограничена,

$$a_0 \|\dot{q}\|^2 \leq \dot{q}^T A(t, q)\dot{q} \leq a_1 \|\dot{q}\|^2 \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^+ \times \{\|q\| \leq H = \text{const} > 0\} \times \mathbb{R}^n; \quad a_0, a_1 - \text{const} > 0.$$

Предположим также, что все необходимые частные производные функций  $A = A(t, q)$ ,  $B = B(q)$  и  $L_0 = L_0(t, q)$  ограничены в каждой области  $R^+ \times \{\|q\| \leq H = \text{const} > 0\}$  в зависимости от постоянной  $H$ .

Допустим, что  $\partial L_0(t, q)/\partial q = 0$ , если  $q = 0$ . Итак, если  $U = 0$ , то система (1.2.1) имеет нулевое положение равновесия

$$\dot{q} = q = 0 \quad (1.2.2)$$

Рассмотрим задачу стабилизации положения (1.2.2) под действием нелинейного регулятора вида

$$U = -\frac{\partial \Pi(t, q)}{\partial q} - D(t, q)\dot{q} - \left(\frac{\partial f_1(q)}{\partial q}\right)^T \int_{t-h_1(t)}^t g_1(\tau, t)f_1(q(\tau))d\tau + \left(\frac{\partial f_2(q)}{\partial q}\right)^T \int_{t-h_2(t)}^t g_2(\tau, t)f_2(q(\tau))d\tau, \quad (1.2.3)$$

составляющие которого таковы, что:

1. Матрица  $D \in C^1(R^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n})$ ;
2. Потенциальная функция  $\Pi_0 \in C^2(R^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$
3. Векторные функции  $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , при этом

$$\left\| \frac{\partial f_1(q)}{\partial q} \right\| \leq \mu_0 = \text{const} \quad \forall q \in \mathbb{R}^n; \quad x^T \frac{\partial f_1(q)}{\partial q} x \leq \mu_0 \|x\|^2 \quad \forall q, x \in \mathbb{R}^n;$$

уравнение  $f_2(q) = c_0 = \text{const}$  имеет конечное число решений  $q = q(C_0)$  в каждой конечной области  $\{q \in \mathbb{R}^n: \|q\| \leq H, 0 < H < \infty\}$ ;

4. Скалярные функции  $g_1, g_2, h_1, h_2$  являются положительными

$$g_1, g_2 \in C^1([-h_0, +\infty) \times R^+ \rightarrow [\mu_1, \mu_2]), 0 < \mu_1 < \mu_2$$

$$h_1, h_2 \in C^1(R^+ \rightarrow [h_{00}, h_0]), \frac{dh_j}{dt} \leq 1 - \varepsilon_0 \quad (h_{00}, h_0, \varepsilon_0 - \text{const} > 0).$$

Преобразуем третье слагаемое выражения (1.2.3) для управления  $U$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial f_1(q)}{\partial q} \right)^T \int_{t-h_1(t)}^t g_1(\tau, t) f_1(q(\tau)) d\tau = \left( \frac{\partial f_1(q)}{\partial q} \right)^T \int_{t-h_1(t)}^t g_1(\tau, t) \\
& \quad \times \left( f_1(q(t)) - \int_{\tau}^t \frac{\partial f_1(q(s))}{\partial q} \dot{q}(s) ds \right) d\tau = \\
& = g_{11}(t) \left( \frac{\partial f_1(q)}{\partial q} \right)^T f_1(q(t)) - \left( \frac{\partial f_1(q)}{\partial q} \right)^T \int_{t-h_1(t)}^t g_{12}(s, t) \frac{\partial f_1(q(s))}{\partial q} \dot{q}(s) ds, \\
& \quad g_{11}(t) = \int_{t-h_1(t)}^t g_1(\tau, t) d\tau, \quad g_{12}(s, t) = \int_{t-h_1(t)}^t g_1(\tau, t) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$\begin{aligned}
V = & L_2 + S(t, q) + \frac{\mu_3}{2} \int_{t-h_0}^t \left( \int_s^t \|\dot{q}(\tau)\|^2 d\tau \right) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t-h_2(t)}^t g_2(\tau, t) \|f_2(q(t)) - f_2(q(\tau))\|^2 d\tau,
\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

где

$$\begin{aligned}
S(t, q) = & \Pi_0(t, q) - L_0(t, q) + \frac{1}{2} g_{11}(t) \|f_1(q)\|^2 + \frac{1}{2} g_{21}(t) \|f_2(q)\|^2, \\
g_{21}(t) = & \int_{t-h_2(t)}^t g_2(t, \tau) d\tau, \quad \mu_3 = \mu_0 \sqrt{g_0 h_0}.
\end{aligned}$$

Для производной по времени  $\dot{V}^+$  функционала (1.2.5) в силу уравнений (1.2.1) с учетом принятых условий можно получить оценку

$$\begin{aligned}
\dot{V}^+ \leq & \dot{q}^T \left( \frac{1}{2} \frac{\partial A(t, q)}{\partial t} - F(t, q) - D(t, q) - \frac{\mu_3}{h_0} E \right) \dot{q} + \\
& + \frac{\partial S(t, q)}{\partial t} + \int_{t-h_2(t)}^t \frac{\partial g_2(t, \tau)}{\partial t} \|f_2(q(t)) - f_2(q(\tau))\|^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Дополним условия 4 следующими

$$\frac{\partial S(t, q)}{\partial t} \leq 0$$

$$\dot{q}^T \left( \frac{1}{2} \frac{\partial A(t, q)}{\partial t} - F(t, q) - D(t, q) - \frac{\mu_3}{h_0} E \right) \dot{q} \leq -k(t) \|\dot{q}\|^2 \leq 0 \quad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial g_2(t, \tau)}{\partial t} \leq -g_2^{(0)}(t) \leq 0, k^2(t) + \left( g_2^{(0)}(t) \right)^2 \geq k_0 > 0$$

$$k(t) \leq k_0, g_2^{(0)}(t) \leq g_{20} \quad \forall t \in R^+$$

$$k(t) \geq k_1 > 0 \quad \forall t \in \sigma_1, \quad g_2^{(0)}(t) \geq g_{21} > 0 \quad \forall t \in \sigma_2,$$

$$\sigma_1 = \{t \in R^+ : t_i \leq t \leq t_i + T_0, t_i \rightarrow \infty, T_0 > 0\}$$

$$\sigma_2 = \{t \in R^+ : t_j \leq t \leq t_j + 2h_{00}, t_j \rightarrow \infty\},$$

$$\sigma_1 \cup \sigma_2 = R^+$$

Тогда для производной по времени  $\dot{V}^+$  можно получить

$$\dot{V}^+ \leq -W(\dot{q}(t), q_t(s)) \leq 0 \quad (q_t(s) = q(t+s), -h_0 \leq s \leq 0).$$

Заметим, что множество  $\{W = 0\}$  содержит только движения системы (1.2.1), (1.2.3) для которых  $\{\dot{q}(t) = 0, q(t) = q^{(0)} = \text{const}\}$ . При условии, что

$$\|\partial S(t, q) / \partial q\| \geq S_0(q) \quad \forall (t, q) \in R^+ \times R^n$$

такие движения системы (1.2.1), (1.2.3) могут быть движениями только на множестве  $\{S_0(q) = 0\}$ , соответственно,  $S_0(q^{(0)}) = 0$ .

Система (1.2.1), (1.2.3) предкомпактна из-за наложенных условий, а предельные уравнения аналогичны (1.2.1), (1.2.3) и имеют аналогичные свойства [6] в соответствии с построениями § 1.1. На основании Теорем 1.1.2 и 1.1.3 получаем следующие утверждения.

**Утверждение 1.2.1.** Предположим, что выполнены условия 4 и (1.2.7), а также:

1.  $a_1(\|q\|) \leq S(t, q) \leq a_2(\|q\|) \quad \forall (t, q) \in R^+ \times \{q \in R^n : \|q\| < H = \text{const}\}$ ;
2.  $S_0(q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$ .

Тогда закон управления (1.2.3) решает задачу о равномерной стабилизации положения равновесия (1.2.2).

**Утверждение 1.2.2.** Если условие 1 Утверждения 1.2.1 выполнено при  $H = \infty$ , при этом  $a_1(\alpha) \rightarrow \infty$  когда  $\alpha \rightarrow \infty$ , то имеет место глобальная равномерная стабилизация положения равновесия (1.2.2).

**Утверждение 1.2.3.** Если в Утверждении 1.2.1 условие 2 заменить следующим:

2) множество  $\{S_0(q) = 0\}$  состоит из конечного числа точек области  $\{q \in \mathbb{R}^n: \|q\| < H = \text{const}\}$ , то дополнительно получаем, что каждое ограниченное движение системы (1.2.1), (1.2.3) неограниченно приближается к одному из положений равновесия  $\dot{q} = 0, q = q^{(0)} = \text{const}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

### § 1.3. Стабилизация вращательного движения твердого тела.

Выберем уравнения управляемого вращательного движения твердого тела с неподвижной точкой в виде динамических уравнений Эйлера [14]

$$I \frac{d\bar{\omega}}{dt} + (\bar{\omega} \times I\bar{\omega}) = \bar{M} + \bar{U}, \quad (1.3.1)$$

где  $I$  – тензор инерции тела относительно неизменно связанной с телом системы  $Oxuz$ ,  $O$  – его неподвижная точка,  $\bar{\omega}$  – угловая скорость тела в проекциях на осях  $Ox, Oy$  и  $Oz$ ,  $\bar{M}$  – момент внешних сил относительно  $O$ ,  $\bar{U}$  – управляющий момент,  $(\bar{a} \times \bar{b})$  – векторное произведение,  $(\bar{a} \cdot \bar{b})$  – скалярное произведение.

Предположим, что крутящий момент  $\bar{M}$  пропорционален угловой скорости тела, т. е.

$$\bar{M} = -F(t)\bar{\omega}, F(t) = (f_{jk}(t)), \quad (1.3.2)$$

где  $\|F(t)\| = \max(|f_{jk}(t)|) \leq f_0 = \text{const } \forall j, k = 1, 2, 3; t \in \mathbb{R}^+$ .

Пусть  $O\xi\eta\zeta$  – инерциальная система координат. Пусть также  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  и  $\bar{e}_3$  – единичные векторы, соответствующие осям  $O\xi, O\eta$  и  $O\zeta$ ; и пусть  $n_1, n_2$  и  $n_3$  – орты, соответствующие осям  $Ox, Oy$  и  $Oz$ .

Дополним динамические уравнения (1.3.1) кинематическими

$$\frac{d\bar{e}_k}{dt} = -(\bar{\omega} \times \bar{e}_k) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.3.3)$$

Рассмотрим следующие задачи.

**Задача 1.3.1.** Задача состоит в том, чтобы определить управляющий момент  $\bar{U}$ , обеспечивающий стабилизацию положения равновесия тела, при котором тройка  $(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3)$  ориентируется по тройке  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ .

Пусть  $O\alpha\beta\gamma$  – система координат с тройными ортами  $(\bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_3)$ , вращающимися вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}_0(t)$  относительно инерциальной системы  $O\xi\eta\zeta$ .

Угловое движение тела вместе с уравнениями (1.3.3) определяется уравнениями

$$\frac{d\bar{j}_k}{dt} = -\left((\bar{\omega} - \bar{\omega}_0(t)) \times \bar{j}_k\right). \quad (1.3.4)$$

**Задача 1.3.2.** Задача состоит в том, чтобы определить управляющий момент  $\bar{U}$ , обеспечивающий стабилизацию положения относительного равновесия тела, при котором тройка ортов  $(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3)$  ориентируется тройкой  $(\bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_3)$ .

Решение Задач 1.3.1 и 1.3.2 можно рассматривать как с мгновенной, так и с запаздывающей обратной связью.

Решение Задачи 1.3.1 с помощью нелинейного регулятора с интегральной составляющей без измерения скорости.

Пусть закон управления имеет вид

$$U = - \sum_{k=1}^2 \mu_k (\bar{e}_k \times \bar{n}_k) - \sum_{k=1}^2 \int_{t-h_1(t)}^t g_2(\tau-t) (\bar{e}_k(\tau) \times \bar{e}_k(\tau)) d\tau \quad (1.3.5)$$

где  $g_{2k}(\tau, t)$ ,  $h_1(t)$  удовлетворяют условиям из неравенств (1.2.8) для  $g_2(\tau, t)$  и  $h_1(t)$ ,  $\mu_1, \mu_2$  – некоторые положительные постоянные,  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

На основании Утверждения 1.2.3 можно найти, что положение равновесия

$$\bar{\omega} = 0, \bar{e}_k = \bar{n}_k, k = 1, 2, 3$$

равномерно асимптотически устойчиво, и каждое движение тела стремится к одному из положений равновесия

$$\bar{\omega} = 0, \bar{e}_k = \pm \bar{n}_k, k = 1, 2, 3$$

при  $t \rightarrow \infty$ .

Решение задачи 1.3.2 с помощью нелинейного регулятора с полным измерением скоростей и положений.

Пусть закон управления имеет вид

$$U = -d(t) \left( \bar{\omega} - \bar{\omega}_0(t) + \sum_{k=1}^2 \int_{t-h_0}^t g_2(\tau-t) (\bar{j}_k(\tau) \times \bar{n}_k) d\tau \right) \quad (1.3.6)$$

На основании Утверждения 1.2.3 можно найти, что управление (1.3.4) решает Задачу 1.3.2, если выполняется следующее условие

$$\bar{x} \cdot F\bar{x} + d(t) \|\bar{x}\|^2 - (\bar{x} \cdot I\bar{x} \cdot \bar{\omega}_0(t)) - \sqrt{\frac{g_0}{h_0}} \|\bar{x}\|^2 \geq \varepsilon_0 \|\bar{x}\|^2, \varepsilon_0 > 0.$$

#### § 1.4. Стабилизация программных положений управляемой механической системы без измерения скоростей.

Движение управляемой механической системы со стационарными голономными связями, определяемых  $n$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , описывается уравнениями, видоизменёнными по отношению к (1.2.1):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U, \quad (1.4.1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы,  $Q$  – обобщенная сила,  $U$  – управление. Полагаем, что сила  $Q$  представляет собой действие потенциальных, гироскопических и диссипативных сил.

Уравнения (1.4.1) могут быть представлены в виде

$$A(q)\ddot{q} = C(q, \dot{q})\dot{q} - \frac{\partial \Pi(t, q)}{\partial q} + Q_d(t, q, \dot{q}) + U, \quad (1.4.2)$$

где  $A(q)$  – матрица массо-инерционных параметров системы,  $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  – вектор кориолисовых и центробежных сил инерции

$$C = (c_{jk}), \quad c_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{sj}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_s,$$

$\Pi = \Pi(t, q)$  – потенциальная энергия системы, а  $Q_d$  выражает действие гироскопических и диссипативных сил, т. е.

$$Q_d(t, q, 0) \equiv 0, \quad \dot{q}^T Q_d(t, q, \dot{q})' \leq 0 \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$



**Задача 1.4.1.** Задача состоит в нахождении без изменений скоростей управления  $U$ , обеспечивающего стабилизацию заданной программной позиции.

$$\dot{q} = 0, \quad q = q^{(0)} = \text{const.} \quad (1.4.3)$$

Решение задачи найдем в виде соотношения

$$U = U^{(0)} + U^{(1)}, \quad U^{(0)}(t) \equiv \frac{\partial \Pi(t, q^{(0)})}{\partial q}, \quad (1.4.4)$$

где составляющая  $U^{(0)}(t)$  обеспечивает существование (1.4.3) как заданного положения системы, а управляющее воздействие  $U^{(1)}$  – его стабилизацию.

Введем возмущения

$$x = q - q^{(0)}, \quad \dot{x} = \dot{q}.$$

Будем полагать, что часть обобщённых координат являются угловыми. Соответственно координаты  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$  можно разделить на  $x^T = ((x^{(1)})^T (x^{(2)})^T)$ ,  $x^{(1)} \in R^m, x^{(2)} \in R^{n-m}$  ( $1 \leq m \leq n$ ), где  $x^{(1)}$  – вектор угловых координат.

Уравнение возмущённого движения запишем в виде:

$$A^{(1)}(x)\ddot{x} = C^{(1)}(\dot{x}, \dot{x})\dot{x} - \frac{\partial \Pi_1(t, x)}{\partial x} + Q^{(1)}(t, x, \dot{x}) + U, \quad (1.4.5)$$

$$A^{(1)}(x) = A(q^{(0)} + x), \quad C^{(1)}(x, \dot{x}) = C(q^{(0)} + x, \dot{x}),$$

$$\Pi_1(t, x) = \Pi(t, q^{(0)} + x), \quad Q^{(1)}(t, x, \dot{x}) = Q(t, q^{(0)} + x, \dot{x}).$$

Без ограничения общности примем, что зависимости  $A^{(1)}(x)$ ,  $C^{(1)}(x, \dot{x})$ ,  $\Pi_1(t, x)$ ,  $Q^{(1)}(t, x, \dot{x})$  являются периодическими по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_m$  с периодами  $2\pi$ .

Покажем, что Задача 1.4.1 может быть решена управляющим воздействием вида

$$U^{(1)} = -\frac{\partial \Pi_2(t, x(t))}{\partial x} + \left( \frac{\partial f(x(t))}{\partial x} \right)^T \int_{t-h(t)}^t P(t, \tau) f(x(\tau)) d\tau, \quad (1.4.6)$$

где  $\Pi_2 \in C^2(R^+ \times T^m \times R^{n-m} \rightarrow R)$  есть некоторая потенциальная функция,  $f \in C^2(T^m \times R^{n-m} \rightarrow R^n)$  есть векторная функция с уравнением  $f(x) = c = c_0 = const$ , имеющим в каждой области  $T^m \times \{\|x^{(2)}\| \leq H_2 = const\}$  только конечное число решений  $x = x(c_0)$ , функция  $h \in C^1(R^+ \rightarrow [h_{00}, h_0])$ ,  $(0 < h_{00} \leq h_0)$  удовлетворяет неравенству  $h_{01} \leq \frac{dh(t)}{dt} \leq 1 - \varepsilon_0 \quad \forall t \in R^+$  ( $\varepsilon_0 > 0$ ), матричная функция  $P \in C^2(R^+ \times [-h_0, +\infty) \rightarrow R^{n \times n})$  является ограниченной и определенно положительной с производной  $\frac{\partial P(t, \tau)}{\partial t}$  также ограниченной и определенно отрицательной.

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|x\|^2 &\leq x^T P(t, x) x \leq \alpha_1 \|x\|^2, \\ -\alpha_2 \|x\|^2 &\leq x^T \frac{\partial P(t, \tau)}{\partial t} x \leq -\alpha_3 \|x\|^2 \\ (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3 - const &> 0) \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Введем функцию типа потенциала  $S(t, x)$

$$\begin{aligned} S(t, x) &= \Pi_1(t, x) + \Pi_2(t, x) - \frac{1}{2} (f(x(t)))' P_0(t) f(x(t)), \\ P_0(t) &= \int_{t-h(t)}^t P(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Относительно этой зависимости предположим, что:

- 1)  $S(t, 0) \equiv 0, \partial S(t, 0) / \partial x \equiv 0, \forall t \in R^n;$

2)  $S(t, x)$  является невозрастающей по времени, т. е.

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} \leq 0 \quad \forall (t, x) \in R^+ \times T^m \times R^{n-m};$$

3) При каждом  $t \in R^+$  множество  $\{x \in T^m \times R^{n-n} : \partial S(t, x)/\partial x \equiv 0\}$  состоит из точек множества  $\{x \in T^m \times R^{n-n} : x^{(1)} = x^{(10)} = 2\pi k, k \in Z, x^{(2)} = x^{(20)} = const\}$ , при этом это множество  $\{x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-m} : x^{(2)} = x^{(20)}, \|x\|^{(2)} \leq H_2\}$  является конечным для каждого  $H_2 \geq 0$ .

**Утверждение 1.4.1.** При выполнении условий (1.4.7) и условий относительно потенциала  $S(t, x)$  каждое ограниченное по  $x^{(2)}$  возмущенное движение системы (1.4.5) с управляющим воздействием (1.4.6) неограниченно приближается при  $t \rightarrow \infty$  к каждому положению равновесия

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \quad x^{(1)} = x^{(20)} = 2\pi k_0, \quad k_0 \in Z, \\ x^{(2)} &= x^{(20)}, \quad (x^{(10)}, x^{(20)}) \in M \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

**Доказательство.** Выберем для системы (1.4.5), (1.4.6) функционал Ляпунова в виде

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (\dot{x}(t))^T A^{(t)}(x(t)) \dot{x}(t) + S(t, x(t)) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t-h_0}^t (f(x(t)) - f(x(\tau)))^T P(t, \tau) (f(x(t)) - f(x(\tau))) d\tau. \end{aligned}$$

Находим, что  $V(t, 0) \equiv 0$ ,  $V \geq 0 \quad \forall (t, x(t), \dot{x}(t)) \in R^+ \times R^n \times R^n$ .

Производная функционала в силу (1.4.5), (1.4.6) имеет оценку

$$\begin{aligned} \dot{V}^+ &\leq \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial t} + \frac{1}{2} \int_{t-h(t)}^t (f(x(t)) - f(x(\tau)))^T \frac{\partial P(t, \tau)}{\partial t} (f(x(t)) - \\ &- f(x(\tau))) d\tau \leq -\frac{\alpha_3}{2} \int_{t-h_0}^t \|f(x(t)) - f(x(\tau))\|^2 d\tau \leq -W(x(t)) \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Из (1.4.9) и из уравнений движения находим, что в силу условия 3 относительно  $S = S(t, x)$  множество  $\{W(x) = 0\}$  может содержать только положение равновесия (1.4.8). В соответствии с утверждением 1.2.3 имеем требуемый вывод.

**Утверждение 1.4.2.** В условиях Утверждения 1.4.1 предположим также, что:

1) Потенциал  $S(t, x)$  является определенно-положительным функцией,

$$S(t, x) \geq a(\|x\|) \text{ для } x \in \{x \in R^n: \|x\| \leq \delta\} \text{ для некоторого числа } \delta > 0;$$

2) Множество  $M = \{x \in T^m \times R^{n-m}: x^{(1)} = 2\pi k, k \in Z, x^{(20)} \equiv 0\}$ .

Тогда программная позиция  $\dot{x} = x = 0$  является равномерно асимптотически устойчивой. При этом множество положений равновесия  $M_0 = \{\dot{x} = 0, x^{(11)} = 4\pi k, k \in Z, x^{(2)} = 0\}$ , является полуглобально асимптотически устойчивым, так что любое движение системы (1.4.5) с управляющим воздействием (1.4.6) неограниченно приближается при  $k$  одному из положения равновесия

$$x^2 = 0, x^{(1)} = 2\pi k_0, k_0 \in Z, x^{(2)} = 0 \quad (1.4.10)$$

**Доказательство.** Из условия 1) теоремы следует, что функционал  $V$  является определенно положительным, допускающим бесконечно малый высший предел в окрестности  $\dot{x} = x = 0$  с производной  $\dot{V}^+ \leq 0$ . Отсюда следует, что положение  $\dot{x} = x = 0$  является равномерно устойчивым. Соответственно равномерно устойчивым является также любое положение  $(\dot{x} = 0, x^{(11)} = 4\pi k, k \in Z, x^{(2)} = 0) \in M_0$ .

Равномерная асимптотическая устойчивость  $\dot{x} = x = 0$  и притяжение движений множеством (1.4.10) следует из Утверждения 1.4.1.

**Пример 1.4.1.** Рассмотрим задачу о стабилизации установившихся программных движений трехзвенного манипулятора (см. рис. 1.4.1).

Предположим, что обобщенные координаты  $q_1 = \varphi_1$ ,  $q_2 = \varphi_2$  и  $q_3 = \varphi_3$  являются угловыми перемещениями шарниров  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  соответственно. Динамика манипулятора определяется уравнением (1.4.1).

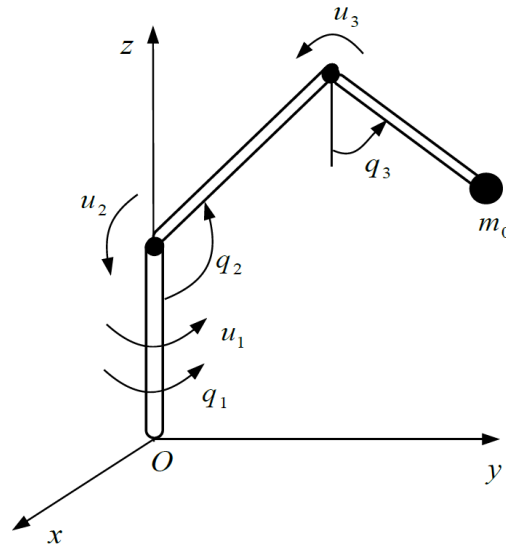


Рис. 1.4.1 – Модель трехзвенной руки робота

Элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A(q)$  таковы:

$$a_{11} = I + m_2 b_2^2 \sin^2(q_2) + \tilde{m}_3 (l_2 \sin(q_2) + b_3 \sin(q_3))^2,$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0,$$

$$a_{22} = m_2 b_2^2 + m_3 l_2^2 \quad a_{23} = a_{32} = \tilde{m}_3 l_2 b_3 \cos(q_2 - q_3) / 2, \quad a_{33} = \tilde{m}_3 b_3^2.$$

где  $l_2$  – длина второго звена;  $m_2$  и  $m_3$  обозначают массу второго и третьего звена соответственно;  $m_0$  – масса груза;  $\tilde{m}_3 = m_0 + m_3$ ;  $I$  – момент инерции первого звена относительно оси его вращения;  $b_2$  и  $b_3$  – расстояния от центров масс второго и третьего звена с подвижным грузом до осей этих звеньев соответственно.

Матрица  $C(q, \dot{q})$  имеет следующие компоненты  $c_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (m_2 b_2^2 + \widetilde{m}_3 l_2^2) \sin(2q_2) \dot{q}_2 / 2 \\
&+ \widetilde{m}_3 l_2 b_3 (\sin(q_2) \cos(q_3) \dot{q}_3 + \cos(q_2) \sin(q_3) \dot{q}_2) \\
&+ \widetilde{m}_3 b_3^2 \sin(2q_3) \dot{q}_3 / 2, \quad c_{12} = -c_{21} \\
&= (m_2 b_2^2 + \widetilde{m}_3 l_2^2) \sin(2q_2) \dot{q}_1 / 2 + \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \sin(q_3) \cos(q_2) \dot{q}_1, \quad c_{13} \\
&= -c_{31} = \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \sin(q_2) \cos(q_3) \dot{q}_1 + \widetilde{m}_3 b_3^2 \sin(2q_3) \dot{q}_1 / 2, \quad c_{22} \\
&= c_{33} = 0, \quad c_{23} = \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_3 / 2, \quad c_{32} \\
&= -\widetilde{m}_3 l_2 b_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_2 / 2.
\end{aligned}$$

Вектор  $Q(q) = (Q_1(q), Q_2(q), Q_3(q))^T$  определяется как:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = (m_2 b_2 + \widetilde{m}_3 l_2) g \sin q_2, \quad Q_3 = \widetilde{m}_3 b_3 g \sin q_3,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Уравнения движения трехзвенного робота-манипулятора имеют вид

$$\begin{aligned}
&(I + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2 + \widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3)^2) \ddot{q}_1 + 2(m_2 b_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + \\
&\widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2\widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + \\
&b_3 \sin q_3) b_3 \cos q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 = u_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(m_2 b_2^2 + m_3 l_2^2) \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \cos(q_2 - q_3) \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_3^2 - \\
&(\widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3) l_2 + m_2 b_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1^2 + (m_2 b_2 + \\
&\widetilde{m}_3 l_2) g \sin q_2 = u_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \cos(q_2 - q_3) \ddot{q}_2 + \widetilde{m}_3 b_3^2 \ddot{q}_3 - \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_2^2 - \\
&\widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3) b_3 \cos q_3 \dot{q}_1^2 + \widetilde{m}_3 b_3 g \sin q_3 = u_3.
\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу о стабилизации положения робота-манипулятора без измерения скорости.

Предположим, что

$$q = q^{(0)} = \text{const} \quad (1.4.11)$$

является желаемым положением манипулятора.

Заметим, что положение (1.4.11) может быть достигнуто с помощью закона управления

$$u^{(0)} = \left( 0, (m_2 b_2 + \widetilde{m}_3 l_2) g \sin q_2^{(0)} \cos \left( q_2 - q_2^{(0)} \right), \widetilde{m}_3 b_3 g \sin q_3^{(0)} \cos \left( q_3 - q_3^{(0)} \right) \right)^T. \quad (1.4.12)$$

Задача стабилизации выходного положения состоит в том, чтобы найти управляющий вход  $u$ , глобально стабилизирующий положение (1.4.11) робота без измерения скорости.

Введем отклонения от заданного положения  $x = q - q^{(0)}$ . Пусть  $u^{(1)} = u - u^{(0)}$  – стабилизирующий управляющий момент.

Для решения поставленной задачи определим управляющее входное воздействие следующим образом

$$u = u^{(1)} + u^{(0)},$$

$$u_1^{(1)}(t, x_{1t}) = -k_1 \sin \frac{x_1(t)}{2} - \cos \frac{x_1(t)}{2} \int_{t-h}^t p_1^{(0)} e^{s_1^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_1(t)}{2} - \sin \frac{x_1(\tau)}{2} \right) d\tau,$$

$$u_2^{(1)}(t, x_{2t}) = -k_2 \sin \frac{x_2(t)}{2} - \cos \frac{x_2(t)}{2} \int_{t-h}^t p_2^{(0)} e^{s_2^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_2(t)}{2} - \sin \frac{x_2(\tau)}{2} \right) d\tau, \quad (1.4.13)$$

$$u_3^{(1)}(t, x_{3t}) = -k_3 \sin \frac{x_3(t)}{2} - \cos \frac{x_3(t)}{2} \int_{t-h}^t p_3^{(0)} e^{s_3^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_3(t)}{2} - \sin \frac{x_3(\tau)}{2} \right) d\tau,$$

где  $h > 0$ ,  $p_j^{(0)} > 0$ ,  $s_j^{(0)} > 0$  и  $k_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – некоторые константы такие, что

$$k_1 > 0, \quad k_2 > \max\{2(m_2 b_2 + \widetilde{m}_3 l_2) g \cos q_2^{(0)}, 0\},$$

$$k_3 > \max\{2\widetilde{m}_3 b_3 g \cos q_3^{(0)}, 0\} \quad (1.4.14)$$

Рассмотрим функционал Ляпунова

$$V(t, \dot{x}(t), x_t) = \frac{1}{2} (\dot{x}(t))^T A^{(1)}(x(t)) \dot{x}(t) + (m_2 b_2 + \widetilde{m}_3 l_2) g \cos q_2^{(0)} (1 - \cos x_2) + \widetilde{m}_3 b_3 g \cos q_3^{(0)} (1 - \cos x_3) + 2k_1 \left( 1 - \cos \frac{x_1(t)}{2} \right) + 2k_2 \left( 1 - \cos \frac{x_2(t)}{2} \right) + 2k_3 \left( 1 - \cos \frac{x_3(t)}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \cos \frac{x_2(t)}{2} \Big) + 2k_3 \left( 1 - \cos \frac{x_3(t)}{2} \right) + \int_{t-h}^t p_1^{(0)} e^{s_1^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_1(t)}{2} - \sin \frac{x_1(\tau)}{2} \right)^2 d\tau + \\ & \int_{t-h}^t p_2^{(0)} e^{s_2^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_2(t)}{2} - \sin \frac{x_2(\tau)}{2} \right)^2 d\tau + \int_{t-h}^t p_3^{(0)} e^{s_3^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_3(t)}{2} - \right. \\ & \left. \sin \frac{x_3(\tau)}{2} \right)^2 d\tau, \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

$$A^{(1)}(x(t)) = A(q^{(0)} + x(t)).$$

Производная по времени функционала (1.4.15) удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left( \int_{t-h}^t p_1^{(0)} s_1^{(0)} e^{s_1^{(0)}(\tau-t)} \times \left( \sin \frac{x_1(t)}{2} - \sin \frac{x_1(\tau)}{2} \right)^2 d\tau + \right. \\ & \int_{t-h}^t p_2^{(0)} s_2^{(0)} e^{s_2^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_2(t)}{2} - \sin \frac{x_2(\tau)}{2} \right)^2 d\tau + \\ & \left. \int_{t-h}^t p_3^{(0)} s_3^{(0)} e^{s_3^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_3(t)}{2} - \sin \frac{x_3(\tau)}{2} \right)^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Из оценки (1.4.16) найдем, что множество  $\{\dot{V} = 0\}$  состоит из траекторий робота таких, что  $x(\tau) = x(t)$ ,  $t - h \leq \tau \leq t$ ,  $t \in R^+$ . Заметим, что выполняется следующее равенство  $\{\dot{V} = 0\} = \{x(t) = const, t \in R^+\}$ .

Таким образом, выполняются следующие тождества

$$\sin \frac{x_1(t)}{2} \equiv 0, \quad \sin \frac{x_2(t)}{2} \equiv 0, \quad \sin \frac{x_3(t)}{2} \equiv 0. \quad (1.4.17)$$

Используя результат из [18], можно получить, что каждое решение замкнутой системы (1.4.1), (1.4.13) приближается сколь угодно близко к положению

$$\dot{x}_k(t) = 0, \quad \sin \frac{x_k(t)}{2} \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3$$

при  $t \rightarrow +\infty$ .

Следовательно, заданное положение (1.4.11) манипулятора (1.4.1) под управляющим воздействием (1.4.13) глобально притягивающее.

Заметим, что координата  $q_1$ , определяющая вращение манипулятора вокруг вертикальной оси, является циклической.

Определим соответствующие обобщенные импульсы



$$v_1 = (I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2 + \widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3)^2) \dot{q}_1. \quad (1.4.18)$$

Тогда функция Рауса задается выражением

$$R = T - \dot{q}_1 v_1 = \frac{1}{2} (m_2 b_2^2 + m_3 l_2^2) \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 b_3^2 \dot{q}_3^2 - \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2 + \widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3)^2} \equiv R_2 - R_0.$$

Таким образом, уравнения динамики манипулятора в форме Рауса имеют вид

$$\begin{aligned} (m_2 b_2^2 + m_3 l_2^2) \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_3^2 - \\ - \frac{v_1^2 (\widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3) l_2 + m_2 b_2^2 \sin q_2) \cos q_2}{(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2 + \widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3)^2)^2} + \\ + (m_2 b_2 + \widetilde{m}_3 l_2) g \sin q_2 = u_2, \\ \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 + \widetilde{m}_3 b_2^2 \ddot{q}_3 - \frac{1}{2} \widetilde{m}_3 l_2 b_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_2^2 - \\ - \frac{v_1^2 \widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3) b_3 \cos q_3}{(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2 + \widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3)^2)^2} + \widetilde{m}_3 g b_3 \sin q_3 = u_3, \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{v_1}{I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2 + \widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2 + b_3 \sin q_3)^2},$$

$$\frac{dv_1}{dt} = u_1.$$

Заметим, что система (1.4.19) может выполнять следующее стационарное вращение

$$\dot{q}_2 = 0, \quad q_2 = q_2^{(0)} = const, \quad \dot{q}_3 = 0, \quad q_3 = q_3^{(0)} = const,$$

$$v_1 = v_1^{(0)} = const, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_1^{(0)} = \frac{v_1^{(0)}}{I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \widetilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)})^2} \quad (1.4.20)$$

под действием управляющих моментов

$$u_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
u_2 = u_2^{(0)} &= -\left(v_1^{(0)}\right)^2 \cos q_2^{(0)} \\
&\times \frac{\widetilde{m}_3 \left(l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)}\right) l_2 + m_2 b_2^2 \sin q_2^{(0)}}{\left(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \widetilde{m}_3 \left(l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)}\right)^2\right)^2} \\
&+ (m_2 b_2 + \widetilde{m}_3 l_2) g \sin q_2^{(0)} \cos \left(q_2 - q_2^{(0)}\right), \\
u_3 = u_3^{(0)} &= -\left(v_1^{(0)}\right)^2 \widetilde{m}_3 b_3 \cos q_3^{(0)} \times \\
&\frac{l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)}}{\left(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \widetilde{m}_3 \left(l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)}\right)^2\right)^2} + \widetilde{m}_3 g b_3 \sin q_3^{(0)} \cos \left(q_3 - \right. \\
&\left. q_3^{(0)}\right). \tag{1.4.21}
\end{aligned}$$

Используя результат из [18], можно получить, что стационарное движение (1.4.20) асимптотически устойчиво относительно переменных  $\dot{q}_2$ ,  $\dot{q}_3$ ,  $q_2 - q_2^{(0)}$  и  $q_3 - q_3^{(0)}$  при следующих стабилизирующих моментах

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0, \\
u_2^{(1)} = u_2 - u_2^{(0)} &= -k_2 \sin \frac{x_2(t)}{2} - \cos \frac{x_2(t)}{2} \int_{t-h}^t p_2^{(0)} e^{s_2^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_2(t)}{2} - \right. \\
&\left. \sin \frac{x_2(\tau)}{2} \right) d\tau, \tag{1.4.22} \\
u_3^{(1)} = u_3 - u_3^{(0)} &= -k_3 \sin \frac{x_3(t)}{2} - \cos \frac{x_3(t)}{2} \int_{t-h}^t p_3^{(0)} e^{s_3^{(0)}(\tau-t)} \left( \sin \frac{x_3(t)}{2} - \right. \\
&\left. \sin \frac{x_3(\tau)}{2} \right) d\tau,
\end{aligned}$$

где положительные постоянные  $p_2^{(0)}$ ,  $p_3^{(0)}$ ,  $s_2^{(0)}$ ,  $s_3^{(0)}$ ,  $k_2$  и  $k_3$  выбираются из условий

$$\begin{aligned}
k_2 + (m_2 b_2 + \widetilde{m}_3 l_2) g \cos q_2^{(0)} - \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_2^2} \Big|_{q_2=q_2^{(0)}, q_3=q_3^{(0)}} &= \mu_2 > 0, \\
k_3 + \widetilde{m}_3 g b_2 \cos q_3^{(0)} - \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_3^2} \Big|_{q_2=q_2^{(0)}, q_3=q_3^{(0)}} &= \mu_3 > 0, \tag{1.4.23} \\
\mu_2 \mu_3 - \left( \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_2 \partial q_3} \Big|_{q_2=q_2^{(0)}, q_3=q_3^{(0)}} \right)^2 &> 0.
\end{aligned}$$

Можно представить ограничения (1.4.23) следующим образом

$$\begin{aligned}
& k_2 + (m_2 b_2 + \tilde{m}_3 l_2) g \cos q_2^{(0)} - \\
& - v_1^2 \frac{(m_2 b_2^2 \sin 2q_2^{(0)} + 2\tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)}) l_2 \cos q_2^{(0)})^2}{(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin^2 q_3^{(0)}))^3} + \\
& + \frac{v_1^2 (m_2 b_2^2 + \tilde{m}_3 l_2^2) (\cos^2 q_2^{(0)} - \sin^2 q_2^{(0)}) - v_1^2 \tilde{m}_3 b_3 l_2 \sin q_2^{(0)} \sin q_3^{(0)}}{(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin^2 q_3^{(0)}))^2} = \mu_2 > 0, \\
& k_3 + \tilde{m}_3 g b_2 \cos q_3^{(0)} - \frac{4v_1^2 \tilde{m}_3^2 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)})^2 b_3^2 \cos^2 q_3^{(0)}}{(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin^2 q_3^{(0)}))^3} - \\
& - \frac{v_1^2 \tilde{m}_3 b_3 (b_3 (1 - 2 \cos^2 q_3^{(0)}) + l_2 \sin q_2^{(0)} \sin q_3^{(0)})}{(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin^2 q_3^{(0)}))^2} = \mu_3 > 0, \\
& \mu_2 \mu_3 > \left( \frac{2v_1^2 (2m_2 b_2^2 \sin q_2^{(0)} \cos q_2^{(0)} + 2\tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)}) l_2 \cos q_2^{(0)})}{(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin^2 q_3^{(0)}))^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin q_3^{(0)}) b_3 \cos q_3^{(0)} - v_1^2 \tilde{m}_3 b_3 \cos q_3^{(0)} l_2 \cos q_2^{(0)}}{(I_1 + m_2 b_2^2 \sin^2 q_2^{(0)} + \tilde{m}_3 (l_2 \sin q_2^{(0)} + b_3 \sin^2 q_3^{(0)}))^2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Отметим, что можно выбрать параметры управления (1.4.22), которые зависят как от параметров системы динамики, так и от программной стационарной траектории со значениями  $v_1^{(0)}$ ,  $q_2^{(0)}$  и  $q_3^{(0)}$  соответственно.

Рассмотрим результаты численного моделирования движения манипулятора при построенных законах управления.

Параметры манипулятора выберем следующим образом

$$\begin{aligned}
m_2 &= 14 \text{ кг}, & m_3 &= 5 \text{ кг}, & m_0 &= 3 \text{ кг}, \\
l_2 &= 1.6 \text{ м}, & b_2 &= 0.71 \text{ м}, & b_3 &= 0.47 \text{ м}, \\
I_1 &= 0.09 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.
\end{aligned}$$

Сначала рассмотрим результат применения управления (1.4.13). Выберем желаемое положение манипулятора, например, следующим образом

$$q_1^{(0)} = \pi/4 \text{ рад}, \quad q_2^{(0)} = \pi/3 \text{ рад}, \quad q_3^{(0)} = -\pi/4 \text{ рад}. \quad (1.4.24)$$

Чтобы удовлетворить ограничения (1.4.14), параметры управления выберем следующими

$$\begin{aligned} k_1 &= 3, & k_2 &= 2, & k_3 &= 3, \\ s_1^{(0)} &= 1.2, & s_2^{(0)} &= 1.3, & s_3^{(0)} &= 1.3, \\ p_1^{(0)} &= 10, & p_2^{(0)} &= 10.5, & p_3^{(0)} &= 10.4. \end{aligned}$$

Численные результаты проиллюстрированы на рис. 1.4.2. Из этих результатов видно, что закон управления (1.4.13) обеспечивает стабилизацию заданного положения (1.4.24).

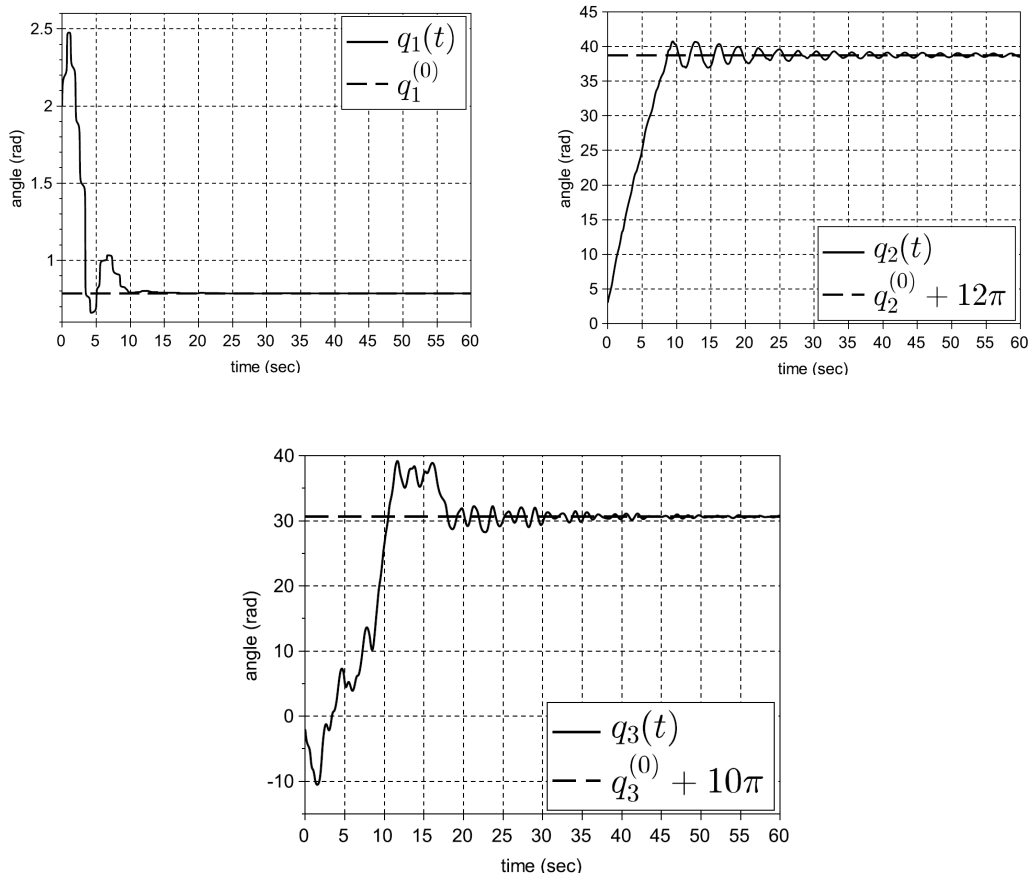


Рис. 1.4.2 – Зависимость от времени угловых координат звеньев манипулятора при управлении (1.4.13)

Теперь рассмотрим результат применения управления (1.4.22).

Выберем желаемое стационарное движение манипулятора, например, следующим образом

$$v_1^{(0)} = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad q_2^{(0)} = \pi/2 \text{ рад}, \quad q_3^{(0)} = \pi/3 \text{ рад}.$$

Чтобы удовлетворить ограничения (1.4.23), параметры управления выберем следующими

$$k_2 = 6, \quad k_3 = 4, \quad s_2^{(0)} = 1, \quad s_3^{(0)} = 1, \\ p_2^{(0)} = 2, \quad p_3^{(0)} = 2.$$

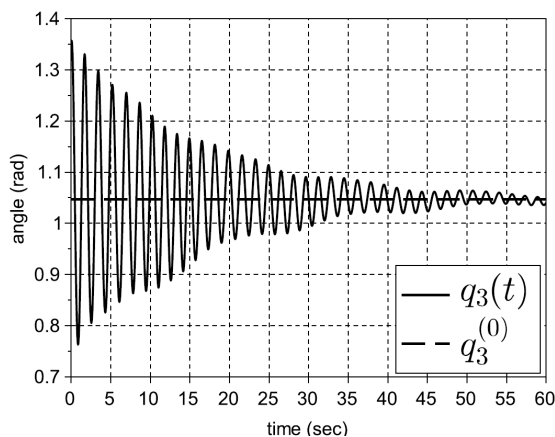
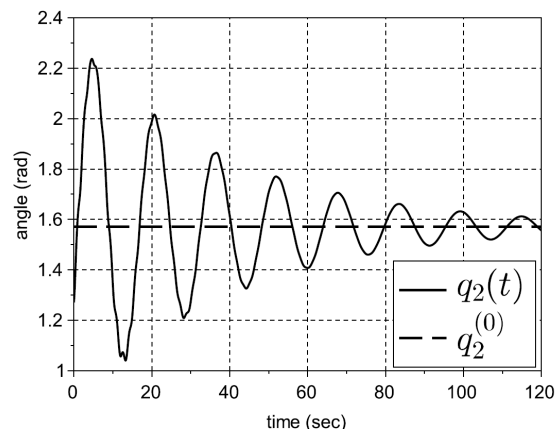


Рис. 1.4.3 – Зависимость от времени угловых координат второго и третьего звеньев манипулятора при управлении (1.4.22)

Численные результаты проиллюстрированы на рис. 1.4.3. Из этих результатов видно, что закон управления (1.4.22) обеспечивает стабилизацию заданного стационарного движения манипулятора.

### **Выводы по первой главе.**

В задачах по моделированию динамики управляемых механических систем широко используются уравнения Лагранжа с нестационарными голономными связями. При действии определенных активных сил на систему, описываемую такими уравнениями, представляется эффективным проведенное построение структуры управления, которое можно определить как комбинированную структуру нелинейных ПИД- и ПИ-регуляторов. Такое решение задачи об управлении этой моделью механической системы представлено в публикации [35] из списка работ автора. Этот результат дополняет результаты работ [25—30, 32], где обосновано построение линейных и нелинейных регуляторов с полным измерением фазовых координат.

На этой основе в [35] дано новое решение классической задачи об ориентации твердого тела с неподвижной точкой относительно инерциальной и вращающейся систем координат. Соответствующие результаты будут использованы для решения задач об управлении манипуляторами со сферическими шарнирами.

Разработана компьютерная модель процесса управления, обеспечивающего приведение в заданное программное установившее движение трехзвенного манипулятора. Особенности этого управления являются: универсальность, достижение полуглобальной стабилизации без измерения скоростей, робастность по отношению к массоинерционным характеристикам, возможность использования гравитационных моментов.

## **ГЛАВА 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ МНОГОЗВЕННЫМИ РОБОТАМИ- МАНИПУЛЯТОРАМИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ И ПРИЗМАТИЧЕСКИМИ ШАРНИРАМИ**

Широкое применение в решении задач об управлении техническими системами, в т. ч. механическими, имеют пропорционально-интегро-дифференцирующие (ПИД) регуляторы. При этом большинство работ ограничивается исследованием задач о применении линейных ПИД-регуляторов для стабилизации установившихся движений манипуляторов на основе анализа соответствующих модельных уравнений в линейном приближении. Одной из актуальных задач механики управляемого движения продолжает оставаться задача использования ПИД-регуляторов в отслеживании траекторий многозвенных роботов-манипуляторов в нелинейной постановке с достижением полуглобальной и глобальной стабилизации. Альтернативное в этом плане применение нелинейных регуляторов с интегральной составляющей является малоисследованной при наличии запаздывания в структуре обратной связи.

Во второй главе представлены соответствующие результаты по математическому моделированию процесса управления многозвенными роботами-манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами с использованием нелинейных регуляторов различного типа.

В первом параграфе излагается постановка исследуемой задачи в достаточно общей форме. Рассматривается модель многозвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическими шарнирами, движение которого описывается уравнениями Лагранжа.

Во втором параграфе определяются условия относительно параметров управления, обеспечивающего отслеживания траектории при достаточных

силах вязкого трения, или когда отсутствует запаздывание в измерениях по скоростям.

Наличие запаздывания в измерении фазовых скоростей требует проведения оценки ее возможной максимальной величины. Соответствующие условия функционирования регуляторов определяются в третьем параграфе.

В четвертом параграфе рассмотрена задача об обосновании структуры управления, решающего поставленную задачу без учета сил вязкого трения при измерении только угловых координат и перемещений в шарнирах робота.

## **§ 2.1. Математическая модель нелинейного регулятора с учётом запаздывания в структуре обратной связи.**

Математические модели современных механических систем описываются нелинейными системами дифференциальных уравнений высокой размерности. Это обуславливает достаточные сложности в обосновании методов конструирования структуры управления такими системами.

Рассматривается модель многозвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическими шарнирами, движение которого описывается уравнениями Лагранжа

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + D\dot{q} = u, \quad (2.1.1)$$

где  $q \in \mathbb{R}^n$  – вектор обобщенных угловых координат и линейных перемещений шарниров;  $A(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица инерции;  $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  – вектор кориолисовых и центробежных сил инерции, обусловленных выбором координат  $q$ ;  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  – вектор гравитационных сил и их моментов относительно цилиндрических шарниров;  $D\dot{q}$  – вектор сил вязкого трения и



их моментов, действующих в шарнирах,  $D = \text{diag} (d_1, d_2, \dots, d_n)$  ( $d_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$ );  $u \in \mathbb{R}^n$  – управление, приложенное в шарнирах.

Следует отметить следующие свойства матрицы  $C(q, \dot{q})$ , вытекающие из ее определения

$$C(q, \dot{q}) = \{c_{ik}(q, \dot{q})\},$$

$$c_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Из этого определения следует, что выполняются следующие соотношения

$$C(x, y)z = C(x, z)y, \quad C(x, y + z) = C(x, y) + C(x, z).$$

Матрица  $(\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q}))$  является кососимметричной, т. е. для всех  $x \in R^n$  и для любой непрерывно дифференцируемой функции  $q(t): [0, +\infty) \rightarrow R^n$  выполняется следующее неравенство

$$x' \left( \frac{1}{2} \dot{A}(q(t)) - C(q(t), \dot{q}(t)) \right) x = 0 \quad \forall t \in R^+.$$

Пусть  $q = q^{(0)}(t)$  ( $|q^{(0)}(t)| \leq q_{10}, |\dot{q}^{(0)}(t)| \leq q_{20}, |q|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2$ ) – некоторое программное движение манипулятора, осуществляемое под действием программного управления

$$u^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t)) \ddot{q}^{(0)}(t) + C(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t)) \dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t)) + D\dot{q}^{(0)}(t). \quad (2.1.2)$$

Пусть  $x = q - q^{(0)}(t), \dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t)$  – составляющие возмущенного движения.

Соответствующие уравнения возмущенного движения могут быть записаны в виде

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} + C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x})\dot{x} + R(t, x) + D\dot{x} = u^{(1)}, \quad (2.1.3)$$

где  $A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x)$ ,  $C^{(1)}(t, x, \dot{x}) = C(q^{(0)}(t) + x, \dot{x})$ ,  $R(t, x) = (A(q^{(0)}(t) + x) - A(q^{(0)}(t)))\ddot{q}^{(0)}(t) + (C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) - C^{(1)}(t, 0, \dot{q}^{(0)}(t)))\dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t) + x) - g(q^{(0)}(t))$ ;  $u^{(1)} = u - u^{(0)}(t)$  – управляющее воздействие, задачей которого согласно классической постановке является обеспечение стабилизации заданного программного движения  $q^{(0)}(t)$  или асимптотической устойчивости нулевого решения  $\dot{x} = x = 0$  системы (2.1.3).

Обобщенные координаты, соответствующие цилиндрическим шарнирам, являются угловыми. Соответственно, массо-инерционные параметры системы, центробежные, кориолисовы и гравитационные силы и моменты определяются функциями, периодическими по этим координатам, и движение системы (2.1.3) можно рассматривать в соответствующем цилиндрическом пространстве [33], например, без ограничения общности, с периодом  $2\pi$ .

Составляющая  $R(t, x)$  системы (2.1.3) может быть разложена в виде зависимости

$$R(t, x) = F(t, x)p(x), \quad (2.1.4)$$

где  $p(x) = (p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_n(x_n))'$ ; функции  $p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_m(x_m)$  ( $m \leq n$ ) являются линейными относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , отвечающих призматическим шарнирам,  $p_i = p_i^0 x_i$  ( $p_i^0 = \text{const} > 0, i = 1, 2, \dots, m$ ); функции  $p_{m+1}(x_{m+1}), p_{m+2}(x_{m+2}), \dots, p_n(x_n)$  являются периодическими относительно переменных  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ , отвечающих

цилиндрическим шарнирам, при этом функции  $p_i = p_i(x_i)$  ( $i = m + 1, m + 2, \dots, n$ ) имеют следующие свойства [33]:

а)  $|p_j(x_j)|$  является периодической функцией с периодом  $2\pi \forall x_j \in \mathbb{R}; p_j(2\pi l) = 0, |p_j(x_j)| > 0 \forall x_j \neq 2\pi l (j = m + 1, m + 2, \dots, n) \forall l \in \mathbb{Z}$ ;

б) функция  $r(x) = (r_1(x_1), r_2(x_2), \dots, r_n(x_n))'$ , определяемая по формуле

$$r_j(x_j) = \int_0^{x_j} p_j(x_j) dx_j \quad \forall x_j \in \mathbb{R}, j = m + 1, m + 2, \dots, n, \quad (2.1.5)$$

является ограниченной и непрерывно дифференцируемой, такой, что  $r_j(x_j)$  — периодическая функция с периодом  $4\pi \forall x_j \in \mathbb{R}; r_j(4\pi l) = 0, r_j(x_j) > 0 \forall x_j \neq 4\pi l \forall l \in \mathbb{Z}, j = m + 1, m + 2, \dots, n$ .

В дальнейшем для удобства разделим вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  на  $x^{(1)} \in \mathbb{R}^m, x^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$  с нормой  $|x^{(1)}|_m^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$  и вектор  $x^{(2)} \in T^{(n-m)} = \{-\pi \leq x_s \leq \pi, s = m + 1, m + 2, \dots, n\}$ . Здесь и далее в этой главе  $(\cdot)'$  — операция транспонирования.

Пусть  $G_1(H_0) \subset \mathbb{R}^n$  есть область  $G_1 = \{(x^{(1)}, x^{(2)}): |x^{(1)}|_m \leq H_0, x^{(2)} \in T^{n-m}\}$ ,  $G_2 \subset \mathbb{R}^n$  есть соответствующая область  $\mathbb{R}^n$ , такая, что  $G_2 = \{p \in \mathbb{R}^n: |p(x)| \leq p_0 \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in G_2\}$ .

Исследуется задача о стабилизации программного движения манипулятора посредством управляющего воздействия нелинейного регулятора (типа ПИД-регулятора) с учетом запаздывания в структуре обратной связи

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t - h_1(t))) - B_2 \dot{x}(t - h_2(t)) - \int_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t) \dot{x}(\tau) d\tau - \int_{t-h_0}^{t-h_4} B_4(\tau - t) p(x(\tau)) d\tau, \quad (2.1.6)$$

где  $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $B_1$  и  $B_2$  – постоянные матрицы),  $B_3, B_4 \in C([-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n})$  матрицы усиления;  $h_j$  – запаздывания, определяемые структурой обратной связи,  $h_j \in C^1(\mathbb{R}^+ \rightarrow [h_{00}, h_0])$ ;  $\dot{h}_j(t) \leq 1 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ),  $j = 1, 2, 3$ ;  $h_{00}, h_0, h_4 - const$ ;  $0 < h_{00} < h_0$ ,  $0 < h_4 < h_0$ .

## § 2.2. Отслеживание траектории манипулятора в случае достаточных сил вязкого трения.

Вначале рассмотрим случай достаточных сил вязкого трения, или когда отсутствует запаздывание в измерениях по скоростям. Соответственно, будем полагать, что управляющее воздействие имеет следующий вид:

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t - h_1(t))) - B_2 \dot{x}(t) - \int_{t-h_0}^{t-h_2} B_4(\tau - t) p(x(\tau)) d\tau, \quad (2.2.1)$$

где  $B_1 = \text{diag}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$ ,  $b_{1i} = const > 0$ ,  $B_2 = \text{diag}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$ ,  $b_{2i} = const \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $B_4(s) = \text{diag}(b_{41}(s), b_{42}(s), \dots, b_{4n}(s))$ ,  $b_{4i} \in C([-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R})$  ( $h_0 > h_2 \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Преобразуем выражение (2.2.1) для  $u^{(1)}$  следующим образом

$$u^{(1)} = -(B_1 + B_{41})p(x(t)) - B_2 \dot{x}(t) + B_1 \int_{t-h_1(t)}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + \int_{t-h_0}^{t-h_2} B_{41}(\tau - t) \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau, \quad (2.2.2)$$

где

$$B_{41}(\tau - t) = \int_{\tau-t}^{-h_2} B_4(s) ds$$

Подставив выражение (2.2.2) для  $u^{(1)}$  в уравнение (2.1.3), получим

$$A^{(1)}(t, x) \ddot{x} = -C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x}) \dot{x} - (B_1 + B_{41} + F(t, x)) p(x) -$$

$$\begin{aligned}
& -(D + B_2)\dot{x} + B_1 \int_{t-h_1(t)}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + \\
& + \int_{t-h_0}^{t-h_2} B_{41}(\tau - t) \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Для решения задачи воспользуемся методами § 1.2 и отметим, что предельные к (2.2.3) уравнения имеют аналогичную структуру. Поэтому для применения утверждений § 1.2 достаточно провести качественный анализ системы на основе уравнений (2.2.3).

Введем функционал Ляпунова

$$\begin{aligned}
V_1 = & \frac{1}{2} (\dot{x}(t) + Sp(x(t)))' A^{(1)}(t, x(t)) (\dot{x}(t) + Sp(x(t))) + \\
& + \sum_{i=1}^n (b_{1i} + b_{4i} + s_i(b_{2i} + d_i)) \int_0^{x_i} p_i(x_i) dx_i \\
& + \frac{\lambda_1}{2} \int_{-h_0}^0 \left( \int_{\tau}^0 (2\dot{x}^2(t+s) \right. \\
& \left. + (Sp(t+s))^2) ds \right) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

где матрица  $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,  $(s_i > 0)$  подлежит доопределению

$$\lambda_1 = \max \left( \left\| B_1 \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right\|, x \in G_1 \right) + \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 > 0)$$

$\|B\|$  – норма матрицы, согласованная с векторной нормой  $|x|$ .

Для функционала (2.2.4) находим оценки

$$\begin{aligned}
& a_0 (|\dot{x}(t)|^2 + |p(x(t))|^2) \leq V_1 \leq \\
& \leq a_1 (\sup(|\dot{x}(t+s)|^2, -h_0 \leq s \leq 0) + |p(x(t))|^2) a_0, a_1 = \text{const} > 0.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Функционал  $V_1$ , определяемый формулой (2.2.4), обращается в нуль на множестве

$$E_1 = \{V_1 = 0\} = \{\dot{x} = 0, x^{(1)} = 0, x^{(2)} = 4\pi k, k = (k_1, k_2, \dots, k_{n-m})', k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots, (n-m)\}.$$

Для производной функционала (2.2.4) в силу системы (2.2.3) найдем оценку

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq (\dot{x}(t))' \varphi_1(t, x(t)) \dot{x}(t) + (p(x(t)))' \varphi_2(t, x(t)) \dot{x}(t) \\ &\quad + (p(x(t)))' \varphi_3(t, x(t)) p(x(t)), \\ \varphi_1(t, x) &= C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) - (D + B_2) + A^{(1)}(t, x) S \frac{\partial p(x)}{\partial x} + 2\lambda_1 h_0 E, \\ \varphi_2(t, x) &= S \left( C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t))' + C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) + A^{(1)}(t, x) S \frac{\partial p(x)}{\partial x} - F'(t, x), \right. \\ \varphi_3(t, x) &= SC^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) - F'(t, x) S - B_1 S + 2\lambda_1 h_0 S^2 E, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Выберем матрицы  $B_1$  и  $B_2$  управляющего воздействия (2.2.1) с величиной запаздывания  $h_0 > 0$  из условия отрицательной определенности квадратичной по  $(\dot{x}, p)$  формы

$$\begin{aligned} W_1(t, x, \dot{x}, p) &= \dot{x}' \varphi_1(t, x) \dot{x} + \dot{x}' \varphi_2(t, x) p + p' \varphi_3(t, x) p \leq \\ &\leq -W_0(\dot{x}, p) = -\alpha_1 |\dot{x}|^2 - \alpha_2 |p|^2, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

при значениях  $(t, x, \dot{x}, p) \in \mathbb{R}^+ \times G_1 \times \mathbb{R}^n \times G_2$ .

Тогда для  $\dot{V}_1(t)$  будем иметь оценку

$$\dot{V}_1(t) \leq -W_0(\dot{x}(t), p(x(t))) = -\alpha_1 |\dot{x}(t)|^2 - \alpha_2 |p(x(t))|^2 \leq 0.$$

Множество  $\{W_0 = 0\}$  содержит лишь положения равновесия системы (2.2.3) вида  $E_2 = \{\dot{x} = 0, x^{(1)} = 0, x^{(2)} = 2\pi k, k = (k_1, k_2, \dots, k_{n-m})', k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n-m\}$ .

Согласно утверждениям §1.2 имеем следующий результат.

**Утверждение 2.2.1.** Под действием управляющего воздействия (2.2.1) каждое из положений равновесия  $x = x^{(0)} \in E_1$  будет равномерно асимптотически устойчиво. При этом каждое ограниченное решение (2.2.3)

по  $x^{(1)}$  областью  $\{x^{(1)} \in \mathbb{R}^m: |x^{(1)}| \leq H_0\}$  будет притягиваться к одному из положений равновесия  $x = x^{(0)} \in E_2$ . Эти положения равновесия отвечают заданному программному движению  $q = q^{(0)}(t)$  (с точностью до кратных  $2\pi$  поворотов манипулятора вокруг цилиндрических шарниров).

Тем самым достигается полуглобальная стабилизация  $q = q^{(0)}(t)$  управлением

$$u = u^{(0)}(t) + u^{(1)}(t, \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t), q - q^{(0)}(t)).$$

**Пример 2.2.1.** Рассмотрим задачу отслеживания траектории робота-манипулятора с тремя степенями свободы (см. рис. 1.4.1) без учета действия моментов сил вязкого трения (например, если  $D = 0$ ) со следующими массоинерционными параметрами

$$I = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, m_2 = 3 \text{ кг}, m_3 = 5 \text{ кг}, m_0 = 3 \text{ кг}, \\ l_2 = 0.5 \text{ м}, b_2 = 0.2 \text{ м}, b_3 = 0.5 \text{ м}.$$

Программная траектория выбрана в виде

$$q_1^{(0)}(t) = t/2 \text{ рад}, q_2^{(0)}(t) = 2 \cos(t/2) \text{ рад}, q_3^{(0)}(t) = 2 \sin(t/2) \text{ рад}.$$

Закон управления определим согласно (2.2.6), где  $p(x) = \left( \sin\left(\frac{x_1}{2}\right), \sin\left(\frac{x_2}{2}\right), \sin\left(\frac{x_3}{2}\right) \right)^T$ .

Пусть  $h = 1$  с. Параметры усиления управления выбираем следующим образом  $b_{11} = b_{12} = b_{13} = -10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ ,  $b_{21} = b_{22} = b_{23} = -5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ .

Начальные положение и угловая скорость робота

$$q_1(0) = 2.9 \text{ рад}, q_2(0) = 3.1 \text{ рад}, q_3(0) = 1.7 \text{ рад}, \\ \dot{q}_1(0) = 17 \text{ рад/с}, \dot{q}_2(0) = 15 \text{ рад/с}, \\ \dot{q}_3(0) = -16 \text{ рад/с}.$$

На рисунках 2.2.1–2.2.3 показаны результаты численного интегрирования замкнутой системы уравнений управляемого движения робота-манипулятора. При этом сплошной линией показаны графики реального вращения звена, а пунктирной – графики программного движения.

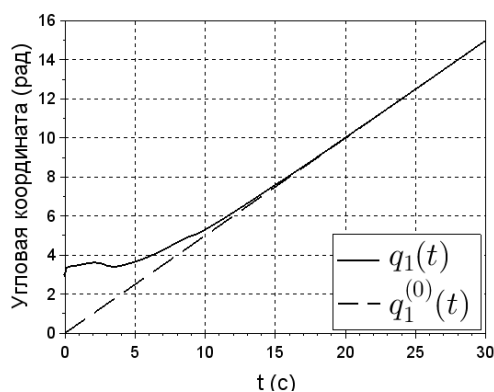


Рис. 2.2.1 – Графики зависимости от времени реального и программного вращения первого звена робота-манипулятора при управлении (2.2.1)

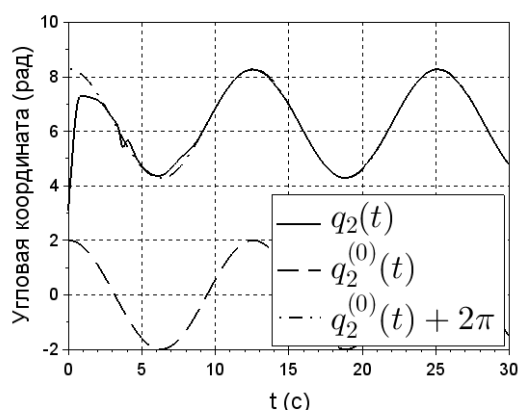


Рис. 2.2.2 – Графики зависимости от времени реального и программного вращения второго звена робота-манипулятора при управлении (2.2.1)



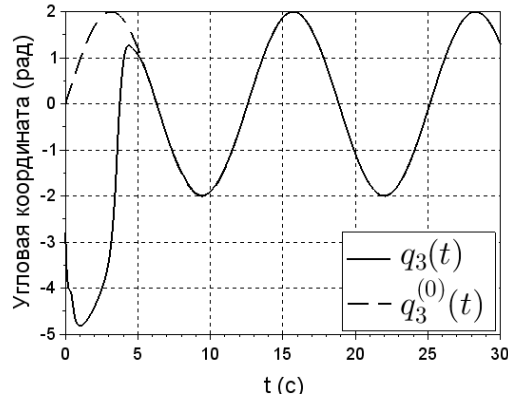


Рис. 2.2.3 – Графики зависимости от времени реального и программного вращения третьего звена робота-манипулятора при управлении (2.2.1)

Рисунки 2.2.1–2.2.3 показывают изменение во времени реального и программного вращения шарниров робота-манипулятора (см. рис. 1.4.1). Видно, что закон управления (2.2.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость движения руки робота по заданной траектории плюс  $2\pi l$ , где  $l = (l_1, l_2, l_3)^T, l_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3$ .

### § 2.3. Отслеживание траектории манипулятора управлением с запаздыванием по фазовым переменным.

Рассмотрим решение задачи о стабилизации положения  $\dot{x} = x = 0$  системы (2.1.3) с (2.1.4) управляющим воздействием вида (2.1.6)

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t - h_1(t))) - B_2 \dot{x}(t - h_2(t)) - \int_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t) \dot{x}(\tau) d\tau - \int_{t-h_0}^{t-h_4} B_4(\tau - t) p(x(\tau)) d\tau, \quad (2.3.1)$$

где  $B_1 = \text{diag}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}), B_2 = \text{diag}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}); b_{1j}, b_{2j}$  — положительные постоянные  $j = 1, 2, \dots, n; B_3 \in C([-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}), B_4(s) =$

$\text{diag}(b_{41}(s), b_{42}(s), \dots, b_{4n}), b_{4i} \in C([-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R})$  ( $h_0 > h_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$ ).

Преобразуем выражение (2.3.1) с учетом (2.2.2) следующим образом:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} = & -(B_1 + B_{41})p(x(t)) - B_2\dot{x}(t) + B_1 \int_{t-h_1(t)}^t \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau + \\
& + \int_{t-h_0}^{t-h_2(t)} B_{41}(\tau - t) \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x} \dot{x}(\tau) d\tau - \\
& - \int_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t) \dot{x}(\tau) d\tau - \\
& - B_2 \int_{t-h_0}^t \left( A^{(1)}(\tau, x(\tau)) \right)^{-1} \left( C^{(1)}(\tau, x(\tau), 2\dot{q}^{(0)}(\tau) + \dot{x}(\tau)) \dot{x}(\tau) + \right. \\
& + F(\tau, x(\tau))p(x(\tau)) + D\dot{x}(\tau) + B_2\dot{x}(\tau - h_2(\tau)) + B_1p(x(\tau - h_1(\tau))) + \\
& \left. + \int_{\tau-h_0}^{\tau-h_3(\tau)} B_3(s - t) \dot{x}(s) ds + \int_{\tau-h_0}^{\tau-h_4} B_4(s - t) p(x(s)) ds \right) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Вновь применяя методику § 1.2 для решения поставленной задачи об управлении, построим функционал Ляпунова

$$\begin{aligned}
V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \int_{-h_0}^0 \left( \int_{\tau}^0 \left( (2\lambda_2 + \lambda_3) \dot{x}^2(t + s) \right. \right. \\
\left. \left. + (\lambda_2 + 2\lambda_0) \left( Sp(x(t + s)) \right)^2 \right) ds \right) d\tau \\
+ \frac{1}{2} \int_{-h_0}^0 \left( \int_{\tau}^0 \left( (2\lambda_4 + \lambda_5) \dot{x}^2(t + s) \right. \right. \\
+ (\lambda_4 \\
+ 2\lambda_5) \left( Sp(x(t \\
+ s)) \right)^2 \left. \right) ds \right) d\tau
\end{aligned} \tag{2.3.5},$$

$$\lambda_2 = \max \left( \left\| B_1 A^{-1}(t, x) (C^{(1)}(t, x, \dot{x}) + D\dot{x}) \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right\|, (t, x, \dot{x}) \in R^+ \times G_2 \times \{|\dot{x}| \leq H_0, H_0 = \text{const} > 0\} \right) + \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 > 0),$$

$$\lambda_3 = \max(\|B_2 A^{-1}(t, x) (F(t, x) + B_1)\|, (t, x) \in R^+ \times G_2) + \varepsilon_0,$$

$$\lambda_4 = \max(\|B_2 A^{-1}(t, x) B_3(s)\|, (t, x) \in R^+ \times G_2, s \in [-2h_0, 0]) + \varepsilon_0,$$

$$\lambda_5 = \max(\|B_2 A^{-1}(t, x) B_4(s)\|, (t, x) \in R^+ \times G_2, s \in [-2h_0, 0]) + \varepsilon_0.$$

При выполнении условия

$$\begin{aligned} W_2(t, x, \dot{x}, p) &= W_1(t, x, \dot{x}, p) + h_0(\lambda_2 + 2\lambda_4 h_0)|\dot{x}|^2 + h_0(\lambda_3 + 2\lambda_5 h_0)|Sp(x)|^2 \\ &\leq -\alpha_3|\dot{x}|^2 - \alpha_4|p(x)|^2 \quad \forall (t, x, \dot{x}) \in R^+ \times G_2 \times \{|\dot{x}| \leq H_0, H_0 \\ &= \text{const} > 0\} \end{aligned}$$

для производной  $\dot{V}_2(t)$  имеем оценку

$$\dot{V}_2(t) \leq -\alpha_3|\dot{x}(t)|^2 - \alpha_4|p(x(t))|^2 \leq 0.$$

Находим, что поставленная задача сводится к нахождению параметров управляющего воздействия (2.3.1) из условия определенной отрицательности квадратичной формы

$$W_2(t, x, \dot{x}, p) = W_1(t, x, \dot{x}, p) + h_0(\lambda_2 + 2\lambda_4 h_0)|\dot{x}|^2 + h_0(\lambda_3 + 2\lambda_5 h_0)|Sp(x)|^2.$$

при значениях  $(t, x, \dot{x}, p) \in R^+ \times M_1 \times \mathbb{R}^n \times M_2$ . Согласно (2.2.7) эти условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} W_1(t, x, \dot{x}, p) &= \dot{x}' F_1(t, x) \dot{x} + \dot{x}' F_2(t, x) p + p' F_3(t, x) p \leq -W_{00}(\dot{x}, p) = \\ &= -(\alpha_1 + h_0(\lambda_2 + 2\lambda_4 h_0))|\dot{x}|^2 - (\alpha_2 + h_0(\lambda_3 + 2\lambda_5 h_0))|p|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Соответственно, находим управляющее воздействие (2.3.1), решающее задачу о равномерной асимптотической устойчивости каждого положения равновесия  $x = x^{(0)} \in E_1$  системы (2.1.3), и управление

$$u = u^{(0)}(t) + u^{(2)}(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t)),$$

решающее задачу о полуглобальной стабилизации программного движения  $(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$  манипулятора.

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t - h_1(t))) - B_2 \dot{x}(t - h_2(t)),$$

$$h_i \in C^1(R^+ \rightarrow [0, h_0]), j = 1, 2, 3, h_0, h_4 (h_4 < h_0).$$

Рассмотрим частный случай приводимости ПИД-регуляторов (2.1.6).

Положим в определении (2.1.6)  $B_2 = 0$ ,  $B_3(s) \equiv 0$  ( $-h_0 \leq s \leq 0$ ).

Соответственно управляющее воздействие (2.1.6) принимает вид ПИ-регулятора

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t - h_1(t))) - \int_{t-h_0}^{t-h_4} B_4(\tau - t) p(x(\tau)) d\tau.$$

Условия (2.2.7) имеют место при следующем действии диссипативных сил и моментов и определении матриц коэффициентов усиления сигналов в структуре обратной связи

$$B_2 + D \gg C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) + A^{(1)}(t, x)S \frac{\partial p(x)}{\partial x} + (2\lambda_1 h_0 + \alpha_1)E,$$

$$B_1 + B_4 \gg SC^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) - F'(t, x) + (2\lambda_1 h_0 + \alpha_2)E,$$

где знак  $\gg$  является знаком матричного неравенства или определенной положительности разницы матриц левой и правой частей соответствующего выражения.

При этом вспомогательная матрица  $S$  должна удовлетворять матричному неравенству

$$\begin{aligned}
& \left( S \left( C^{(1)} \left( t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t) \right) + \left( C^{(1)} \left( t, x, \dot{q}^{(0)}(t) \right) \right)' \right) + A^{(1)}(t, x) S \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. - F'(t, x) \right)' \left( S \left( C^{(1)} \left( t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left( C^{(1)} \left( t, x, \dot{q}^{(0)}(t) \right) \right)' \right) + A^{(1)}(t, x) S \frac{\partial p(x)}{\partial x} - F'(t, x) \right) \\
& \ll \alpha_1 \alpha_2 E.
\end{aligned}$$

Рассмотренный в данном параграфе вариант регулятора может быть исходным для оценки влияния запаздывания на стабилизацию программного движения механической системы (2.1.1).

#### § 2.4. Структура обратной связи при отсутствии сил вязкого трения без измерения скоростей.

Рассмотрим теперь систему (2.1.1) при отсутствии сил вязкого трения,  $D = 0$ , и возможности измерения скоростей. Выберем управление  $u$  в виде

$$\begin{aligned}
u = & A(q)\ddot{q}^{(0)}(t) + C \left( q, \dot{q}^{(0)}(t) \right) \dot{q}^{(0)}(t) + g(q) \\
& - A(q) \left( p_0 \left( q - q^{(0)}(t) \right) - p_1 \left( q - q^{(0)}(t) \right) \right. \\
& \quad \left. + p_1 \left( q(t-h) - q^{(0)}(t-h) \right) \right),
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

где  $p_0 > 0$  и  $p_1 > 0$  – постоянные коэффициенты усиления в структуре управления обратной связью с измерением  $q$ ,  $h > 0$  – запаздывание в обратной связи управления.

Введем ошибки отслеживания (отклонения от программного движения)

$$x = q - q^{(0)}(t), \quad y = \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t). \quad (2.4.2)$$

В соответствии с (2.4.1) имеем следующие уравнения динамики ошибок

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -A^{-1} \left( q^{(0)}(t) + x(t) \right) \\ \times C \left( q^{(0)}(t) + x(t), 2\dot{q}^{(0)}(t) + y(t) \right) y(t) \\ -p_0 x(t) - p_1 (x(t) - x(t-h)). \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Уравнения (2.4.3) – векторные функционально-дифференциальные уравнения с конечным запаздыванием с областью определения  $[-2h, +\infty) \times C$ , где  $C$  – банахово пространство непрерывных функций. Здесь и далее  $C = \{(\varphi, \psi): [-2h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}$  с нормой  $\|(\varphi, \psi)\|$ ,  $\|(\varphi, \psi)\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2$ ,  $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, -2h \leq s \leq 0)$ ,  $\|\psi\| = \sup(|\psi(s)|, -2h \leq s \leq 0)$ .

Предельные уравнения для уравнений (2.4.3) имеют аналогичный вид [6]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -A^{-1} (q_{*d}(t) + x(t)) \\ \times C (q_{*d}(t) + x(t), 2z_*(t) + y(t)) y(t) \\ -p_0 x(t) - p_1 (x(t) - x(t-h)), \end{cases} \quad (2.4.4)$$

где  $\{(q_{*d}(t), z_*(t))\}$  представляет собой набор предельных функций, определяемых предельными соотношениями

$$q_{*d}(t) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} q^{(0)}(t_n + t), \quad z_*(t) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \dot{q}^{(0)}(t_n + t). \quad (2.4.5)$$

Сделаем следующие преобразования

$$\begin{aligned}
p_1(x(t) - x(t - h)) &= p_1 \int_{-h}^0 y(t + \mu) d\mu \\
&= p_1 \left( \int_{-h}^0 \left( y(t) - \int_{\mu}^0 \dot{y}(t + \tau) d\tau \right) d\mu \right) \\
&= p_1 h y(t) - \int_{-h}^0 (\mu + h) \dot{y}(t + \mu) d\mu.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Заменяя  $\dot{y}(t + \mu)$  в соответствии с (2.4.2) и проводя дальнейшие преобразования, получаем уравнения динамики ошибок (2.4.3) в виде

$$\left\{ \begin{aligned}
&\dot{x}(t) = y(t), \\
&\dot{y}(t) = -A^{-1} \left( q^{(0)}(t) + x(t) \right) \\
&\quad \times C \left( q^{(0)}(t) + x(t), 2\dot{q}^{(0)}(t) + y(t) \right) y(t) \\
&\quad - p_0 \left( 1 - \frac{p_1 h^2}{2} \right) x(t) - p_1 h y(t) \\
&\quad + \int_{-h}^0 \left( (\mu + h) \left( A^{-1} \left( q^{(0)}(t + \mu) + x(t + \mu) \right) \right. \right. \\
&\quad \times C \left( q^{(0)}(t + \mu) + x(t + \mu), 2\dot{q}^{(0)}(t + \mu) + y(t + \mu) \right) \\
&\quad \times y(t + \mu) \left. \left. - p_0 \frac{(\mu + h)^2}{2} y(t + \mu) - p_1 h^2 y(t + \mu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - p_1 h^2 y(t + \mu) \right) d\mu - p_1 \int_{-2h}^{-h} \frac{(\mu + h)^2}{2} y(t + \mu) d\mu.
\end{aligned} \right. \tag{2.4.7}$$

Пусть для всех  $q \in \Gamma_q = \{ \|q\| < H_1, 0 < H_1 \leq +\infty \}$  выполняются следующие неравенства

$$\begin{aligned}
0 < a_0 \leq \|A(q)\| \leq a_1, \\
d_0 |\dot{q}| \leq \|C(q, \dot{q})\| \leq d_1 \|\dot{q}\|, d_0 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$V(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} |\psi(0)|^2 + \frac{1}{2} p_0 \left( 1 - p_1 \frac{h^2}{2} \right) |\varphi(0)|^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{s_0}{2} \int_{-h}^0 \left( \int_{\mu}^0 \|\varphi(\tau)\|^2 d\tau \right) d\mu \\
& + \frac{s_1}{2} \int_{-2h}^{-h} \left( \int_{\mu}^0 \|\psi(\tau)\|^2 d\tau \right) d\mu
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

где  $s_0 > 0$  и  $s_1 > 0$  – некоторые постоянные.

При условии

$$p_1 h^2 \leq 1 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0, \tag{2.4.10}$$

можно получить следующую оценку для функционала (2.4.9)

$$\begin{aligned}
& \|\psi(0)\|^2 + \varepsilon_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq 2V(\varphi, \psi) \\
& \leq (s_0 + s_1 + 1) \|\psi\|^2 + p_0 \|\varphi\|^2.
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Находим, что в силу уравнений (2.4.7) производная по времени функционала (2.4.9) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(t, \varphi, \psi) \leq -W(\|\psi(0)\|) = -\varepsilon_2 \|\psi(0)\|^2 \leq 0 \tag{2.4.12}$$

( $\varepsilon_2 > 0$ ), если вдоль решения (2.4.7) выполняется следующее

$$\begin{aligned}
& \frac{d_1}{a_0} (2\nu_0 + \|\psi(0)\|) - p_1 h \\
& + p_1 \left( \frac{d_1 (2\nu_0 + \|\psi\|) h^2}{\sqrt{3} a_0} + \frac{p_0 h^3}{2\sqrt{5}} \right) \\
& + p_1^2 h^3 \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{15}} \leq -\varepsilon_2 < 0.
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Введем обозначение

$$s_0 = \frac{d_1 (2\nu_0 + V_0)}{a_0}. \tag{2.4.14}$$

Соответственно, рассмотрим неравенство



$$\begin{aligned}
& p_1^2 \frac{h^3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2\sqrt{15}} \\
& - p_1 \left( h - \frac{s_0}{\sqrt{3}} - \frac{p_0 h^3}{2\sqrt{5}} \right) \\
& + s_0 + \varepsilon_2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Можно сказать, что для любых  $p_0 > 0$  и  $V_0 \geq 0$  неравенство (2.4.15) имеет решения  $p_1 = p_1(p_0, V_0)$  и  $h = h(p_0, V_0)$ . Для простоты доказательства этого утверждения воспользуемся следующими грубыми оценками, чтобы получить возможные значения  $h$  и  $p_1$ .

При  $0 < h \leq 1$  решения (2.4.15) содержатся в множестве решений следующего неравенства

$$h^3 p_1^2 - 2p_1 \left( h - s_0 h^2 - \frac{p_0 h^2}{4} \right) + 2s_0 \leq 0. \tag{2.4.16}$$

Неравенство (2.4.16) имеет решения, если его дискриминант  $\Delta_1$  неотрицательный

$$\frac{\Delta_1}{h^2} = 1 - \left( 4s_0 + \frac{p_0}{2} \right) h + \left( s_0 + \frac{p_0}{4} \right)^2 h^2 \geq 0. \tag{2.4.17}$$

Рассматривая условие (2.4.17) как квадратное неравенство относительно  $h$ , находим следующую оценку для этого параметра

$$\begin{aligned}
& 0 < h \leq h_0, \\
& h_0 = \frac{2s_0 + \frac{p_0}{4} - \sqrt{s_0 \left( 3s_0 + \frac{p_0}{2} \right)}}{\left( s_0 + \frac{p_0}{4} \right)^2}.
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Усилим оценку (2.4.18) в виде соотношения

$$0 < h < h_* = \min \left( 1, h_0, \frac{1}{s_0} \right). \tag{2.4.19}$$

Тогда неравенство (2.4.16) имеет решение

$$\begin{aligned} \frac{(1 - h_* s_0) - \sqrt{\Delta_1}}{h_*^2} = p_{11} \leq p_1 \leq \\ \leq p_{12} \frac{(1 - h_* s_0) + \sqrt{\Delta_1}}{h_*^2}. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Учитывая условие (2.4.20), найдем возможные значения  $p_1$  :

$$p_{11} \leq p_1 \leq p_{13} = \min \left( p_{12}, \frac{(1 - \varepsilon_1)}{h_*^2} \right). \quad (2.4.21)$$

Таким образом, получается следующий алгоритм построения управления (2.4.1).

1. Согласно (2.4.11), для выбранных  $p_0$  и  $V_0$  определить область начальных возмущений

$$\Gamma_0 = \{(x_0, y_0) \in R^{2n} : (s_0 + s_1 + 1)y_0^2 + p_0 x_0^2 \leq 2V_0^2\} \quad (2.4.22)$$

2. Выбрать параметры  $h$  и  $p$  из условий (2.4.10) и (2.4.11).
3. Производная по времени от  $V$  при малых  $t \geq 0, 0 \leq t \leq T$  удовлетворяет неравенству  $\dot{V} \leq -\varepsilon_2/2$ . Для движения  $(x(t), y(t))$  системы (2.4.3) и значений  $t$ , таких, как  $0 \leq t \leq T$ , можно получить оценку

$$|y(t)| \leq \sup(|y(\tau)|, t - 2h \leq \tau \leq t) \leq V_0 \quad (2.4.23)$$

Таким образом, оценки (2.4.12), (2.4.15), (2.4.19) и (2.4.21) выполняются при  $0 \leq t \leq T$  и соответственно они действительны для всех  $t \geq 0$ .

Множество  $\{W(|\psi(0)|) = 0\}$  содержит только те решения уравнения (2.4.4), для которых  $x(t) = \text{const}$  и, соответственно,  $y(t) = x(t) \equiv 0$ .

На основании утверждения 1.1.3 имеем следующий результат.

**Утверждение 2.4.1.** Закон управления (2.4.1) с параметрами  $p_1$  и  $h$ , удовлетворяющими условиям (2.4.10) и (2.4.21), обеспечивает полуглобальное отслеживание траектории  $q = q^{(0)}(t)$  со свойством равномерной асимптотической устойчивости этого движения.

Представим характеристики предлагаемых законов управления для отслеживания траектории робота-манипулятора с тремя степенями свободы (см. рис. 1.4.1).

Параметры робота заданы следующими

$$I = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, m_2 = 3 \text{ кг}, m_3 = 5 \text{ кг}, m_0 = 3 \text{ кг}, \\ l_2 = 0.5 \text{ м}, b_2 = 0.2 \text{ м}, b_3 = 0.5 \text{ м}.$$

Рассмотрим применение закона управления (2.4.1) для отслеживания траектории

$$q_1^{(0)}(t) = 0.5 \cos(t) \text{ рад}, q_2^{(0)}(t) = 2 \cos(0.5t) \text{ рад}, \\ q_3^{(0)}(t) = 2 \sin(0.5t) \text{ рад}.$$

Параметры усиления управления  $p_0$  и  $p_1$  выбраны следующими

$$p_0 = 70, p_1 = 70, h = 0.1 \text{ с}.$$

Начальные условия для робота выберем следующими

$$q_1(0) = 3 \text{ рад}, q_2(0) = -2.8 \text{ рад}, q_3(0) = 2.5 \text{ рад}, \\ \dot{q}_1(0) = 15 \text{ рад/с}, \dot{q}_2(0) = -15 \text{ рад/с}, \\ \dot{q}_3(0) = 10 \text{ рад/с}.$$

На рисунках 2.4.1—2.4.3 показаны графики изменения во времени угловых координат звеньев манипулятора для реального и программного движений. Из этих результатов видно, что закон управления (2.4.1) обеспечивает асимптотическую сходимость реального движения робота к заданной траектории.

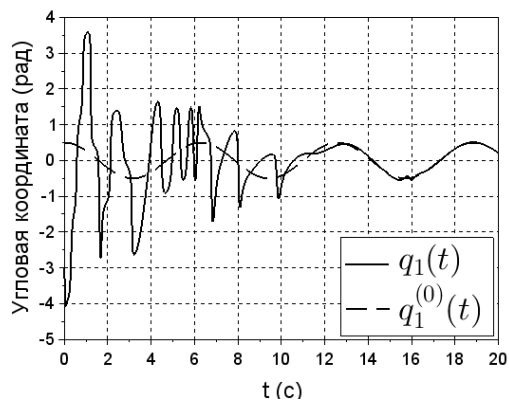


Рис. 2.4.1 – Графики зависимости от времени реального и программного вращения первого звена робота-манипулятора при управлении (2.4.1)

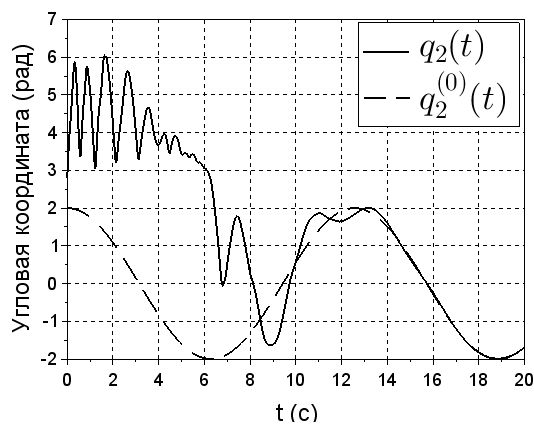


Рис. 2.4.2 – Графики зависимости от времени реального и программного вращения второго звена робота-манипулятора при управлении (2.4.1)

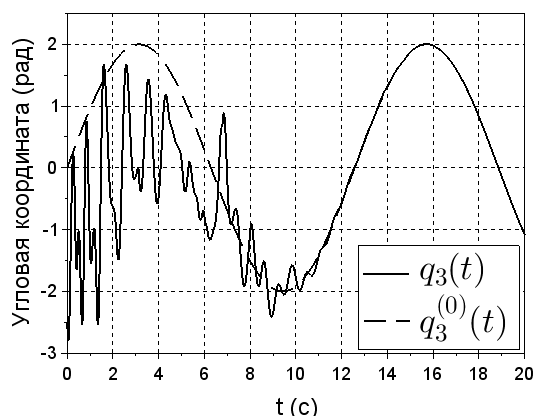


Рис. 2.4.3 – Графики зависимости от времени реального и программного вращения третьего звена робота-манипулятора при управлении (2.4.1)

## **Выводы по второй главе.**

В данной главе на основе математического моделирования обоснованы модели управления с нелинейными регуляторами в глобальном и полуглобальном отслеживании траектории многозвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическими шарнирами. Получены оценки допустимого запаздывания в структуре обратной связи в зависимости от заданной траектории и массоинерционных параметров механической системы. В качестве решения прикладной задачи построена соответствующая модель управления, обеспечивающего глобальную стабилизацию заданного положения трехзвенного робота-манипулятора без измерения скорости. Соответствующий закон управления имеет достаточно простую структуру, состоящую из компенсатора гравитационных моментов в заданном положении и стабилизирующих моментов, параметры которых не зависят от массоинерционных параметров робота и выбранного положения. Методика обоснования такого типа модели управления может быть использована для решения аналогичных задач о структуре управления для других типов промышленных манипуляторов (антропоморфный робот, экзоскелет и др.). Также проведено построение модели управления обеспечивающего стабилизацию стационарного движения трехзвенного манипулятора, в котором ведущее вертикальное звено вращается с постоянной угловой скоростью, а два других имеют относительно постоянные положения. В этом случае измерение скоростей звена не требуется. Методика решения обоснования такого типа модели управления может быть использована для решения задач управления другими типами манипуляторов с вертикальным ведущим звеном.

### **ГЛАВА 3. О ПРИМЕНЕНИИ РАЗРАБОТАННОГО КОМПЛЕКСА ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ ТРЕХЗВЕННОГО И ШЕСТИЗВЕННОГО РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ**

В первом параграфе этой главы излагаются результаты разработки алгоритма и комплекса проблемно-ориентированных программ по моделированию процесса управления с обоснованными моделями нелинейных регуляторов, допускающих запаздывание в структуре обратной связи, в отслеживании программных движений роботов-манипуляторов с цилиндрическими и призматическими шарнирами. В качестве приложения исследуются задачи применения моделей такого управления для индустриального трехзвеного и экспериментального шестизвеного манипуляторов.

Задача об управлении движением трехзвеного манипулятора являлась предметом изучения многочисленных работ. Из последних работ, относящихся непосредственно к исследованиям в диссертационной работе, выделим следующие. Различные аспекты и особенности применения пропорционально-интегро-дифференцирующего регулятора (ПИД-регулятор) в зависимости от цели исследуемой конкретной задачи рассмотрены в работах [20, 23]. В работах [90, 91] предложены иные подходы для построения управления трехзвеными манипуляторами. В [90] метод, разработанный на основе преобразования координат, позволяет достичь глобальной стабилизации нулевого положения равновесия горизонтального трехзвеного манипулятора посредством неполного управления с измерением только его положения. Как отмечается в этой и других работах, регулятор без измерения скорости, не требующий установки датчиков

скоростей, снижает стоимость всей структуры управления и позволяет избежать начального влияния на нее, вызванного "шумами" скоростей.

Во втором параграфе разработана математическая модель манипулятора, состоящего из вращающейся вокруг своей вертикальной оси колонки и присоединенных к ней последовательно двух звеньев с неравными главными центральными моментами инерции, а также захвата с грузом. Дана постановка задачи о построении в нелинейной постановке для пространственного трехзвенного манипулятора структуры ограниченного управления, обеспечивающей стабилизацию его установившихся программных движений без измерения угловых скоростей.

В третьем параграфе представлен процесс управления с нелинейным регулятором с запаздывающей структурой обратной связи без измерения скоростей, в котором обеспечивается полуглобальная стабилизация программного установившегося движения разработанной модели манипулятора.

В четвертом параграфе представлены результаты по моделированию в динамике и процесса управления в задаче о полуглобальной стабилизации программных нестационарных движений этого робота.

В пятом параграфе излагаются результаты по моделированию динамики и процесса управления на основе нелинейной обратной связи шестизвенным роботом-манипулятором, сконструированного в НИТИ УлГУ, включающего пять цилиндрических и один призматический шарниры.

### **§ 3.1. Численный метод, алгоритмы и комплекс программ математического моделирования процесса управления роботами-манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами.**

Для проведения численного моделирования процесса управления многозвенными роботами-манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами, движение которых описывается уравнениями

Лагранжа (2.1.1) в этом параграфе представлены: численный метод решения уравнений возмущенного движения (2.1.3) с разложением функции  $R(t, x)$  согласно равенству (2.1.4) и структурой нелинейного регулятора (2.1.6); алгоритмы и комплекс программ.

Численный метод заключается в обосновании численного решения системы уравнений (2.1.3) с разложением (2.1.4) и определением (2.1.6) регулятора

$$\begin{aligned}
 & A^{(1)}(t, x)\ddot{x} + C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x})\dot{x} + R(t, x) + D\dot{x} = u^{(1)}, \\
 u^{(1)} = & -B_1 p\left(x(t - h_1(t))\right) - B_2 \dot{x}(t - h_2(t)) - \int_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t)\dot{x}(\tau)d\tau - \\
 & - \int_{t-h_0}^{t-h_4} B_4(\tau - t)p(x(\tau))d\tau, \tag{3.1.1}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 & A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x), C^{(1)}(t, x, \dot{x}) = C(q^{(0)}(t) + x, \dot{x}), \\
 & R(t, x) = (A(q^{(0)}(t) + x) - A(q^{(0)}(t)))\ddot{q}^{(0)}(t) + (C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) - \\
 & C^{(1)}(t, 0, \dot{q}^{(0)}(t)))\dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t) + x) - g(q^{(0)}(t)); u^{(1)} = u - u^{(0)}(t)
 \end{aligned}$$

Эти уравнения представляют собой совокупность нелинейных неавтономных (в общем случае) функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с конечным запаздыванием, приводимую к виду

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t(\cdot)), \tag{3.1.2}$$

( $x_t(\cdot) = x(t + s), -h_0 \leq s \leq 0$ ) с начальными условиями  $x_t(\cdot) = \{\varphi(s), -h_0 \leq s \leq 0\}$ , где  $f(t, \varphi)$  есть непрерывная функция, заданная в пространстве  $R^+ \times C$ ,  $C$  есть банахово пространство непрерывных функций.

Будем предполагать, что эта функция удовлетворяет условиям существования и единственности решения соответствующей задачи Коши

$$x_\alpha(s) = x(\alpha + s) = \varphi(s) \quad (-h_0 \leq s \leq 0), \tag{3.1.3}$$



непрерывной зависимости решений от начальных условий, а также, при необходимости, условиям существования предельных систем уравнений (см. § 1.1).

Численным методам решения системы (3.1.2) посвящен ряд работ, из которых выделим численные методы и программы, включенные в пакеты вычислений "Mathematica", "MatLab пакет dde23", "GNU Octave", "MatLab, пакет time-delay system toolbox", а также программа "tosp—The (O|d)de Solutions Plotter", разработанная на кафедре информационной безопасности и теории управления УлГУ к.ф.-м.н. ст. преподавателем Шепелевым Г.А. в 2011 году. В работе [19] показано определенное преимущество программы "tosp" по сравнению с указанными остальными, в частности, в преодолении сложности в определении сходимости используемого численного метода на бесконечном интервале задания независимого аргумента. Контроль за сходимостью в "tosp" предлагался осуществляться посредством вычисления соответствующего функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную в силу системы (3.1.2), при условии его существования.

Программы "MatLab, пакет time-delay system toolbox" и "tosp" в настоящее время не поддерживаются.

Проведенный анализ привел к выводу о необходимости разработки численного метода, алгоритмов и комплекса объектно-ориентированных программ, позволяющих проводить численный анализ обоснованного математического моделирования процесса управления многозвенного манипулятора с учетом ряда его особенностей, в том числе, возможно неограниченный интервал времени вычисления, задание начальных значений координат и скоростей в конкретный момент времени, контроль изменения длины шага.

В разработанном численном методе учет этих особенностей решается использованием: задания зависимости функции, определяющей запаздывание, от времени; доказательством сходимости разработанного

численного метода на бесконечном интервале; контролем за изменением шага на основе соответствующих функций и функционала Ляпунова.

**Описание численного метода.** Запишем систему уравнений (3.1.1)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left( A(t, x(t)) \right)^{-1} \left( -C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x})\dot{x} - R(t, x) - D\dot{x} - \right. \\ & - B_1 p \left( x(t - h_1(t)) \right) - B_2 \dot{x}(t - h_2(t)) - \int_{t-h_0(t)}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t)\dot{x}(\tau) d\tau - \\ & \left. - \int_{t-h_0(t)}^{t-h_0(t)} B_4(\tau - t)p(x(\tau)) d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Проблема задания начальных значений координат и скоростей в конкретный момент времени  $t_0 \geq 0$  для модельного функционально-дифференциального уравнения переопределением допустимых зависимостей  $h_0(t), h_1(t), h_2(t), h_3(t), h_4(t)$  на некотором отрезке  $[t_0, t_0 + \alpha_{\square}]$  ( $\alpha_{\square} > 0$ ) при этом  $h_1(t_0) = 0$ .

Определим на каждом отрезке  $[t, t + h_0]$  временную сетку  $T_l = t + l\Delta$ ,  $l = 0, 1, \dots, N$  с равномерным шагом  $\Delta = h_0/N$ , где  $N$  – целое число. Для простоты будем считать, что  $h_0/\Delta = m$ , где  $m$  – целое число. Введем дискретную численную модель системы (3.6.4) в линейном приближении с точностью до  $\Delta^2$  вида

$$\begin{aligned} A^{(1)}[l+1]\dot{x}[l+1] + C^{(1)}[l]\dot{x}[l] \\ = D\dot{x}[l] + F[l]x[l] - B\dot{x}[l] - Px[l] + P\dot{x}[l]\Delta \\ + \left( B(A^{(1)}[l])^{-1}(-C^{(1)}[l]\dot{x}[l] + (D - B)\dot{x}[l] + (F[l] - P)x[l]) \right) \Delta \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

В соответствии с (2.1.8) примем за функцию Ляпунова

$$V[l] = \frac{1}{2} (\dot{x}[l] + Sx[l])' A^{(1)}[l] \dot{x}[l] (+Sx[l]) + \frac{1}{2} (x[l])' (P + SB)x[l] \quad (3.1.6).$$

Полагаем выполненными следующие неравенства, аналогичные неравенствам (2.3.5) при дискретизации

$$(\dot{x}[l])' \left( B - \frac{1}{2} \left( C^{(11)}[l] + (C^{(11)}[l])' \right) - D - SA[l] \right) \dot{x}[l] \geq \alpha_1 \|\dot{x}[l]\|^2 \quad (\alpha_1 > 0)$$

$$S(x[l])' \left( P - \frac{1}{2}(F[l] + F'[l]) + \frac{1}{2}(C^{(12)}[l] + (C^{(12)}[l])') \right) x[l] \geq \alpha_1 \|x[l]\|^2$$

$$2(x[l])'L[l]\dot{x}[l] \leq (\alpha_1 \|\dot{x}[l]\|^2 + \alpha_1 \|x[l]\|^2 - \varepsilon(\|\dot{x}[l]\|^2 + \|x[l]\|^2))$$

$$(\|x\|, \|\dot{x}\|: (x, \dot{x}) \in G_1, \varepsilon > 0$$

$$L'[l] = \frac{1}{2}s_0 \left( C^{(11)}[l] + (C^{(11)}[l])' + C^{(12)}[l] + (C^{(12)}[l])' + 2D + 2 = SA^{(1)}[l] - F'[l] \right)$$

Вычислим  $V[l + 1]$  с учетом приближенного равенства

$$\frac{A[l + 1] - A[l + 1]}{T} \approx \dot{A}[l], \quad y'(A[l] - 2C[l])y = 0 \quad \forall y \in R^n$$

Находим с точностью до  $T^2$  согласно (3.1.5)

$$\begin{aligned} V[l + 1] &= \frac{1}{2}(\dot{x}[l + 1]Sx[l + 1])'A^{(1)}[l + 1](\dot{x}[l + 1] + Sx[l + 1]) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x[l + 1])'(P + SB)x[l + 1] \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x}[l + 1] + Sx[l + 1])'A^{(1)}[l + 1](\dot{x}[l + 1]T + S\dot{x}[l + 1] \\ &\quad + \dot{x}[l] + Sx[l]) + \frac{1}{2}(x[l + 1])'(P + SB)(\dot{x}[l + 1]T + x[l]) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x}[l] + Sx[l])'A^{(1)}[l](\dot{x}[l] + Sx[l]) + \frac{1}{2}x'[l](P + SB)x[l] \\ &\quad - (\dot{x}[l])' \left( B - \frac{1}{2}(C^{(11)}[l] + (C^{(11)}[l])') - D - SA[l] \right) \dot{x}[l] \\ &\quad - S(x[l])' \left( P - \frac{1}{2}(F[l] + F'[l]) + \frac{1}{2}(C^{(12)}[l] + (C^{(12)}[l])') \right) x[l] \\ &\quad + (x[l])'L[l]\dot{x}[l] \leq V[l] - \varepsilon_2 V[l] = (1 - \varepsilon_2)V[l] \quad (\varepsilon_2 > 0) \end{aligned}$$

Отсюда находим равномерную асимптотическую (и даже степенную) устойчивость нулевого решения (3.1.5). Тем самым, имеем сходимость численного метода в цифровом моделировании уравнений (3.1.4).

Контроль за сходимостью определяется невозрастанием функции  $V = V[e]$ .

Контроль за сходимостью приближенного решения  $(q^{(0)}(T_l) + x(T_l), \dot{q}^{(0)}(T_l) + y(T_l))$  к программному движению определяется сходимостью функционала (2.3.5) на этом решении к нулю.

В соответствии с разработанной структурой нелинейного управления многозвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическими шарнирами разработан следующий алгоритм моделирования его динамики.

#### **Алгоритм моделирования.**

1. Ввод физических параметров и зависимостей, определяемых динамикой робота (зависимостей для матриц и векторов  $A(q)$ ,  $D$ ,  $g(q)$ ,  $F$  и другие).

2. Вычисление других параметров динамики и управления роботом.

3. Ввод возможной структуры матриц параметров нелинейного регулятора  $B_1$  и  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$ , или оценка допустимых значений их матричной нормы.

4. Оценка максимальных значений допустимого запаздывания в структуре обратной связи.

5. Вычисление согласно подтвержденному закону структуры обратной связи значений управления.

Работа блока динамики манипулятора и подбора параметров управления включает в себя следующие вычисления в соответствии с разработанным алгоритмом.

1. Вычисление матрицы центробежных и кориолисовых сил и моментов инерции  $C(q)$  по формулам

$$C(q, \dot{q}) = \{c_{ik}(q, \dot{q})\},$$

$$c_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Вычисление матриц  $B_1$  и  $B_2$  коэффициентов усиления сигналов в структуре обратной связи регулятора без учета запаздывания в структуре обратной связи согласно условиям

относительно действия диссипативных сил и моментов и определении матриц коэффициентов усиления сигналов в структуре обратной связи

$$B_2 + D \gg C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) + A^{(1)}(t, x)S \frac{\partial p(x)}{\partial x} + (2\lambda_1 h_0 + \alpha_1)E,$$

$$B_1 + B_4 \gg SC^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) - F'(t, x) + (2\lambda_1 h_0 + \alpha_2)E,$$

где знак  $\gg$  является знаком матричного неравенства или определенной положительности разницы матриц левой и правой частей соответствующего выражения.

При этом вспомогательная матрица  $S$  вычисляется из матричного неравенства

$$\begin{aligned} & \left( S \left( C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) + \left( C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) \right)' \right) + A^{(1)}(t, x)S \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right. \\ & \left. - F'(t, x) \right)' \left( S \left( C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) \right)' \right) + A^{(1)}(t, x)S \frac{\partial p(x)}{\partial x} - F'(t, x) \right) \\ & \ll \alpha_1 \alpha_2 E. \end{aligned}$$

Подбор матрицы  $S$  может быть заменен на подбор числа  $s_0$  из соответствующего матричного неравенства. Получен вариант нелинейного является исходным для оценки влияния запаздывания в соответствии с условиями (2.3.6).

3. Оценка максимального значения допустимого запаздывания в соответствии с условием (2.3.6).

Разработанный комплекс проблемно-ориентированных программ составлен на языке высокого уровня C++ в интерактивной среде разработки Qt Creator. Используются следующие компоненты и библиотеки: многоплатформенная библиотека Qt; встраиваемый язык сценариев Lua; стандартная библиотека шаблонов для языка Си++ — stl. Благодаря тому, что эти зависимости переносимы на различные архитектурные платформы, программа может работать под различными операционными системами - семейством Windows; семейством ОС, основанных на ядре Linux и других.

Комплекс составлен в объектно-ориентированном стиле с возможностью расширения необходимым функционалом. Схематично внутренне устройство комплекса изображено на рис. 3.1.1. Она включает в себя лексический анализатор, класс дерево-формула, блок моделирования динамики манипулятора и подбора параметров управления, блок дополнительных структур данных, синтаксический анализатор, блок численного метода, блок графического интерфейса.

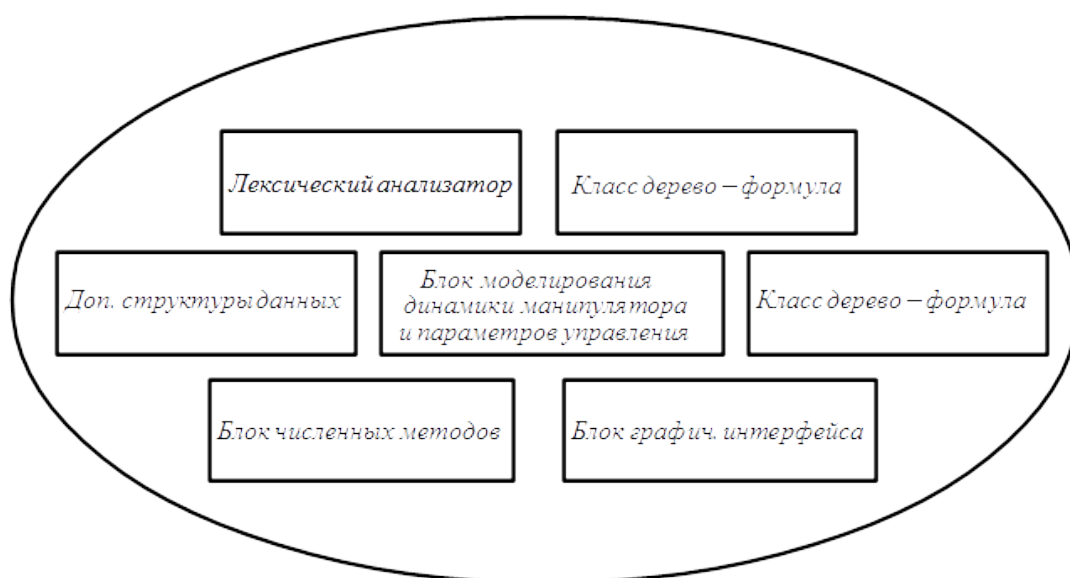


Рис. 3.1.1 – Внутренняя архитектура комплекса программ

Лексический анализатор состоит из управляющего класса LLexet, родительского класса LLexem и классов-потомков LNumber, LId,

LWhitespace, которые отвечают за разбор чисел, идентификаторов и пробельных символов соответственно. Блок формул предназначен для хранения системы во внутренней структуре, позволяющей вычислять значение формулы. Блок синтаксического анализа выполняет непосредственно разбор введенных данных и строит соответствующий объект дерево-формула. Синтаксический анализатор состоит из управляющих классов PInExpr, PTerm и PFactor, а также родительского класса PPFactors и классов-потомков PConst, PInExpr, PFunc, PIntegral, PLuaFunc, PNumbers, отвечающих соответственно за разбор постоянных, внутренних выражений во множителях, функций, функций Lua и чисел. Разбор выражения выполняет объект класса PInExpr, который в случае успеха возвращает указатель на созданное дерево-формулу, непосредственно участвующее в вычислениях.

Блок графического интерфейса управляет остальными модулями программы и организует непосредственное взаимодействие пользователя с программой. Результат численного моделирования может быть получен как в виде численных данных, так и в графическом представлении — как графики функций.

Графическая оболочка имеет многооконный интерфейс приложения, поддерживая три типа вкладок: единственная вкладка ввода данных для системы (постоянные, уравнения, функции на языке Lua); единственная вкладка настройки численного метода; много вкладок холста, содержащая двумерную декартову плоскость с графиками, а также боковую панель различных настроек.

В окне системы можно задавать саму систему (постоянные и уравнения), а также функции на языке Lua, используемые в системе. После ввода системы её необходимо скомпилировать во внутреннее представление. Если во время компиляции будут обнаружены ошибки, то в нижнем поле вывода будут показаны соответствующие сообщения. В случае успешной

компиляции системы можно переходить к настройкам численного метода и процессу интегрирования.

На вкладке численных методов можно задавать следующие настройки: выбор численного метода; начальное и конечное значения независимой переменной интегрирования (обычно  $t_0 = 0$ ); оценки сходимости.

Блок численных методов состоит из родительского класса `NumericMethod`, который является потомком `QThread`, т.е. он выполняется отдельным потоком. Это позволяет организовать одновременное взаимодействие пользователя с программой, а также создать в другом потоке процедуру копирования вычисленных данных. Программа является дальнейшей разработкой программы `osp` — `The (O|d)de Solutions Plotter` и в определенной заимствует ее соответствующую структуру. Блок моделирования динамики манипулятора и параметров управления проводит вычисления в соответствии с указанным алгоритмом на основе использования библиотеки алгоритмического языка C++.

Абсолютно новым является блок численных методов, существенно обновлен блок графического интерфейса. На основе этой комплекса выполнено представленное в следующих параграфах моделирование процессов управления трех- и шестизвенным манипуляторами.

### **§ 3.2. Математическая модель трехзвенного индустриального манипулятора.**

Рассматривается математическая модель трехзвенного манипулятора с базовым звеном в виде вертикальной колонки, опирающейся на неподвижное основание и вращающейся вокруг своей вертикальной оси. Второе и третье звенья соединены последовательно с базовым звеном и между собой цилиндрическими шарнирами. Звенья моделируются как твердые тела,



второе и третье звенья вращаются в одной плоскости, третье звено имеет захват, содержащий груз. Схематическая модель представлена на рис. 3.2.1.

Через  $O_1, O_2$  и  $O_3$  обозначены точки, соответствующие цилиндрическим шарнирам. Полагается, что центры масс  $C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) звеньев лежат на продольных осях  $O_1O_2, O_2O_3$  и  $O_3O_4$  соответственно, где  $O_4$  точка закрепления груза, принимаемого за материальную точку. Обозначим длины отрезков:  $|O_1O_2| = l_1, |O_2O_3| = l_2, |O_3O_4| = l_3, |O_2C_2| = l_{21}, |O_3C_3| = l_{31}$ .

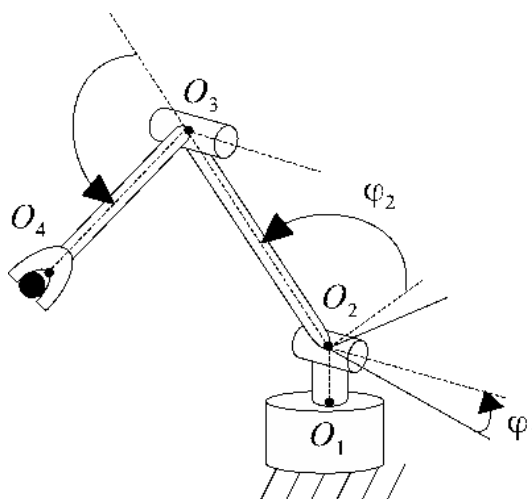


Рис. 3.2.1 – Схема трехзвенного робота-манипулятор

Вводятся системы координат:  $O_1x_1y_1z_1, C_2x_2y_2z_2, C_3x_3y_3z_3$  так, что оси  $O_1y_1, C_2y_2, C_3y_3$  направлены вдоль продольных осей  $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4$ , при этом  $C_1y_1, C_2y_2$  и  $C_3y_3$  являются центральными осями инерции, а главные центральные оси инерции  $C_2x_2$  и  $C_3x_3$  перпендикулярны вертикальной плоскости расположения манипулятора. Массы звеньев 2 и 3, захвата полагаются равными  $m_2, m_3$  и  $m_0$ . Момент инерции базового звена относительно его оси вращения равен  $I_1$ , главные центральные моменты инерции второго и третьего звена относительно осей  $C_2x_2y_2z_2$  и  $C_3x_3y_3z_3$  соответственно равны  $I_{2x}, I_{2y}, I_{2z}, I_{3x}, I_{3y}$  и  $I_{3z}$ . При этом отсутствует

симметричность звеньев 2 и 3 в поперечной плоскости, т. е.  $I_{2x} \neq I_{2z}, I_{3x} \neq I_{3z}$ .

Данную модель можно принять за модель руки робота-манипулятора [90], за модель промышленного робота [91].

Кинетическая энергия системы равна следующему выражению

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + a_{22}\dot{\varphi}_2^2 + 2a_{23}\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 + a_{33}\dot{\varphi}_3^2),$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{11}(q_2, q_3) = & I_1 + I_{2y} \cos^2 q_2 + I_{2z} \sin^2 q_2 + I_{3y} \cos^2(q_2 + q_3) + \\ & I_{3z} \sin^2(q_2 + q_3) + m_2 l_{21}^2 \sin^2 q_2 + m_3 (l_2 \sin q_2 + l_{31} \sin(q_2 + q_3))^2 + \\ & m_0 (l_2 \sin q_2 + l_3 \sin(q_2 + q_3))^2, \quad a_{22} = a_{22}(q_3) = I_{2x} + I_{3x} + m_2 l_{21}^2 + \\ & m_3 (l_2^2 + l_{31}^2 - 2l_2 l_{31} \cos q_3) + m_0 (l_2^2 + l_3^2 - 2l_2 l_3 \cos q_3), \quad a_{23} = a_{23}(q_3) = \\ & I_{3x} + m_3 (l_{31}^2 - l_2 l_{31} \cos q_3) + m_0 (l_3^2 - l_2 l_3 \cos q_3), \quad a_{33} = I_{3x} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия манипулятора с точностью до постоянной определяется равенством

$$\Pi = -g(m_2 l_{21} + m_3 l_2 + m_0 l_2) \cos \varphi_2 - g(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \cos(\varphi_2 + \varphi_3).$$

Согласно уравнениям Лагранжа (1.2.1), движение манипулятора под действием управляющих моментов  $U_1, U_2$  и  $U_3$ , приложенных в цилиндрических шарнирах  $O_1, O_2$  и  $O_3$ , моделируется уравнениями в матричном виде

$$A(\varphi)\ddot{\varphi} = C(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi} - G(\varphi) + U, \quad (3.2.1)$$

где

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, C(\varphi, \dot{\varphi}) = \begin{pmatrix} c_{11}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{12}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{13}(\varphi, \dot{\varphi}) \\ c_{21}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{22}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{23}(\varphi, \dot{\varphi}) \\ c_{31}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{32}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{33}(\varphi, \dot{\varphi}) \end{pmatrix},$$

$$\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), G^T(\varphi) = (0, g_2(\varphi_2, \varphi_3), g_3(\varphi_2, \varphi_3)), U^T = (U_1, U_2, U_3),$$

$$c_{11} = c_{11}^{(1)} \dot{\varphi}_2 + c_{11}^{(2)} \dot{\varphi}_3, c_{12} = c_{11}^{(1)} \dot{\varphi}_1, c_{13} = c_{11}^{(2)} \dot{\varphi}_1,$$

$$c_{11}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left( (I_{2z} - I_{2y} + m_2 l_{21}^2 + (m_3 + m_0) l_2^2) \sin(2\varphi_2) + (I_{3z} - I_{3y} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2) \sin 2(\varphi_2 + \varphi_3) + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin(2\varphi_2 + \varphi_1) \right),$$

$$c_{11}^{(2)} = -\frac{1}{2} \left( (I_{3z} - I_{3y} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2) \sin 2(\varphi_2 + \varphi_3) + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \right),$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2} c_{11}^{(1)} \dot{\varphi}_1, c_{22} = -l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3,$$

$$c_{23} = -l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2 - l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3,$$

$$c_{31} = -\frac{1}{2} c_{11}^{(2)} \dot{\varphi}_1, c_{32} = l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_2, c_{33} = 0,$$

$$g_2 = g_2^{(0)} \sin \varphi_2 + g_3^{(0)} \sin(\varphi_2 + \varphi_3), g_3 = g_3^{(0)} \sin(\varphi_2 + \varphi_3),$$

$$g_2^{(0)} = g(m_2 l_{21} + m_3 l_2 + m_0 l_2), g_3^{(0)} = g(m_3 l_{31} + m_0 l_3),$$

$(\cdot)^T$  – операция транспонирования. Уравнение (3.2.1) описывает движение манипулятора в цилиндрическом фазовом пространстве переменных  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

### § 3.3. Модель управления в задаче о стабилизации программного установившегося манипулятора в пространстве.

Пусть

$$\dot{\varphi} = 0, \varphi^{(0)} = \left( \varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)} \right)^T \quad (3.3.1)$$

есть заданное положение манипулятора. Требуется определить управляющий момент  $U$ , обеспечивающий стабилизацию положения (3.3.1) с учетом цилиндрического фазового пространства системы без измерения скоростей.

Положим  $U = (U_1, U_2, U_3)^T$ , где

$$\begin{aligned}
U_1 &= -\alpha_1 \sin \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1^{(0)}}{2} + \\
&+ \beta_1 \cos \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1^{(0)}}{4} \int_{t-h_1(t)}^t \gamma_1(\tau - t) \sin \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_1^{(0)}}{4} d\tau, \\
U_2 &= g_2^{(0)}(\varphi^{(0)}) + g_2^{(0)} \sin \varphi_2^{(0)} \cos(\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}) + \\
&+ g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) \cos(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}) - \\
&- \alpha_2 \sin \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}}{2} + \beta_2 \cos \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}}{4} \int_{t-h_2(t)}^t \gamma_2(\tau - t) \sin \frac{\varphi_2(\tau) - \varphi_2^{(0)}}{4} d\tau - \\
&- \alpha_4 \sin(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}), \\
U_3 &= g_3^{(0)}(\varphi^{(0)}) + g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) \cos(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}) - \\
&- \alpha_3 \sin \frac{\varphi_3(t) - \varphi_3^{(0)}}{2} + \beta_3 \cos \frac{\varphi_3(t) - \varphi_3^{(0)}}{4} \int_{t-h_3(t)}^t \gamma_3(\tau - t) \sin \frac{\varphi_3(\tau) - \varphi_3^{(0)}}{4} d\tau - \\
&- \alpha_4 \sin(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}), \tag{3.3.2}
\end{aligned}$$

при этом параметры управления удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
\gamma_j(t) &\geq 0, \dot{\gamma}_j(s) \geq \nu_0 > 0 \forall s \in [-h_0, 0] (h_0 > 0), \\
&\int_{-h_0}^0 \gamma_j(\tau) d\tau \leq \gamma_0 (j = 1, 2, 3), \\
\alpha_1 - \frac{\beta_1 \gamma_0}{2} &= \mu_1 > 0, \alpha_2 - \frac{\beta_2 \gamma_0}{2} + 2g_2^{(0)} \cos \varphi_2^{(0)} = \mu_2 > 0, \tag{3.3.3} \\
\alpha_3 - \frac{\beta_3 \gamma_0}{2} &= \mu_3 > 0, \alpha_4 + g_3^{(0)} \cos(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) = \mu_4 > 0.
\end{aligned}$$

Представим некоторые результаты численного моделирования на основе разработанного комплекса программ процесса стабилизации положения (3.3.1) управлением (3.3.2)–(3.3.3). Выберем параметры робота в соответствии со значениями индустриального трехзвенного манипулятора [90].

$$\begin{aligned} m_2 &= 15.91 \text{ кг}, m_3 = 6.82 \text{ кг}, m_0 = 2.5 \text{ кг}, \\ l_2 &= 0.5 \text{ м}, l_3 = 0.5 \text{ м}, l_{21} = 0.2 \text{ м}, l_{31} = 0.2 \text{ м}, I_1 = 0.0267 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{2x} &= 3.7691 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{2y} = 3.6939 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{2z} = 0.01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{3x} &= 0.2245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{3y} = 0.2842 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{3z} = 0.0904 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Программное положение манипулятора выберем в виде:

$$\varphi_1^{(0)} = \pi/4 \text{ рад}, \varphi_2^{(0)} = -\pi/3 \text{ рад}, \varphi_3^{(0)} = \pi/6 \text{ рад}.$$

Подберем параметры управляющих моментов в следующем виде

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2700, \beta_k = 80\alpha_k, \\ \gamma_k(t) &= e^{90t}, h_k = 0.2 \text{ с}, k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Результаты численного моделирования движения робота-манипулятора под управлением (3.3.2) показывают стабилизацию заданного положения, как это видно из рисунка 3.3.1.

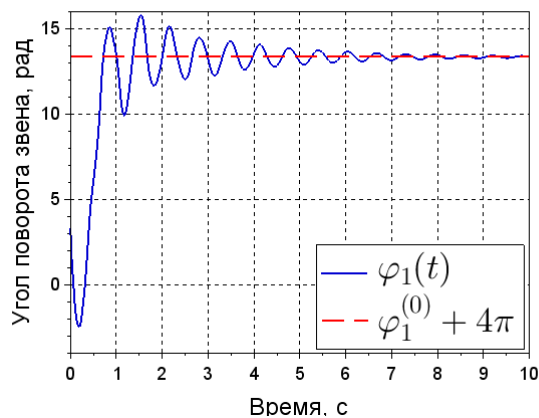
Чтобы продемонстрировать свойство глобального притяжения к заданному положению манипулятора, начальные отклонения и начальные скорости выберем достаточно большими:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 2.5 \text{ рад}, \varphi_2(0) = 1.5 \text{ рад}, \varphi_3(0) = 3.1 \text{ рад}, \\ \dot{\varphi}_1(0) &= 45 \text{ с}^{-1}, \dot{\varphi}_2(0) = 2 \text{ с}^{-1}, \dot{\varphi}_3(0) = -25 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

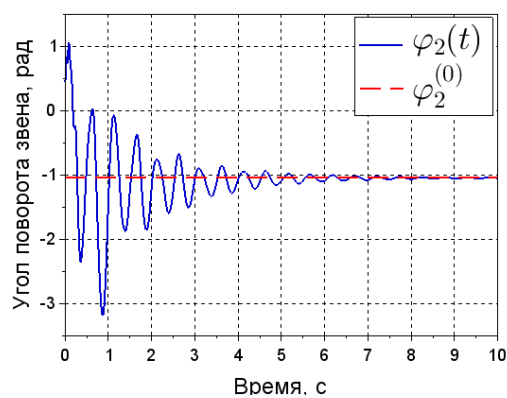
Результаты численного моделирования управляемого движения робота-манипулятора под управлением (3.3.2) демонстрируют стабилизацию заданного положения, как это видно из рисунка 3.3.1. При этом вращательное движение колонки в силу больших начальных скоростей приводится к

заданному положению, смещенному на два полных оборота, что соответствует полученному решению задачи о стабилизации в цилиндрическом фазовом пространстве.

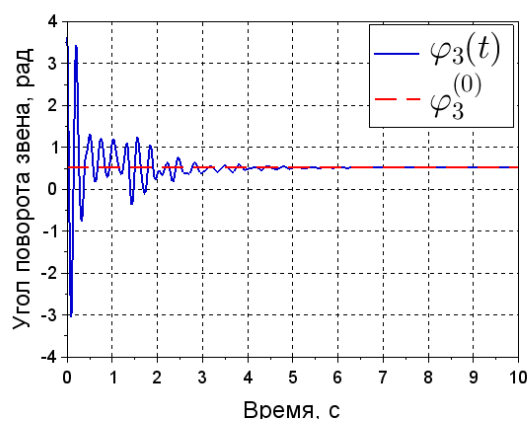
На рисунке 3.3.2 показаны результаты численного моделирования процесса управляемого движения робота-манипулятора (3.2.1) под действием нелинейного регулятора с измерением угловых координат и угловых скоростей. Сравнительный анализ графиков из рисунков 3.3.1 и 3.3.2 показывает, что построенное в диссертационной работе управление (3.3.2) без измерения скоростей практически не уступает нелинейному ПД-регулятору по скорости сходимости при глобальной стабилизации заданного положения робота-манипулятора.



а)

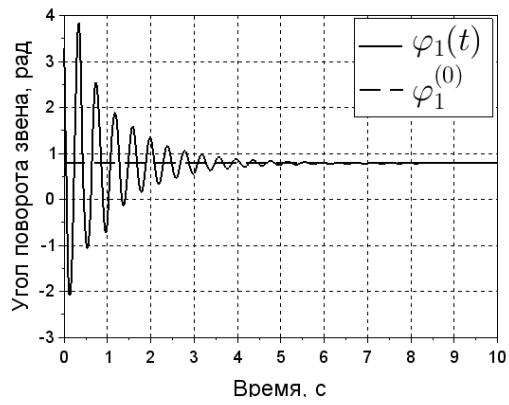


б)

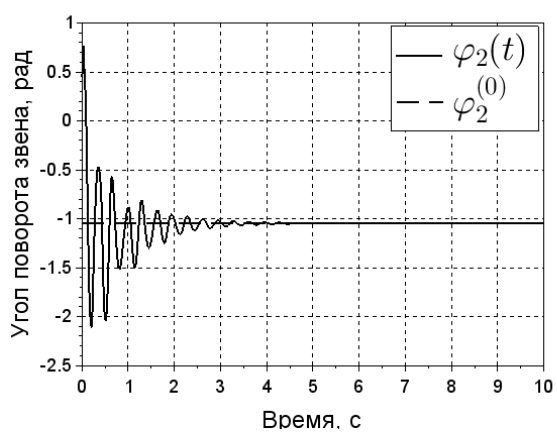


в)

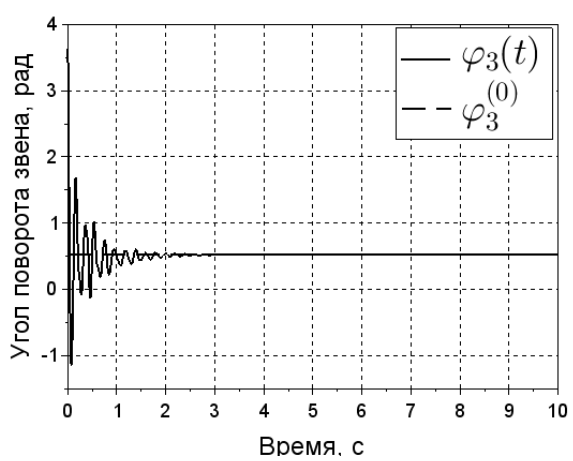
Рис. 3.2.1 – Зависимости от времени углов поворотов звеньев манипулятора: а) первое звено (вертикальная колонка); б) второе звено; в) третье звено



а)



б)



в)

Рис. 3.3.2 – Зависимости от времени углов поворотов звеньев манипулятора: а) первое звено (вертикальная колонка); б) второе звено; в) третье звено



Пусть в программном движении манипулятора первое звено вращается по заданному закону вокруг вертикальной оси, а два других звена сохраняют постоянные относительные положения во вращающейся плоскости их действия

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1(t) &= \dot{\varphi}_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}(t) = \dot{\varphi}_1^{(0)}t, \dot{\varphi}_2(t) = \dot{\varphi}_3(t) = 0, \\ \varphi_2(t) &= \varphi_2^{(0)} = \text{const}, \varphi_3(t) = \varphi_3^{(0)} = \text{const}.\end{aligned}\quad (3.3.4)$$

Манипулятор совершает это движение при условии, что в шарнирах 2 и 3 приложены постоянные моменты, уравновешивающие центробежные моменты, вызванные вращением первого звена, и моменты сил тяжести

$$\begin{aligned}U_2^{(0)} &= \frac{1}{2}c_{11}^{(1)}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)})\left(\dot{\varphi}_1^{(0)}\right)^2 + g_2^{(0)}\sin \varphi_2^{(0)} + g_3^{(0)}\sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}), \\ U_3^{(0)} &= \frac{1}{2}c_{11}^{(1)}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)})\left(\dot{\varphi}_1^{(0)}\right)^2 + g_3^{(0)}\sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}).\end{aligned}$$

Введем возмущения

$$x_1 = \varphi_1 - \varphi_1^{(0)}(t), x_2 = \varphi_2 - \varphi_2^{(0)}, x_3 = \varphi_3 - \varphi_3^{(0)}.$$

Представим моделирование процесса стабилизации программного движения (3.3.4) посредством регуляторов

$$\begin{aligned}U_1^{(1)} &= U_1 - U_1^{(0)} = -\alpha_1 \sin \frac{x_1(t)}{2} + \beta_1 \cos \frac{x_1(t)}{4} \int_{-h_1(t)}^0 \gamma_1(\tau) \sin \frac{x_1(t+\tau)}{4} d\tau, \\ U_2^{(1)} &= U_2 - U_2^{(0)} = -\alpha_2 x_2(t) + \beta_2 \int_{-h_2(t)}^0 \gamma_2(\tau) x_2(t+\tau) d\tau, \\ U_3^{(1)} &= U_3 - U_3^{(0)} = -\alpha_3 x_3(t) + \beta_3 \int_{-h_3(t)}^0 \gamma_3(\tau) x_3(t+\tau) d\tau,\end{aligned}\quad (3.3.5)$$

где параметры  $\alpha_j > 0, \beta_j > 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
\gamma_j(\tau) &\geq 0, \dot{\gamma}_j(\tau) \geq \nu_0 > 0 \forall \tau \in [-h_j, 0], (h_j > 0), (j = 1, 2, 3), \\
\int_{-h_{00}}^0 \gamma_j(\tau) d\tau &\leq \gamma_0, \\
\mu_1 &= \alpha_1 - \frac{\beta_1 \gamma_0}{2} > 0, \\
\mu_2 &= \alpha_2 - \beta_2 \gamma_0 - g_2^{(0)} - g_3^{(0)} - |I_{2x} - I_{2z}| - m_2 l_{21}^2 - |I_{3z} - I_{2z}| - \\
&\quad - m_3 l_{31}^2 - m_0 l_3^2 - 4m_3 l_3 l_{31} - 4m_0 l_2 l_3 > 0, \\
\mu_3 &= \alpha_3 - \beta_3 \gamma_0 - g_3^{(0)} - |I_{3z} - I_{2z}| - m_3 l_{31}^2 - m_0 l_3^2 - 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) > 0, \\
4\mu_2 \mu_3 - \left( |I_{3z} - I_{3y}| + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2 + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \right)^2 &> 0. \quad (3.3.6)
\end{aligned}$$

**Результаты численного моделирования.** Выберем параметры робота в соответствии со значениями индустриального трехзвенного манипулятора [90].

$$\begin{aligned}
m_2 &= 15.91 \text{ кг}, m_3 = 6.82 \text{ кг}, m_0 = 2.5 \text{ кг}, \\
l_2 &= 0.5 \text{ м}, l_3 = 0.5 \text{ м}, l_{21} = 0.2 \text{ м}, l_{31} = 0.2 \text{ м}, I_1 = 0.0267 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\
I_{2x} &= 3.7691 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{2y} = 3.6939 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{2z} = 0.01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\
I_{3x} &= 0.2245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{3y} = 0.2842 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{3z} = 0.0904 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.
\end{aligned}$$

Желаемое положение манипулятора выберем в виде:

$$\varphi_1^{(0)} = \pi/4 \text{ рад}, \varphi_2^{(0)} = -\pi/3 \text{ рад}, \varphi_3^{(0)} = \pi/6 \text{ рад}.$$

Подберем параметры управляющих моментов в следующем виде

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= 2700, \beta_k = 80\alpha_k, \\
\gamma_k(t) &= e^{90t}, h_k = 0.2 \text{ с}, k = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Результаты численного моделирования движения робота-манипулятора под управлением (3.3.2) в среде Scilab 5.5.2 показывают стабилизацию заданного положения, как это видно из рисунка 3.3.1.

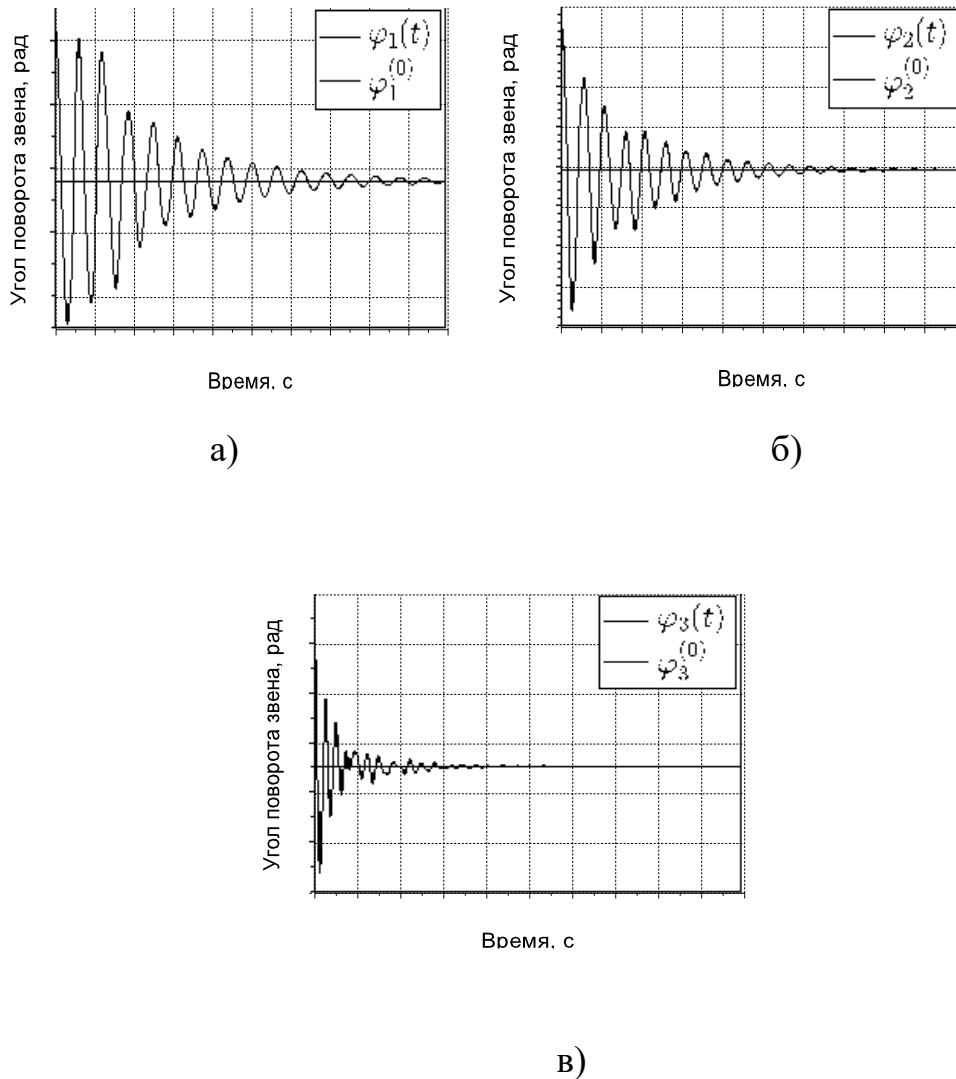


Рис. 3.3.1 – Зависимости от времени углов поворота звеньев манипулятора:

а) первое звено; б) второе звено; в) третье звено

### § 3.4. Решение задачи глобального отслеживания траектории.

Для механической системы (3.2.1) предположим, что выходной вектор содержит только угловые положения звеньев. Найдем закон управления с обратной связью по положению  $\tau$ , который асимптотически перемещает манипулятор (3.2.1) из любого начального положения с любой начальной скоростью на заданную траекторию.

Пусть  $X$  – множество желаемых движений манипулятора (3.2.1), определяемое следующим образом

$$X = \{q_{ref}: [t_0, +\infty) \rightarrow R^4: \|\dot{q}_1^{ref}(t)\| \leq dq_1^{max}, \|\ddot{q}_1^{ref}(t)\| \leq dq_1^{max}, \dot{q}_j^{ref} = const, j = 2,3\},$$

где  $q_1^{ref}(t)$  является непрерывно дифференцируемой функцией, обе производные которой ограничены,  $dq_1^{max} = const > 0$ ,  $t_0 = const$  – начальный момент времени движения.

Таким образом, рассматриваются только отслеживаемые траектории манипулятора (3.1.1), в которых второе и третье звено занимают относительно постоянные угловые положения. При этом для достижения цели управления все звенья могут перемещаться произвольно из любого положения и с любой начальной скоростью.

Задача управления состоит в получении закона управления с динамической обратной связью по положению  $u = u(t, q(t), \dot{q}_t)$  ( $q_t(s) = q(t + s)$ ,  $s \in [-t, 0]$ ) такого, что система (3.1.1) имеет равномерно асимптотически устойчивое и глобально притягивающее решение  $q_{ref}(t) \in X$ . Отличие термина «отслеживание траектории» от «глобального отслеживания траектории» состоит в том, что во втором случае начальные отклонения координат и скоростей звеньев манипулятора от отслеживаемого движения могут быть сколь угодно большими. При этом величина параметров усиления управления не зависит от величины начальных отклон

Рассмотрим регулятор  $u$ , заданный формулой (2.1.6)

Рассмотрим результаты численного моделирования движения робота-манипулятора под действием управления (3.4.3).

Выберем следующие параметры робота

$$\begin{aligned} m_2 &= 15.91 \text{ кг}, m_3 = 6.82 \text{ кг}, m_0 = 2.5 \text{ кг}, \\ l_2 &= 0.5 \text{ м}, l_3 = 0.5 \text{ м}, l_{21} = 0.2 \text{ м}, l_{31} = 0.2 \text{ м}, I_1 = 0.0267 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{2x} \\ &= 3.7691 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{2y} = 3.6939 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{2z} = 0.01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{3x} &= 0.2245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{3y} = 0.2842 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{3z} = 0.0904 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Желаемое движение робота выберем следующим

$$q_1^{ref}(t) = 3t + \sin t \text{ рад}, \quad q_2^{ref} = \pi/2 \text{ рад}, \quad q_3^{ref} = \pi/4 \text{ рад}.$$

Подберем параметры управления, удовлетворяющие Теореме 3.4.1, в виде:

$$h_1 = 10, \quad h_2 = -10, \quad h = 2.$$

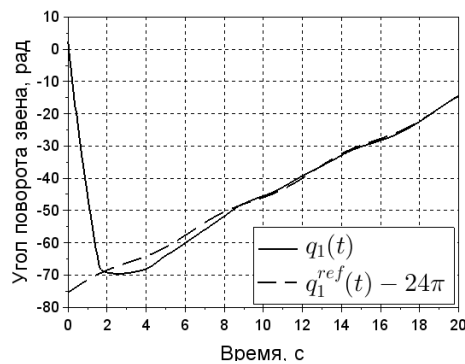


Рис. 3.4.1 – Угол поворота первого звена робота-манипулятора в зависимости от времени

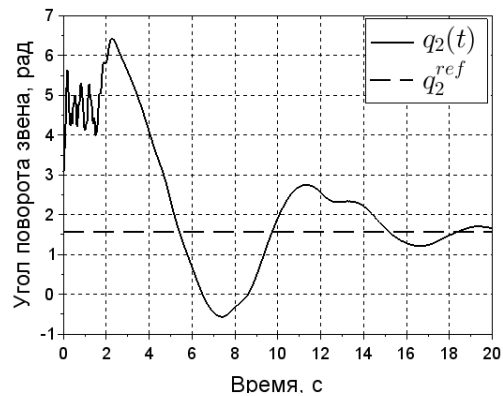


Рис. 3.4.2 – Угол поворота второго звена робота-манипулятора в зависимости от времени

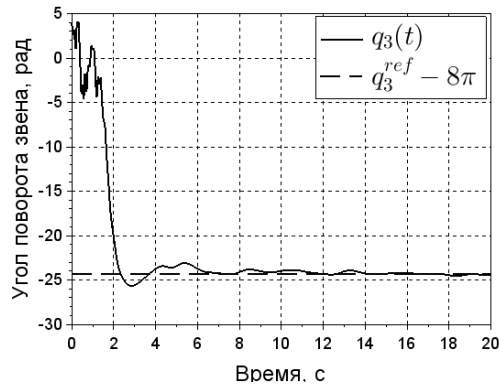


Рис. 3.4.3 – Угол поворота третьего звена робота-манипулятора в зависимости от времени

Из рисунков 3.4.1–3.4.3 видно, что управление (3.4.3) таково, что манипулятор асимптотически приближается к некоторому движению, отличающемуся от желаемого на величину, кратную  $2\pi$ .

Полученные результаты являются развитием работ [25, 34].

### § 3.5. Отслеживание траектории шестизвенного робота-манипулятора.

В качестве прикладной рассмотрим задачу об управлении робототехнической системой, целью которой является проведение разного рода работ в горячей камере. Горячая камера представляет собой герметичную камеру, изготовленную с применением экранирующих материалов. В камере находится ведомый манипулятор, имеющий шесть степеней свободы (см. Рис. 3.5.1) и управляемый на основе ведущего манипулятора [76].

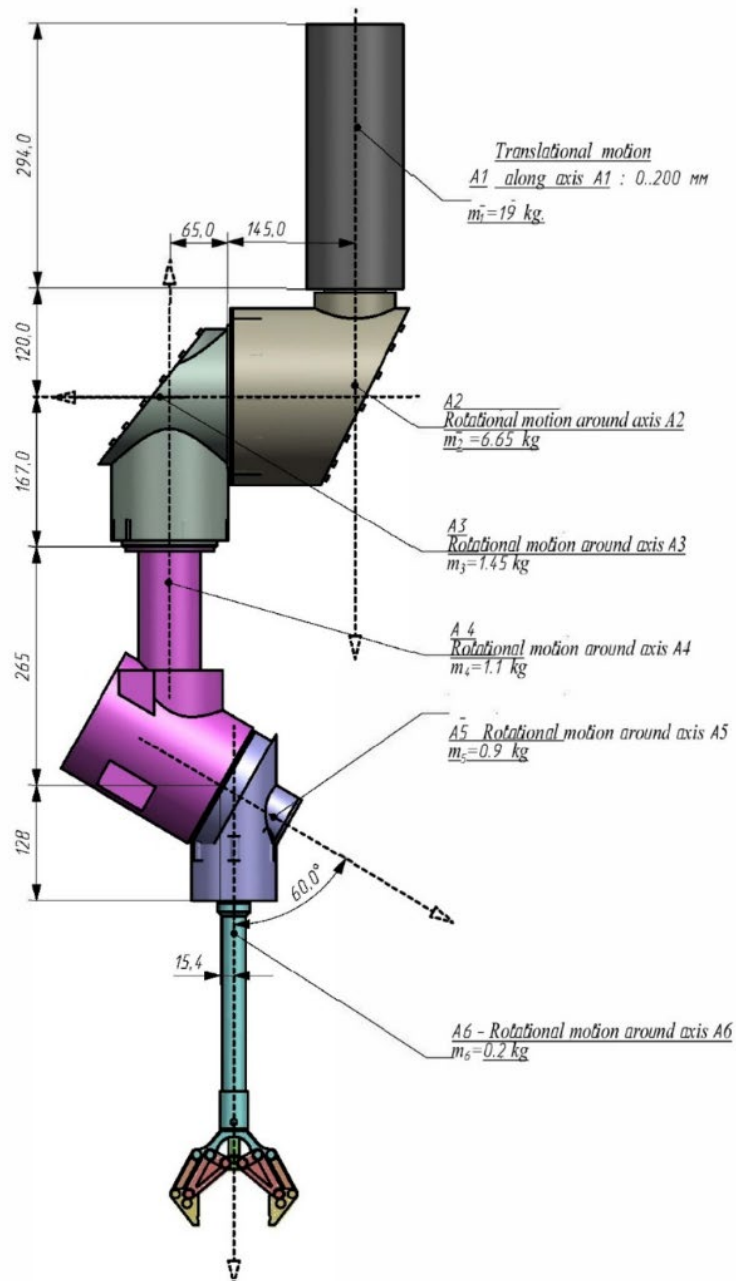


Рис. 3.5.1 – Схема шестизвенного робота-манипулятора

Ведущий манипулятор представляет собой уменьшенную версию ведомого манипулятора. Он имеет приводы во всех шарнирах с датчиками, измеряющих значения их фазовых координат. Манипуляторы соединены между собой сквозной трубой. Труба содержит набор параллельных валов для передачи движения от ведущего манипулятора к ведомому. Сквозные

валы имеют на концах муфты с прорезями для зацепления их с валами ведомого манипулятора.

Пусть обобщенные координаты  $q_1 = z_1, q_i = \varphi_i, i = 2, 3, 4, 5, 6$  представляют собой поступательные и угловые перемещения призматического и вращательных шарниров  $O_1, O_2, \dots, O_6$  соответственно. Обозначим через  $l_i$  длину  $i$ -го звена, символом  $m_i$  – массу  $i$ -го звена,  $l_{i2}$  – длина отрезка  $O_i C_i$ , где  $C_i$  – центр масс  $i$ -го звена. Обозначим через  $I_{ix}, I_{iy}$  и  $I_{iz}$  моменты инерции  $i$ -го относительно соответствующих осей  $x, y$  и  $z$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ).

Динамика многозвенного робота-манипулятора с шестью вращательными и призматическими шарнирами определяется уравнениями (2.1.1). Элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A(q)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \sum_{i=1}^6 m_i, a_{12} = a_{16} = a_{21} = a_{61} = 0, \\
 a_{22} &= I_{2z} + I_{3y} \sin^2 q_3 + \cos^2 q_3 \sum_{j=3}^6 I_{jz} + \sin^2 q_3 \sum_{j=3}^6 I_{jy} + \\
 &+ \frac{1}{4} (I_{5x} - I_{5z}) \cos^2 q_3 + m_2 l_{22}^2 + m_3 (l_{22}^2 + l_3^2 \sin^2 q_3) + \\
 &+ m_4 ((l_{32} + l_4)^2 \sin^2 q_3 + l_{22}^2) \\
 &+ m_5 \left( \left( l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2} l_{52} + l_{62} \right)^2 \sin^2 q_3 + \left( l_{22} - \frac{1}{2} l_{52} \right)^2 \right) \\
 a_{33} &= I_{3x} + I_{4x} + \frac{3}{4} (I_{5x} + I_{5z}) + I_{6x} + m_3 l_3^2 + m_4 (l_{32} + l_4)^2 + \\
 &+ m_5 \left( l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2} l_5 \right)^2 + m_6 \left( l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2} l_{52} + l_6 \right)^2,
 \end{aligned}$$



$$a_{44} = I_{4z} + \frac{3}{4}(I_{5x} + I_{5z}) + I_{6z} + \frac{1}{2}m_5 l_5^2 + \frac{1}{2}m_6 l_{52}^2,$$

$$a_{55} = I_{5z} + \frac{1}{2}(I_{6x} + I_{6z}) + \frac{1}{2}m_6 l_6^2, a_{66} = I_{6z},$$

$$a_{13} = a_{31} = m_3 l_3 \sin q_3 + m_4(l_{32} + l_4) \sin q_3 + m_5 \left( l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2} l_{52} \right) \sin q_3 + m_6 \left( l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2} l_{52} + l_{61} \right) \sin q_3,$$

$$a_{14} = a_{41} = -\frac{1}{2}m_5 l_5 \sin q_3 - \frac{1}{2}m_6 l_{52} \sin q_3, a_{15} = a_{51} = \frac{\sqrt{3}}{2}m_6 l_6 \sin q_3,$$

$$a_{23} = a_{32} = m_4(l_{32} + l_{41})l_{22} \cos q_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}I_{5x} \cos q_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}I_{5z} \cos q_3 + m_5 \left( l_{22} - \frac{1}{2}l_5 \right) \left( l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_5 \right) \cos q_3$$

$$+ m_6 \left( l_{22} - \frac{1}{2}l_5 \right) \left( l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_{52} + l_6 \right) \cos q_3,$$

$$a_{24} = a_{42} = \left( I_{4z} + I_{5x} + I_{5z} + I_{6z} - m_5 \left( l_{22} - \frac{1}{2}l_5 \right) \frac{\sqrt{3}}{2}l_5 - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{3}}{2}m_6 \left( l_{22} - \frac{1}{2}l_{52} \right) l_{52} \right) \cos q_3,$$

$$a_{25} = a_{52} = \left( \frac{3}{4}(I_{5z} + I_{6z}) + \left( l_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52} \right) \right) \cos q_3,$$

$$a_{26} = a_{62} = I_{6z} \cos q_3,$$

$$\begin{aligned}
a_{34} = a_{43} &= -\frac{3}{4}I_{5x} + \frac{3}{4}I_{5z} - \frac{\sqrt{3}}{2}m_6 \left( l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52} + l_{61} \right) l_{52}, \\
a_{35} = a_{53} &= \frac{1}{4}(I_{5z} + I_{6x}) + \frac{1}{2}m_6 \left( l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52} + l_6 \right) l_6, \\
a_{45} = a_{54} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(I_{5z} + I_{6z}) - \frac{m_6}{2}l_5l_6, \\
a_{46} = a_{64} &= I_{6z}, a_{56} = a_{65} = \frac{1}{2}I_{6z}.
\end{aligned}$$

Элементы  $c_{ij}$  матрицы  $C(q, \dot{q})$  вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k.$$

Компоненты  $g_i$  вектора  $g(q)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
g_1 &= -g \sum_{i=1}^6 m_i, g_2 = 0, \\
g_3 &= -g \left( m_3l_3 + m_4(l_{32} + l_4) + m_5 \left( l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_5 \right) + \right. \\
&\quad \left. + m_6 \left( l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_{52} + l_6 \right) \right) \sin q_3, \\
g_4 &= 0, g_5 = -gm_6 \frac{\sqrt{3}}{2} l_6 \sin q_5, g_6 = 0.
\end{aligned}$$

Численные значения параметров робота выбраны следующими

$$\begin{aligned}
m_1 &= 18\text{кг}, m_2 = 6.5\text{кг}, m_3 = 1.5\text{кг}, m_4 = 1.2\text{кг}, \\
m_5 &= 0.8\text{кг}, m_6 = 0.3\text{кг}, \\
l_1 &= 0.294\text{м}, l_2 = 0.12\text{ м}, l_3 = 0.167\text{м} \\
l_4 &= 0.265\text{м}, l_5 = 0.128\text{ м}, l_6 = 0.45\text{м}.
\end{aligned}$$

Программная траектория робота задается следующим образом

$$\begin{aligned}
q_1^{(0)}(t) &= 0.1 + 0.1 \cos(t) \text{ м}, q_2^{(0)}(t) = \cos(2t) \text{ рад}, \\
q_3^{(0)}(t) &= \sin(3t) \text{ рад}, q_4^{(0)}(t) = 2 \cos(2t) \text{ рад}, \\
q_5^{(0)}(t) &= \sin(2t) \text{ рад}, q_6^{(0)}(t) = 2 \sin(3t) \text{ рад}.
\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Закон управления определяется формулой (2.6), где

$$p(x) = \left( x_1, \sin\left(\frac{x_2}{2}\right), \sin\left(\frac{x_3}{2}\right), \sin\left(\frac{x_4}{2}\right), \sin\left(\frac{x_5}{2}\right), \sin\left(\frac{x_6}{2}\right) \right)'. \quad (3.5.2)$$

Параметры усиления управления выбираются следующими:

$$b_1 = 20, b_2 = 10, b_3 = 1, b_4 = 1, h_1 = h_2 = 0.1\text{с}, h_3 = h_4 = 0.5\text{с}. \quad (3.5.3)$$

Начальные положения и скорости звеньев робота-манипулятора выбраны следующими

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0.1\text{м}, q_2(0) = -2.1\text{ рад}, q_3(0) = 2.2\text{ рад}, \\ q_4(0) &= 3.0\text{ рад}, q_5(0) = 2.9\text{ рад}, q_6(0) = 2.8\text{ рад}, \\ \dot{q}_1(0) &= -\frac{11\text{ м}}{\text{с}}, \dot{q}_2(0) = -\frac{16\text{ рад}}{\text{с}}, \dot{q}_3(0) = \frac{15\text{ рад}}{\text{с}}, \\ \dot{q}_4(0) &= \frac{16\text{ рад}}{\text{с}}, \dot{q}_5(0) = \frac{18\text{ рад}}{\text{с}}, \dot{q}_6(0) = \frac{19\text{ рад}}{\text{с}}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

На Рис. 3.5.2 – Рис. 3.5.7 показаны графики желаемого и реального движений для каждого звена робота (3.5.1). Из этих рисунков видно, что построенный закон управления обеспечивает асимптотическую сходимость реальной траектории робота к желаемой.

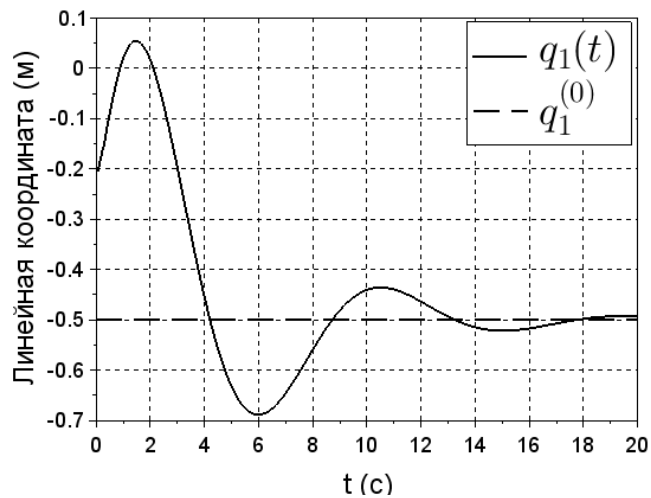


Рис. 3.5.2 – Графики зависимости от времени реального и программного движения первого звена манипулятора

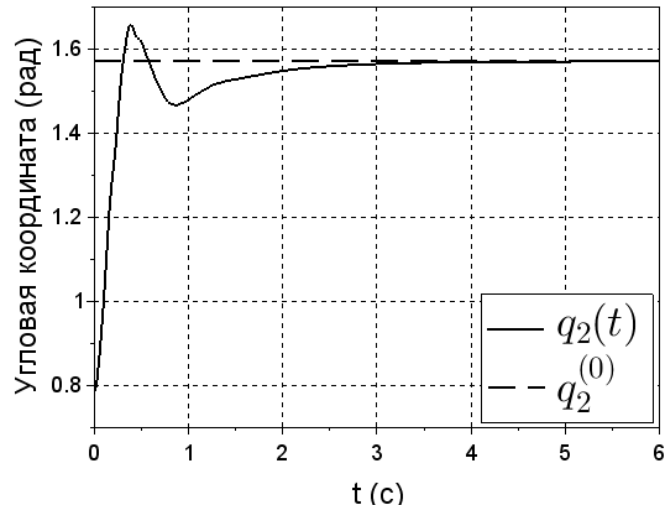


Рис. 3.5.3 – Графики зависимости от времени реального и программного движения второго звена манипулятора

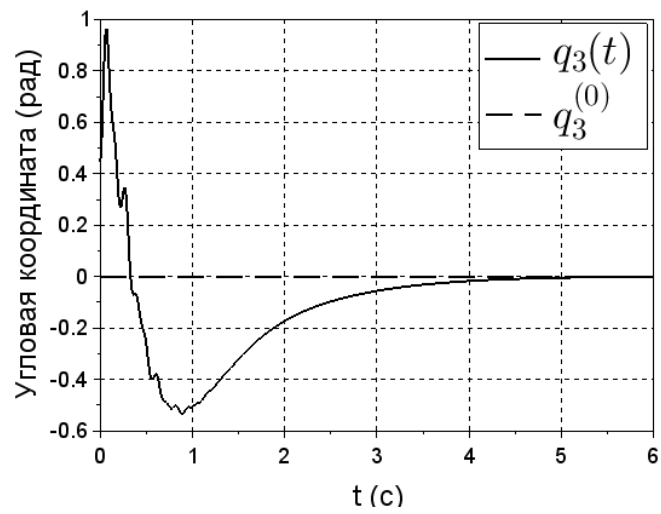


Рис. 3.5.4 – Графики зависимости от времени реального и программного движения третьего звена манипулятора

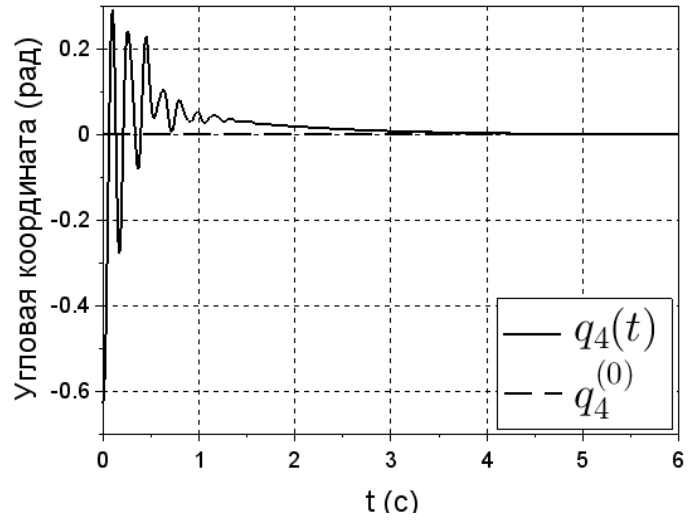


Рис. 3.5.5 – Графики зависимости от времени реального и программного движения четвертого звена манипулятора

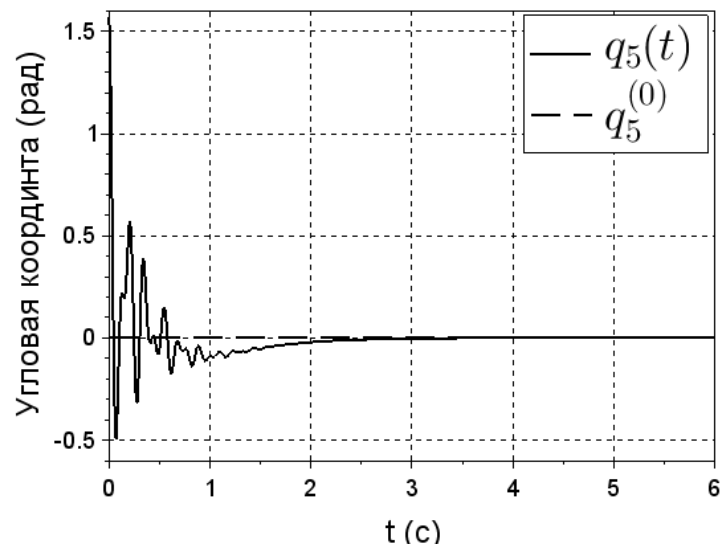


Рис. 3.5.6 – Графики зависимости от времени реального и программного движения пятого звена манипулятора

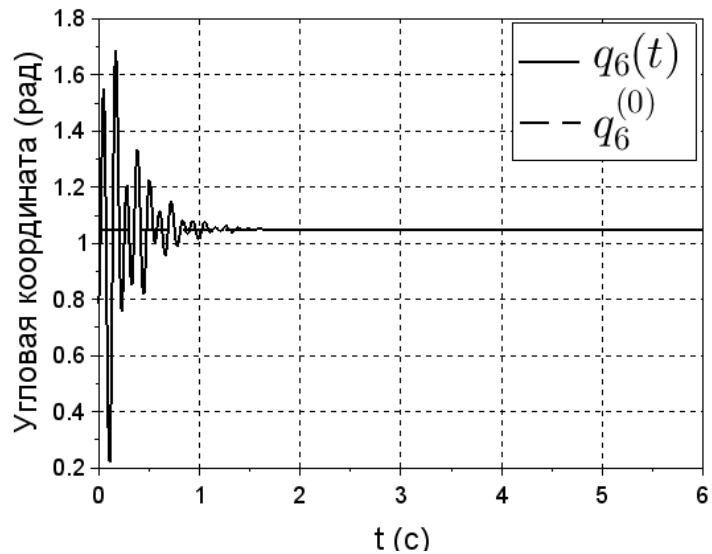


Рис. 3.5.7 – Графики зависимости от времени реального и программного движения шестого звена манипулятора

### Выводы по третьей главе.

В главе рассмотрена задача об управлении вертикально расположенным трехзвенным роботом-манипулятором с грузом. Важной особенностью математической модели его динамики является учет несимметричности ведомых звеньев в поперечных сечениях. Обоснована модель ограниченного управления, обеспечивающего полуглобальную стабилизацию программного положения манипулятора при измерении только его угловых координат. При этом в зависимости от выбранного положения может быть учтено положительное действие гравитационных моментов для стабилизации. Рассматриваемый манипулятор может иметь программное движение в виде вращения колонки с постоянной скоростью и заданного положения ведомых звеньев во вращающейся вертикальной плоскости. Обосновано управление, обеспечивающее стабилизацию такого движения только при измерении угловых координат робота. Обоснованное управление представляет собой регулятор достаточно простой структуры.

Отсутствие датчиков скоростей позволяет снизить затраты на его конструирование и эксплуатацию. Параметры этого регулятора определяют в виде явной теоретической зависимости от массо-инерционных параметров манипулятора и заданного программного движения. При необходимости управление может быть выбрано робастным по отношению к нагрузке и заданному классу программных движений. Все это позволяет составить достаточно простой, но универсальный алгоритм программного продукта по управлению манипулятором. Представлено численное моделирование обоснованного управления с использованием параметров известного индустриального трехзвенного манипулятора.

В качестве другой прикладной решена задача о применении нелинейного регулятора для шестизвенного манипулятора, функционирование которого в горячей камере в достаточной степени зависит от запаздывания, вызванной принятым способом управления.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе обоснованы новые модели управления движениями роботов-манипуляторов с использованием нелинейных регуляторов.

Основные результаты работы состоят в следующем.

– Разработаны математические методы моделирования структуры управления многозвенными манипуляторами, содержащих цилиндрические шарниры. Новизна этой структуры состоит в использовании ограниченных функций в составляющих управления, что приводит к уменьшению энергозатратности при достижении целей управления роботами-манипуляторами. При моделировании выводится оценка допустимого запаздывания при функционировании обратной связи.

– Разработаны численные методы и алгоритмы для численного моделирования процесса управления многозвенными манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами.

– Разработаны вычислительный метод и алгоритмы численного решения системы уравнений, моделирующих процесс стабилизации программного движения многозвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическими шарнирами. Особенностью метода является доказанная устойчивость процесса вычисления на бесконечном интервале времени.

– Разработаны компьютерные модели управления конкретными типами манипуляторов с применением нелинейных регуляторов различного нового типа.

– Разработаны математические методы моделирования процесса управления многозвенными манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами с применением нелинейных регуляторов различного типа, с учетом динамики системы, при отсутствии необходимости измерения скоростей.



– Разработана модель управления лагранжевой механической системой с нестационарными голономными связями на основе нелинейных регуляторов с интегральной составляющей общего вида. Значимость этой модели показана в решении задачи о стабилизации программного вращательного движения твердого тела.

– Разработана модель структуры управления трехзвенным роботом-манипулятором классического типа без измерения скоростей. Новизна этой модели состоит в использовании ограниченных периодических функций, описывающих нелинейную динамику робота-манипулятора с цилиндрическими шарнирами.

– Разработаны комплексы объектно-ориентированных программ для численного исследования и анализа процесса управления на основе нелинейных регуляторов многозвенными манипуляторами с цилиндрическими и призматическими шарнирами.

– Разработана модель нелинейной динамики трехзвенного промышленного манипулятора типа PUMA-560 с математическим и численным анализом процесса управления таким манипулятором на основе различных типов нелинейных регуляторов с интегральной составляющей.

– Разработана компьютерная модель нелинейной динамики шестизвенного манипулятора для эксплуатации его в дистанционном режиме в горячей камере реактора. Исследованы различные модели управления таким манипулятором. Математическое и численное моделирование показало удовлетворительное совпадение теоретических результатов с экспериментальными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьевский И. М., Добрынина И. С., Черноусько Ф. М. Метод декомпозиции в задачах управления механической системой // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2. С. 3–14.
2. Ананьевский И. М., Решмин С. А. Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. № 5. С. 25–32.
3. Андреев А.С., Перегудова О.А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70, Вып. 6. С. 965–976.
4. Андреев А.С., Сутыркина Е.А., Федорова (Колегова) Л.В. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации программного движения мобильного робота // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIV Международной научной конференции (30 мая – 1 июня 2018г., Москва) / [Ред. В.Н. Тхай]. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 499–502.
5. Андреев А.С., Колегова Л.В. Об управлении движением шестизвенного манипулятора // Сборник материалов XV Международной научной конференции " Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании": труды конференции, Саранск, 15–18 июля 2021. Саранск: Изд-во Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева. 2021. С. 18–19.
6. Андреев А. С., Колегова Л. В. ПИД-регуляторы с запаздыванием в задаче о стабилизации программных движений роботов-манипуляторов //Журнал Средневолжского математического общества. – 2022. – Т. 24. – №. 3. – С. 267–279.

7. Бурков И.В. Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом // Прикладная математика и механика. 1998. Т.62. Вып. 6. С. 923–933.
8. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: "Эдиториал УРСС", 1998. 168 с.
9. Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1983.
10. Колегова Л.В. Об управлении трехзвенным манипулятором без измерения скоростей // Интегрированные системы управления: сб. науч. тр. науч.-технич. конф., Ульяновск, 18-19 мая 2021 г. / Отв. за вып. А.Л. Савкин. - Ульяновск : ФНПЦ АО "НПО "Марс", 2021. С. 83–89.
11. Колегова Л. В. О стабилизации движений трехзвенного робота-манипулятора с неполным измерением // Журнал Средневолжского математического общества. – 2024. – Т. 26. – №. 1. – С. 60–73.
12. Колегова Л. В., Сутыркина Е. А. Математическое моделирование движения мобильных роботов под действием ПИ- и ПИД-регуляторов // Ученые записки УлГУ. Серия "Математика и информационные технологии". – 2024. – №. 1. – С. 28–34.
13. Матюхин В. И. Управление движением манипулятора: Научное издание. Москва: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2010. 96 с.
14. Матюхин В. И. Управление механическими системами. Москва, 2009. 320 с.
15. Халил Х. К. Нелинейные системы. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2009. 832 с.

16. Пятницкий Е. С. Синтез иерархических систем управления механическими объектами на принципе декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 1989. № 1. С. 87–99, № 2. С. 71–86.
17. Тахтенкова Л.С., Макаров Д.С. Колегова Л.В. О стабилизации установившихся движений трехзвенного манипулятора управлением с неполным измерением // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019, Москва, 17–20 июня 2019 года. Москва: ИПУ РАН, 2019. С. 812–816.
18. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с
19. Шепелев Г.А. Моделирование управляемых систем с запаздывающей обратной связью. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. УлГУ. 246 с.
20. Aguinaga-Ruiz E., Zavala-Rio A., Santibanez V., Reyes F. Global trajectory tracking through static feedback for robot manipulators with bounded inputs // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2009. Vol. 17, № 4. P. 934–944.
21. Alvarez J., Cervantes I., Kelly R. PID regulation of robot manipulators: stability and performance // Systems and Control Letters. 2000. Vol. 41. P. 73–83.
22. Alvarez J., Kelly R., Cervantes I. Semiglobal stability of saturated linear PID control for robot manipulators // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 989–995.
23. Alvarez J., Santibanez V., Campa R. Stability of robot manipulators under saturated PID compensation // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2008. Vol. 16, № 6. P. 1333–1341.

24. Andreev A.S. The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations // Automation and Remote Control. 2009. Vol. 70. P. 1438–1486.
25. Andreev A.S., Peregudova O.A. Trajectory tracking control for robot manipulators using only position measurements // International Journal of Control. 2017. DOI:10.1080/00207179.2017.1397755
26. Andreev A.S., Peregudova O.A. Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. Vol. 81. № 2. P. 95–105.
27. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // Systems Science and Control Engineering. 2018. Vol. 6, № 1. P. 12–19.
28. Andreev A.S., Peregudova O.A. Nonlinear regulators in position stabilization problem of holonomic mechanical system // Mechanics of Solids. 2018. Vol. 3. P. S22–S38.
29. Andreev A.S., Peregudova O.A. On the Stability and Stabilization Problems of Volterra Integral-Differential Equations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, № 3. P. 387–407.
30. Andreev A.S., Peregudova O.A. Nonlinear controllers in the regulation problem of the robots // IFAC Papers-OnLine. 2018. Vol. 51, № 4. P. 7–12.
31. Andreev A., Peregudova O., Tahtenkova L., Kolegova L. On Output Feedback Control Problems of an Industrial Robot Manipulator // Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA2019, Lipetsk, Russia, 20–22 November, 2019.
32. Andreev A., Peregudova O. Volterra Equations in the Control Problem of Mechanical Systems // 2019 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2019. P. 298–303.

33. Andreev A.S., Peregudova O.A. On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space // International Journal of Control. 2020. Vol. 93, № 12. P. 3003–3015.
34. Andreev A., Peregudova O., Sutyркиna K. Trajectory Tracking Control of Robot Manipulators with Revolute Joints using Only Position Measurements // 2018 18th International Conference on Mechatronics-Mechatronika (ME), Brno, Czech Republic. 2018. P. 1–6.
35. Andreev A., Peregudova O., Kolegova L. On the Output Position Feedback Controller of a Serial Robot Manipulator // 2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). 2020. P. 117–120.
36. Andreev A., Peregudova O., Kolegova L. On a Delayed Feedback Control for Multi-Link Robotic Manipulators // Proceedings of the V Scientific School "Dynamics of Complex Networks and their Applications" (DCNA'2021). 13–15 September 2021, Kaliningrad, Russia. 2021. P. 18–22.
37. Andreev A.S., Peregudova O.A., Kolegova L.V. On the Trajectory Tracking Control for a 5-Dof Robotic Manipulator with Prismatic and Revolute Joints // An International Scientific and Practical Conference on the Topic "Digital Technologies, Innovative Ideas and Prospects for Application in the Field of Production". June 12, 2021, Andijan, Uzbekistan. 2021. P. 7–9.
38. Andreev A., Peregudova O., Kolegova L. Nonlinear Control of Lagrangian Mechanical System // 2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), 2021.
39. Andreev A., Sutyркиna K., Kolegova L. PID Controllers in the Trajectory Tracking Control Problem of Robotic Manipulators with Time-Delayed Feedback // 2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). – IEEE, 2023. – P. 173–178

40. Arimoto S. Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems: A Passivity-Based and Circuit-Theoretic Approach. Oxford: Clarendon, 1996.
41. Arimoto S., Naniwa T., Suzuki H. Asymptotic stability and robustness of PID local feedback for position control of robot manipulators // Proc. ICARCV. Singapore, 1990. P. 382–386.
42. Bagheri M., Naseradinmousavi P., Krstic M. Feedback linearization based predictor for time delay control of a high-DOF robot manipulator // Automatica. 2019. Vol. 108. P. 108485.
43. Bartolini G., Pisano A. Global output-feedback tracking control and load disturbance rejection for electrically-driven robotic manipulators with uncertain dynamics // International Journal of Control. 2003. Vol. 76, № 12. P. 1201–1213.
44. Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Predictor-feedback stabilization of multi-input nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62, № 2. P. 516–531.
45. Belanger P.R. Estimation of angular velocity and acceleration from shaft encoder measurements // Proc. IEEE Conf. Robotics Autom., Nice, France. 1992. P. 585–592.
46. Berghuis H., Nijmeijer H. Global regulation of robots using only position measurements // Systems Contr. Lett. 1993. Vol. 21, № 4. P. 289–293.
47. Berghuis H., Nijmeijer H. A passivity approach to controller-observer design for robots // IEEE Trans. Robotics Autom. 1993. Vol. 9, № 6. P. 740–754.
48. Burkov I.V. Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements // 3-rd IEEE Multi-conf. Systems Control. St Petersburg. 2009. P. 400–405.
49. Canudas de Wit C., Fixot N. Robot control via robust estimated state feedback // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. Vol. 36, № 12. P. 1497–1501.

50. Carmona R.R., Barrera M.M., Tellez A.C., Almeida D.R. A tracking controller for mechanical systems with only position measurements as feedback // In: Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, San Luis Potosí, Mexico. 2018. P. 55–59.
51. Castaneda L.A., Luviano-Juarez A., Ochoa-Ortegab G., Chairez I. Tracking control of uncertain time delay systems: An ADRC approach // Control Engineering Practice. 2018. Vol. 78. P. 97–104.
52. Fischer N., Dani A., Sharma N., and Dixon, W.E. Saturated control of an uncertain nonlinear system with input delay // Automatica. 2013. Vol. 49, № 6. P. 1741–1747.
53. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977.
54. Khalil H. K. Nonlinear Systems, 3rd edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2002.
55. Kelly R. A tuning procedure of PID control for robot manipulators // Robotica. 1995. Vol. 13, № 2. P. 141–148.
56. Kelly R., Ortega R. Adaptive control of robot manipulators: an input–output approach // IEEE International Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, PA. 1988.
57. Kim J.H., Hur S.M., Oh Y. Performance analysis for bounded persistent disturbances in PD/PID-controlled robotic systems with its experimental demonstrations // International Journal of Control. 2017. DOI:10.1080/00207179.2017.1288301
58. Koditschek D. Natural motion for robot arms // Proceedings of the 1984 IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas CA., Dec., 1984. P. 733–735.
59. Laib A. Adaptive output regulation of robot manipulators under actuator constraints // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2000. Vol. 16. P. 29–35.



60. Loria A. Global tracking control of one degree of freedom Euler-Lagrange systems without velocity measurements // *European journal of control*. 1996. № 2. P. 144–151.
61. Loria A. Observers are unnecessary for output-feedback control of Lagrangian Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers. 2016. Vol. 61. P. 905–920.
62. Loria A., Lefeber E., Nijmeijer H. Global asymptotic stability of robot manipulators with linear PID and PI2D control // *Stability Control: Theory Appl*. 2000. Vol. 3, № 2. P. 138–149.
63. Loria A., Nijmeijer H. Bounded output feedback tracking control of fully-actuated Euler-Lagrange systems // *Systems & Control Letters*. 1988. Vol. 33, № 3. P. 151–161.
64. Meza J.L., Santibanez V., Soto R., Perez J. Analysis via passivity theory of a class of nonlinear PID global regulators for robot manipulators // *Advances in PID Control*. Chapter 3. Edited by Valery D. Yurkevich, InTech, 2011. P. 45–64.
65. Moreno-Valenzuela J., Santibanez V., Campa R. On output feedback tracking control of robot manipulators with bounded torque input // *International Journal of Control, Automation, and Systems*. 2008. № 6. P. 76–85.
66. Moreno-Valenzuela J., Santibanez V., Orozco-Manriquez E., Gonzalez-Hernandez L. Theory and experiments of global adaptive output feedback tracking control of manipulators // *IET Control Theory and Applications*. 2010. Vol. 4, № 9. P. 1639–1654.
67. Nicosia S., Tomei P. Robot control by using only joint position measurements // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1990. Vol. 35. P. 1058–1061.
68. Nunes Eduardo V.L., Hsu L. Global tracking for robot manipulators using a simple causal PD controller plus feedforward // *Robotica*. 2010. Vol. 28. P. 23–34.

69. O'dwyer A. Handbook of PI and PID controller tuning rules. World Scientific, 2000.
70. Oliveira T.R., Peixoto A.J., Hsu L. Global tracking for a class of uncertain nonlinear systems with unknown sign-switching control direction by output feedback // International Journal of Control. 2015. Vol. 88. P. 1895–1910.
71. Orrante J., Santibanez V., Campa R. On Saturated PID Controllers for Industrial Robots: the PA10 Robot Arm as Case of Study // Advanced Strategies for Robot Manipulators, S. Ehsan Shafiei (Ed.), 2010.
72. Ortega R., Loria A., Kelly R. A semiglobally stable output feedback PID regulator for robot manipulators // IEEE Trans. Autom. Contr. 1995. Vol. 40, №. 8. P. 1432–1436.
73. Ouyang P.R., Acob J., Pano V. PD with sliding mode control for trajectory tracking of robotic system // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2014. Vol. 30. P. 189–200.
74. Paden B., Panja R. Globally asymptotically stable 'PD+' controller for robot manipulators // International Journal of Control. 1988. Vol. 47, № 6. P. 1697–1712.
75. Peregudova O. Robust Trajectory Tracking Control for Robot Manipulators without Velocity Measurements // Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), 2018 International conference, IEEE Xplore. DOI:10.1109/STAB.2016.754115
76. Prikhodko V.V., Sobolev A.A., Zhukov A.V., Chavkin E.M., Fomin A.N., Levshchanov V.V., Pavlov S.V., Svetukhin V.V. Radiation-resistant robotic manipulator controlled by 6-DoF haptic control device to perform technological tasks in hot cells // Journal of Physics: Conference Series, 2019.
77. Qu Z. Global stability of trajectory tracking of robot under PD control // Dynamics and Control. 1994. Vol. 4. P. 59–71.

78. Romero J. G., Sarras I., Ortega R. A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback // American Control Conference, Washington, DC, USA, 2013. P. 4976–4981.
79. URL: [https://www.kb-agava.ru/tri\\_aspekta\\_pid\\_regulirovaniya](https://www.kb-agava.ru/tri_aspekta_pid_regulirovaniya).
80. Santibanez V., Camarillo K., Moreno-Valenzuela J., Campa R. A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators // International Journal of Control, Automation and Systems, 2010. Vol. 8, № 3. P. 544–555.
81. Santibanez V., Kelly R. A class of Nonlinear PID Global regulators for robot manipulators // Proc. of 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium. 1998.
82. Santibanez V., Kelly R. Global asymptotic stability of the PD control with computed feedforward in closed loop with robot manipulators // 14th Triennial World Congress of IFAC, Beijing, R.P. China. 1999. P. 683–688.
83. Santibanez V., Kelly R. PD control with feedforward compensation for robot manipulators: analysis and experimentation // Robotica. 2001. Vol. 19. P. 11–19.
84. Siciliano B., Villani L. A Force position regulator for robot manipulators without velocity measurements // Proc. 1996 IEEE Intern. Conf. Robotics Autom. Minneapolis, MN. 1996. P. 2567–2572.
85. Sun D., Hu S., Shao X., Liu C. Global stability of a saturated nonlinear PID controller for robot manipulators // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2009. Vol. 17, № 4, P. 892–899.
86. Takegaki M., Arimoto S. A new feedback method for dynamic control of manipulators // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1981. Vol. 103. P. 119–125.
87. Yarza A., Santibanez V., Moreno-Valenzuela J. An adaptive output feedback motion tracking controller for robot manipulators: uniform global asymptotic stability and experimentation // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2013. Vol. 23. P. 599–611.

88. Zhang J., Guo L. Theory and design of PID controller for nonlinear uncertain systems // IEEE Control Systems Letters. 2019. Vol. 3, No 3. P. 643–648.
89. Zavala-Rio A., Aguinaga-Ruiz E., Santibanez V. Global trajectory tracking through output feedback for robot manipulators with bounded inputs // Asian Journal of Control. 2011. Vol. 13, № 3. P. 430–438.
90. Zjangid M. K., Kumar S., Singh J. Trajectory tracking optimization and control of a three link robotic manipulator for application in casting // International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration. 2021. Vol. 8, No 83. pp. 1255. DOI: <https://doi.org/10.19101/IJATEE.2021.874468>
91. Zvanov S. E., Zudilova T., Voitiuk T., Ivanova L. N. Mathematical modeling of the dynamics of 3-DOF robot-manipulator with software control // Procedia Computer Science. 2020. Vol. 178. P. 311–319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.11.033>

# Приложение 1.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024617104

**Стабилизация движений трёхзвенного робота-манипулятора**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ульяновский государственный университет" (RU)*

Авторы: *Сутыркина Екатерина Алексеевна (RU), Колегова Любовь Владимировна (RU)*

Заявка № 2024616086

Дата поступления 28 марта 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 28 марта 2024 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов