

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Ульяновский государственный университет»

на правах рукописи

Лутошкин Игорь Викторович

**Разработка, анализ и применение
оптимизационных динамических моделей
экономических систем с запаздыванием**

**1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ**

**Диссертация на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук**

Научный консультант –
доктор физико-математических наук,
профессор В. К. Горбунов

Ульяновск – 2024

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Метод параметризации для решения задач ОУ	
1.1 Задача ОУ с описанием динамики в виде ОДУ	29
1.1.1 Постановка задачи и ее параметризация	30
1.1.2 Первые производные параметризованных функционалов	33
1.1.3 Вторые производные	37
1.1.4 Задачи с оптимизируемыми параметрами	51
1.2 Задача ОУ с точечным запаздыванием	60
1.2.1 Параметризация задачи	60
1.2.2 Производные по параметрам управления	61
1.3 Задача ОУ с распределенным запаздыванием	70
1.3.1 Параметризация задачи	70
1.3.2 Дифференцирование функционала по параметрам	72
1.4 Сходимость метода параметризации	85
Глава 2. Математические модели экономической динамики	
2.1 Принципы управления предприятием	93
2.1.1 Общая модель управления предприятием с учетом принципов менеджмента	93
2.1.2 Модификация производственного плана	105
2.1.3 Управление потребностью в режущем инструменте	110

2.1.4	Выбор оснастки	115
2.2	Управление инвестициями	127
2.2.1	Двухсекторная экономика	127
2.2.2	Двухсекторная экономика с учетом лагового освоения инвестиций	128
2.2.3	Оптимизация инвестиционной стратегии фирмы	129
2.3	Рекламные затраты	135
2.3.1	Одноканальная реклама	137
2.3.2	Многоканальная реклама	142
2.4	Управление экономической системой в условиях массового забо- левания	146
2.4.1	Постановка проблемы	146
2.4.2	Формализация модели	149

Глава 3. Качественный анализ моделей

3.1	Управление инвестициями	157
3.1.1	Модель двухсекторной экономики	157
3.1.2	Модель оптимальной инвестиционной стратегии фирмы	165
3.2	Управление рекламными расходами	172
3.2.1	Существование решения	174
3.2.2	Необходимые условия оптимальности	177
3.3	Одновременный учет критериев в модели массового заболевания	182
3.3.1	VSL-критерий	182
3.3.2	Свертка критериев	185

Глава 4. Программный комплекс и вычислительные алгоритмы

4.1	Программный комплекс	186
4.1.1	Концепция построения программного комплекса	186
4.1.2	Функции пользователя	189

4.1.3	Описание параметров	195
4.1.4	Архитектура	197
4.2	Основные вычислительные алгоритмы программного комплекса .	205
4.2.1	Алгоритмы решения задачи НП	205
4.2.2	Идентификация модели	214
Глава 5. Численный анализ моделей		
5.1	Двухсекторная экономика	219
5.1.1	Ограничения по уровню фондов	219
5.1.2	Ограничения по монотонности развития фондов	223
5.1.3	Точечное запаздывание в инвестициях, динамике освоения фондов	228
5.2	Оптимальная инвестиционная стратегия фирмы	232
5.3	Управление рекламными затратами	236
5.3.1	Предоставление услуг связи	236
5.3.2	Производство и продажа одежды	241
5.4	Управление экономической системой в условиях массового забо- левания	249
5.4.1	Оценка параметров модели	249
5.4.2	Оценка управленческих решений	261
5.4.3	Оптимальная стратегия управления экономической систе- мой в условиях массового заболевания	266
5.4.4	Одновременный учет социального и экономического критериев	270
Заключение		278
Литература		280

Введение

Актуальность темы исследования. Информатизация практически всех сфер деятельности человека в настоящее время ведет к созданию информационных систем, предназначенных для решения интеллектуальных задач, традиционно решаемых человеком. Ядром таких систем могут стать математические модели, содержащие блок управления и позволяющие рационально выбирать управляющие воздействия на допустимом множестве. Таким образом, стимулируется разработка новых оптимизационных моделей и методов их применения. На настоящий момент для решения конечномерных оптимизационных задач существует широкий спектр методов, позволяющий производить эффективный поиск оптимальных решений. Однако, если в оптимизационной задаче присутствует фактор времени, то задача существенно усложняется, и требуются специализированные методы. Получаемые при этом математические модели могут отражать поведение объектов различной природы: техническое устройство, экономическую систему (предприятие, организацию, экономику страны или её части), иную систему, изменяющую свои свойства под влиянием внешнего воздействия.

Теория оптимального управления (ОУ) изучает теорию и методы получения наилучших в некотором смысле решений систем дифференциальных (конечно-разностных, дифференциально-разностных, интегро-дифференциальных) уравнений. Основы современной теории ОУ заложены в основном в 1940-60 гг. классическими работами Р. Беллмана, Л.С. Понтрягина и их учеников, когда для развития инженерно-технических задач того времени потребовался новый аппарат моделирования. Именно тогда были предложены принцип динамического программирования Беллмана [8], принцип максимума Понтрягина [59], достаточные условия оптимальности Кротова [63].

Во второй половине XX века приложения теории оптимального управле-

ния перестали ограничиваться техническими проблемами (космическая навигация, автоматическое управление и т.д.). На основе теории ОУ стали создаваться модели управления экономическими, социально-экологическими системами. Здесь можно выделить оптимизационные динамические модели макроэкономики (однопродуктовая модель, двухсекторная модель) [37, 51, 55], микроэкономические модели (управление рекламными воздействиями и рекламным бюджетом, управление кредитной стратегией фирмы, другие модели фирмы) [32, 102, 137].

При управлении экономическими процессами часто возникает ситуация, при которой реакция системы на внешнее воздействие, изменение свойств системы происходят с запаздыванием во времени [2, 28, 56, 63, 70, 96, 156]. Анализ таких процессов возможен на основе формализации в виде математических моделей, учитывающих эффект запаздывания, с последующим применением соответствующих методов.

Несмотря на развитие математического аппарата моделирования экономических проблем, большая часть решения практических задач в экономике сводится к применению регрессионно-корреляционного анализа со всеми преимуществами и недостатками этого подхода. Трудности применения других подходов связаны со сложностью разработки математических моделей, где одним из объектов моделирования является поведение человека (социума), а также сложностью использования численных методов, соответствующих предметной области. Таким образом, потребность преодоления указанных сложностей, развитие интеллектуальных информационных систем в управлении экономическими процессами, стимулирует создание новых оптимизационных моделей и методов их анализа.

Актуальность темы подтверждается также тем, что результаты диссертации были получены при выполнении ряда научных проектов: разработка метода параметризации в грантах РФФИ: № 01-01-00731 «Вариационные методы

регуляризации и решения вырожденных уравнений и неравенств» (2001-2003 гг.); № 07-01-90000 Вьет/а «Разработка качественной теории и методов приближенного решения дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)» (2007-2008 гг.); создание модели управления инвестициями, модели формализации принципов управления производственным предприятием, модели рекламных воздействий использовались в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ № 2.1816.2017/4.6 по теме «Исследование и разработка интегрированной автоматизированной системы управления производственно-технологическим планированием авиастроительного предприятия на базе цифровых технологий» (2017-2019 гг.); в рамках гранта РФФИ № 24-28-00542 «Разработка информационно-аналитического инструмента моделирования и оптимизации управления социально-экономическими системами в условиях массового заболевания» (2024-2025 гг.) используется модель управления социально-экономическими системами в условиях массового заболевания.

Степень научной разработанности темы исследования. Анализируя современные подходы к численному решению задач оптимального управления, решению нелинейных и вырожденных систем дифференциальных (интегральных) уравнений, можно отметить широкое разнообразие методов, различную сложность подходов. При этом большинство методов специфицируется для достаточно ограниченного класса задач [6, 97, 101, 106, 164]. Исторически наиболее универсальным и наиболее разработанным является метод сеток (представление искомых функций с помощью конечных разностей и квадратур). В основе этого подхода лежит идея Эйлера, позволяющая аппроксимировать управляющую и фазовую переменные в виде сеточных функций. В результате такого представления исходная функциональная задача сводится к задаче нелинейного программирования (НП). Также в последние десятилетия происходит развитие методов, основанных на сложном аналитическом аппарате. Такие методы позволяют гораздо более эффективно решать сложные динамические задачи. Здесь

можно выделить проекционные методы, метод обобщенных сплайнов. Использование методов подобного рода требует высокую квалификацию при применении, при этом позволяет при относительно небольших вычислительных ресурсах решать вырожденные задачи, получать лучшую аппроксимацию, учитывать специфику сложных математических моделей, что затруднительно для сеточных методов.

Рассмотрим специфику основных подходов, направленных на численное решение задач оптимального управления. Первый подход базируется на конечно-разностной аппроксимации исходной задачи (соответствующие методы описаны во многих исследованиях, например в работах Э. Полака [64], Д. Табака и Б. Куо [73]). Общий алгоритм таких методов состоит в замене уравнений динамики конечно-разностной системой, ограничения исходной задачи заменяются ограничениями на значения получаемой сеточной функции, интегральные выражения переходят в аддитивные. Получаемая при этом задача нелинейного программирования обычно имеет достаточно большую размерность, что приводит к необходимости создания методов, отличных от классических методов НП. Ориентируясь на специфику исходной задачи ОУ были созданы алгоритмы: метод «локальных вариаций», «киевский веник», метод «бегущей волны», метод «блуждающей трубки», схемы решения задачи Майера [61].

К положительным аспектам подхода, базирующегося на конечно-разностной аппроксимации, можно отнести его универсальность с точки зрения возможности решения задач ОУ практически любой формы представления. Также стоит отметить, что развитие методов данного класса стимулируется моделированием на основе дискретных систем [46, 163]. Сложность применения данного подхода обуславливается свойствами получаемой задачи НП: большая размерность, сложная структура задачи НП; динамическая связь для фазовых переменных исходной задачи ОУ слабо отражается в задаче НП; стремительное усложнение задачи НП происходит при увеличении интервала, на котором рассматривается

исходная модель. Также с уменьшением шага дискретизации растет не только размерность задачи НП, но и накапливается ошибка, порождаемая соответствующей дискретной схемой.

Второй подход к решению задач ОУ основывается на методах, использующих условия экстремума [61, 97], в подавляющем случае это необходимые условия – принцип максимума Л. С. Понтрягина. Методы данного подхода отражены, например, в работе Н. Н. Моисеева [61]. В этих методах исходная задача ОУ сводится к решению нелинейной краевой задачи, в которой наряду с исходными фазовыми переменными присутствуют и сопряженные переменные. При этом, используя условие максимума функции Понтрягина, управляющие функции выражаются через фазовые и сопряженные переменные. Выделяя методы, относящиеся ко второму подходу, можно обратить внимание на следующие: метод последовательных приближений (Крылова-Черноусько), метод переноса граничных условий в получаемой краевой задаче, сведение исходной задачи ОУ к задаче отыскания корней трансцендентной функции [15, 50].

К достоинствам методов второго подхода можно отнести относительную простоту при программной реализации, что позволяет использовать распространенные, свободные пакеты для реализации кода. К недостаткам таких методов можно отнести: сложность выражения управляющей функции через фазовые и сопряженные переменные в нетривиальных задачах ОУ; для полученного решения, являющегося претендентом на оптимальное, необходимы дополнительные процедуры по определению близости к искомому решению; для вырожденных случаев (в частности, при наличии особых управлений [17]) методы, использующие принцип максимума, становятся малоэффективными при приближении к оптимальному решению; если в задаче ОУ присутствуют промежуточные ограничения на фазовые переменные, то применение методов данного подхода существенно усложняется, так как необходимые условия имеют нетривиальное весьма непростое представление [38, 59]. Также можно отметить метод

Ю. Г. Евтушенко [33], в котором сочетаются как первый, так и второй подходы с учетом достоинств и недостатков этих подходов.

Третий подход к решению задач ОУ включает в себя методы, основанные на минимизации целевого функционала исходной задачи ОУ в соответствующем функциональном пространстве. Чаще всего данные методы представляют собой методы первого порядка, здесь на основе вычисления градиентов целевого и ограничивающих функционалов формируется приближение в итерационном процессе. Данные методы не используют условие экстремума в итерационном процессе и относятся к прямым методам. Такие методы описаны в работах Р. П. Федоренко [78] и Ф. П. Васильева [15]. Отметим, что метод параметризации, развиваемый в рамках диссертационного исследования, может быть отнесен к методам третьего подхода.

Среди численных методов, реализующих третий подход [78], можно выделить методы проекции градиента и метод последовательной линеаризации. Методы проекции градиента имеют различные модификации, ориентированные на специфику той или иной задачи (например, метод минимальной поправки, метод условного градиента). В методе последовательной линеаризации на каждой итерации линеаризуются функционалы исходной задачи ОУ в окрестности текущего приближения с целью получения аппроксимирующей задачи ОУ в линейном виде. Решение полученной линейной задачи ОУ становится следующим приближением в итерационной процедуре. Данные методы можно отнести к прямым, они не используют принцип максимум в исходной задаче для вычисления следующего приближения. Последнее является важным в вырожденных задачах. Также к достоинствам этих методов можно отнести относительную простоту применяемых схем.

Переходя к недостаткам приведенных методов, можно отметить что при применении метода проекции градиента задача построения проекции текущего управления на допустимое множество может оказаться по сложности экви-

валентной исходной задаче ОУ. На каждой итерации такую задачу требуется решать неоднократно, таким образом исходная проблема не упрощается. К проблемным моментам метода последовательной линеаризации можно отнести: определение величины приращения (если приращение мало, то процесс сходимости будет долгим; если приращение велико, то полученная линейная задача не будет адекватна исходной задаче ОУ); построение области принадлежности линейного приращения управляющего воздействия (на каждой итерации данная задача имеет свою сложность). Общей проблемой этих методов является вычисление приближенных функциональных производных.

Развиваются активно методы, в которых применяется параметризация функций, входящих в постановку задачи ОУ. Для линейных задач ОУ в [18] рассматривается параметризация управления и переход к специальным задачам линейного программирования. Для билинейных задач ОУ в [6] предлагается параметризация управления кусочно-постоянными функциями, таким образом, исходная задача ОУ сводится к конечномерной задаче квадратичного программирования. Кроме того, в ряде работ [60, 72, 82, 142, 162] применяется параметризация управляющего воздействия на основе линейной комбинации некоторого базиса функций с последующим анализом специфицированной задачи (типа задач). Отдельно можно выделить метод второго порядка, основанный на второй вариации траектории [31]. Для выбранной параметризации и специфицированной задачи предлагаются прямые алгоритмы решения.

В последние годы активно разрабатывается класс прямых методов решения задач ОУ, основанных на сведении исходной проблемы к задаче НП за счет представления фазовых переменных в виде полиномиальных сплайнов, управляющих переменных в виде сеточной функции [97, 100, 114, 116]. В данном классе много работ посвящено прямым ортогональным коллокационным методам гауссовских квадратур [87, 97, 107, 109, 111, 114, 115, 128, 138–140, 159]. Во всех этих работах аппроксимирующие полиномы строятся в форме Лагранжа

или Чебышёва [164]. Различие определяется выбором точек квадратурной формулы, так можно выделить подходы Лежандра-Гаусса [97], Лежандра-Гаусса-Радау [87, 111, 140, 145], Лежандра-Гаусса-Лобатто [114, 135].

На основе коллакационных методов реализованы программные модули [88, 160], в которых для решения получаемых задач НП используются соответствующие методы первого и второго порядка. При этом стоит отметить, что вычисление соответствующих производных выполняется на основе конечной разности первого порядка, а полученная задача может иметь достаточно большую размерность [88, 160, 173]. Последнее вынуждает исследователей применять алгоритмы, не требующие вычисления производных, например, генетические алгоритмы [106]. Так в работе [82] при параметризации управления экспоненциально-квадратичными сплайнами для оптимизации полученной задачи НП используется метод Хука-Дживса. Можно сделать вывод, что при параметризации функций, входящих в исходную задачу ОУ, эффективное применение оптимизационных методов первого и второго порядка весьма затруднительно. Это объясняется тем, что получаемые задачи НП опосредованно задают зависимость целевой и ограничивающих функций от переменных (параметров), следовательно, вычисление производных (первого и второго порядка) становится сложным в нелинейных задачах ОУ.

Также стоит отметить, что при моделировании динамики иногда возникают сингулярные системы дифференциальных уравнений: дифференциально-алгебраические системы [11, 84, 85]; системы с малым параметром, например [34, 35, 85]. При этом решение нелинейных сингулярных систем в основном ограничивается регулярным случаем (алгебраическая подсистема имеет невырожденный Якобиан во всех точках временного интервала). Возникает вопрос о разработке численных методов решения задач подобного рода.

В данном исследовании для численного анализа динамических экономических моделей используется и развивается относительно новый класс аналитико-

численных методов оптимального управления, основанный на априорном представлении искомого управления в кусочно-аналитическом параметризованном виде на временных интервалах с переменными узлами и введении сопряжённых дифференциальных уравнений, упрощающих вычисления производных основного (оптимизируемого) функционала и функционалов, определяющих условия оптимизации. Идея данного класса методов параметризации была предложена и реализована в работах В. К. Горбунова [20, 21]. Основным достоинством данного подхода является разделение дискретизации задач Коши в исходной проблеме ОУ и решение задачи НП. Дальнейшее развитие метода параметризации было продолжено в сторону разработки производных второго порядка в параметризованной задаче НП, это нашло отражение в совместных работах [205, 220–222]. Результаты применения метода к динамическим моделям оптимизации представлены в работах: управление движением самолета [205], управление системой ферментации [144, 152, 157]. Следующим этапом стало развитие метода параметризации на задачи ОУ с точечным запаздыванием [207, 211, 232] и применение данного метода к моделям экономической динамики [211, 232]. Для задач ОУ с распределенным запаздыванием обобщение метода параметризации было проведено в работах [206, 208], результаты применения к моделям управления инвестициями были представлены в работах [226, 227], управления рекламой в [224, 232].

Повышение сложности математических моделей реальных объектов и процессов неизбежно приводит исследователей к ряду проблем. Так при численном решении задач оптимального управления трудности вызывают задачи с особым оптимальным управлением ([5, 17, 39, 45, 78]), которые возникают при моделировании в ракетодинамике, космической навигации, электротехнике [39, 45]. При моделировании динамических систем в экономике [7, 74, 102], механике (процессы демпфирования, стабилизации) [44, 78] применяются задачи ОУ с промежуточными фазовыми ограничениями, решение которых является также нетриви-

альным (например, [43, 44, 77, 78]). Вырожденные системы дифференциальных уравнений часто используются при моделировании динамики в химической кинетике, баллистике, аэродинамике, ядерной и молекулярной физике [81, 85].

Также можно выделить тренд на развитие систем принятия решений в управлении экономическими системами, что влечет создание новых оптимизационных моделей, учитывающих динамику экономических факторов. Среди множества динамических оптимизационных моделей, применяемых для исследования экономических процессов, можно выделить инвестиционные модели, модели рекламных воздействий, модели массовых заболеваний, модели управления организационно-техническими системами. Особенность этих моделей заключается в том, что они описывают явления, имеющие эффект запаздывания.

При управлении организационно-техническими системами предприятия перманентно совершенствуют свои методы и методологию управления. Это стимулируется внешними воздействиями (прогноз и предотвращение рисков), внутренними причинами (стремление к минимизации издержек), собственными ресурсными и иными ограничениями. Для решения возникающих задач используются различные методологии менеджмента, отдельно можно выделить принципы менеджмента «точно в срок», «под заданную себестоимость», «с учетом рисков» (например, [40], [62]). Информатизация деятельности на предприятии вынужденно требует формализации самих принципов управления ([40, 62]), для этого разрабатываются экономико-математические модели на основе использования адекватного математического инструментария [230]. В данном исследовании предлагается формализация принципов менеджмента «точно в срок», «под заданную себестоимость», «с учетом рисков» и их интеграция в виде математической модели управления [227, 232]. Частные случаи предлагаемой обобщенной модели представлены в ряде работ [223, 226, 228, 229, 239].

Одной из первых динамических моделей, учитывающих инвестиции, является модель Солоу-Свана [170–172]. В модели предполагается, что инвестиции

все свое влияние оказывают на выпуск продукции в тот же временной такт, когда они были введены. Однако, процесс ввода инвестиций обычно занимает время, превышающее временной такт. Так в работе [41] рассматривается модификация модели Солоу-Свана, учитывающая распределенный характер освоения инвестиций. При этом в [41] выбор ядра оператора в интегральной связи (преобразование инвестиций в выпуск) основывается на показательной функции с линейной степенью, что позволяет свести исходную интегральную проблему к решению линейных дифференциальных уравнений без запаздывания. Следующим шагом в развитии инвестиционных моделей стала модель двухсекторной экономики [37], когда в первом секторе производятся однородные капитальные продукты, во втором однородные потребительские блага. Дальнейшим этапом в этом направлении стала разработка моделей многосекторной экономики [41]. Развитие инвестиционных моделей на основе модели Солоу-Свана получило в работах [48, 118, 122, 127]. Модели с запаздыванием в освоении инвестиций развивались в ряде работ [36, 66, 68, 70]. В настоящей работе развивается макроэкономическая модель двухсекторной экономики, в которой рассматривается точечное запаздывание как в управлении, так и в динамике развития основных фондов. Результаты исследования представлены в [211, 232]. Автором развивается инвестиционная модель с распределенным влиянием инвестиций, её практическая верификация проводится на основе статистических данных публичного акционерного общества «Объединенная авиастроительная корпорация» [226, 227, 232].

Моделирование рекламных воздействий с распределенным запаздыванием началось с дискретных статистических моделей, здесь можно отметить работу Гренжера [129]. Эффект запаздывания в рекламе с непрерывно распределенным воздействием позднее был смоделирован в работе Бенсоуссана, Бультеза, Наерта [98], данная модель была модифицирована У. Пауэлсом [161]. В этих моделях делается предположение, что эффект от рекламного воздействия длится

от момента его производства до текущего момента времени. Однако, для товаров кратковременного пользования нет необходимости рассматривать длительные интервалы воздействия факторов на спрос. Текущая отдача от рекламного воздействия, произведенного достаточно давно, носит скорее случайный характер. Ещё один важный момент состоит в том, что в моделях [98, 161] не учитывается влияние на спрос факторов нерекламного характера.

При анализе динамических оптимизационных моделей, посвященных воздействию рекламы, нужно отметить модель рекламы Нерлова-Эрроу [155]. В развитии этой модели были выделены такие нерекламные факторы как цена товара [117, 126, 143], его качество [130], узнаваемость бренда [105]. Второй классической моделью, учитывающей рекламные воздействия, является модель Видаля-Вольфа [175]. В этой модели, а также ее расширениях [110, 154] учитывают долю охваченного рынка, делают предположение об ограниченности рынка. Ещё один подход в моделировании рекламы основывается на принятии во внимание влияние других участников рынка, на основе чего строятся кооперативные и антагонистические оптимизационные модели. Этот подход можно считать продолжением идеи Ланчестера (1916 г.) о соотношении между противостоящими силами, выраженную в системе дифференциальных уравнений. В [141] Кимбелл идею Ланчестера реализовал в виде модели анализа рекламных воздействий на конкурентном рынке. Можно выделить ряд работ [108, 112, 119, 123, 124, 134, 178–180], развивающих модель Кимбелла. В настоящей работе представлены результаты развития моделей управления рекламными расходами: предложены динамические модели с распределенным эффектом от рекламных воздействий, эффекта накопленной репутации. Результаты представлены в ряде публикаций [213–215, 224, 225].

Математическое моделирование развития массовых заболеваний привело к созданию моделей, большинство которых в тех или иных модификациях применяются в настоящее время для прогнозирования развития эпидемий и панде-

мий. Первый тип моделей, используемых для анализа распространения эпидемий, связан с использованием статистических методов. Сюда относятся регрессионные методы, анализ временных рядов, методы статистического управления, пространственные модели для мониторинга, выявления и прогнозирования вспышек заболеваний в конкретных регионах [91, 103, 133, 169].

Всплеск интереса к моделированию динамики массового заболевания был вызван эпидемией COVID-19. Так в работе [91] для прогноза распространения COVID-19 использована модель ARIMA: для определения распространенности выбрана ARIMA (1,0,4), а для определения частоты заболевания — ARIMA (1,0,3). Для построения моделей были взяты глобальные эпидемиологические данные, предоставленные Университетом Джона Хопкинса [202]. Прогноз, данный в предложенной модели, оказался неверен. Стохастическая модель распространения вируса использовалась в работе [113] для оценки динамики передачи вируса из Уханя в течение января-февраля 2020 г. На основании этих оценок была рассчитана вероятность того, что вновь возникшие случаи могут вызвать вспышки на других территориях. В работе исследователей из Имперского колледжа Лондона [120] предложена оценка коэффициента летальности от COVID-19. В работе собраны индивидуальные данные о пациентах, умерших от COVID-19 как в материковом Китае, так и за его пределами. На основании этих данных получена стратифицированная по возрасту оценка коэффициента летальности от COVID-19 и получено подтверждение сильного возрастного градиента риска смерти. Данное исследование в марте 2020 г. легло в основу политики сдерживания коронавируса в Великобритании.

Следующий тип моделей характеризуется наличием «континуальных» связей в виде системы дифференциальных либо интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (модели класса SIS, SIR, SIIR, SEIR, SVIR) [103, 136, 153, 169]. Обозначения моделей формируются по первым буквам переменных, учитываемых в конкретном варианте модели: S (susceptible) – вос-

приимчив к инфекции, I (infectious) – заражен, R (recovered) – выздоровел, V (vaccinated) – вакцинирован и т.д. Данные модели неплохо справляются с прогнозированием динамики эпидемии в краткосрочной перспективе. В среднесрочной и долгосрочной перспективе модели данного класса не дают ожидаемого результата. Ярким примером является работа [121], где на основе модели класса SIIR моделировалось распространение лихорадки Эбола и сделан прогноз о 1,4 млн. случаев заражения к 20 января 2015 г. В настоящее время известно, что лихорадка прекратилась в 2016 г., и число случаев заражения составило 28616.

Применительно к описанию развития пандемии в литературе в большинстве случаев используются модели первых двух типов. Так, лабораторией инноваций Сингапурского университета технологий и дизайна разработан веб-ресурс, в режиме реального времени отображающий в графическом виде данные о количестве заболевших COVID-19 и прогнозную кривую для различных стран [190]. Для прогностических целей использовалась модель SIR и ежедневно обновляемые данные веб-ресурса OurWorldInData [203]. Результаты расчета наглядно демонстрируют, что реальная статистика заболеваний по странам во многих случаях заметно расходится с прогнозной кривой, что является следствием ограниченности моделей этого класса и проблемы надежности данных.

Третий тип моделей предполагает наличие неких целевых показателей и прогнозирующие пути их достижения (модели управления). В качестве таких целевых критериев могут выступать: минимизация числа заболевших; минимизация смертности, вызванной заболеванием; минимизация рецессии экономики; оценка готовности системы здравоохранения к решению проблем, вызванных пандемией; многофакторная оценка управленческих решений. Математическое моделирование детерминированных управляемых эпидемий рассматривалось рядом авторов [3, 42, 131, 146, 148, 158]. Так, на основе аппарата оптимального управления в [42] предлагается модель построения оптимальной стратегии

вакцинации населения для гомогенных систем. В работах [3, 158] строятся математические модели для систем, состоящих из нескольких социальных групп. В качестве управляющих функций выбираются скорость вакцинации и перевод на карантин некоторых групп населения. В целом можно отметить, что данные модели являются медико-биологическими, в них слабо отражаются социальные показатели, которые существенно влияют на поведение населения в условиях пандемии.

В диссертации предлагается новый класс моделей управления социально-экономическими системами в условиях массового заболевания: наряду с традиционной компартиментализацией социума в модель включаются экономические и социальные факторы (доход/прибыль экономической системы, затраты на строительство/переоборудование больничных мест, влияние информационного воздействия) [209, 232, 242].

Объект и предмет диссертационного исследования. Объектом исследования являются производственные и экономические процессы, формализуемые (моделируемые) обыкновенными дифференциальными, интегральными и разностными уравнениями, и численные методы решения задач оптимального управления процессами рассматриваемых классов. Предмет исследования – метод параметризации для решения задач оптимального управления с учетом точечного и распределенного запаздываний; динамические модели экономических систем; алгоритмы, программное обеспечение, позволяющие находить оптимальное управление в задачах инвестирования производства, построения рекламных стратегий, управления экономической системой в условиях массового заболевания, формализации принципов менеджмента.

Цель и задачи диссертационного исследования. Целью исследования является разработка эффективных алгоритмов и соответствующих программных реализаций, позволяющих на основе единого подхода решать задачи оптимального управления, содержащие дифференциальные, интегро-

дифференциальные уравнения, уравнения с точечным запаздыванием, и исследовать новые классы математических моделей экономических систем.

Исходя из поставленной цели, формулируются следующие задачи:

1. разработка метода параметризации для задач ОУ, содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием;
2. разработка метода параметризации для задач ОУ, содержащих интегро-дифференциальные связи;
3. обоснование сходимости метода параметризации по количеству параметров в параметризованной функции управления;
4. разработка модели, формализующей принципы менеджмента «точно в срок», «под заданную себестоимость», «с учетом рисков» в виде задачи ОУ;
5. разработка инвестиционной модели с точечным запаздыванием при освоении инвестиций;
6. разработка инвестиционной модели с распределенным запаздыванием при освоении инвестиций;
7. разработка моделей построения рекламных стратегий с учетом запаздывания отдачи от рекламных воздействий;
8. разработка модели управления экономической системой в условиях массового заболевания;
9. разработка концепции построения программных средств, реализующих метод параметризации;
10. проведение вычислительных экспериментов для определения эффективности метода параметризации;
11. проведение вычислительных экспериментов для верификации предлагаемых моделей.

Методологическую основу диссертационного исследования составили методология математического моделирования, теория оптимального управления, численные методы решения дифференциальных, интегро-

дифференциальных, интегральных уравнений, динамических оптимизационных задач, методы конечномерного программирования, статистические методы, методы программирования.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Метод параметризации для решения задач ОУ, содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием.
2. Метод параметризации для решения задач ОУ, содержащих интегродифференциальные связи.
3. Обоснование сходимости метода параметризации при усложнении искомого сплайна для управляющей функции. Сходимость обосновывается по функционалу задачи оптимального управления с учетом запаздывания.
4. Модели экономических систем, представленные в терминах задач ОУ с точечным запаздыванием: класс моделей управления организационно-техническими системами; двухсекторная модель управления производственными инвестициями в экономике с запаздыванием как в управлении, так и в фазовых переменных; класс моделей управления экономической системой в условиях массового заболевания с учетом социальных и экономических показателей.
5. Модели экономических систем, представленные в терминах задач ОУ с распределенным запаздыванием: инвестиционная модель производственной компании; обобщенная модель построения рекламных стратегий.
6. Концепция построения программных средств для реализации единого подхода на основе метода параметризации для решения задач ОУ с учетом запаздывания в дифференциальных уравнениях как по фазовым, так и по управляющим переменным.

7. Проблемно-ориентированный комплекс, предназначенный для решения задач ОУ с точечным и распределенным запаздыванием как в фазовых, так и в управляющих переменных. Реализация комплекса на языке C++ позволяет эффективно включать вспомогательные вычислительные алгоритмы: методы решения задач нелинейного программирования, методы решения задач Коши, методы численного интегрирования и дифференцирования.

Научная новизна исследования заключается в разработке нового численного метода решения задач оптимального управления, что позволяет на основе единого подхода решать различные задачи ОУ с запаздыванием, в которых динамика описывается дифференциальными уравнениями, интегро-дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с точечным запаздыванием. Разработан новый класс моделей, позволяющий учитывать запаздывание в оптимизационных моделях в управлении производственными, организационно-техническими, экономическими динамическими системами: управление инвестициями, построение рекламной стратегии, формализация принципов менеджмента, управление экономической системой в условиях массового заболевания. Предложена концепция построения программных средств для реализации нового численного метода решения задач ОУ.

Теоретическая значимость работы обусловлена разработкой нового численного метода, позволяющего на основании единого подхода решать эффективно задачи оптимального управления, содержащие: дифференциальные уравнения; интегро-дифференциальные уравнения; параметры, требующие оптимизации. Разработан новый класс моделей, позволяющих учитывать запаздывающий эффект в управлении производственными, организационно-техническими, экономическими динамическими системами: инвестиционные модели, модели построения рекламных стратегий, модели управления экономикой в условиях массового заболевания, модели формализации принципов менеджмента.

Практическая значимость исследования заключается в том, что раз-

работанный метод параметризации может применяться для решения различных задач оптимального управления, возникающих при моделировании процессов, требующих оптимизации. Разработанные модели позволяют находить оптимальное управление для экономической системы в задачах инвестирования, построения рекламной стратегии, управлении экономикой в условиях массового заболевания. При разработке высокоинтеллектуальных систем управления предприятием (фирмой, организацией) предлагаемые модели могут стать ядром, обеспечивающим выработку решения для управляющего органа с учетом соответствующих принципов менеджмента.

Результаты диссертационного исследования относительно моделей управления организационно-техническими системами (обобщенная математическая модель управления предприятием с учетом принципов менеджмента «точно в срок, под заданную себестоимость, с учетом рисков», а также её частные случаи: модификация производственного плана, управление потребностью в режущем материале, выбор оснастки, инвестиционная модель) внедрены в деятельность Управления перспективного развития филиала ПАО «Ил»-Авиастар.

Инвестиционная модель производственной компании и обобщенная модель построения рекламных стратегий внедрены в деятельность Ульяновской областной торгово-промышленной палаты.

Модель управления экономической системой в условиях массового заболевания внедрена в деятельность администрации Губернатора Ульяновской области, а также в научно-исследовательскую деятельность научно-исследовательского технологического института им. С. П. Капицы ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет».

Результаты исследования используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»: для программ бакалавриата в дисциплинах «Реклама на рынке ИКТ», «Математические модели рекламных воздействий», «Моделирование рекламных воздействий»; для программ маги-

стратуры в дисциплинах «Динамические модели экономики», «Оптимальное управление в экономике»; для программ аспирантуры в дисциплине «Математические, статистические и инструментальные методы экономики».

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность выводов и результатов исследования обеспечена научной методологией исследования, предполагающей доказательность теоретических выводов и их верификацию по наблюдениям/измерениям характеристик моделируемого объекта, корректным использованием численных методов, методов программирования, апробацией выводов диссертации.

Апробация результатов исследования. Апробация основных положений диссертационной работы проведена на Байкальском международном школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, 2001 г.), Computational Science - ICCS 2003 (Санкт-Петербурге, 2003 г.), Numerical treatment of differential equations (Halle (Saale), Germany, 2006 г.), 3d International Conference Computational methods in applied mathematics: СМАМ-3 (Minsk, Belarus, 2007 г.), 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (Zurich, Switzerland, 2007 г.), Четвертой международной научной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (Саранск, 6-18 августа 2009 г.), 7 международной научной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов» (Ульяновск, 2-5 февраля 2009 г.), II Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов» (Казань, 2011 г.), IV Международной научно-практической конференции «Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании» (Тверской государственный университет, 2 июня 2015 г.), VII Всероссийской научной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Вос-

кресенского с международным участием (Саранск, 12-15 июля 2016 г.), V Международной научно-практической конференции «Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании» (Тверь, 31 мая 2016 г.), Международном молодежном симпозиуме по управлению, экономике и финансам (Казань, 24-25 ноября, 2016 г.), VI Всероссийской научной конференции с международным участием «Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы» (Ульяновск, 2016 г.), семинаре «The Second Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2017)» (Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 10 ноября 2017 г.), семинаре «The Third Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2018)» (Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 2018 г.), XVI научно-практической конференции с международным участием, «Цифровая экономика промышленности и сферы услуг: состояние и тенденции развития» (Санкт-Петербург, 2018 г.), International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2018) (Sevastopol, Russia, September 10-14 2018 г.), Международной научно-практической конференции ICIT-2019 «Информационно-коммуникационные технологии в науке и производстве» (Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., 7-8 февраля 2019 г.), VII научно-практической конференции «Цифровые технологии в экономике и промышленности» (ЭКОПРОМ-2019) (Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, 22-23 ноября 2019 г.), Международной конференции «Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении 2020» (ICMTMTE) 2020 (Севастополь, 7-11 сентября 2020 г.), VI научно-практической конференции с зарубежным участием «Цифровая экономика и Индустрия 4.0: форсайт Россия» (INDUSTRY-2020) (Санкт-Петербург,

26-28 марта 2020 г.), семинаре «The Seventh Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2022)» (Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 2022 г.), Втором всероссийском научно-практическом семинаре «Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях цифровизации экономики» (Нижний Новгород, 22 апреля 2022 г.), Третьем всероссийском научно-практическом семинаре «Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях цифровизации экономики» (Нижний Новгород, 24 апреля 2023 г.), Научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых «Научные исследования и разработки молодых ученых» (Ульяновск, 20 января 2023 г.), VIII Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, июнь 2024 г.), XI Международной научной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 2024), семинаре по теории управления и динамике систем под руководством академика Ф.Л. Черноусько (ИПМех РАН, Москва, 2024).

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликовано 67 научных работ, из них: 25 статей опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов докторских диссертаций, 17 из которых опубликованы в научных журналах, входящих в международные реферативные базы WOS и Scopus; изданы 3 монографии; получено 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ; 34 публикации в журналах и сборниках конференций.

Личный вклад. Все основные результаты, представленные в диссертации, установлены автором самостоятельно. Разработан численный метод решения задач оптимального управления (метод параметризации) для задач содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием [211, 232] и распре-

деленным запаздыванием [206, 232]. В совместной работе [211] автору принадлежит общая постановка задачи, вывод формул для вычисления производных по параметрам управляющих функций. Совместно с Горбуновым В.К. доказана теорема о сходимости метода параметризации в случае, когда динамика описывается ОДУ [205]. Обобщение теоремы о сходимости на случай запаздывания в дифференциальных связях сделано самостоятельно [232]. Предлагаемые оптимизационные модели экономической динамики разработаны автором либо полностью самостоятельно, либо под его руководством. Так обобщенная модель управления предприятием с учетом определенных принципов менеджмента [227, 230, 232, 267] была разработана автором самостоятельно, её частные случаи: модель модификации производственного плана совместно с Ярдаевой М.Н. [228, 230], модель управления потребностью в режущем материале самостоятельно [223], обобщенная модель выбора оснастки самостоятельно [231, 232], её частный случай для дискретного производства [229] совместно с Блюменштейном А.А. Модели управления инвестициями: постановка модели двухсекторной экономики с постоянным лагом запаздывания [211] предложена автором, модель оптимальной инвестиционной стратегии с распределенным лагом [226] разработана совместно с Ямалтдиновой Н.Р. Модель частоты рекламного воздействия [238] разработана самостоятельно. Обобщенная многоканальная динамическая модель управления рекламными затратами [232] разработана и обоснована автором самостоятельно, её частные случаи [213–215, 224, 225, 263–266] совместно с Ямалтдиновой Н.Р. Разработка модели управления экономической системой в условиях массового заболевания [209, 242, 256, 258] была проведена совместно с Рыбиной М.С. В свидетельствах о регистрации программ [233, 234] диссертант разрабатывал общую структуру комплексной модели совместно с соавторами, в [235, 255] диссертант разрабатывал набор показателей, внешних по отношению к предприятию, в свидетельствах [236, 237] диссертанту принадлежит разработка и реализация алгоритмов решения задач оптимального управ-

ления методом параметризации. В работах [244–247, 250, 251, 259–261, 268–271] диссертант разрабатывал и реализовывал алгоритмы решения задач оптимального управления методом параметризации, а также проводил вычислительные эксперименты. В [243] автором предложена математическая модель производственных функций. В [257] автор предложил некоторые методы дезагрегирования статистических данных, необходимых для определения параметров в задаче управления экономической системой в условиях массового заболевания. В совместных работах с Чекмаревым А.Г. [212, 262] диссертант разрабатывал алгоритмы решения задач оптимального управления.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и пяти приложений. Общий объём диссертации 320 страниц, включая 21 рисунок и 34 таблицы. Основной текст диссертации составляет 279 страниц. Список литературы состоит из 271 наименования.

Глава 1

Метод параметризации для решения задач ОУ

1.1 Задача ОУ с описанием динамики в виде ОДУ

Основы метода параметризации для задач оптимального управления со связями в виде обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены в работе Горбунова В.К. [21]. Идея метода параметризации определяется представлением функции управления как обобщенного сплайна: вводится разбиение исходного временного интервала (на котором решается задача ОУ), на каждом из полученных интервалов вводится параметризованный вид функции управления, моменты переключения управления являются подвижными. Таким образом, исходная вариационная задача ОУ аппроксимируется конечномерной задачей НП, в которой переменными величинами являются параметры, определяющие вид управления, и моменты переключения управления. Такой подход позволяет свести вычисление целевой и ограничивающих функций в задаче НП к решению задачи Коши для исходной системы, а для вычисления производных в задаче НП дополнительно требуется решение задачи Коши для сопряженной системы.

Дальнейшее развитие метода параметризации представлено в исследованиях [24, 205]: разработаны алгоритмы вычисления вторых производных в задаче НП. Практическое обоснования эффективности применения вторых производных было проведено в ряде работ: в [53] решались регулярные задачи ОУ; в [205] решались задачи с особым управлением [17], с промежуточными фазовыми ограничениями [23]; в [220–222] найдены решения ряда задач с вырожденными системами дифференциальных уравнений (дифференциально-алгебраические системы [85], системы с малым параметром при старшей производной [34]).

1.1.1 Постановка задачи и ее параметризация

Пусть задача оптимального управления представлена автономной системой дифференциальных уравнений, с терминальными ограничениями, терминальным функционалом и фиксированным начальным состоянием:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.1)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} g_l(x(T)) = 0, & l = 1, \dots, m_1, \\ g_l(x(T)) \leq 0, & l = m_1 + 1, \dots, m, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$J = g_0(x(T)) \rightarrow \min. \quad (1.4)$$

Здесь x – вектор фазовых переменных ($x \in R^n$), u – вектор управления ($u \in R^r$). Терминальные функции $g_l(z)$, $1 \leq l \leq m$, $z \in R^n$, и функции $f_i(x, u)$, $1 \leq i \leq n$, определяющие вектор скоростей фазовых переменных, дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. Рассматривается динамика фазовой траектории и управления при $t_0 \leq t \leq T$. Конечный момент планирования является либо фиксированным, либо свободным (при этом ограничен некоторой величиной T^* сверху).

Предполагается, что множество допустимых значений управления $U \subset R^r$ является выпуклым компактом; каждому управлению $u(t)$, удовлетворяющему (1.2), отвечает траектория $x(t)$ системы (1.1), определенная на $[t_0, T]$; задача (1.1)-(1.4) разрешима в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Также на правую часть системы дифференциальных уравнений накладывается условие сублинейного роста:

$$\exists A > 0, B > 0 : \|f(x, u)\| \leq A\|x\| + B, \quad \forall u \in U. \quad (1.5)$$

Метод параметризации заключается во введении произвольного разбиения промежутка $[t_0, T]$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \equiv T, \quad (1.6)$$

и закреплении структуры управления на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$, $1 \leq k \leq N$. Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, r, \quad (1.7)$$

где $v_\mu^k \in R^d$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U$ и, соответственно, $v^k = (v_1^k, \dots, v_r^k) \in R^{d \times r}$.

Если управление должно быть непрерывным (например, в задаче вариационного исчисления полагают $\dot{x} = u$), тогда можно добавить дополнительные условия к параметризованному управлению:

$$u^k(t_k, v^k) = u^{k+1}(t_k, v^{k+1}), \quad 1 \leq k \leq N - 1.$$

В случае требования непрерывности производных управляющих функций, аналогичное условие можно добавить и для производных. Тогда параметризованное управление является обобщенным сплайном.

Подставляя параметризованное управление (1.7) в (1.1), получаем траекторию $x(t)$ системы (1.1), определяемую параметрами управления:

$$w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \dots, w_{r,d}^k),$$

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k. \quad (1.8)$$

Функция $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$ определяется на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ интегральными соотношениями, эквивалентными в совокупности задаче Коши (1.1):

$$z(t, v^1) = x^0 + \int_{t_0}^t f(z(s; v^1), u^1(s; v^1)) ds, \quad t_0 \leq t < t_1;$$

$$z(t; w^1, \dots, w^k, v^{k+1}) = z(t_k; w^1, \dots, v^k) +$$

$$+ \int_{t_k}^t f(z(s; w^1, \dots, v^{k+1}), u^{k+1}(s; v^{k+1})) ds, \quad t_k \leq t < t_{k+1}.$$

Введем функции, зависящие от параметров w^k , $1 \leq k \leq N$:

$$\varphi_l(w^1, \dots, w^N) = g_l(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)), \quad l = 0, 1, \dots, m. \quad (1.9)$$

В этом случае задача ОУ (1.1)-(1.4) аппроксимируется задачей нелинейного программирования:

$$\begin{cases} \varphi_0(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min & \text{на множестве} \\ \varphi_l(w^1, \dots, w^N) = 0, & 1 \leq l \leq m_1, \\ \varphi_l(w^1, \dots, w^N) \leq 0, & m_1 + 1 \leq l \leq m, \\ W = \{w^k : w_0^{k-1} \leq w_0^k, u^k(t; v^k) \in U, w_{0,0}^{k-1} \leq t \leq w_{0,0}^k, \\ k = 1, \dots, N; w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leq T^*\}. \end{cases} \quad (1.10)$$

В задаче НП (1.10) связь между переменными задана опосредованно, она обусловлена дифференциальными связями (1.1). Применение методов конечномерной дифференцируемой оптимизации к решению задачи (1.10) определяется наличием соответствующих свойств у функций $\varphi_l(w^1, \dots, w^N)$ ($l = 0, 1, \dots, m$). Анализ дифференцируемости этих функций сводится к анализу зависимости решения задачи Коши (1.1) от параметров (w^1, \dots, w^N) . В учебнике Понтрягина Л. С. [67] показано, что для дифференцируемости решения задачи Коши по параметрам (в нашем случае v^k , $1 \leq k \leq N$) достаточно потребовать непрерывную дифференцируемость функции правой части системы ОДУ по своим аргументам и по параметрам. В [75] рассмотрена зависимость решения по начальным данным, в частности, по начальному моменту (по параметрам t_k , $1 \leq k \leq N$). Так в [75, теорема 2.11 и замечание к ней] показано, что для дифференцируемости решения по начальному моменту достаточно потребовать непрерывную дифференцируемость правой части системы ОДУ по фазовой переменной.

Таким образом, для непрерывной дифференцируемости функций в задаче НП (1.10) достаточно потребовать непрерывную дифференцируемость функции $f(x, u)$ по своим переменным, а также функций $u^k(t_k, v^k)$ по параметрам v^k ($1 \leq k \leq N$). Для того, чтобы функции в задаче НП (1.10) были дважды непрерывно дифференцируемы, достаточно потребовать, чтобы $f(x, u)$ была дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам, $u^k(t_k, v^k)$ дважды непрерывно дифференцируема по параметрам v^k ($1 \leq k \leq N$).

Таким образом, открывается возможность применения к задаче (1.10) метода модифицированных функций Лагранжа и метода квадратично-линейной аппроксимации [15, 19, 58, 65].

1.1.2 Первые производные параметризованных функционалов

В работе В. К. Горбунова [21] была предложена техника вычисления частных производных функций задачи НП (1.10), рассмотрим её подробнее.

Введем некоторые векторно-матричные обозначения. Так производные скалярных функций по векторным аргументам

$$\frac{\partial g_l(z)}{\partial z} = \left[\frac{\partial g_l}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial g_l}{\partial z_n} \right]$$

будем понимать как векторы-строки, а производные векторной функции по скалярному параметру

$$\frac{\partial z(t; w^1, \dots, w^k)}{\partial w_{\mu, \alpha}^j} = \left[\frac{\partial z_1}{\partial w_{\mu, \alpha}^j}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial w_{\mu, \alpha}^j} \right]^T \quad (1.11)$$

($1 \leq \mu \leq r$, $1 \leq \alpha \leq d$, $1 \leq j \leq k$), как векторы-столбцы. Соответственно этому будет определяться матричная структура производных векторных функций по векторным аргументам.

Продифференцируем равенство (1.9) по одному из параметров $w_{\mu, \alpha}^k$:

$$\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k} = \frac{\partial g_l(z(T; \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k}. \quad (1.12)$$

Производные (1.11) – это вариации траектории системы (1.1), (1.7) по параметрам, определяющим управление. Обозначим их

$$y^{j\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; v^1, \dots, v^k)}{\partial w_{\mu, \alpha}^j}, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad 1 \leq j \leq k \leq N. \quad (1.13)$$

Функция $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$ определяется интегральными соотношениями, эквивалентными задаче Коши с параметризованным управлением. При диф-

ференцировании данных соотношений можно для каждой функции (1.13) получить определяющую её задачу Коши. Так для вариаций по моментам переключения управления $w_{0,0}^k = t_k$, $1 \leq k \leq N - 1$, это

$$\begin{cases} \dot{y}^{k00} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}, & t_k \leq t \leq T, \\ y^{k00}(t_k) = f(x(t_k), u^k(t_k; v^k)) - f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1})); \end{cases} \quad (1.14)$$

и для вариаций относительно $v_{\mu,\alpha}^k$ ($1 \leq \mu \leq r$, $1 \leq \alpha \leq d$, $1 \leq k \leq N$) – это

$$\begin{cases} \dot{y}^{k\mu\alpha} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha} + \theta(t_k - t) \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k}, \\ t_{k-1} \leq t \leq T, \\ y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Здесь $\theta(t)$ – функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Если конечный момент T является подвижным, то вариация по нему конечна:

$$y^{N00}(T) = f(x(T), u(T)). \quad (1.16)$$

Таким образом, вычисление градиентов в задаче (1.10) можно свести к решению задач Коши: для фазовых переменных 1 задача (1.1), (1.7); для вариаций $N(r \times d + 1) - 1$ задач (1.14), (1.15).

Использование вариаций фазовой траектории и функции управления применялось в ряде работ [4, 12, 17, 78] как для качественного анализа задач оптимального управления, так и для построения соответствующих численных методов. При этом решение находилось в функциональном пространстве без параметризации управления.

Также можно отметить работу [31], в которой проводится кусочно-постоянная аппроксимация управления и используются вариации второго

порядка для вычисления производных второго порядка по параметрам кусочно-постоянного управления. Количество переменных в задаче НП в этом случае предполагается порядка нескольких сотен. В методе параметризации можно обойтись гораздо меньшим количеством параметров в управлении, если исследователь знает структуру управления. При этом в методе параметризации вычислительную трудоемкость можно существенно уменьшить за счет введения сопряженных переменных.

Введем функцию Понтрягина

$$H(p, x, u) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(x, u).$$

Для каждой терминальной функции $g_l(z)$ введем свою сопряженную вектор-функцию $p^l(t) = (p_1^l(t), \dots, p_n^l(t))$:

$$\begin{cases} \dot{p}^l = - \left. \frac{\partial H(p^l(t), x, u(t))}{\partial x} \right|_{x=x(t)}, & t_0 \leq t \leq T, \\ p^l(T) = \left. \frac{\partial g_l(z)}{\partial z} \right|_{z=x(T)}, & l = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.17)$$

Значение функции Понтрягина на процессе $\{p^l(t), x(t)\}$ обозначим с помощью функции $M_l(t)$:

$$M_l(t) = H(p^l(t), x(t), u(t)). \quad (1.18)$$

Теорема 1. Пусть функции $f, g_l, l = 0, 1, \dots, m$, входящие в постановку задачи (1.1)-(1.4), непрерывно дифференцируемы по фазовым и управляющим переменным, функции в параметризованном управлении (1.7) непрерывно дифференцируемы по параметрам $v^k, k = 1, 2, \dots, N$, тогда для первых произ-

водных функций (1.9) по параметрам управления верны формулы:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= M_l(t_k - 0) - M_l(t_k + 0), & 1 \leq k \leq N - 1; \\
\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} &= M_l(T); \\
\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u^k(t; v^k))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} dt, & 1 \leq k \leq N, \\
&& 1 \leq \mu \leq d \times r.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Доказательство. Воспользуемся свойством постоянства скалярных произведений $\langle p^l(t), y^{k\mu\alpha}(t) \rangle$ на общих промежутках определения $[t_k, T]$, а также конечными и начальными условиями для вариаций и сопряженных переменных.

Выведем формулу производной по переменной $v_{\mu, \alpha}^k$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \langle p^l(T), y^{k\mu\alpha}(T) \rangle = \langle p^l(t_{k-1}), y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) \rangle + \\
&\int_{t_{k-1}}^T \frac{d}{dt} \langle p^l(t), y^{k\mu\alpha}(t) \rangle = \int_{t_{k-1}}^T \langle \dot{p}^l(t), y^{k\mu\alpha}(t) \rangle + \langle p^l(t), \dot{y}^{k\mu\alpha}(t) \rangle dt = \\
&\int_{t_{k-1}}^T \left\langle -\frac{\partial H(p(t), x(t), u(t))}{\partial x}, y^{k\mu\alpha}(t) \right\rangle + \left\langle p^l(t), \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \right. \\
&\quad \left. \theta(t_k - t) \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} \right\rangle dt = \\
&\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u^k(t; v^k))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} dt
\end{aligned}$$

Аналогично выводится формула для вариации по t_k :

$$\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = \langle p^l(T), y^{k00}(T) \rangle = \langle p^l(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle +$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^T \frac{d}{dt} \langle p^l(t), y^{k00}(t) \rangle &= \langle p^l(t_k), f(x(t_k), u^k(t_k; v^k)) - f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1})) \rangle + \\
&\int_{t_k}^T \langle \dot{p}^l(t), y^{k00}(t) \rangle + \langle p^l(t), \dot{y}^{k00}(t) \rangle dt = M_l(t_k - 0) - M_l(t_k + 0) + \\
&\int_{t_{k-1}}^T \left\langle -\frac{\partial H(p(t), x(t), u(t))}{\partial x}, y^{k00}(t) \right\rangle + \left\langle p^l(t), \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) \right\rangle = \\
&M_l(t_k - 0) - M_l(t_k + 0).
\end{aligned}$$

□

Таким образом, для вычисления градиентов (1.19) нужно решить задачу Коши для фазовых переменных (1.1), (1.7), а также $m + 1$ задачу Коши для сопряженных переменных (1.17). Общее число задач Коши зависит от количества терминальных условий (1.3) и не зависит от количества параметров, представленных в параметризованном управлении (1.6), (1.7).

1.1.3 Вторые производные

Примененная в предыдущем параграфе методика может быть развита для нахождения вторых производных функций в задаче НП (1.10).

Для исследования особых режимов в [17] были введены матричные импульсы Габасова, обозначим их в виде

$$\Psi^l(t) = \{ \Psi_{\alpha\beta}^l(t) : \alpha, \beta = 1, \dots, n \}.$$

С помощью сопряженных функций p^l , введенных в формуле (1.17), определим:

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}^l = - \left(\frac{\partial f(x, u(t))}{\partial x} \right)^T \Psi^l(t) - \Psi^l(t) \frac{\partial f(x, u(t))}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(p^l(t), x, u(t))}{\partial x^2} \Bigg|_{x=x(t)}, \\
0 \leq t \leq T;
\end{aligned} \tag{1.20}$$

с конечными условиями

$$\Psi^l(T) = \left. \frac{\partial^2 g_l(z)}{\partial z^2} \right|_{z=x(T)}. \quad (1.21)$$

Покажем, что нахождение вторых производных в задаче НП (1.10) может быть сведено к вычислению на основе значений функций: функция Понтрягина, сопряженные функции (1.17); матричные импульсы (1.20); первые вариации фазовой траектории (1.14), (1.15).

Теорема 2. Пусть функции f , g_l , $l = 0, 1, \dots, m$, входящие в постановку задачи (1.1)-(1.4), дважды непрерывно дифференцируемы по фазовым переменным, кроме того, функция f дважды непрерывно дифференцируема по управляющим переменным u_i , $i = 1, \dots, r$, функции в параметризованном управлении (1.7) дважды непрерывно дифференцируемы по параметрам v^k , $k = 1, 2, \dots, N$, тогда для вторых производных по параметрам управления верны следующие формулы:

$$(v^{j\mu\alpha}, t_k; j \leq k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^j \partial t_k} = & \left[\frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x} \right]^T y^{j\mu\alpha}(t_k) + [\Psi^l(t_k) y^{j\mu\alpha}(t_k)]^T \times \\ & \times y^{k00}(t_k) + \delta_{jk} \frac{\partial u_\mu^k(t_k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial u_\mu}; \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$(t_j, v^{k\nu\beta}; j < k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_j \partial v_{\nu,\beta}^k} = & -\delta_{j(k-1)} \frac{\partial H(p^l(t_{k-1}), x(t_{k-1}), u^k(t_{k-1}; v^k))}{\partial u_\nu} + \\ & + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial u_\nu^k(t; v^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k} \left[\left\langle \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t))}{\partial u_\nu \partial x}, y^{j00}(t) \right\rangle + \right. \\ & \left. + [\Psi^l(t) y^{j00}(t)]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\nu} \right] dt; \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$(v_{\mu,\alpha}^j, v_{\nu,\beta}^k; j \leq k)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^j \partial v_{\nu, \beta}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{\partial u_{\nu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\nu, \beta}^k} \left\langle \left\langle \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\nu} \partial x}, y^{j\mu\alpha}(t) \right\rangle \right. \right. \\
&+ \left. \left[\Psi^l(t) y^{j\mu\alpha}(t) \right]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_{\nu}} \right) + \delta_{jk} \left[\frac{\partial u_{\nu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\nu, \beta}^k} \frac{\partial u_{\mu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} \times \right. \\
&\times \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\nu} \partial u_{\mu}} + \frac{\partial u_{\mu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} \left\langle \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\mu} \partial x}, y^{k\nu\beta}(t) \right\rangle + \\
&+ \frac{\partial u_{\mu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} \left[\Psi^l(t) y^{k\nu\beta}(t) \right]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_{\mu}} + \delta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 u_{\nu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k \partial v_{\nu, \beta}^k} \times \\
&\left. \left. \times \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\nu}} \right] \right\} dt;
\end{aligned} \tag{1.24}$$

(t_j, t_k)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_j \partial t_k} &= \left\langle \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial x} - \right. \\
&- \left. \frac{H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x} + \Psi^l(t_k) y^{k00}(t_k), y^{j00}(t_k) \right\rangle + \\
&+ \delta_{jk} \left\{ - \left\langle \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x}, y^{k00}(t_k) \right\rangle + \right. \\
&+ \left\langle \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial x}, \frac{\partial u^k(t_k; v^k)}{\partial t} \right\rangle - \\
&- \left. \left\langle \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x}, \frac{\partial u^{k+1}(t_k; v^{k+1})}{\partial t} \right\rangle \right\}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Доказательство. Предположения, сделанные в условиях теоремы, позволяют утверждать, что траектория $x(t)$, отвечающая управлению (1.7), дважды непрерывно дифференцируема по параметрам управления. Тогда из (1.12) и (1.13) можно выписать соотношения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial w_{\nu, \beta}^k \partial w_{\mu, \alpha}^j} &= \left[\frac{\partial^2 g_l(x(T))}{\partial z^2} y^{j\mu\alpha}(T) \right]^T y^{k\nu\beta}(T) + \\
&+ \frac{\partial g_l(x(T))}{\partial z} \frac{\partial^2 z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial w_{\nu, \beta}^k \partial w_{\mu, \alpha}^j},
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$0 \leq l \leq m \quad (0 \leq \mu, \nu \leq r; \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq d; \quad 1 \leq j, k \leq N).$$

Выражение (1.26) содержит вторые производные фазовой траектории, отвечающей управлению (1.7), по параметрам. Эти производные по сути являются вторыми вариациями траектории, для них введем обозначения

$$Z^{j\mu\alpha k\nu\beta}(t) = \frac{\partial^2 z(t; w^1, \dots, v^s)}{\partial w_{\mu,\alpha}^j \partial w_{\nu,\beta}^k}, \quad t_s \leq t < t_{s+1}, \quad (1.27)$$

$$\max(j, k) \leq s \leq N - 1; \quad 0 \leq \mu, \nu \leq r; \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq d; \quad 1 \leq j, k \leq N.$$

В силу непрерывности вторых производных порядок дифференцирования не важен. Таким образом, далее считаем, что $j \leq k$.

Функция $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$ определяется интегральными соотношениями, эквивалентными исходной задаче Коши (1.1) с управлением (1.7). Двукратное дифференцирование функции $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$ по параметрам управления приводит к соответствующим задачам Коши для вторых вариаций, в которых присутствуют первые вариации $y^{j\mu\alpha}(t)$: (1.14)-(1.16).

Вторая вариация (вектор-функция) по паре $(v_{\mu,\alpha}^j, v_{\nu,\beta}^k; j \leq k)$ определяется дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{Z}^{j\mu\alpha k\nu\beta} = & \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} Z^{j\mu\alpha k\nu\beta} + [y^{j\mu\alpha}(t)]^T \frac{\partial^2 f(x(t), u(t))}{\partial x^2} y^{k\nu\beta}(t) + \\ & + \theta(t_k - t) \left\{ \frac{\partial^2 f(x(t), u(t))}{\partial u_\nu \partial x} y^{j\mu\alpha}(t) \frac{\partial u_\nu^k(t; v_\nu^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k} + \delta_{jk} \left[\frac{\partial^2 f(x(t), u(t))}{\partial u_\mu \partial x} \times \right. \right. \\ & \times y^{k\nu\beta}(t) \frac{\partial u_\mu^k(t; v_\mu^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} + \frac{\partial^2 f(x(t), u(t))}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \frac{\partial u_\nu^k(t; v_\nu^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k} \frac{\partial u_\mu^k(t; v_\mu^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} + \\ & \left. \left. + \delta_{\mu\nu} \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\nu} \frac{\partial^2 u_\nu^k(t; v_\nu^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k \partial v_{\mu,\alpha}^k} \right] \right\}, \quad t_{k-1} \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (1.28)$$

с начальным условием $Z^{j\mu\alpha k\nu\beta}(t_{k-1}) = 0$.

Вариации по моменту переключения управления и v -параметрам описываются различными уравнениями в зависимости от порядка возмущения. Так, если момент переключения t_k следует за параметром $v^{j\mu\alpha}(v^{j\mu\alpha}, t_k; j \leq k)$, то

вариация представляется дифференциальным уравнением:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}^{j\mu\alpha k00} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} Z^{j\mu\alpha k00} + [y^{j\mu\alpha}(t)]^T \frac{\partial^2 f(x(t), u(t))}{\partial x^2} y^{k00}(t), \\ t_k \leq t \leq T, \\ Z^{j\mu\alpha k00}(t_k) = \frac{\partial}{\partial x} [f(x(t_k), u^k(t_k; v^k)) - f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))] \times \\ \times y^{j\mu\alpha}(t_k) + \delta_{jk} \frac{\partial f(x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t_k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k}. \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Вариация параметров $(t_j, v^{k\nu\beta}; j < k)$ приводит к дифференциальному уравнению:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}^{j00k\nu\beta} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} Z^{j00k\nu\beta} + [y^{j00}(t)]^T \frac{\partial^2 f(x(t), u(t))}{\partial x^2} y^{k\nu\beta}(t) + \\ + \theta(t_k - t) \frac{\partial^2 f(x(t), u(t))}{\partial u_\nu \partial x} y^{j00}(t) \frac{\partial u_\nu^k(t; v_\nu^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k}, \quad t_{k-1} \leq t \leq T; \\ Z^{j00k\nu\beta}(t_{k-1}) = -\delta_{j(k-1)} \frac{\partial f(x(t_{k-1}), u^k(t_{k-1}; v^k))}{\partial u_\nu} \frac{\partial u_\nu^k(t_{k-1}; v_\nu^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k}. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Вторые вариации $Z^{j00k00}(t)$ – вариации параметров t_j, t_k [21] описываются дифференциальным уравнением:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}^{j00k00} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} Z^{j00k00} + [y^{j00}(t)]^T \frac{\partial^2 f(x(t), u(t))}{\partial x^2} y^{k00}(t), \\ t_k \leq t \leq T, \\ Z^{j00k00}(t_k) = \frac{\partial}{\partial x} [f(x(t_k), u^k(t_k; v^k)) - f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))] y^{j00}(t_k) + \\ + \delta_{jk} \left\{ \frac{\partial f(x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial u} \frac{\partial u^k(t_k; v^k)}{\partial t} - \frac{\partial f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial u} \right. \\ \left. \times \frac{\partial u^{k+1}(t_k; v^{k+1})}{\partial t} - \frac{\partial f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x} y^{k00}(t_k) \right\}. \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Таким образом, для вычисления производных (1.26) в задаче (1.10) можно решить следующие задачи Коши: для фазовых переменных (1.1), (1.7); для первых вариаций (1.14), (1.15); для вторых вариаций (1.28)-(1.31). Однако, в этом случае количество задач Коши имеет квадратичный порядок от числа

параметров. Данное количество можно сократить за счет введения матричных импульсов и исключения вторых вариаций.

Вариации $\{Z^{j\mu\alpha k\nu\beta}(t), y^{j\mu\alpha}(t), y^{k\nu\beta}(t)\}$ и функции $\{p^l(t), \Psi^l(t)\}$ в совокупности сопряжены друг другу. Сопряженность определяется постоянством значений соответствующих скалярных функций

$$h_{j\mu\alpha k\nu\beta}^l(t) = \langle p^l(t), Z^{j\mu\alpha k\nu\beta}(t) \rangle + [y^{j\mu\alpha}(t)]^T \Psi^l(t) y^{k\nu\beta}(t). \quad (1.32)$$

Это постоянство проверяется дифференцированием равенства (1.32).

Из определения (1.32), конечных условий (1.21), (1.17) и формулы (1.26) следует равенство

$$\frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial w_{\mu,\alpha}^j \partial w_{\nu,\beta}^k} = h_{j\mu\alpha k\nu\beta}^l(T) = h_{j\mu\alpha k\nu\beta}^l(t). \quad (1.33)$$

Используя скалярные функции (1.32), (1.33), уравнения для вторых вариаций (1.28)-(1.31), можно вывести формулы частных производных второго порядка.

Сперва найдем производные второго порядка по параметрам управления $v_{\mu,\alpha}^j, v_{\nu,\beta}^k$. Воспользовавшись (1.32), (1.33) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^j \partial v_{\nu,\beta}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{dt} (\langle p^l(t), Z^{j\mu\alpha k\nu\beta}(t) \rangle + \\ &+ \langle \Psi^l(t) y^{j\mu\alpha}(t), y^{k\nu\beta}(t) \rangle) dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\langle \dot{p}^l, Z^{j\mu\alpha k\nu\beta}(t) \rangle + \langle p^l(t), \dot{Z}^{j\mu\alpha k\nu\beta} \rangle + \right. \\ &\left. + \langle \dot{\Psi}^l y^{j\mu\alpha}(t) + \Psi^l(t) \dot{y}^{j\mu\alpha}, y^{k\nu\beta}(t) \rangle + \langle \Psi^l(t) y^{j\mu\alpha}(t), \dot{y}^{k\nu\beta} \rangle \right) dt. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Подставим в (1.34) соотношения (1.15), (1.17), (1.28), (1.20). Исходя из определения функции Понтрягина и полученного выражения, можно вывести частные производные второго порядка по параметрам управления $v_{\mu,\alpha}^j, v_{\nu,\beta}^k$, представленные в (1.24).

Вывод частных производных второго порядка функций (1.9) по параметрам $v_{\mu,\alpha}^j$, t_k , ($j \leq k$) проводится аналогично. Из (1.32), (1.33) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^j \partial t_k} &= h_{j\mu\alpha k 00}^l(T) = h_{j\mu\alpha k 00}^l(t_k) = \\ &= \langle p^l(t_k), Z^{j\mu\alpha k 00}(t_k) \rangle + \langle \Psi^l(t_k) y^{j\mu\alpha}(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Воспользуемся определением функции Понтрягина, формулами первой вариации (1.14), (1.15), а также формулой смешанной второй вариации (1.29). Подставив выбранные соотношения в (1.35), получаем искомые производные второго порядка по параметрам $v_{\mu,\alpha}^j$, t_k , ($j \leq k$), представленные в (1.22).

Теперь перейдем к выводу смешанных частных производных второго порядка, когда возмущение по моменту переключения управления t_j предшествует возмущению по параметру $v_{\nu,\beta}^k$, т.е. $j < k$. Исходя из соотношений (1.32), (1.33), частные производные по t_j , $v_{\nu,\beta}^k$ могут быть представлены:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_j \partial v_{\nu,\beta}^k} &= h_{j00k\nu\beta}^l(T) = h_{j00k\nu\beta}^l(t_k) = \\ &= \langle p^l(t_{k-1}), Z^{(k-1)0k\nu}(t_{k-1}) \rangle + \langle \Psi^l(t_{k-1}) y^{(k-1)0}(t_{k-1}), y^{k\nu}(t_{k-1}) \rangle + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{dt} (\langle p^l(t), Z^{j0k\nu}(t) \rangle + \langle \Psi^l(t) y^{j0}(t), y^{k\nu}(t) \rangle) dt. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Применив к (1.36) выражения (1.14), (1.15), (1.17), (1.30), (1.20), получаем окончательный вариант вторых производных по параметрам t_j , $v_{\nu,\beta}^k$ - формулу (1.23).

Рассмотрим вывод вторых производных φ_l по t_j , t_k . Исходя из формул (1.32), (1.33) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_j \partial t_k} &= h_{j00k00}^l(T) = h_{j00k00}^l(t_k) = \\ &= \langle p^l(t_k), Z^{j00k00}(t_k) \rangle + \langle \Psi^l(t_k) y^{j00}(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Подставив в (1.37) соотношение (1.14) и начальные условия задачи Коши для

второй вариации (1.31), можно легко вывести формулу для производных второго порядка по параметрам t_j, t_k – (1.25). \square

В том случае, если правый конец траектории является подвижным, то требуется определить совместные производные по параметрам $w_{\mu,\alpha}^k, T$, где T – конечный момент. Приведем эти формулы.

Совместная производная по параметрам T, t_k определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial T \partial t_k} &= \\ &= \left\langle \frac{\partial H(p(T), x(T), u(T))}{\partial x} + \Psi(T) f(x(T), u(T)), y^{k00}(T) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.38)$$

вторая производная по параметру T выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial T^2} &= \left\langle \frac{\partial H(p(T), x(T), u(T))}{\partial u}, \frac{\partial u^N(T; v^N)}{\partial t} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\partial H(p(T), x(T), u(T))}{\partial x} + \Psi(T) f(x(T), u(T)), f(x(T), u(T)) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.39)$$

и производная по параметрам $T, v_{\nu,\beta}^k$ выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial T \partial v_{\nu,\beta}^k} &= \delta_{kN} \frac{\partial u^N(T; v^N)}{\partial v_{\nu,\beta}^N} \frac{\partial H(p(T), x(T), u(T))}{\partial u_\nu} + \\ &+ \left\langle \frac{\partial H(p(T), x(T), u(T))}{\partial x} + \Psi(T) f(x(T), u(T)), y^{k\nu\beta}(T) \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Таким образом, вычисление производных второго порядка функций задачи НП (1.10) может быть сведено к решению ряда задач Коши: для фазовых переменных одна задача (1.1), (1.7), для первых вариаций по параметрам $(N(r \times d + 1) - 1)$ задач (1.14), (1.15), $(m + 1)$ задача для сопряженных переменных (1.17) и $(m + 1)$ задача для матричных импульсов (1.20), (1.21). Очевидно, вычисление производных второго порядка для задачи (1.10) в общем случае более трудоемко, чем вычисление производных первого порядка. Однако, если в исходной задаче ОУ функции являются линейными по фазовым переменным, то матричные импульсы (1.20), (1.21) становится тривиальными. Последнее существенно упрощает вычисление производных второго порядка.

Пример 1.1.1

Рассмотрим задачу с особым оптимальным управлением из [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_2, & \dot{x}_2 &= 2u, & x_1(0) &= -7, & x_2(0) &= 3, \\ |u(t)| &\leq 1, \\ J(u) &= x_1^2(2) + x_2^2(2) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1.41)$$

В классе непрерывных управляющих функций $u(t)$ оптимальное управление $u^*(t)$ будет следующим

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1; \\ t - 2, & 1 \leq t \leq 2; \end{cases}$$

при этом $J(u^*(\cdot)) = 0$.

Поставленную задачу (1.41) будем решать методом параметризации с использованием методов безусловного поиска экстремума. В исходной задаче (1.41) используем прием снятия промежуточных ограничений на управление за счет расширения фазового пространства. Получаем задачу ОУ эквивалентную исходной, но без ограничений на управление:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_2, & \dot{x}_2 &= 2u, & \dot{x}_3 &= ([u - 1]^+)^2 + ([-u - 1]^+)^2; \\ x_1(0) &= -7, & x_2(0) &= 3, & x_3(0) &= 0, & x_3(2) &= 0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

с прежним функционалом $J(u)$.

Отметим, что полученная задача (1.42) в свою очередь содержит терминальное ограничение на правый конец траектории $x_3(2) = 0$.

Задача (1.42) решалась методом параметризации в классе кусочно-линейных управлений с одним переключением

$$u(t) = \begin{cases} v_{11} + v_{12}t, & 0 \leq t < \tau; \\ v_{21} + v_{22}t, & \tau \leq t \leq 2. \end{cases} \quad (1.43)$$

Получаемая при этом задача НП была пятимерной: четыре коэффициента параметризованных управляющих функций $(v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$ и один момент переключения управления τ .

Для обеспечения непрерывности функции $u(t)$ можно добавить к конечномерной задаче условие

$$v_{11} + v_{12}\tau - v_{21} - v_{22}\tau = 0.$$

Учитывая наличие условия непрерывности и конечного терминального условия, применим метод модифицированных штрафных функций, описанный в [174]. Таким образом, в задаче (1.42) функционал $J(u)$ заменяется на $J(u, c_1, c_2)$:

$$J(u, c_1, c_2) = x_1^2(2) + x_2^2(2) + c_1 x_3(2) + c_2 (v_{11} + v_{12}\tau - v_{21} - v_{22}\tau)^2. \quad (1.44)$$

При решении задачи безусловной минимизации (1.42), (1.43), (1.44) использовались методы: первого порядка (метод проекции градиента), квазиньютоновский (метод Дэвидона-Флэтчера-Пауэлла), второго порядка (методом Ньютона). Во всех экспериментах начальное приближение выбиралось одинаковым: $v_{11} = -0.5$, $v_{12} = 0$, $v_{21} = 0.5$, $v_{22} = 0$, $\tau = 1$, стартовые значения для штрафных коэффициентов полагались $c_1 = c_2 = 100$. Значение целевого функционала при таком выборе начального приближения составляет $J(u, 100, 100) = 173$. При этом, для требуемых в методе параметризации задач Коши применялся метод Рунге-Кутты 4-го порядка, шаг интегрирования составил 0, 1.

При решении методом проекции градиента (МПГ) полученной конечномерной задачи на 20-й итераций значение функционала составило $J(u) = 0, 36$. В последующем на каждой итерации снижение значения функционала было менее 1%. Такое поведение при минимизации методом ПГ может свидетельствовать либо об овражном характере целевой функции в окрестности решения, либо о вырождении условий первого порядка. Итерационный процесс был остановлен на 210-м шаге. Полученное решение представлено в таблице 1.1.1. Пересчет параметров штрафа происходил каждые 15 итераций, в результате получены параметры: $c_1 = 104, 3712$, $c_2 = 100, 2036$.

При решении методом Дэвидона-Флэтчера-Пауэлла (ДФП) конечномерной задачи итерационный процесс был остановлен на 18-й итерации, соответству-

ющее значение функционала составило: $J(u) = 0,14637$. Пересчет параметров штрафа происходил каждые 15 итераций, в результате получены параметры: $c_1 = 100,8022$, $c_2 = 100,0138$. Приближенное решение, полученное методом ДФП, представлено в таблице 1.1.1.

При решении методом Ньютона (МН) полученной конечномерной задачи итерационный процесс был остановлен после 8-ми итераций, соответствующее значение функционала составило: $J(u) = 1,73 \cdot 10^{-11}$. Параметры штрафа c_1 , c_2 остались без изменений. Полученное решение приведено в таблице 1.1.1.

Таблица 1.1.1: Параметры оптимального решения при различных методах НП

метод	v_{11}	v_{12}	τ	v_{21}	v_{22}	$J(u)$
МПГ	-1,06139	0,24723	1,57807	-0,04631	-0,39538	0,20703
ДФП	-1,05512	0,24724	1,99360	-0,04631	-0,26435	0,14637
МН	-1,00000	$1,3 \times 10^{-4}$	1,00048	-2,00096	1,00060	$1,7 \times 10^{-11}$
точное решение	-1	0	1	-2	1	0

В последней строке таблицы 1.1.1 указаны коэффициенты, определяющие управление, являющееся решением задачи (1.41). Анализ данных в таблице позволяет сделать вывод, что метод параметризации является работоспособным при применении различных методов НП. При этом, в данной задаче методы, основанные на условиях первого порядка (производные первого порядка), относительно плохо сходятся в окрестности оптимального особого решения, а метод Ньютона, основанный на условиях второго порядка, дает гораздо лучшее приближение.

Пример 1.1.2

В [54] представлена пространственная модель управления движением самолёта, рассматриваемого как материальная точка, приведены результаты численных экспериментов в вертикальной плоскости. Соответствующая задача ОУ решалась методом последовательных приближений [50, 54]. Ниже приведено

сравнение метода последовательных приближений и метода параметризации в рамках модели управления движением самолета [205].

Введем следующие обозначения: x_1 – модуль скорости; x_2 – угол между вектором скорости и горизонтальной осью x_3 , x_4 – высота.

Движение точки на промежутке $[0, T]$ в безразмерных переменных описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1 \equiv -\mu_\sigma(t)\chi(t)x_1^2(c_0 + c_1(u_1^2 + u_2^2)) - \sin(x_2) \\ &\quad + \mu_p(t) \left(1 - \frac{u_1^2}{2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{2}\right), \\ \dot{x}_2 &= f_2 \equiv \mu_\sigma(t)\chi(t)x_1u_1 - \frac{\cos(x_2)}{x_1} + \mu_p(t)\frac{u_1}{x_1}, \\ \dot{x}_3 &= kx_1 \cos(x_2), \\ \dot{x}_4 &= kx_1 \sin(x_2). \end{aligned} \tag{1.45}$$

Определим функции, введенные в (1.45):

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \exp\left(-\frac{x_4(t)}{H}\right), \\ \mu_\sigma(t) &= \begin{cases} \frac{\sigma\tau}{\tau - (1 - \mu_1)t}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{\sigma}{\tau}, & t > \tau; \end{cases} \\ \mu_p(t) &= \begin{cases} \frac{p_0\tau}{\tau - (1 - \mu_1)t}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

На управляющие и фазовые переменные наложены ограничения

$$|u_i(t)| \leq \alpha_i, \quad i = 1, 2; \tag{1.46}$$

$$h_1 \equiv \chi(t) \left(\frac{x_1}{v_m}\right)^2 \leq G; \tag{1.47}$$

$$h_2 \equiv ((f_1 + \sin(x_2))^2 + (x_1 f_2 + \cos(x_2))^2)^{0,5} \leq n_m. \tag{1.48}$$

При условиях (1.45), (1.46), (1.47), (1.48) требуется перевести точку из начального состояния $x(0) = x^0$ в конечное $x_3(T) = x_3^T$, $x_4(T) = 0$ за кратчайшее время T .

Параметры задачи [54]: $H = 6,4$, $k = 9,2$, $c_0 = 0,035$, $c_1 = 1,5$, $\sigma = 10$, $\tau = 1,14$, $\alpha_i = 0,3$, $G = 1$, $\mu_1 = 0,5$, $p_0 = 3,2$, $v_m = 3$, $n_m = 9$. Начальное состояние $x^0 = (1,5; 0; 0; 10)$. Дальность полёта задавалась в трёх вариантах: $x_3^T = 50$, $x_3^T = 200$, $x_3^T = 350$.

Сведем задачу (1.45), (1.46), (1.47), (1.48) к задаче ОУ без ограничений на переменные методом расширения фазового пространства, описанным в [23]. Для этого введём переменную $x_5(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}_5 = ([h_1 - G]^+)^2 + ([h_2 - n_m]^+)^2 + \sum_{i=1}^2 \left(([u_i - \alpha_i]^+)^2 + ([-u_i - \alpha_i]^+)^2 \right), \quad (1.49)$$

удовлетворяющее ограничениям $x_5(0) = x_5(T) = 0$.

От задачи быстродействия с терминальными условиями перейдём к аппроксимирующей задаче минимизации штрафного функционала

$$J = T + C \left((x_3(T) - x_3^T)^2 + x_4^2(T) + x_5^2(T) \right). \quad (1.50)$$

Управление параметризуем в виде

$$u_1(t) = a_0 + a_1 \sin(a_2 t), \quad u_2(t) = b_0 + b_1 \sin(b_2 t). \quad (1.51)$$

Таким образом, исходная функциональная задача свелась к конечномерной относительно параметров $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, T$. Задача минимизации функционала (1.50) при условии (1.45) и соответствующих начальных условиях – это задача безусловной минимизации, для её решения был применен метод Ньютона. Соответствующие задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования 0,01. В функционале (1.50) штрафной коэффициент $C = 1$.

Полученные результаты моделирования приведены в таблице 1.1.2, соответствующие им траектории движения самолета приведены на рисунке 1.1. T_{LC} –

время быстрого действия, полученное в [54]. При этом, точность удовлетворения терминальных условий в [54] равна 0,5.

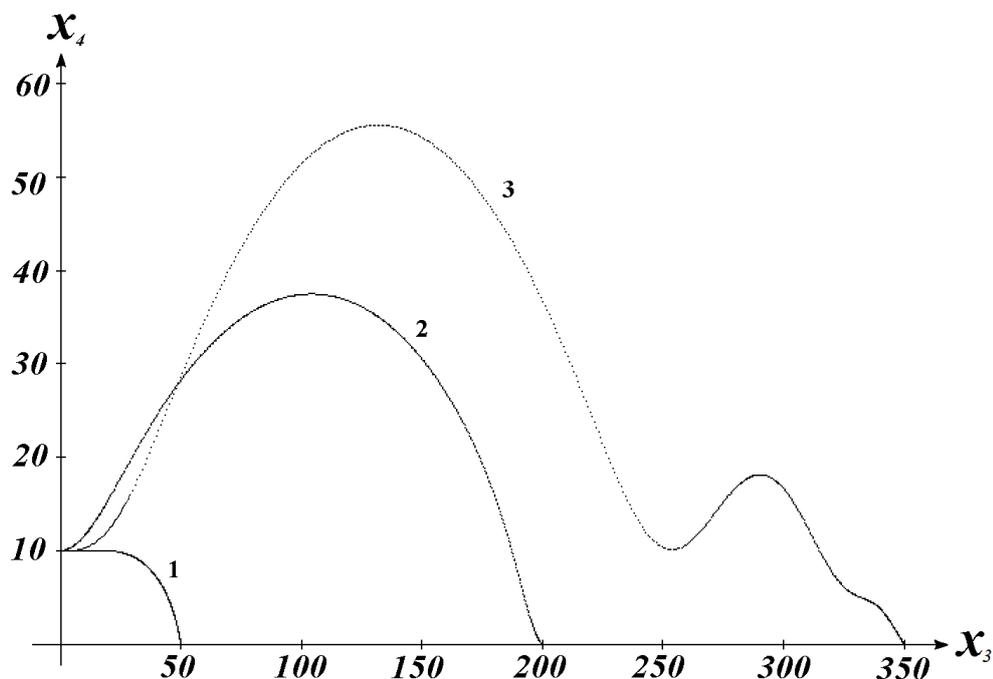


Рис. 1.1: Траектории движения самолета

Таблица 1.1.2: Результаты моделирования управления движением самолета

Задача	x_3^T	$x_3(T)$	$x_4(T)$	T	T_{LC}
1	50	50,0000	0,0000	1,6667	1,73
2	200	199,9983	-0,0003	5,5596	5,54
3	350	349,9999	0,0001	15,1648	19,02

Анализируя результаты, приведенные в таблице 1.1.2, можно сделать вывод, что метод параметризации по сравнению с методом последовательных приближений позволил найти решение с большей точностью для всех случаев и лучшим значением функционала для задач 1 и 3.

1.1.4 Задачи с оптимизируемыми параметрами

При решении задач ОУ иногда наряду с традиционным управлением в виде воздействующих функций, зависящих от времени, в задачу могут входить параметры, требующие оптимизации. Стандартные методы в таких случаях требуют модификации, в методе параметризации модификация не требуется. При применении метода параметризации управление такого вида (параметр, требующий оптимизации) можно считать постоянной величиной на всем горизонте планирования. Однако часть формул в методе параметризации может быть упрощена при таких управлениях.

Рассмотрим задачу ОУ в виде:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), \rho), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.52)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1.53)$$

$$g_l(x(T), \rho) \leq 0, \quad l = 1, \dots, m, \quad (1.54)$$

$$J = g_0(x(T), \rho) \rightarrow \min. \quad (1.55)$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовая переменная, $u(t) \in R^r$ – управляющая вектор-функция, определенные при $t_0 \leq t \leq T$, $\rho \in R^q$ – многомерный вектор параметров.

Если управляющую функцию представить в виде (1.6), (1.7), то фазовая траектория $x(t)$, отвечающая данному управлению и задаче Коши (1.52), будет зависеть как от параметров управления

$$w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \dots, w_{r,d}^k),$$

так и от вектора параметров ρ :

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k, \rho), \quad t_{k-1} \leq t < t_k.$$

Определим функции

$$\varphi_l(w^1, \dots, w^N, \rho) = g_l(z(T; w^1, w^2, \dots, w^{N-1}, v^N, \rho), \rho), \quad 1 \leq l \leq m.$$

В этом случае, исходная задача (1.52)-(1.55) редуцируется в конечномерную задачу нелинейного программирования

$$\begin{cases} \varphi_0(w^1, \dots, w^N, \rho) \rightarrow \min_{(1.6), (1.7)}, \\ \varphi_l(w^1, \dots, w^N, \rho) \leq 0, \quad 1 \leq l \leq m. \end{cases} \quad (1.56)$$

В предыдущих параграфах данной главы обсуждалось в каких случаях к задаче (1.10) можно применять оптимизационные методы, основанные на производных первого и второго порядка. Аналогично можно потребовать, чтобы функции $f(x, u, \rho)$, $g_l(x, \rho)$, $l = 0, 1, \dots, m$, были один раз непрерывно дифференцируемы по всем своим переменным для применения в задаче (1.56) методов, основанных на производных первого порядка. Для применения методов второго порядка к задаче (1.56) требуется, чтобы функции $f(x, u, \rho)$, $g_l(x, \rho)$, $l = 0, 1, \dots, m$, были дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим переменным.

Производные функций в задаче (1.10) по $v_{\nu, \beta}^k$, t_j были получены ранее, их вид в задаче (1.56) не меняется. Поэтому для функций в задаче (1.56) выведем производные первого порядка по параметру ρ_j и смешанные производные второго порядка по параметрам ρ_j , $w_{\nu, \beta}^k$.

Для параметризованной фазовой траектории введем первую вариацию по параметру ρ_j , ($1 \leq j \leq q$):

$$y_\rho^j = \frac{\partial z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k, \rho)}{\partial \rho_j}.$$

Дифференциальное уравнение для первой вариации по параметру ρ_j аналогично соответствующему уравнению для $v_{\nu, \beta}^k$ (1.15) и описывается:

$$\begin{cases} \dot{y}_\rho^j = \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial x} y_\rho^j + \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j}, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ y_\rho^j(t_0) = 0. \end{cases} \quad (1.57)$$

Вывод производных основывается на определении функции Понтрягина,

матричных импульсах (1.20), сопряженных функциях (1.17), а также уравнениях для первых вариаций (1.14), (1.15).

Теорема 3. Пусть функции $f, g_l, l = 0, 1, \dots, t$, входящие в постановку задачи (1.52)-(1.55), дважды непрерывно дифференцируемы по всем переменным и по параметрам ρ , кроме того, функции в параметризованном управлении (1.7) дважды непрерывно дифференцируемы по параметрам $v^k, k = 1, \dots, N$, тогда справедливы следующие формулы:

$$\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N, \rho)}{\partial \rho_j} = \int_{t_0}^T \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j} dt + \frac{\partial g_l(x(T), \rho)}{\partial \rho_j}; \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N, \rho)}{\partial \rho_j \partial t_k} = & \left\langle \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k), \rho)}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}), \rho)}{\partial x}, y_\rho^j(t_k) \right\rangle + \langle \Psi^l(t_k) y_\rho^j(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle + \\ & \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k), \rho)}{\partial \rho_j} - \frac{\partial H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}), \rho)}{\partial \rho_j} + \\ & \int_{t_k}^T \left\{ \left\langle \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j \partial x}, y^{k00}(t) \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle \Psi^l(t) y^{k00}(t), \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j} \right\rangle \right\} dt + \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial \rho_j \partial x}, y^{k00}(T) \right\rangle; \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial \rho_j \partial v_{\nu, \beta}^k} = & \int_{t_{k-1}}^T \left\{ \frac{\partial u_\nu(t)}{\partial v_{\nu, \beta}^k} \left(\left\langle \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial u_\nu \partial x}, y_\rho^j(t) \right\rangle + \right. \right. \\ & \left. + \left\langle \Psi^l(t) y_\rho^j(t), \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial u_\nu} \right\rangle + \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial u_\nu \partial \rho_j} \right) + \\ & \left. + \left\langle \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j \partial x}, y^{k\nu\beta}(t) \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle \Psi^l(t) y^{k\nu\beta}(t), \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j} \right\rangle \right\} dt + \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial \rho_j \partial x}, y^{k\nu\beta}(T) \right\rangle; \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial \rho_j \partial \rho_k} &= \int_{t_0}^T \left\{ \left\langle \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_k \partial x}, y_\rho^j(t) \right\rangle + \right. \\
&+ \left\langle \Psi^l(t) y_\rho^j(t), \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_k} \right\rangle + \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_k \partial \rho_j} + \\
&+ \left\langle \frac{\partial^2 H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j \partial x}, y_\rho^k(t) \right\rangle + \\
&+ \left. \left\langle \Psi^l(t) y_\rho^k(t), \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j} \right\rangle \right\} dt + \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial \rho_j \partial \rho_k} + \\
&+ \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial \rho_j \partial x}, y_\rho^k(T) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial \rho_k \partial x}, y_\rho^j(T) \right\rangle.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Доказательство. Обоснуем вид формулы (1.58), для этого выполним дифференцирование φ_l из задачи НП (1.56) по параметру ρ_j :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N, \rho)}{\partial \rho_j} &= \frac{\partial g_l(x(T), \rho)}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N, \rho)}{\partial \rho_j} + \frac{\partial g_l(x(T), \rho)}{\partial \rho_j}, \\
0 \leq l \leq m, \quad 1 \leq j \leq q.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Воспользуемся свойством постоянства скалярного произведения $\langle p^l(t), y_\rho^j(t) \rangle$ на интервале $[t_0, T]$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial g(x(T), \rho)}{\partial x}, y_\rho^j(T) \right\rangle &= \langle p^l(T), y_\rho^j(T) \rangle = \langle p^l(t), y_\rho^j(t) \rangle = \\
&= \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \langle p, y \rangle dt = \int_{t_0}^T \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j} dt
\end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (1.62), несложно получить (1.58).

Для нахождения формул (1.59), (1.60) следует продифференцировать (1.62) по параметру $w_{\nu, \beta}^k$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N, \rho)}{\partial w_{\nu, \beta}^k \partial \rho_j} &= \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial z^2} y_\rho^j(T), y^{k\nu\beta}(T) \right\rangle + \\
&+ \frac{\partial g_l(x(T), \rho)}{\partial z} \frac{\partial^2 z(T; w^1, \dots, v^N, \rho)}{\partial w_{\nu, \beta}^k \partial \rho_j} + \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial x \partial \rho_j}, y^{k\nu\beta}(T) \right\rangle; \quad (1.63) \\
0 \leq l \leq m \quad (0 \leq \nu \leq r; \quad 1 \leq \beta \leq d; \quad 1 \leq k \leq N; \quad 1 \leq j \leq q).
\end{aligned}$$

В выражении (1.63) присутствуют вторые вариации параметризованной траектории по ρ_j , $w_{\nu, \beta}^k$. Обозначим их

$$\begin{aligned}
Z_\rho^{jk\nu\beta}(t) &= \frac{\partial^2 z(t; w^1, \dots, v^s, \rho)}{\partial \rho_j \partial w_{\nu, \beta}^k}, \quad t_s \leq t < t_{s+1}, \\
k \leq s \leq N-1; \quad 0 \leq \nu \leq r; \quad 1 \leq \beta \leq d; \quad 1 \leq k \leq N; \quad 1 \leq j \leq q.
\end{aligned}$$

Вторые вариации траектории получаются двукратным дифференцированием параметризованной функции $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1}, \rho)$, которая в свою очередь определяется задачей Коши.

Таким образом, вторая вариация траектории по параметрам t_k , ρ_j определяется дифференциальным уравнением

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{Z}_\rho^{jk00} &= \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial x} Z_\rho^{jk00} + [y_\rho^j(t)]^T \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial x^2} y^{k00}(t) + \\
&+ \left\langle \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial x \partial \rho_j}, y^{k00}(t) \right\rangle, \quad t_k \leq t \leq T; \\
Z_\rho^{jk00}(t_k) &= \frac{f(x(t_k), u^k(t_k; v^k), \rho)}{\partial \rho_j} - \frac{f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}), \rho)}{\partial \rho_j} + \\
&+ \left[\frac{f(x(t_k), u^k(t_k; v^k), \rho)}{\partial x} - \frac{f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}), \rho)}{\partial x} \right] y_\rho^j(t_k).
\end{aligned} \right. \quad (1.64)$$

Соответственно, вторая вариация параметризованной траектории по $v_{\nu, \beta}^k$, ρ_j удовлетворяет уравнению динамики

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_\rho^{jk\nu\beta} &= \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial x} Z_\rho^{jk\nu\beta} + [y_\rho^j(t)]^T \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial x^2} y^{k\nu\beta}(t) + \\
&+ \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial u_\nu \partial x} y_\rho^j(t) \frac{\partial u_\nu(t)}{\partial v_{\nu,\beta}^k} + \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j \partial x} y^{k\nu\beta}(t) + \\
&+ \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j \partial u_\nu} \frac{\partial u_\nu(t)}{\partial v_{\nu,\beta}^k}
\end{aligned} \tag{1.65}$$

$t_{k-1} \leq t \leq T,$

с начальным условием $Z_\rho^{jk\nu\beta}(t_{k-1}) = 0$.

Вариации $\{Z_\rho^{jk\nu\beta}(t), y_\rho^j(t), y^{k\nu\beta}(t)\}$ и функции $\{p^l(t), \Psi^l(t)\}$ в совокупности сопряжены друг другу. Сопряженность определяется постоянством значений соответствующих скалярных функций

$$h_{jk\nu\beta}^{l\rho}(t) = \langle p^l(t), Z_\rho^{jk\nu\beta}(t) \rangle + [y_\rho^j(t)]^T \Psi^l(t) y^{k\nu\beta}(t). \tag{1.66}$$

Обоснуем производную (1.59). На основании конечных условий импульсных и сопряженных функций $\{p^l(t), \Psi^l(t)\}$, постоянства скалярного произведения (1.66) следует:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial z^2} y_\rho^j(T), y^{k00}(T) \right\rangle + \frac{\partial g_l(x(T), \rho)}{\partial z} \frac{\partial^2 z(T; w^1, \dots, v^N, \rho)}{\partial t_k \partial \rho_j} = \\
&= \langle p^l(t_k), Z_\rho^{jk00}(t_k) \rangle + \langle \Psi^l(t_k) y_\rho^j(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle + \int_{t_k}^T \frac{d}{dt} (\langle p^l(t), Z_\rho^{jk00}(t) \rangle + \\
&+ \langle \Psi^l(t) y_\rho^j(t), y^{k00}(t) \rangle) dt = \langle p^l(t_k), Z_\rho^{jk00}(t_k) \rangle + \langle \Psi^l(t_k) y_\rho^j(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle + \\
&+ \int_{t_k}^T (\langle \dot{p}^l, Z_\rho^{jk00}(t) \rangle + \langle p^l(t), \dot{Z}_\rho^{jk00} \rangle + \langle \dot{\Psi}^l y_\rho^j(t) + \Psi^l(t) \dot{y}_\rho^j, y^{k00}(t) \rangle + \\
&+ \langle \Psi^l(t) y_\rho^j(t), \dot{y}^{k00} \rangle) dt.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Используя дифференциальные уравнения (1.14), (1.17), (1.20), (1.57), (1.64) преобразуем (1.67). После подстановки полученного соотношения в (1.63) получаем искомую производную второго порядка (1.59).

Аналогично выводится производная (1.60). На основе конечных условий для импульсных и сопряженных функций $\{p^l(t), \Psi^l(t)\}$, а также постоянства скалярного произведения (1.66) формируется цепочка:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial z^2} y_\rho^j(T), y^{k\nu\beta}(T) \right\rangle + \frac{\partial g_l(x(T), \rho)}{\partial z} \frac{\partial^2 z(T; w^1, \dots, v^N, \rho)}{\partial v_{\nu, \beta}^k \partial \rho_j} = \\
& = \int_{t_{k-1}}^T \frac{d}{dt} (\langle p^l(t), Z_\rho^{jk\nu\beta}(t) \rangle + \langle \Psi^l(t) y_\rho^j(t), y^{k\nu\beta}(t) \rangle) dt = \\
& = \int_{t_{k-1}}^T (\langle \dot{p}^l, Z_\rho^{jk\nu\beta}(t) \rangle + \langle p^l(t), \dot{Z}_\rho^{jk\nu\beta} \rangle + \langle \dot{\Psi}^l y_\rho^j(t) + \Psi^l(t) \dot{y}_\rho^j, y^{k\nu\beta}(t) \rangle + \\
& + \langle \Psi^l(t) y_\rho^j(t), \dot{y}^{k\nu\beta} \rangle) dt.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Используя дифференциальные уравнения (1.15), (1.17), (1.20), (1.57), (1.65) преобразуем (1.68). Подставляя полученное выражение в (1.63), получаем искомую производную второго порядка (1.60).

Перейдем к выводу производной второго порядка (1.61), для этого продифференцируем (1.62) по ρ_k :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N, \rho)}{\partial \rho_k \partial \rho_j} = \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial z^2} y_\rho^j(T), y_\rho^k(T) \right\rangle + \\
& + \frac{\partial g_l(x(T), \rho)}{\partial z} \frac{\partial^2 z(T; w^1, \dots, v^N, \rho)}{\partial \rho_k \partial \rho_j} + \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial x \partial \rho_j}, y_\rho^k(T) \right\rangle + \\
& + \left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial x \partial \rho_k}, y_\rho^j(T) \right\rangle + \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial \rho_j \partial \rho_k};
\end{aligned} \tag{1.69}$$

Вторая вариация траектории по параметрам ρ_j, ρ_k

$$\begin{aligned}
Z_\rho^{jk}(t) &= \frac{\partial^2 z(t; w^1, \dots, v^s, \rho)}{\partial \rho_j \partial \rho_k}, \quad t_s \leq t < t_{s+1}, \\
1 \leq s \leq N-1; \quad 1 \leq j, k \leq q.
\end{aligned}$$

определяется дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_\rho^{jk} &= \frac{\partial f(x(t), u(t), \rho)}{\partial x} Z_\rho^{jk} + [y_\rho^j(t)]^T \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial x^2} y_\rho^k(t) + \\
&+ \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_k \partial x} y_\rho^j(t) + \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j \partial x} y_\rho^k(t) + \\
&+ \frac{\partial^2 f(x(t), u(t), \rho)}{\partial \rho_j \partial \rho_k}, \quad t_{k-1} \leq t \leq T,
\end{aligned} \tag{1.70}$$

с начальным условием $Z_\rho^{jk}(t_0) = 0$.

Аналогично обоснуем (1.61). Из конечных условий для сопряженных функций $\{p^l(t), \Psi^l(t)\}$ и постоянства скалярного произведения (1.66) имеем

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial^2 g_l(x(T), \rho)}{\partial z^2} y_\rho^j(T), y_\rho^k(T) \right\rangle + \frac{\partial g_l(x(T), \rho)}{\partial z} \frac{\partial^2 z(T; w^1, \dots, v^N, \rho)}{\partial \rho_k \partial \rho_j} = \\
&= \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} (\langle p^l(t), Z_\rho^{jk}(t) \rangle + \langle \Psi^l(t) y_\rho^j(t), y_\rho^k(t) \rangle) dt = \\
&= \int_{t_0}^T (\langle \dot{p}^l, Z_\rho^{jk}(t) \rangle + \langle p^l(t), \dot{Z}_\rho^{jk} \rangle + \langle \dot{\Psi}^l y_\rho^j(t) + \Psi^l(t) \dot{y}_\rho^j, y_\rho^k(t) \rangle + \\
&+ \langle \Psi^l(t) y_\rho^j(t), \dot{y}_\rho^k \rangle) dt.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Используя дифференциальные уравнения (1.17), (1.20), (1.57), (1.70) преобразуем (1.71). Подставляя преобразованное выражение в (1.69), получаем искомую производную второго порядка (1.61).

Если в исходной задаче ОУ конечный момент времени T является переменным, то, кроме производных (1.59), (1.60), (1.61), следует определить производную по параметрам T, ρ_k :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_l(w^1, \dots, w^N, \rho)}{\partial T \partial \rho_k} &= \frac{\partial H(p(T), x(T), u(T), \rho)}{\partial \rho_k} + \\
&+ \left\langle \frac{\partial H(p(T), x(T), u(T), \rho)}{\partial x} + \Psi(T) f(x(T), u(T), \rho), y_\rho^k(T) \right\rangle.
\end{aligned}$$

□

Пример 1.1.3

Рассмотрим задачу ОУ, предложенную в [43]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = (1, -4), \quad x(T) = (0, 0), \\ |u(t)| \leq \rho, \quad t \in [0; T], \quad J(u, \rho) = 2T + \rho \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Эта задача оптимального управления с фазовыми ограничениями осложнена для стандартных методов наличием оптимизируемого параметра ρ . В методе параметризации наличие параметра ρ , требующего параметризации, включается в общую постановку естественным образом. Для решения проблемы учета ограничений на управление расширим фазовое пространство, в добавленную переменную включим условие на выход за пределы ограничений. В этом случае исходная задача (1.72) примет вид терминальной без ограничений на управление:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = ([u(t) - \rho]^+)^2 + ([-u(t) - \rho]^+)^2, \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -4, \quad x_3(0) = 0, \quad x_1(T) = x_2(T) = x_3(T) = 0, \\ J(u, \rho) = 2T + \rho \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Поставленная задача ОУ решалась методом параметризации в классе кусочно-постоянных управлений вида:

$$u(t) = \begin{cases} v_1, & 0 \leq t < \tau; \\ v_2, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

После параметризации управления задача ОУ аппроксимируется задачей нелинейного программирования, в которой переменными величинами являются параметры управления v_1 , v_2 , τ , T и параметр интенсивности ρ . При решении полученной задачи НП использовался сценарий, заключающийся в последовательном применении градиентного метода и метода Ньютона. Вычисление производных первого и второго порядков проводилось на основе формул, представленных в теоремах 1-3.

Задачи Коши для исходной фазовой системы, сопряженных переменных, первых вариаций вычислялись методом Рунге-Кутты 2-го порядка, шаг интегрирования составил 0,05. Получено приближенное решение в задаче НП: $v_1 = 4,50293$, $v_2 = -4,50132$, $\tau = 1,30357$, $T = 1,71898$, значение целевого функционала на полученном управлении составило $J(u, \rho) = 7,93908$, в [43] результат аналогичен.

1.2 Задача ОУ с точечным запаздыванием

1.2.1 Параметризация задачи

Рассмотрим задачу ОУ с точечным запаздыванием:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad (1.74)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1.75)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0, \quad (1.76)$$

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min. \quad (1.77)$$

Здесь x – фазовая переменная ($x \in R^n$); u – вектор управления ($u \in R^r$); $f : R^{1+2n+r} \rightarrow R^n$, $g : R^n \rightarrow R$, $\psi : R \rightarrow R^n$. Рассматривается динамика x , u при $t_0 \leq t \leq T$. Функция $\psi(t)$ – детерминированная величина, описывающая поведение x до момента начала управления. Скалярная величина $h > 0$, определяет точечное запаздывание системы, в общем случае $h = h(t)$. Решение задачи (1.74)-(1.77) может быть найдено в классе кусочно-непрерывных управляющих функций. Предполагается, что для правой части в уравнении (1.74) выполняется условие сублинейного роста.

Пусть управление (1.75) параметризовано в виде (1.6), (1.7), тогда фазовая траектория $x(t)$, порожденная задачей Коши (1.74), (1.76), принимает зависимость от параметров управления $w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \dots, w_{r,d}^k)$:

$$x(t) = z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Функции $z(\cdot)$ находятся из соотношений:

$$\begin{aligned} z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k) &= \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0; \\ z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k) &= \psi(t_0) + \\ &\int_{t_0}^t f(s, z(s; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k), z(s-h; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k), u^k(s; v^k)) ds, \\ &t_{k-1} \leq t \leq t_k. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)). \quad (1.78)$$

Таким образом, исходная задача (1.74)-(1.77) редуцируется к задаче НП:

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min_W \quad (1.79)$$

Стоит отметить, что множество W определено в задаче (1.10), а формальная функция $\varphi(\cdot)$ определена через систему дифференциальных уравнений (1.74), (1.76).

1.2.2 Производные по параметрам управления

Предположим, что задачи Коши (1.74), (1.76) с управлениями (1.75) разрешимы при любых параметрах (w^1, \dots, w^N) , тогда функция $\varphi(w^1, \dots, w^N)$ является непрерывно дифференцируемой и к задаче (1.79) можно применять методы оптимизации, основанные на использовании градиента.

При непосредственном дифференцировании (1.78) по параметру $w_{\mu, \alpha}^k$ ($1 \leq k \leq N$, $0 \leq \mu \leq r$, $0 \leq \alpha \leq d$) получим:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k} = \frac{\partial g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k}. \quad (1.80)$$

Производные $\frac{\partial z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k}$ являются вариациями траектории, порожденной системой (1.74)-(1.76). Введем обозначения для вариаций

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k}, \quad t_{k-1} \leq t < t_k.$$

Вариации по параметрам $w_{0,0}^k = t_k$ нетривиальны при $t \geq t_k$ и определены соотношением:

$$\begin{aligned} y^{k00}(t) = & f(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - \\ & f(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) + \\ & \int_{t_k}^t \left(\frac{\partial f(\tau, x, \xi, u(\tau))}{\partial x} y^{k00}(\tau) \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} + \right. \\ & \left. \frac{\partial f(\tau, x, \xi, u(\tau))}{\partial \xi} y^{k00}(\tau - h) I(\tau \in [t_k + h; T]) \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Здесь и далее функция $I(\eta)$ представляет собой индикаторную функцию:

$$I(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta \text{ — истина;} \\ 0, & \text{если } \eta \text{ — ложь.} \end{cases}$$

По параметрам $v_{\mu, \alpha}^k$ вариации нетривиальны при $t \geq t_{k-1}$ и определяются:

$$\begin{aligned} y^{k\mu\alpha}(t) = & \int_{t_{k-1}}^t \left(\frac{\partial f(\tau, x, \xi, u(\tau))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(\tau) \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} + \right. \\ & \frac{\partial f(\tau, x(\tau), x(\tau - h), u(\tau))}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\mu}^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} I(\tau \in [t_{k-1}; t_k]) + \\ & \left. \frac{\partial f(\tau, x, \xi, u(\tau))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(\tau - h) I(\tau \in [t_{k-1} + h; T]) \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Таким образом, для вычисления производных функционала (1.78) по переменным $w_{\mu,\alpha}^k$ требуется вычисление задач Коши (1.81), (1.82). В совокупности количество задач Коши совпадает с количеством управляющих параметров $w_{\mu,\alpha}^k$. Данная процедура является достаточно трудоемкой, приводит к большим временным вычислениям. Проблему можно упростить за счет введения сопряженных переменных $p(t)$.

Введем функцию Понтрягина [59]:

$$H(t, p, x, \xi, u) = \langle p, f(t, x, \xi, u) \rangle$$

и сопряженную систему на $t_0 \leq t \leq T$:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H(p(t), x, \xi, u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x(t), \xi=x(t-h)} \\ - \frac{\partial H(p(t+h), x, \xi, u(t+h))}{\partial \xi} I(t \in [t_0; T-h]) \Big|_{x=x(t+h), \xi=x(t)}. \end{cases} \quad (1.83)$$

Для сопряженных переменных сформулируем задачу Коши, добавив к системе дифференциальных уравнений (1.83) конечное условие

$$p(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x(T)}. \quad (1.84)$$

В терминах введенных функций докажем теорему.

Теорема 4. Пусть функции f, g , входящие в постановку задачи (1.74)-(1.77), непрерывно дифференцируемы по всем переменным, кроме того, функции в параметризованном управлении (1.7) непрерывно дифференцируемы по параметрам v^k , $k = 1, \dots, N$. Тогда для вычисления первых производных целевого функционала (1.78) по моменту переключения t_k верна формула:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - \quad (1.85)$$

$$H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}));$$

по конечному моменту T :

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = H(T, p(T), x(T), x(T-h), u^N(T, v^N)); \quad (1.86)$$

по параметру параметризации $v_{\mu, \alpha}^k$ управляющей функции:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, p(\tau), x(\tau), x(\tau-h), u(\tau))}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\mu}^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau. \quad (1.87)$$

Доказательство. Выведем формулу прозводной по параметрам t_k .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= \langle p(T), y^{k00}(T) \rangle = \langle p(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle + \\ &\int_{t_k}^T \frac{d}{d\tau} \langle p(\tau), y^{k00}(\tau) \rangle d\tau = \langle p(t_k), f(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)) - \\ &f(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) \rangle + \\ &\int_{t_k}^T (\langle \dot{p}(\tau), y^{k00}(\tau) \rangle + \langle p(\tau), \dot{y}^{k00}(\tau) \rangle) d\tau = \\ &H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)) - \\ &H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) + \\ &\int_{t_k}^T \left(\left\langle - \frac{\partial H(p(\tau), x, \xi, u(\tau))}{\partial x} \right|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} - \right. \\ &\left. \frac{\partial H(p(\tau+h), x, \xi, u(\tau+h))}{\partial \xi} I(\tau \in [t_0; T-h]) \right|_{x=x(\tau+h), \xi=x(\tau)}, y^{k00}(\tau) \rangle + \end{aligned}$$

$$\left\langle p(\tau), \frac{\partial f(\tau, x, \xi, u(\tau))}{\partial x} y^{k00}(\tau) \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} + \right. \\ \left. \frac{\partial f(\tau, x, \xi, u(\tau))}{\partial \xi} y^{k00}(\tau-h) I(\tau \in [t_k + h; T]) \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} \right\rangle d\tau =$$

$$H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})).$$

Производная по параметрам $v_{\mu, \alpha}^k$:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T) \rangle = \langle p(t_k), y^{k\mu\alpha}(t_k) \rangle + \\ \int_{t_k}^T \frac{d}{d\tau} \langle p(\tau), y^{k\mu\alpha}(\tau) \rangle = \int_{t_k}^T (\langle \dot{p}(\tau), y^{k\mu\alpha}(\tau) \rangle + \langle p(\tau), \dot{y}^{k\mu\alpha}(\tau) \rangle) d\tau = \\ \int_{t_k}^T \left(\left\langle - \frac{\partial H(p(\tau), x, \xi, u(\tau))}{\partial x} \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial H(p(\tau+h), x, \xi, u(\tau+h))}{\partial \xi} I(\tau \in [t_0; T-h]) \Big|_{x=x(\tau+h), \xi=x(\tau)}, y^{k\mu\alpha}(\tau) \right\rangle + \right. \\ \left. \left\langle p(\tau), \frac{\partial f(\tau, x, \xi, u(\tau))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(\tau) \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial f(\tau, x(\tau), x(\tau-h), u(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} I(\tau \in [t_{k-1}; t_k]) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial f(\tau, x, \xi, u(\tau))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(\tau-h) I(\tau \in [t_k + h; T]) \Big|_{x=x(\tau), \xi=x(\tau-h)} \right\rangle \right) d\tau = \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), x(\tau-h), u(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau.$$

Формула (1.86) получается при непосредственном учете соотношений (1.74), (1.84).

□

Таким образом, вычисление градиента в задаче оптимального управления с точечным запаздыванием сводится к последовательному решению задач Коши по фазовой переменной (1.74), (1.76), сопряженной (1.83), (1.84) и вычислению интегралов (1.87), что существенным образом сокращает объем вычислений по сравнению с вычислением градиента на основе вычисления вариаций (1.81), (1.82).

Пример 1.2.1 Покажем применение метода параметризации с точечным запаздыванием на тестовом примере, взятом из работы [181]. Рассмотрим систему дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) - u_1(t) + u_2(t); \\ u_1(t) &= 2x(t) - 2u_1(t-h) + 4u_2(t-h); \\ u_2(t) &= x(t) - u_1(t-h) + 2u_2(t-h); \end{aligned} \tag{1.88}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= -h + h^2; \\ u_1(t) &= 3 + 4t, \quad t \in [-h; 0); \\ u_2(t) &= 1 + t, \quad t \in [-h; 0). \end{aligned} \tag{1.89}$$

Требуется найти решение $x(t)$, $u(t)$ системы (1.88), (1.89) на отрезке $[0; T]$ при лаге запаздывания h в переменной $u(t)$.

В работе [207] рассматривался алгоритм сведения исходной системы ДАУ(1.88), (1.89) к задаче оптимального управления. Обозначим $x_1 = x$ и введем переменную x_2 :

$$\dot{x}_2 = (2x_1(t) - 2u_1(t-h) + 4u_2(t-h) - u_1(t))^2 + (x_1(t) - u_1(t-h) + 2u_2(t-h) - u_2(t))^2$$

с начальным условием $x_2(0) = 0$.

В введенных выше обозначениях можно поставить задачу ОУ с терминальным функционалом в виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1(t) - u_1(t) + u_2(t); \\
 \dot{x}_2 &= (2x_1(t) - 2u_1(t-h) + 4u_2(t-h) - u_1(t))^2 \\
 &\quad + (x_1(t) - u_1(t-h) + 2u_2(t-h) - u_2(t))^2; \\
 x_1(0) &= -h + h^2, \quad x_2(0) = 0, \quad u_1(\tau) = 3 + 4\tau, \quad u_2(\tau) = 1 + \tau, \quad \tau \in [-h; 0); \\
 x_2(T) &\rightarrow \min.
 \end{aligned} \tag{1.90}$$

Если исходная система (1.88), (1.89) имеет решение, тогда целевой функционал задачи (1.90) на этом решении равен нулю, что является абсолютным минимумом функционала, следовательно, решение поставленной задачи ОУ (1.90) эквивалентно решению ДАУ. В случае если система ДАУ (1.88), (1.89) решения не имеет, то решение задачи ОУ (1.90) будет псевдорешением системы (1.88), (1.89), которое дает минимальную в среднеквадратическом смысле невязку алгебраической части системы.

Поставленная задача ОУ (1.90) носит вырожденный характер (принцип максимума Понтрягина не дает существенную информацию: условие максимума тождественно равно нулю на оптимальной траектории), таким образом, применение стандартных методов решения задач ТООУ становится невозможным. Полученная задача ОУ решалась методом параметризации при различных видах параметризации. Рассматривались вариации решений задачи при двух видах управления:

- линейное управление (размерность параметризации одной координаты управления равна 2);
- квадратичное управление (размерность параметризации одной координаты управления равна 3);

и различного количества моментов переключения управления:

- 1 момент переключения управления;
- 2 момента переключения управления.

Для численного эксперимента время наблюдения процесса фиксировалось на период $T = 1$, лаг запаздывания h варьировался на нескольких уровнях.

На первом этапе происходила параметризация управления, строилась конечномерная задача НП, на втором – задача НП решалась градиентным методом и методом Ньютона последовательно. При этом вычисление градиента происходило по формулам (1.85), (1.87). В методе Ньютона матрица Гессе вычислялась на основе разностной аппроксимации соответствующими градиентами по формулам (1.85), (1.87). Для оценки анализируемого примера и эффективности метода рассмотрим таблицу 1.2.3 и таблицу 1.2.4.

Первый столбец табл. 1.2.3 содержит параметризованный вид управления, при котором проводились вычислительные эксперименты, во втором столбце указаны модельные лаги запаздывания системы. Основные данные табл. 1.2.3 – значения функционала решаемой задачи ОУ (невязка алгебраической части рассматриваемого примера) при различных лагах запаздывания системы h и шагах интегрирования Δt . В вычислительном эксперименте использовалось три шага интегрирования (0,01; 0,005; 0,002), этот параметр необходим, так как задачи Коши в (1.90) и интегралы (1.87) вычисляются численно: задачи Коши методом Рунге-Кутты 2-го порядка, интегралы методом Симпсона.

Анализ данных в табл. 1.2.3 показывает, что процесс решения задачи методом параметризации является устойчивым: с уменьшением шага интегрирования увеличивается точность расчетов, и уменьшается функционал; с усложнением параметрического представления управляющей функции увеличивается точность аппроксимации неизвестного решения, и уменьшается целевой функционал.

При этом следует отметить, что при увеличении лага запаздывания проис-

Таблица 1.2.3: Значение функционала в задаче (1.90)

Параметризация управления	h	Δt		
		0,01	0,005	0,001
линейное управление с одним моментом переключения	0,1	$3,0594 \cdot 10^{-7}$	$2,8670 \cdot 10^{-7}$	$2,7797 \cdot 10^{-7}$
	0,3	$6,8041 \cdot 10^{-5}$	$6,7493 \cdot 10^{-5}$	$6,7307 \cdot 10^{-5}$
	0,5	$8,4106 \cdot 10^{-4}$	$8,6700 \cdot 10^{-4}$	$8,3637 \cdot 10^{-4}$
линейное управление с двумя моментами переключения	0,1	$2,5100 \cdot 10^{-8}$	$1,9245 \cdot 10^{-8}$	$1,7526 \cdot 10^{-8}$
	0,3	$4,4043 \cdot 10^{-6}$	$4,2653 \cdot 10^{-6}$	$4,2200 \cdot 10^{-6}$
	0,5	$5,4889 \cdot 10^{-5}$	$5,4278 \cdot 10^{-5}$	$5,4051 \cdot 10^{-5}$
квадратичное управление с одним моментом переключения	0,1	$1,2023 \cdot 10^{-9}$	$7,7235 \cdot 10^{-11}$	$1,4670 \cdot 10^{-13}$
	0,3	$3,7005 \cdot 10^{-9}$	$2,3301 \cdot 10^{-10}$	$3,7583 \cdot 10^{-13}$
	0,5	$6,1816 \cdot 10^{-9}$	$3,9196 \cdot 10^{-10}$	$4,4879 \cdot 10^{-12}$

ходит ухудшение найденного решения (увеличение целевого функционала), что является следствием усложнения качеств исходной проблемы при увеличении лага запаздывания h .

Таблица 1.2.4: Время проведения эксперимента в задаче (1.90)

Параметризация управления	h	Δt		
		0,01	0,005	0,002
линейное управление с одним моментом переключения	0,1	3	7	10
	0,3	1	4	9
	0,5	1	2	5
линейное управление с двумя моментами переключения	0,1	6	13	26
	0,3	4	8	20
	0,5	4	11	14
квадратичное управление с одним моментом переключения	0,1	3	10	19
	0,3	5	14	14
	0,5	5	11	17

Первый столбец табл. 1.2.4 содержит параметризованный вид управления, при котором проводились вычислительные эксперименты, во втором столбце указаны модельные лаги запаздывания системы. Основные данные табл. 1.2.4

– условное время при решении задачи оптимального управления (например, секунды) приведены при различных шагах интегрирования (0, 01; 0, 005; 0, 002).

Анализ табл. 1.2.4 показывает, что при уменьшении шага интегрирования увеличивается время на решение задачи, что вполне естественно; с усложнением параметризации время решения в целом также увеличивается. При этом стоит заметить, что время на решение задачи при линейном управлении с двумя переключениями (8 параметров) эквивалентно времени при квадратичной параметризации с одним переключением (13 параметров), а из табл. 1.2.3 видно, что точность решения при квадратичной параметризации выше, чем при линейной. Последнее означает, что усложнение вида управляющих функций часто приводит к более высокой степени точности решения без временных потерь.

1.3 Задача ОУ с распределенным запаздыванием

1.3.1 Параметризация задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы, имеющей связи, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. Требуется минимизировать функционал

$$J = g(x(T)) \quad (1.91)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \psi \left(t, x(t), u(t), \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds \right), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (1.92)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (1.93)$$

Будем считать, что фазовая переменная $x \in R^n$, вектор параметров управления $u \in R^r$, множество U замкнуто в R^r . Функции $\psi : R^{1+n+r+m} \rightarrow R^n$,

$f : R^{2+n+r} \rightarrow R^m$ и $g : R^n \rightarrow R$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы по всем переменным в некоторых областях соответствующих пространств, при этом область дифференцируемости должна охватывать множество допустимых процессов $\{u(t), x(t)\}$. Предполагается, что задача (1.91)-(1.93) разрешима в классе кусочно непрерывных функций $u(t)$. Каждому допустимому управлению $u(t)$ отвечает траектория $x(t)$ системы (1.92), определенная на $[t_0, T]$.

При подстановке параметризованного управления (1.6), (1.7) в (1.92) получается траектория $x(t)$, зависящая от параметров управления $w^k = (t_k, v^k)$. Координаты полного вектора параметров будем обозначать $w_{0,0}^k = t_k$, $w_{\mu,\alpha}^k = v_{\mu,\alpha}^k$, $1 \leq \mu \leq r$, $1 \leq \alpha \leq d$. Если момент окончания процесса управления T подвержен изменению, то общее количество параметров управления будет $(rd + 1)N$. Отвечающую им траекторию представим в виде

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k. \quad (1.94)$$

Функция $z(t; v^1, \dots, t_{k-1}, v^k)$ определяется на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$ соотношениями, эквивалентными в совокупности задаче Коши (1.92).

$$z(t; v^1, \dots, t_{k-1}, v^k) = x^0 + \int_{t_0}^t \left(\psi(\tau, z(\tau; v^1, \dots, t_{k-1}, v^k), u^k(\tau, v^k), \int_{t_0}^{\tau} f(\tau, s, z(s; v^1, \dots, t_{k-1}, v^k), u(s)) ds) \right) d\tau, \quad t_{k-1} \leq t < t_k. \quad (1.95)$$

Введем функцию

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)). \quad (1.96)$$

В этом случае задача (1.91)-(1.93) формально принимает форму задачи нелинейного программирования:

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min_W. \quad (1.97)$$

Отметим, что множество W определено в задаче (1.10), формальная функция $\varphi(\cdot)$ непосредственно определена через систему интегродифференциальных уравнений (1.92).

Для решения полученной конечномерной задачи можно применять методы, использующие первые (и вторые) производные целевого функционала. Однако, построение производных представляет собой отдельную проблему, в силу того, что целевой функционал задан опосредованно относительно переменных w^1, w^2, \dots, w^N .

1.3.2 Дифференцирование функционала по параметрам

Продифференцируем функцию (1.96) по одному из параметров $w_{\mu,\alpha}^k$:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial w_{\mu,\alpha}^k} = \frac{\partial g(z(T; w^1, \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial w_{\mu,\alpha}^k}. \quad (1.98)$$

Введем функции

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; w^1, \dots, v^j)}{\partial w_{\mu,\alpha}^k}, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad 1 \leq k \leq j \leq N. \quad (1.99)$$

Функции (1.99) являются вариациями фазовой параметризованной траектории относительно управляющих параметров $w_{\mu,\alpha}^k$. В этом случае вычисление градиента функции (1.96) может быть сведено к вычислению конечных значений вариации $y^{k\mu\alpha}(T)$, $0 \leq \mu \leq r$, $1 \leq \alpha \leq d$, $1 \leq k \leq N$.

Представим функцию (1.95) для $t \geq t_{k-1}$ в виде

$$\begin{aligned}
 z(t; \cdot) = & z(t_{k-1}; \cdot) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\psi(\tau, z(\tau; \cdot), u(\tau), \int_{t_0}^{\tau} f(\tau, s, z(s; \cdot), u(s)) ds) \right) d\tau \\
 & + \int_{t_k}^t \left(\psi(\tau, z(\tau; \cdot), u(\tau), \int_{t_0}^{t_k} f(t_k, s, z(s; \cdot), u(s)) ds \right. \\
 & \left. + \int_{t_k}^{\tau} f(\tau, s, z(s; \cdot), u(s)) ds) \right) d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.100}$$

Введем обозначение $q(t) = \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds$ и продифференцируем равенство (1.100) по переменной t_k , тогда для вариации по этой переменной получаем задачу Коши

$$\begin{aligned}
 y^{k00}(t) = & \frac{\partial z(t; \cdot)}{\partial t_k} = \\
 & \psi(t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k), q(t_k)) - \psi(t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}), q(t_k)) + \\
 & \int_{t_k}^t \left(\frac{\partial \psi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial x} y^{k00}(\tau) + \frac{\partial \psi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial q} \times \right. \\
 & \left(f(\tau, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - f(\tau, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) \right) \\
 & \left. + \int_{t_k}^{\tau} \frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) ds \right) d\tau,
 \end{aligned}$$

которую можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{k00}(t_k) = \\ \psi(t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k), q(t_k)) - \psi(t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}), q(t_k)), \\ \dot{y}^{k00}(t) = \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} y^{k00}(t) + \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \times \\ (f(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - f(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}))) \\ + \int_{t_k}^t \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) ds). \end{array} \right. \quad (1.101)$$

Для нахождения вариации по параметрам управления продифференцируем равенство (1.100) по переменной $v_{\mu, \alpha}^k$

$$\begin{aligned} y^{k\mu\alpha}(t) = & \int_{t_{k-1}}^t \left(\frac{\partial \psi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(\tau) + \frac{\partial \psi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial u_\mu} \times \right. \\ & \left. \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} I_{k-1}^k(\tau) + \frac{\partial \psi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial q} \int_{t_{k-1}}^\tau \left(\frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} I_{k-1}^k(s) \right) ds \right) d\tau, \end{aligned} \quad (1.102)$$

здесь функция $I_{k-1}^k(s) = 1$, если $s \in [t_{k-1}; t_k)$, 0 в противном случае. Тогда, получаем задачу Коши для вариации по переменной $v_{\mu, \alpha}^k$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{y}^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial\psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \\
\frac{\partial\psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I_{k-1}^k(t) + \\
\frac{\partial\psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \times \int_{t_{k-1}}^t \left(\frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \right. \\
\left. \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I_{k-1}^k(s) \right) ds, \\
y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0.
\end{array} \right. \quad (1.103)$$

Полученные формулы (1.101), (1.103) позволяют найти требуемые значения $y^{k\mu\alpha}(T)$, тем самым решить проблему построения градиента целевого функционала в задаче (1.97). Однако, данный подход является недостаточно эффективным с точки зрения объема вычислений для нахождения градиента, так как для построения градиента кроме задачи Коши (1.92) требуется также вычисление $N(rd + 1)$ задач Коши (1.101), (1.103).

Для дальнейших преобразований представим систему (1.92) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{x}(t) = \psi(t, x(t), u(t), q(t)), \\
\dot{q}(t) = f(t, t, x(t), u(t)) + \int_{t_0}^t \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial t} ds, \\
x(t_0) = x^0, \quad q(t_0) = 0.
\end{array} \right. \quad (1.104)$$

Обозначим

$$h(t, s, x, u) = \frac{\partial f(t, s, x, u)}{\partial t}.$$

Учитывая представление (1.104) для задачи (1.91)-(1.93), введем функцию Понтрягина [29]

$$H(t, x, q, u, p_x, p_q) = \langle p_x(t), \psi(t, x, u, q) \rangle + \langle p_q(t), f(t, t, x, u) \rangle + \int_t^T \langle p_q(s), h(s, t, x, u) \rangle ds. \quad (1.105)$$

Здесь функция $p(t) = (p_x(t), p_q(t))$ является сопряжённой относительно систем в вариациях (1.101), (1.103) и определяется линейными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(t) &= - \frac{\partial H(t, x(t), q(t), u(t), p_x(t), p_q(t))}{\partial x}, \\ \dot{p}_q(t) &= - \frac{\partial H(t, x(t), q(t), u(t), p_x(t), p_q(t))}{\partial q}. \end{aligned}$$

С учетом определения (1.105) это интегро-дифференциальные уравнения

$$\dot{p}_x(t) = - \left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} \right]^T p_x(t) - \quad (1.106)$$

$$\left[\frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(t) - \int_t^T \left[\frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(s) ds;$$

$$\dot{p}_q(t) = - \left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \right]^T p_x(t). \quad (1.107)$$

Определение функции $p(t)$ зависит от конечного состояния, введём его в виде:

$$p_x(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}, \quad p_q(T) = 0. \quad (1.108)$$

Теорема 5. Пусть функции f, g, ψ , входящие в постановку задачи (1.91)-(1.92), непрерывно дифференцируемы по всем переменным, кроме того, функции в параметризованном управлении (1.7) непрерывно дифференцируемы

по параметрам v^k , $k = 1, \dots, N$. Тогда для вычисления первых производных целевого функционала (1.78) по моменту переключения t_k верна формула:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k - 0), p_x(t_k), p_q(t_k)) - \quad (1.109)$$

$$H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k + 0), p_x(t_k), p_q(t_k));$$

по конечному моменту T :

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = H(T, x(T), q(T), u(T), p_x(T), p_q(T)); \quad (1.110)$$

по параметру параметризации $v_{\mu, \alpha}^k$ управляющей функции формула:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), q(\tau), u(\tau), p_x(\tau), p_q(\tau))}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\mu}^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau. \quad (1.111)$$

Доказательство. Пусть $(x(t), q(t))$ – решение задачи (1.104), тогда для любой липшицевой функции $p = (p_x, p_q) : R \rightarrow R^{n+m}$ имеет место равенство (см. [29]):

$$\begin{aligned} & \langle p_x(T), x(T) \rangle + \langle p_q(T), q(T) \rangle - \langle p_x(t_0), x(t_0) \rangle = \\ & = \int_{t_0}^T \left(\langle \dot{p}_x(t), x(t) \rangle + \langle \dot{p}_q(t), q(t) \rangle + \langle p_x(t), \psi(t, x(t), u(t), q(t)) \rangle + \right. \\ & \left. \langle p_q(t), f(t, t, x(t), u(t)) \rangle + \int_t^T \langle p_q(s), h(s, t, x(t), u(t)) \rangle ds \right) dt. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Для вывода формулы производной целевого функционала задачи (1.97) по переменной t_k рассмотрим функцию $y^{k00}(t)$ (1.101), воспользуемся соотношением (1.112), подставим (1.106), (1.107) и найдем выражение

$$\begin{aligned}
\langle p_x(T), y^{k00}(T) \rangle - \langle p_x(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle &= \int_{t_k}^T \left(\langle \dot{p}_x(t), y^{k00}(t) \rangle + \right. \\
\left. \left\langle \dot{p}_q(t), \int_{t_k}^t \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) ds \right\rangle + \left\langle p_q(t), \frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) \right\rangle \right) \\
+ \int_t^T \left\langle p_q(s), \frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) \right\rangle ds \\
+ \left\langle p_x(t), \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} y^{k00}(t) + \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \times \right. \\
\left. \left(f(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - f(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) \right) + \right. \\
\left. \int_{t_k}^t \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) ds \right\rangle dt = \int_{t_k}^T \left\langle p_x(t), \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \right. \\
\left. \times \left(f(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - f(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) \right) \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Используя полученное соотношение, выражения (1.98), (1.99), конечное условие (1.108), начальное (1.101) и определение функции Понтрягина (1.105) нетрудно получить формулу частной производной по переменной t_k ($1 \leq k < N$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= \frac{\partial g(z(T; \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial t_k} = \langle p_x(T), y^{k00}(T) \rangle = \\ &\int_{t_k}^T \left\langle p_x(t), \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \left(f(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - \right. \right. \\ &\left. \left. f(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) \right) \right\rangle dt + \langle p(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle = \\ &H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k - 0), p_x(t_k), p_q(t_k)) - \\ &H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k + 0), p(t_k), p_q(t_k)). \end{aligned}$$

Последнее показывает корректность формулы (1.109).

Чтобы вывести производную по параметрам $v_{\mu\alpha}^k$ можно ввести обозначение

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t) &= \int_{t_{k-1}}^t \left(\frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \right. \\ &\left. \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} I_{k-1}^k(s) \right) ds. \end{aligned}$$

С учетом введенной функции $\tilde{q}(t)$ к вариации $y^{k\mu\alpha}(t)$ (1.103) применим соот-

ношение (1.112), подставим (1.106) и вычислим выражение

$$\begin{aligned}
\langle p_x(T), y^{k\mu\alpha}(T) \rangle - \langle p_x(t_{k-1}), y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) \rangle &= \int_{t_{k-1}}^T \left[\langle \dot{p}_x(t), y^{k\mu\alpha}(t) \rangle + \right. \\
&\langle \dot{p}_q(t), \tilde{q}(t) \rangle + \left\langle p_x(t), \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \right. \\
&\left. \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \tilde{q}(t) + \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} I_{k-1}^k(t) \right\rangle + \\
&\left\langle p_q(t), \frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} I_{k-1}^k(t) \right\rangle \\
&+ \int_t^T \left\langle p_q(s), \frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \right. \\
&\left. \frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} I_{k-1}^k(t) \right\rangle ds \Big] dt = \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\left\langle p_x(t), \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial u_\mu} \right\rangle + \left\langle p_q(t), \frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \right\rangle \right. \\
&\left. + \int_t^T \left\langle p_q(s), \frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \right\rangle ds \right] \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} dt.
\end{aligned}$$

Используя полученное соотношение, выражения (1.98), (1.99), конечное условие (1.108), начальное (1.103) и определение функции Понтрягина (1.105), аналогично частной производной по переменной t_k , найдем частные производные

первого порядка по переменным $v_{\mu\alpha}^k$ ($0 \leq \mu \leq r$, $1 \leq \alpha \leq d$, $1 \leq k \leq N$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} &= \frac{\partial g(z(T; \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} = \\ \langle p_x(T), y^{k\mu\alpha}(T) \rangle &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(t, x(t), q(t), u(t), p_x(t), p_q(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (1.111) доказана.

Если конечный момент времени T является подвижным, то вариация фазовой траектории по T конечна

$$y^{N00}(T) = \psi \left(T, x(T), u(T), \int_{t_0}^T f(T, s, x(s), u(s)) ds \right),$$

и производная находится по формуле

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = \left\langle p_x(T), \psi \left(T, x(T), u(T), \int_{t_0}^T f(T, s, x(s), u(s)) ds \right) \right\rangle.$$

□

Теперь для вычисления производных (1.98) требуется решить помимо основной задачи Коши (1.92), (1.7) дополнительно задачу (1.106), (1.108) и определить функцию (1.105). После этого, вычисление градиента сводится к вычислению определенных интегралов (1.111), (1.110), а также значений (1.109). Приведенный алгоритм менее трудоемок по сравнению с прямым вычислением по формулам (1.101), (1.103).

Пример 1.3.1 Рассмотрим тестовый пример (построен на основе примера из [16]):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) + \int_0^t (tu(s) + x_1(s) + 1 - s - t) \exp\{s(t-s)\} ds, \\ \dot{x}_2(t) = (tx_1(t) - u(t) - t^2 + t + 1)^2, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_2(1) \rightarrow \inf. \end{cases}$$

Решение этой задачи известно: $u^*(t) = t \exp\{t^2\} + 1$, $x_1^*(t) = \exp\{t^2\} - 1 + t$, $x_2^*(t) \equiv 0$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что минимальное значение целевого функционала равно нулю.

Решение строилось на отрезке $[0; 1]$ в классе кусочно-линейных

$$u(t) = v_{0k} + v_{1k}t, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

и кусочно-квадратичных управлений

$$u(t) = v_{0k} + v_{1k}t + v_{2k}t^2, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

при $N = 2, 3$.

Для нахождения решения использовался поэтапный алгоритм усложнения параметризации управления:

- на первом этапе решение находилось при $N = 2$, т.е. управление параметризовалось в классе кусочно-линейных с одним моментом переключения управления функций, таким образом, задача НП содержала 5 переменных.
- решение, полученное на первом этапе использовалось в качестве начального приближения для кусочно-линейного управления с двумя моментами переключения и для кусочно-квадратичного управления с одним моментом переключения.
- на втором этапе решение строилось при $N = 3$ для кусочно-линейного управления с двумя переключениями, задача НП в этом случае име-

ла 8 переменных. Также строилось решение при $N = 2$ для кусочно-квадратичного управления с одним моментом переключения, задача НП имела 7 переменных.

- на третьем этапе управление параметризовалось в классе кусочно-квадратичных функций с двумя переключениями. В качестве начального приближения использовалось соответствующее решение, полученное на предыдущем этапе для $N = 2$. Задача НП имела 11 переменных.

Все задачи НП решались методом Ньютона, матрица вторых производных вычислялась на основе градиентов разностными аппроксимациями. Численный эксперимент проводился при двух способах вычисления градиента: первый основывался на использовании формул (1.109), (1.111), второй на численном дифференцировании – аппроксимации градиента на основе вычисления значений целевой функции (1.97).

Введем обозначения: Δt – шаг интегрирования задач Коши для (1.92), (1.106) (Интегрирование выполнялось методом Рунге-Кутты 2-го порядка. В силу того, задачи (1.92), (1.106) «имеют память», приходилось сохранять решения для переменных x и p на некоторой сетке, если требовалось какое-то промежуточное значение фазовой и сопряженной переменных, то они вычислялись линейной интерполяцией по сохраненным значениям); J – значение функционала (1.97) на полученном решении; N_C – число полных задач Коши на интервале $[0; 1]$; N_I – число полных интегралов на $[0; 1]$ (по формулам (1.111)); $\Delta u = \max_{k \in K} |u^*(t_k) - u(t_k)|$; $\Delta x_1 = \max_{k \in K} |x_1^*(t_k) - x_1(t_k)|$. Здесь $K = \{1, 2, \dots, 51\}$, $t_k = t_0 + (k - 1)(T - t_0)/50$. Результаты эксперимента приведены в таблицах 1.3.5, 1.3.6.

Анализируя данные, приведенные в таблицах 1.3.5, 1.3.6, можно отметить, что оба способа вычисления градиента приводят к приемлемому решению и, с точки зрения значения целевого функционала дают эквивалентные результаты при кусочно-линейной параметризации с одним моментом переключения.

Таблица 1.3.5: Результаты решения (первый способ)

функция управления	Δt	J	N_C	N_I	Δu	Δx_1
линейная с одним переключением	0,005	0,002652	379	288	0,164	0,0068
	0,01	0,002663	343	288	0,164	0,0068
	0,05	0,002705	376	320	0,163	0,0067
линейная с двумя переключениями	0,005	0,000502	1593	1500	0,070	0,0023
	0,01	0,000507	953	850	0,070	0,0020
	0,05	0,000525	677	600	0,070	0,0019
квадратичная с одним переключением	0,005	0,000063	824	1122	0,025	0,0007
	0,01	0,000064	609	792	0,026	0,0006
	0,05	0,000075	598	792	0,032	0,0013
квадратичная с двумя переключениями	0,005	0,000019	629	816	0,016	0,0004
	0,01	0,000011	770	1020	0,008	0,0005
	0,05	0,000023	563	714	0,010	0,0022

Таблица 1.3.6: Результаты решения (второй способ)

функция управления	Δt	J	N_C	Δu	Δx_1
линейная с одним переключением	0,005	0,002650	2171	0,167	0,0085
	0,01	0,002661	2171	0,167	0,0085
	0,05	0,002703	2171	0,166	0,0084
линейная с двумя переключениями	0,005	0,001098	3673	0,099	0,0080
	0,01	0,001140	3684	0,102	0,0055
	0,05	0,001267	3678	0,100	0,0042
квадратичная с одним переключением	0,005	0,000443	3315	0,080	0,0055
	0,01	0,000439	3323	0,080	0,0055
	0,05	0,000563	3316	0,068	0,0030
квадратичная с двумя переключениями	0,005	0,000051	11321	0,018	0,0007
	0,01	0,000034	6803	0,016	0,0014
	0,05	0,000075	4555	0,032	0,0013

Однако, при усложнении параметризации решение, полученное на основе формул (1.109), (1.111), имеет лучшее значение функционала, лучшее приближение к оптимальному решению, а также, меньшие объемы вычислительных операций, за счет существенного сокращения количества задач Коши. При этом шаг интегрирования практически не влияет на качество получаемого решения.

1.4 Сходимость метода параметризации

Для каждого численного метода проблема его сходимости является важной составляющей в понимании к каким постановкам задач ОУ применим этот метод. Так в работе [151] изучается проблема сходимости и свойств последовательности процессов, порождаемых управляемой системой дифференциальных уравнений, в понтягинском смысле. В методе параметризации последовательность процессов порождается решением соответствующих конечномерных задач НП. Сходимость получаемой последовательности рассматривается в смысле сходимости по функционалу.

Проблема сходимости конечномерных аппроксимаций задач ОУ достаточно глубоко изучена для традиционных разностных аппроксимаций (при априорной замене дифференциальных уравнений разностными) (см., например, [13, 15]). Метод параметризации можно считать обобщением традиционных схем с фиксированными сетками и разностными схемами. Однако здесь разделяется проблема редукции функциональной задачи к конечномерной и проблема аппроксимации дифференциальных уравнений, относя последнюю на этап реализации расчетных формул вычисления функционалов и их производных. Этим существенно упрощается обоснование аппроксимации исходной функциональной задачи (1.1), (1.3), (1.4) конечномерной (1.10) (соответственно, задачи (1.74)-(1.77) конечномерной (1.79); задачи (1.91)-(1.93) конечномерной (1.97)).

В работе [205] приведены условия и обоснована сходимость метода парамет-

ризации для задач ОУ вида (1.1), (1.2), (1.3), (1.4).

Если в задаче ОУ присутствуют терминальные условия (1.3), то соответствующее множество ограничений в задаче НП (1.10) может оказаться пустым при любом N . Для преодоления этой проблемы используем стандартный прием [13, 15] расширения терминальных ограничений

$$\begin{cases} |\varphi_l(w^1, \dots, w^N)| \leq \xi, & 1 \leq l \leq m_1, \\ \varphi_l(w^1, \dots, w^N) \leq \xi, & m_1 + 1 \leq l \leq m, \\ (w^1, \dots, w^N) \in W. \end{cases} \quad (1.113)$$

Рассмотрим задачу минимизации φ_0 при условиях (1.113):

$$\varphi_0^N(\xi) = \inf\{\varphi_0(w^1, \dots, w^N) : (1.113)\}. \quad (1.114)$$

Разрешимость этой задачи гарантирована, если допустимое множество (1.113) не пусто и компактно. Непустота этого множества при малых $\xi > 0$ будет обеспечена, если класс параметризованных управлений (1.7) позволяет достаточно точно аппроксимировать любую возможную траекторию $x(t)$ системы (1.1) траекториями класса (1.8). В дальнейшем будем предполагать, что множество (1.113) непусто, в свою очередь, значение (1.114) ограничено снизу, а его вычисление может быть проведено сколь угодно точно.

Для обоснования сходимости и реализуемости метода параметризации будем предполагать выполнимость условия аппроксимации.

Условие аппроксимации (УА). *Для каждого допустимого процесса $\{u(t), x(t)\}$ системы (1.1) для задачи с ОДУ (системы (1.74), (1.76) для задачи с точечным запаздыванием; системы (1.92) для задачи с распределенным запаздыванием) существует параметризованный процесс $\{\bar{u}^N(t), x^N(t)\}$: $u^N(t)$ удовлетворяет (1.7), $x^N(t)$ удовлетворяет (1.8), при этом траектория $x^N(t)$ сколь угодно точно аппроксимирует фазовую переменную $x(t)$ в равномерной норме.*

Аппроксимация достигается за счет повышения сложности параметризованного класса (1.7). В случае кусочно непрерывных допустимых управлений УА будет выполнено для любого класса, содержащего кусочно постоянные управления с переменными узлами $\{t_k\}$ например, класса кусочно непрерывных полиномов. Поясним это подробнее.

Очевидно, что любое кусочно непрерывное управление $u(t) \in U$ можно приблизить кусочно постоянным управлением $\bar{u}^N(t)$: (1.7). Рассмотрим разность управлений $\delta\bar{u}^N(t) = u(t) - \bar{u}^N(t)$. За счет увеличения количества узлов в $\bar{u}^N(t)$ можно добиться, что $\delta\bar{u}^N(t)$ будет равномерно сколь угодно малой на отрезке планирования $[t_0, T]$, за исключением, быть может, конечного числа отрезков, сколь угодно малых по длине и покрывающих точки разрыва исходного управления. На этих отрезках разность $\delta\bar{u}^N(t)$ представляет собой игольчатый характер. Исходя из свойств игольчатых вариаций [1] и теории возмущений решений ОДУ [80], можно обосновать, что такое представление управления дает равномерную аппроксимацию траектории $x(t)$ решением $x^N(t)$ вида (1.8), построенного на основе кусочно постоянного управления.

Для класса непрерывных управлений условию аппроксимации, очевидно, будут удовлетворять кусочно линейные или кусочно полиномиальные функции (сплайны с подвижными узлами).

Если выполняется УА, то при достаточно больших N можно предполагать, что задача (1.10) соответствует исходной задаче ОУ (1.1), (1.3), (1.4). Если рассматривать задачу ОУ без терминальных ограничений (1.3), то её оптимальный процесс $\{u^*(t), x^*(t)\}$ можно аппроксимировать параметризованным процессом $\{\bar{u}^N(t), x^N(t)\}$ в метрике $L_2[t_0, T]$ управляющей функции, и равномерно по фазовой траектории. Таким образом, можно утверждать о сходимости по функционалу

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_0^N = J^*.$$

Здесь J^* обозначает наименьшее значение функционала (1.4) в задаче (1.1),

(1.3), (1.4).

Аналогично при выполнении УА показывается сходимость по функционалу в задачах (1.79), (1.97).

Рассмотрим далее задачу с терминальными ограничениями (1.1), (1.3), (1.4). Ослабим ограничения (1.3):

$$\begin{aligned} |g_l(x(T))| &\leq \eta, & l = 1, \dots, m_1, \\ g_l(x(T)) &\leq \eta, & l = m_1 + 1, \dots, m, \quad \eta \geq 0. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Введем некоторые обозначения: пусть K_T представляет собой множество достижимости задачи Коши (1.1) при различных управлениях, а \bar{K}_T является замыканием K_T . Соответственно,

$$S_T(\eta) = \{x \in K_T : (1.115)\}$$

представляет собой достижимую часть множества, определенного расширением терминальных ограничений. Замыкание множества $S_T(\eta)$ определяется условием

$$\bar{S}_T(\eta) = \{x \in \bar{K}_T : (1.115)\}. \quad (1.116)$$

Условие сублинейного роста системы (1.1) ведет к ограниченности множества K_T . Последнее в свою очередь приводит к равномерной компактности семейства множеств (1.116) при $\eta \geq 0$. Можно считать, что \bar{S}_T – многозначное отображение, преобразующее элементы из R_+ в множество компактных подмножеств из R^n . Рассмотрим топологические свойства \bar{S}_T .

Если задача ОУ (1.1), (1.3), (1.4) имеет решение, то множество $S_T(0)$ не пусто. Это, очевидно, влечет, что $\bar{S}_T(\eta)$ не пусто $\forall \eta > 0$. Также можно отметить свойство неубывающей по включению монотонности отображения S_T : при $0 \leq \eta' < \eta$ выполняется $S_T(\eta') \subset S_T(\eta)$. Аналогичное свойство имеет место для \bar{S}_T .

Введем меру отклонения одного множества A от другого множества B в соответствующем метрическом пространстве [79]

$$\beta(A, B) = \sup\{\rho(u, B) : u \in A\}.$$

Так как $\bar{S}_T(\eta') \subset \bar{S}_T(\eta)$, то $\beta(\bar{S}_T(\eta'), \bar{S}_T(\eta)) = 0$. Следовательно, $\forall \eta_0 \geq 0$

$$\lim_{\eta \downarrow \eta_0} \beta(\bar{S}_T(\eta_0), \bar{S}_T(\eta)) = 0.$$

Полученный предел показывает [79] *полунепрерывность снизу* $\bar{S}_T(\eta)$ в точке η_0 справа. *Полунепрерывность сверху* отображения $\bar{S}_T(\eta)$ определяется компактностью множества \bar{K}_T и непрерывностью терминальных функций $g_l, 1 \leq l \leq m$ [79, лемма 1.3]:

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \beta(\bar{S}_T(\eta), \bar{S}_T(\eta_0)) = 0.$$

Таким образом, отображение $\bar{S}_T(\eta)$ непрерывно по Хаусдорфу в точке η_0 справа, так как оно непрерывно снизу и сверху, тем самым непрерывно в метрике $\max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$. Отображение $\bar{S}_T(\eta)$ называется регулярным, если оно непрерывно в полном смысле при $\forall \eta > 0$. Если $\bar{S}_T(\eta)$ выпукло, то оно регулярно.

Теорема 6. *Если множество достижимости K_T и функции $g_l, 1 \leq l \leq m$ выпуклы, то отображение $\bar{S}_T(\eta)$ регулярно.*

Доказательство. Отображение $\bar{S}_T(\eta)$ в общем случае полунепрерывно сверху. Докажем полунепрерывность снизу для выпуклого случая. Для этого покажем, что $\forall \hat{x} \in \bar{S}_T(\eta) \exists \{x^k\}: x^k \in \bar{S}_T(\eta^k)$, при этом

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta^k = \eta, \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \hat{x}.$$

Пусть $x^0 \in \bar{S}_T(0)$ и $\hat{x} \in \bar{S}_T(\eta)$ при $\eta > 0$. Это значит, $(x^0, \hat{x}) \in K_T, g_i(x^0) \leq 0, g_i(\hat{x}) \leq \eta, 1 \leq i \leq m$. Рассмотрим также отрезок, состоящий из точек $x(t) = t\hat{x} + (1-t)x^0, 0 \leq t \leq 1$. Очевидно, $x(t) \in K_T$.

Из выпуклости $g_l(x)$ следует неравенство

$$g_i(x(t)) \leq tg_i(\hat{x}) + (1-t)g_i(x^0) \leq t\eta.$$

Это значит, что $x(t) \in \bar{S}_T(t\eta)$ и, если $t = t_k \rightarrow 1$, то последовательность $x^k = x(t_k) \rightarrow \hat{x}$ и $\eta^k = t_k\eta \rightarrow \eta$. \square

Приведем пример, показывающий, что в случае невыпуклости функций g_i , регулярность многозначного отображения может нарушаться. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0; \\ 1 - x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Пусть отображение $S(\eta)$ задано в виде $S(\eta) = \{x \in [-1, 1] : g(x) \leq \eta\}$, т.е.

$$S(\eta) = \begin{cases} [\sqrt{1-\eta}, 1], & 0 \leq \eta < 1; \\ [-1, 1], & \eta \geq 1. \end{cases}$$

При $\eta = 1$ полунепрерывность снизу у отображения $S(\eta)$ не выполняется.

Управляющую функцию будем считать приближенным решением задачи (1.1)-(1.4), если это управление допустимо и при достаточно малом $\eta > 0$ дает решение в задаче

$$J(\eta) = \inf\{g_0(x(T)) : x(T) \in S_T(\eta)\}. \quad (1.117)$$

Если при достаточно малых $\eta > 0$ величины $J(\eta)$ конечны и

$$\lim_{\eta \downarrow 0} J(\eta) = J^*, \quad (1.118)$$

то введенное понятие приближенного решения может быть применимо.

Опираясь на терминологию [13], задачу (1.1), (1.3), (1.4) будем называть *устойчивой по расширению терминального множества*, если для неё выполняется (1.118).

Теорема 7. *Если в задаче ОУ (1.1), (1.3), (1.4) множество фазовых траекторий равномерно ограничено, то функция $J(\eta)$ определена для всех $\eta \geq 0$ и является невозрастающей и непрерывной справа. Если отображение \bar{S}_T регулярно, то функция $J(\eta)$ непрерывна.*

Доказательство. Так как инфимумы числового множества и его замыкания равны, то $J(\eta)$ может быть найдена в виде

$$J(\eta) = \inf\{g_0(x(T)) : x(T) \in \bar{S}_T(\eta)\}.$$

Свойство компактности $\bar{S}_T(\eta)$ позволяет утверждать, что $J(\eta)$ определена и конечна $\forall \eta \geq 0$. Также можно отметить, что $J(\eta)$ не возрастает в силу неубывающей монотонности отображения $\bar{S}_T(\eta)$.

Из [79, гл.1, Лемма 1.1] следует, что если на компактном, полунепрерывном сверху многозначном отображении минимизировать непрерывную функцию, то экстремальное значение функции представляет собой полунепрерывную снизу функцию аргумента допустимого отображения. В свою очередь при непрерывности допустимого отображения, экстремальное значение представляет собой непрерывную функцию. Применяя данный факт к $J(\eta)$, можно заключить, что $J(\eta)$ – полунепрерывная снизу функция, так как её значения представляют экстремум непрерывной функции $g_0(x)$ на полунепрерывном сверху отображении \bar{S}_T . Таким образом, для $\forall \eta_0 \geq 0, \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \eta \geq 0$ и $|\eta - \eta_0| \leq \delta$ следует

$$J(\eta) \geq J(\eta_0) - \varepsilon.$$

Принимая во внимание невозрастание $J(\eta)$ и полученное свойство можно сделать вывод о непрерывности $J(\eta)$ справа в η_0 . Для рассматривать регулярный случай, то функция $J(\eta)$ обладает свойством непрерывности. \square

Теорема 8. *Если задача ОУ (1.1), (1.3), (1.4) удовлетворяет УА, то для $\forall \eta > 0, \varepsilon > 0 \exists N = N(\eta, \varepsilon) : \varphi_0^N(\eta + \varepsilon/2)$ параметризованной задачи (1.114), где $\xi = \eta + \varepsilon/2$, удовлетворяет неравенствам*

$$J(\eta + \varepsilon/2) \leq \varphi_0^N(\eta + \varepsilon/2) \leq J(\eta) + \varepsilon. \quad (1.119)$$

Доказательство. В силу результата теоремы 7 можно утверждать, что исходная задача ОУ (1.1), (1.3), (1.4), удовлетворяющая условию ограниченности, является устойчивой по расширению терминального множества. В этом случае величина (1.117) определена и конечна, а при достаточно малом $\eta > 0$ данная величина приближает оптимальное J^* . Далее, $\forall \varepsilon > 0 \exists \{u^{\eta\varepsilon}(t), x^{\eta\varepsilon}(t)\}$: (1.115) и выполняется

$$0 \leq g_0(x^{\eta\varepsilon}(T)) - J(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (a)$$

Для данного процесса $\{u^{\eta\varepsilon}(t), x^{\eta\varepsilon}(t)\}$ $\exists N = N(\eta, \varepsilon) > 0$ и соответствующий параметризованный процесс $\{u^{N\varepsilon}(t), x^{N\varepsilon}(t)\}$, определяемый управляющими параметрами $\{w^{1\varepsilon}, \dots, w^{N\varepsilon}\} \in W$:

$$|g_l(x^{N\varepsilon}(T)) - g_l(x^{\eta\varepsilon}(T))| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad l = 0, 1, \dots, m. \quad (b)$$

Неравенства (a) и (b) для $l = 0$ приводят к оценке

$$g_0(x^{N\varepsilon}(T)) \leq J(\eta) + \varepsilon. \quad (c)$$

Для $l = 1, \dots, m$ имеем:

$$|g_l(x^{N\varepsilon}(T))| \leq |g_l(x^{\eta\varepsilon}(T))| + \varepsilon/2 \leq \eta + \varepsilon/2, \quad 1 \leq l \leq m_1,$$

$$g_l(x^{N\varepsilon}(T)) \leq g_l(x^{\eta\varepsilon}(T)) + \varepsilon/2 \leq \eta + \varepsilon/2, \quad m_1 + 1 \leq l \leq m.$$

Эти неравенства означают, что точка $(x^{N\varepsilon}(T))$ удовлетворяет ограничениям (1.113) при $\xi = \eta + \varepsilon/2$. В силу этого выполняются неравенства

$$J(\eta + \varepsilon/2) \leq \varphi_0^N(\eta + \varepsilon/2) \leq g_0(x^{N\varepsilon}(T)).$$

Отсюда, с учетом (c), получаем оценку (1.119). □

Можно сделать вывод, что УА исходной задачи ОУ (1.1), (1.3), (1.4), имеющей решение, порождает устойчивость задачи ОУ по расширению терминального множества (теорема 6), а также дают возможность сколь угодно точно приближения задачей НП (1.10) терминальных ограничительных условий (1.3) и минимального значения целевого функционала (1.4). Если терминальные ограничения регулярны, то аппроксимация минимума функционала является непрерывной (теорема 7).

Глава 2

Математические модели экономической динамики

2.1 Принципы управления предприятием

2.1.1 Общая модель управления предприятием с учетом принципов менеджмента

В изменяющихся экономических условиях предприятия постоянно вынуждены совершенствовать свои методы и методологию управления с учетом уменьшения издержек, прогнозирования рисков внешней среды, собственных возможностей. Среди многообразия различных методов организации управленческой деятельности выделяются принципы «точно в срок», «под заданную себестоимость», «с учетом рисков», например, [40] и [62].

Процесс информатизации всех аспектов деятельности на предприятии требует формализации самих принципов управления ([40, 62]), для этого разрабатываются экономико-математические модели на основе использования адекватного математического инструментария [230].

В работе [227, 232] в виде математической модели была предложена формализация управления с учетом принципов «точно в срок», «под заданную себестоимость», «с учетом рисков» и их интеграция. Рассмотрим формализацию принципов управления деятельностью предприятия на основе математического моделирования, что позволяет гибко адаптировать модель к организационной структуре предприятия, изменяющимся внешним факторам среды и позволяет настраивать управленческие приоритеты. С одной стороны, для использования предлагаемой модели и ее применения требуются современные инструменты, в условиях цифрового производства ими являются информационные системы. С другой стороны, развитие информационных систем в цифровой экономике

требует включения в функционал систем не только учетных функций, но и управленческих, что в свою очередь ставит вопрос о формальном описании принципов управления. Таким образом, формальная модель управления является основой для интеллектуальных информационных систем в экономике.

В рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ № 2.1816.2017/4.6 по теме «Исследование и разработка интегрированной автоматизированной системы управления производственно-технологическим планированием авиастроительного предприятия на базе цифровых технологий» (2017-2019 гг.) диссертант разрабатывал математические модели для комплексного представления деятельности предприятия с учетом принципов «точно в срок», «под заданную себестоимость», «с учетом рисков», а также для ряда компонент: модель инвестирования, модель рекламных затрат, модели управления планированием, технологическими процессами. Перейдем к описанию комплексной модели.

Предположим, что процесс производства (в общем случае жизненного цикла) блага в компании (или её подразделении) декомпозируется на N этапов. Количество этапов конечно, у каждого этапа время преобразования продукта фиксированно и равно τ_i , $1 \leq i \leq N$. Время преобразования определяется внутренними причинами производственной системы: квалификацией сотрудников, нормативным обеспечением, технологией организации производственного процесса, эффективностью использования основных фондов и другими причинами.

Если процесс производства линеен, то в этом случае

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^N \tau_i,$$

где \tilde{T} – полное время производства блага в рамках процесса производства. Если процесс производства не линеен, то существуют временные точки, в которых процесс имеет разветвление. Предположим, что этапы k и l могут быть выполнены параллельно и независимо друг от друга, а результат выполнения обоих

этапов будет использоваться далее по временной оси, тогда полное время производства

$$\tilde{T} = \max(\tau_k, \tau_l) - \tau_k - \tau_l + \sum_{i=1}^N \tau_i.$$

Таким образом, время \tilde{T} в нелинейных процессах может оказаться существенно меньше, чем прямая сумма времен всех этапов в линейном процессе.

Каждый этап характеризуется задействованием определенных факторов, позволяющих провести преобразование входящих ресурсов в выпускаемый результат этого этапа ($1 \leq i \leq N$). Сделаем некоторые обозначения для описания модели на этапе i :

- n_i – количество видов ресурсов, преобразуемых на этапе;
- r_i – количество видов факторов (механизмов), задействованных на этапе;
- R_{i_j} – количество ресурса вида i_j , $1 \leq j \leq n_i$, преобразуемого на этапе;
 $i_j \in \{1, 2, \dots, n^R\}$, n^R – общее число ресурсов, задействованных в процессе производства;
- $R_i = (R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_{n_i}})$ – вектор количеств ресурсов, преобразуемых на этапе;
- X_{i_j} – значение фактора вида i_j , $1 \leq j \leq r_i$, задействованного на этапе;
 $i_j \in \{1, 2, \dots, n^X\}$, где n^X – общее число факторов, задействованных в процессе производства;
- $X_i = (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{r_i}})$ – вектор значений факторов, задействованных на этапе;
- y_i – результат этапа.

Зависимость результата этапа от входящих ресурсов и задействованных факторов может задаваться некоторой функцией (производственной функцией) F_i в виде $y_i = F_i(R_i, X_i)$.

Получение результата y_i достигается за один временной интервал τ_i , количественное изменение результата происходит за счет соответствующего изменения объема обрабатываемых ресурсов R_i и/или изменения значений задействованных факторов X_i . Исходя из требований и ограничений прикладной области, объем ресурсов и значения факторов не могут быть произвольны и выбираются из множеств P_i^R и P_i^X , соответственно.

В общем случае входящие ресурсы на каждом этапе содержат как внешние по отношению к компании ресурсы, так и результаты деятельности, полученные на других этапах. Введем обозначение A_i как множество результатов тех этапов, которые непосредственно определяют этап i :

$$A_i = \{y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_{s_i}}\}, \quad \{k_1, k_2, \dots, k_{s_i}\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\},$$

в этом случае ресурсы $R_i = R_i(A_i)$.

Если рассматривать деятельность компании в длительной перспективе, то ресурсы, факторы и сам результат деятельности подвергаются изменениям, тем самым могут зависеть от времени $t \geq t_0$. Следовательно, можно описать следующие отношения:

$$X_i = X_i(t), R_i = R_i(t) = R_i(A_i(t), t).$$

Текущий выпуск (в момент t) определяется ресурсами и факторами, которые были доступны на момент начала производства, т.е. в момент $t - \tau_i$, следовательно:

$$y_i = y_i(t) = F_i(R_i(A_i(t - \tau_i), t - \tau_i), X_i(t - \tau_i), t).$$

Таким образом, в производственной цепочке можно наблюдать эффект запаздывания в отдаче от ресурсов и производственных факторов. В зависимости от типа производства производимое благо (продукт) может быть описано в дискретной или континуальной форме, что отражается на информационном представлении, например, интегральных показателях.

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что благо компании выпускается на заключительном этапе и представлено в денежной форме (хотя это могут быть номинальные единицы измерения или иной вариант).

Пусть функция $f(t)$ определена на множестве $[t_0; T]$, введем функционал $SI_{\tau \in [t_0; T]}(f(\tau))$:

$$SI_{\tau \in [t_0; T]}(f(\tau)) = \begin{cases} \sum_{\tau \in [t_0; T]} f(\tau), & \text{если } [t_0; T] = \{t_0, t_1, t_2, \dots, T\}; \\ \int_{t_0}^T f(\tau) d\tau, & \text{если } [t_0; T] \text{ — отрезок.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Функционал SI позволяет единообразно представить разные типы аргументов: SI является суммой (*Sum*), если аргумент представляет собой дискретную функцию, SI является интегралом (*Integral*), если аргумент — континуальная функция. Целесообразность такого обозначения определяется тем, что производимое благо может быть дискретным или континуальным.

Точно в срок

Предположим, что перед компанией стоит задача произвести выпуск продукта в объеме y_N^* за время T^* . Используя введенные выше обозначения можно сформулировать проблему: найти функции $X_i(t) \geq 0$, $R_i(t) \geq 0$, $1 \leq i \leq N$ при условиях

$$SI_{\tau \in [t_0; T^*]}(y_N(\tau)) = y_N^*; \quad (2.2)$$

$$R_i(t) \in P_i^R, \quad X_i(t) \in P_i^X, \quad 1 \leq i \leq N, \quad t_0 \leq t \leq T^*; \quad (2.3)$$

$$y_i(t) = F_i(R_i(A_i(t - \tau_i), t - \tau_i), X_i(t - \tau_i), t), \quad 1 \leq i \leq N, \quad t_0 \leq t \leq T^*; \quad (2.4)$$

$$A_i = \{y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_{s_i}}\}, \quad \{k_1, k_2, \dots, k_{s_i}\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.5)$$

Решение задачи (2.2)-(2.5) – формирование расписания задействования ресурсов и факторов для каждого этапа с целью обеспечения фиксированного выпуска за определенное время. Применение этих условий к практической области описывает решение, основанное на принципе «точно в срок».

Введем обозначение для множества решений задачи (2.2)-(2.5) как S_{JIT} (JIT – Just In Time). Если множество S_{JIT} пусто, то проблема (2.2)-(2.5) не имеет решения, и, можно говорить, что существующие технологии компании не позволяют выпустить продукцию в объеме y_N^* ко времени T^* , значит необходимо менять технологию на одном или нескольких этапах с целью уменьшения величин τ_i .

Если в множестве S_{JIT} содержится несколько элементов, то любой элемент множества является решением поставленной задачи, и встает вопрос о выборе наиболее подходящего элемента. Выбор среди решений «точно в срок» может быть осуществлен за счет введения дополнительных критериев качества.

Под заданную себестоимость

Одной из важнейших характеристик любого экономического производства является себестоимость производимой продукции. Рассмотрим приобретенную стоимость в рамках производственного процесса, введем обозначения:

- C_i^R – вектор цен ресурсов для этапа i , $1 \leq i \leq N$;
- C^F – постоянные относительно объема производства, количества используемых ресурсов и факторов затраты;
- C_i^X – вектор цен эксплуатации факторов на этапе i , $1 \leq i \leq N$;
- C – кумулятивные издержки, связанные с производством продукции.

В общем случае цены, следовательно, издержки являются переменными величинами по параметру времени t . В этом случае издержки на производство продукции за период времени $[t_0; T]$ могут быть рассчитаны на основе функционала:

$$C(T) = SI_{\tau \in [t_0; T]} (C^F(\tau) + \sum_{i=1}^N (\langle C_i^R(\tau - \tau_i), R_i(\tau - \tau_i) \rangle + \langle C_i^X(\tau - \tau_i), X_i(\tau - \tau_i) \rangle)) . \quad (2.6)$$

Функционал (2.6) дает оценку затратам, полученным в производственном цикле и не оценивает полную стоимость жизненного цикла продукции. Если этап проектирования конечного продукта компании можно включить в общую схему, то сопровождение и утилизация продукта чаще всего находятся уже за периодом рассмотрения $[t_0; T]$. В этом случае для приближенного вычисления полных кумулятивных издержек $C(T)$ требуется дополнительно оценить будущие затраты на сопровождение и утилизацию, затем добавить их к производственным затратам.

Пусть CP^* (Cost Price) – заданная себестоимость производимой продукции, тогда условие (2.7) представляет собой требование обеспечения себестоимости продукции в плановом периоде не выше заданной:

$$\frac{C(T)}{SI_{\tau \in [t_0; T]} (y_N(\tau))} \leq CP^* . \quad (2.7)$$

Проблема поиска функций $X_i(t) \geq 0$, $R_i(t) \geq 0$, $1 \leq i \leq N$ при условиях (2.3), (2.4), (2.5), (2.7) дает формальное представление принципа «под заданную себестоимость».

Множество наборов $X_i(t) \geq 0$, $R_i(t) \geq 0$, $1 \leq i \leq N$, удовлетворяющих условиям (2.3), (2.4), (2.5), (2.7), обозначим как S_{FCP} (FCP – Fixed Cost Price). Если множество S_{FCP} пусто, то существующие технологии компании не позволяют обеспечить выпуск с заданной себестоимостью. В этом случае компании требуется пересматривать перечень ресурсов (например, найти других поставщиков с более дешёвыми комплектующими), изменить значение обрабатывающих факторов (обновить основные фонды на более эффективные, заменить трудовые ресурсы на ресурсы с другой квалификацией), снизить цены за использование

факторов. Если множество S_{FCP} имеет более одного набора, то возникает вопрос выбора наиболее подходящего.

С учетом рисков

Обычно на нижнем уровне производства в компаниях практически не стоит проблемы выбора, однако по мере повышения организационного уровня перед менеджментом становится актуальной проблема выбора и принятия решения. При этом каждый выбор обуславливается риском: потенциальной потерей от недостижения планируемого результата и потерей альтернативной прибыли от непринятого решения.

Введем случайные воздействия, оказывающие негативные влияния на получение результата на соответствующем этапе:

- $\xi_i(t)$ – вектор случайных величин, представляющий потери (бракованные комплектующие, поставленный материал другого качества и т.д.) ресурсов на этапе i , $1 \leq i \leq N$;
- $\eta_i(t)$ – вектор случайных величин, представляющий потери (поломка оборудования, болезнь сотрудников и т.д.) соответствующих факторов на этапе i , $1 \leq i \leq N$;
- $\zeta_i(t)$ – скалярная величина, описывающая организационно-технологические потери (брак, неэффективная организация труда и т.д.) на этапе i , $1 \leq i \leq N$.

В общем случае случайные воздействия зависят от значений факторов, ресурсов, а также временной характеристики t :

$$\xi_i = \xi_i(R_i, t), \quad \eta_i = \eta_i(X_i, t), \quad \zeta_i = \zeta_i(R_i, X_i, y_i, t).$$

Тогда отношение (2.4) может быть преобразовано в вид

$$\begin{aligned}
y_i(t) = & F_i\left(R_i\left(A_i(t - \tau_i), t - \tau_i\right) + \xi_i\left(R_i\left(A_i(t - \tau_i), t - \tau_i\right), t\right),\right. \\
& X_i(t - \tau_i) + \eta_i\left(X_i(t - \tau_i), t\right), t) + \\
& \left. \zeta_i\left(R_i\left(A_i(t - \tau_i), t - \tau_i\right), X_i(t - \tau_i), y_i(t), t\right),\right. \\
& \left. 1 \leq i \leq N, t_0 \leq t \leq T^*. \right.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Отношение (2.8) можно использовать для управления этапом i :

- определяя технологию на этапе, можно управлять средней величиной и дисперсией случайного воздействия ζ_i ;
- выбирая набор входных ресурсов (например, поставщиков), можно управлять ошибкой ξ_i в векторе ресурсов;
- определяя значения факторов, можно регулировать потери, связанные со случайным отклонением η_i факторов от планируемых.

Введем функцию положительной срезки $[\cdot]^+$. Пусть $a \in R$, тогда:

$$[a]^+ = \begin{cases} a, & a > 0; \\ 0, & a \leq 0. \end{cases}$$

Если $a \in R^n$, то

$$[a]^+ = \begin{pmatrix} [a_1]^+ \\ [a_2]^+ \\ \vdots \\ [a_n]^+ \end{pmatrix}.$$

Установим допустимые нормы ошибок $\delta_i(\xi_i)$, $\delta_i(\eta_i)$, $\delta_i(\zeta_i)$ для случайных величин ξ_i , η_i , ζ_i , $1 \leq i \leq N$ и определим скалярные величины потерь на каждом

этапе:

$$\rho_i^R(\xi_i) = SI_{\tau \in [t_0; T]} \left(\left\| \left[M \left(\xi_i \left(R_i \left(A_i(t - \tau_i), t - \tau_i \right), t \right) - \delta_i(\xi_i) \right) \right]^+ \right\| \right);$$

$$\rho_i^X(\eta_i) = SI_{\tau \in [t_0; T]} \left(\left\| \left[M \left(\eta_i \left(X_i(t - \tau_i), t \right) - \delta_i(\eta_i) \right) \right]^+ \right\| \right);$$

$$\rho_i^y(\zeta_i) = SI_{\tau \in [t_0; T]} \left(\left[M \left(\zeta_i \left(R_i \left(A_i(t - \tau_i), t - \tau_i \right), X_i(t - \tau_i), y_i(t), t \right) - \delta_i(\zeta_i) \right) \right]^+ \right).$$

Значения $\rho_i^R(\xi_i)$, $\rho_i^X(\eta_i)$, $\rho_i^y(\zeta_i)$ показывают степень отклонения случайных воздействий от заданных норм ошибок на этапе i . Здесь нормы $\| \cdot \|$ являются евклидовыми нормами, определенными в пространствах соответствующей размерности; $M(\cdot)$ – оператор математического ожидания.

Обозначим

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Можно определить функцию потерь (функцию штрафов), которая вычисляет суммарные потери компании при выходе за допустимые нормы:

$$L(R, X, y) = \sum_{i=1}^N (\beta^R \rho_i^R(\xi_i) + \beta^X \rho_i^X(\eta_i) + \beta^y \rho_i^y(\zeta_i)). \quad (2.9)$$

Величины β^R , β^X , β^y представляют собой постоянные весовые коэффициенты, определяющие важность учета потерь.

Выбор функций $X_i(t) \geq 0$, $R_i(t) \geq 0$, $1 \leq i \leq N$ при условиях (2.3), (2.5), (2.8) дает формальное представление принципа управления "с учетом рисков". Оценка рисков может осуществляться на основе функции (2.9). Обозначим через S_{RM} (RM – Risk Management) множество решений задачи (2.3), (2.5), (2.8), удовлетворяющих условию $L(R, X, y) \leq \delta^L$, где δ^L – фиксированная допустимая

норма потерь. Множество S_{RM} может быть пустым, в этом случае деятельность компании при существующей технологии носит недопустимо рискованный характер. Для обеспечения деятельности в заданных рамках риска компании следует изменить технологию производства и/или управления: провести замену производственных ресурсов, изменить организацию производственного процесса, повысить квалификацию персонала и т.д. Если же множество не пусто и содержит несколько элементов, то любой из них является решением, удовлетворяющим принципу «с учетом рисков».

Интеграция принципов

Актуальной является проблема интеграции всех трех рассматриваемых принципов. Например, если велики риски по недопоставке каких-либо ресурсов «точно в срок», то компания может уменьшить риски («с учетом рисков») за счет организации склада для соответствующих ресурсов, но тем самым увеличить себестоимость производимой продукции, уменьшив выбор решений «под заданную себестоимость».

Для обеспечения интегрального принципа менеджмента «точно в срок, под заданную себестоимость, с учётом рисков» нужно объединить все три рассматриваемые модели в одну: при $T = T^*$, заданной себестоимости CP^* , фиксированном итоговом выпуске y_N^* и заданных нормах ошибок $\delta_i(\xi_i)$, $\delta_i(\eta_i)$, $\delta_i(\zeta_i)$, δ^L найти решение, принадлежащее множеству $S = S_{JIT} \cap S_{FCP} \cap S_{RM}$. Если множество S не пусто, то любой элемент множества может рассматриваться в качестве общего решения интегрального принципа. Если множество S содержит несколько элементов, то выбор единственного элемента возможен за счет введения дополнительного критерия, например, построение проекции используемого набора ресурсов и факторов на допустимое множество S .

Проблема перехода от существующего распределения ресурсов и факторов к какому-либо набору из множества S сопряжена с множеством затрат: технологических, логистических, временных, финансовых, переобучения сотрудников

или набором новых кадров подходящей квалификации и т.д. В связи с этим, возникает вопрос о выборе на множестве S наиболее подходящего решения.

Пусть (\tilde{R}, \tilde{X}) – существующее распределение ресурсов и факторов (или, по мнению экспертов компании, наиболее предпочтительное распределение). Предположим, что (\tilde{R}, \tilde{X}) не принадлежит S . Это означает, что существующее распределение не удовлетворяет принципу «точно в срок, под заданную себестоимость, с учётом рисков», следовательно, требуется найти подходящее распределение и провести переход к этому распределению. Введем функцию перехода (сравнения) между двумя наборами (\tilde{R}, \tilde{X}) и произвольным (R, X) :

$$cost(R, X, \tilde{R}, \tilde{X}) = \sum_{i=1}^N \left(cost_i^X(X_i, \tilde{X}_i) + cost_i^R(R_i, \tilde{R}_i) \right).$$

Здесь, $cost_i^X(X_i, \tilde{X}_i)$ – величина затрат, связанных с переходом от набора факторов \tilde{X}_i к факторам X_i на этапе i ; $cost_i^R(R_i, \tilde{R}_i)$ – величина затрат, связанных с переходом от набора обрабатываемых ресурсов \tilde{R}_i к ресурсам R_i на этапе i . Затраты могут выражаться либо в финансовых, либо во временных единицах.

В этом случае задача

$$cost(R, X, \tilde{R}, \tilde{X}) \longrightarrow \min_{(R, X) \in S},$$

является задачей поиска набора (R, X) , удовлетворяющего введенному интегральному принципу и дающего наименьшие суммарные затраты при переходе с текущего набора распределения.

Таким образом, модель принципов управления позволит сформировать допустимое распределение ресурсов для реализации процесса в рамках компании.

2.1.2 Модификация производственного плана

В рамках оперативной деятельности производственного предприятия часто возникает ситуация, когда появляется новая заявка на производство изделия, не включенного в составленный объёмно-календарный план. Это приводит к задаче модификации составленного (возможно уже утвержденного) плана. Рассмотрим модель оценки производственно-технологической деятельности предприятия в части обновления объёмно-календарного плана. Возможны два варианта оценки: без модификации существующего плана и с модификацией плана [228].

Для оценки возможности включения новой заявки в текущий производственный план введём следующие обозначения:

S – множество групп производственных ресурсов, определяемых оборудованием, приспособлением, оснасткой, инструментом, материальными, трудовыми ресурсами и др., задействованных в производственном процессе.

M – множество изделий в существующем плане производства.

Для каждого изделия $m \in M$, определён последовательный процесс, состоящий из K_m этапов обработки. На каждом этапе j , $1 \leq j \leq K_m$, известен ряд характеристик: уникальный идентификатор группы производственных ресурсов $s \in S$, задействованных на этапе; абсолютное время начала обработки изделия на этапе $t_0(s, m, j)$; длительность обработки $\tau(s, m, j)$.

Определение 2.1.1. Маршрутом изделия $m \in M$ назовём совокупность $z(m) = \{s_j, t_0(s_j, m, j) : s_j \in S, 1 \leq j \leq K_m\}$, удовлетворяющую условиям: $t_0(s_{j-1}, m, j-1) + \tau(s_{j-1}, m, j-1) \leq t_0(s_j, m, j)$, $2 \leq j \leq K_m$.

Введём множество маршрутов $Z = \{z(m), m \in M\}$.

При включении изделия m в план определяется абсолютное по времени предельное значение для производства данного изделия, обозначим это значение $T_l(m)$. Введём величину $T_f(m)$ – время окончания маршрута изделия, $T_f(m) = t_0(s_j, m, j) + \tau(s_j, m, j)$ при $j = K_m$. Если $T_f(m) \leq T_l(m)$, то маршрут изделия заканчивается к требуемому абсолютному моменту времени, в против-

ном случае маршрут не удовлетворяет временным требованиям.

При фиксированном плане производства множество маршрутов порождают потенциальную загрузку группы производственных ресурсов. Для каждой группы $s \in S$ можно составить временную диаграмму загрузки $D_s(t)$:

$$D_s(t) = \begin{cases} 1, \text{ если} & \exists m \in M, j \in \{1, 2, \dots, K_m\} : \\ & 0 \leq t - t_0(s_j, m, j) \leq \tau(s_j, m, j), s_j \cap s \neq \emptyset; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, если $D_s(t) = 1$, то группа производственных ресурсов занята (занят хотя бы один ресурс из группы s), если $D_s(t) = 0$, то группа производственных ресурсов свободна.

Рассмотрим возможность внесения заявки на обработку изделия \tilde{m} в текущий план без изменения сроков обработки изделий, находящихся в плане, и замены группы производственных ресурсов.

Пусть a – атрибут производственных ресурсов, относящий ресурс к соответствующей группе, $a \in A$, A – множество атрибутов, определяющих множество групп в S . Каждому атрибуту a соответствует некоторое подмножество групп в S .

Для изделия \tilde{m} описан технологический маршрут с указанием на каждом этапе необходимого вида группы производственных ресурсов a . Одинаковое значение атрибута a означает возможность использования любой группы производственных ресурсов с указанным атрибутом на данном этапе. В этом случае добавление нового изделия в существующий план эквивалентно последовательному поиску на каждом этапе свободной группы производственных ресурсов, имеющей необходимый атрибут.

Без модификации существующего плана

Пусть j ($1 \leq j \leq K_{\tilde{m}}$) – номер этапа обработки изделия \tilde{m} , на котором требуется группа производственных ресурсов с атрибутом a_j . Введём S_j – множество групп, в которых все производственные ресурсы содержат атрибут a_j , $S_j \subseteq S$.

Если существует $t_{K_{\tilde{m}}}$ и $s \in S_{K_{\tilde{m}}}$:

$$\begin{cases} t_{K_{\tilde{m}}} + \tau(s, \tilde{m}, K_{\tilde{m}}) \leq T_l(\tilde{m}); \\ D_s(t) = 0, t_{K_{\tilde{m}}} \leq t \leq t_{K_{\tilde{m}}} + \tau(s, \tilde{m}, K_{\tilde{m}}); \end{cases} \quad (2.10)$$

то изделие \tilde{m} может быть обработано на этапе $K_{\tilde{m}}$. В этом случае установим значения $s_{K_{\tilde{m}}} = s$, $t_0(s_{K_{\tilde{m}}}, \tilde{m}, K_{\tilde{m}}) = t_{K_{\tilde{m}}}$.

Предположим, что на этапе j изделие обрабатывалось с использованием группы производственных ресурсов s_j . Если существует t_{j-1} для некоторого $s \in S_{j-1}$:

$$\begin{cases} t_{j-1} + \tau(s, \tilde{m}, j-1) \leq t_0(s_j, \tilde{m}, j); \\ D_s(t) = 0, t_{j-1} \leq t \leq t_{j-1} + \tau(s, \tilde{m}, j-1); \end{cases} \quad (2.11)$$

то изделие \tilde{m} может быть обработано на этапе $j-1$. В этом случае установим значения $s_{j-1} = s$, $t_0(s_{j-1}, \tilde{m}, j-1) = t_{j-1}$.

Пусть требуется изготовить новое изделие \tilde{m} в плановом периоде $[t_0; T_l(\tilde{m})]$. Тогда задача оценки добавления новой заявки в объемно-календарный план без изменения плана по уже внесенным изделиям, сводится к поиску маршрута $z(\tilde{m})$ без изменения маршрутов $z(m)$, $m \in M$. При этом для изделия \tilde{m} на последнем этапе производства выполняется условие (2.10), а на предшествующих этапах при $2 \leq j \leq K_{\tilde{m}}$ условие (2.11). Также необходимо, чтобы $t_0 \leq t_0(s_1, \tilde{m}, 1)$, $T_f(\tilde{m}) \leq T_l(\tilde{m})$. Если маршрута $z(\tilde{m})$, удовлетворяющего обозначенным условиям не существует, то в плановом периоде $[t_0; T_l(\tilde{m})]$ изделие \tilde{m} изготовить невозможно.

Такая модель относится к оперативному управлению, не изменяющему горизонты планирования текущего плана изделий и представляет принцип управления «точно в срок».

С модификацией существующего плана

Предположим, что при оценке возможности внесения новой заявки на изделие \tilde{m} в текущий план не удалось найти допустимый маршрут $z(\tilde{m})$, удовлетворяющий заданному интервалу планирования $[t_0; T_l(\tilde{m})]$, без изменения маршрутов существующего плана. В этом случае встаёт задача модификации составленного плана.

Основная проблема модификации состоит в распределении общих ресурсов между маршрутами.

Определение 2.1.2. Два маршрута $z(x)$ и $z(y)$, $x, y \in M$, назовём пересекающимися, если $\exists i \in \{1, 2, \dots, K_x\}$, $\exists j \in \{1, 2, \dots, K_y\}$:

$$(t_0(s_i, x, i); t_0(s_i, x, i) + \tau(s_i, x, i)) \cap (t_0(s_j, y, j); t_0(s_j, y, j) + \tau(s_j, y, j)) \neq \emptyset$$

при $s_i = s_j$. В противном случае маршруты назовем непересекающимися.

Расширим множество изделий, включив в принятый набор изделий новое изделие \tilde{m} : $\tilde{M} = M \cup \{\tilde{m}\}$. В этом случае множество возможных маршрутов Z расширяется $\tilde{Z} = \{z_m, m \in \tilde{M}\}$.

Определение 2.1.3. Производственным планом назовём множество p :

1. $p \subseteq \tilde{Z}$;
2. $\forall m \in \tilde{M}, \exists ! z_m \in p : T_f(m) \leq T_l(m)$;
3. $\forall x, y \in p, x, y$ – непересекающиеся маршруты.

Изделие \tilde{m} включается в объемно-календарный план с момента времени t_0 , на этот момент изделия из множества M уже находятся в процессе производства и изменить этапы обработки, начатые ранее t_0 , невозможно. Таким образом, модификация маршрутов изделий $m \in M$ возможна только частично.

Пусть i_m – номер этапа для изделия m : $t_0(s_{i_m-1}, m, i_m - 1) < t_0$, $t_0(s_{i_m}, m, i_m) \geq t_0$. Этапы обработки i , при $i = 1, 2, \dots, i_m - 1$, для изделия m на момент t_0 не могут быть изменены. Задача включения новой заявки с модификацией состоит в нахождении производственного плана p , маршруты

которого $z(m)$ варьируются за счет определения $t_0(s_i, m, i)$ по всем $m \in \widetilde{M}$, $i = i_m, \dots, K_m$.

Эта задача является линейной, для решения которой могут быть использованы методы линейного программирования.

В общем случае план p может быть не единственным, введём множество планов P . Если в множестве P содержится несколько элементов, то возникает проблема выбора производственного плана. Для решения этой проблемы необходимо ввести соответствующий критерий отбора, рассмотрим некоторые из них.

Для оценки маршрута $z(m)$ введём величины $c_m(i, s_i)$ – стоимостные затраты, связанные с пребыванием изделия m на этапе i , $1 \leq i \leq K_m$. В эти затраты могут быть включены затраты на энергию, амортизацию оборудования, зарплата обслуживающему персоналу и т.д. В этом случае можно провести оценку стоимости маршрута, например, с помощью функционала:

$$C(z(m)) = \sum_{i=i_m}^{K_m} c_m(i, s_i).$$

Расчет общих стоимостных затрат, включенных в план p , можно вычислить по формуле:

$$C(p) = \sum_{m \in \widetilde{M}} C(z(m)). \quad (2.12)$$

Резюмируя, отмечаем, что задача модификации объемно-календарного плана сводится к минимизации функции издержек (2.12) на множестве планов P .

Также для оценки плана важен учёт случайных воздействий, отрицательно влияющих на производственный процесс. Для оценки маршрута $z(m)$ введём $\xi_m(i, s_i)$ – случайные величины, отражающие временные задержки по обработке изделия m на этапе $1 \leq i \leq K_m$. В зависимости от этапа, это могут быть несвоевременная поставка материальных ресурсов, поставка бракованных материальных ресурсов, болезнь производственных рабочих, отгулы, прогулы, несчастные

случаи на производстве, брак на производстве и т.д.

Пусть $M(\xi_m(i, s_i))$ – математическое ожидание временных задержек на этапе i . Введём

$$r_m(i, s_i) = \begin{cases} t_0(s_i, m, i) + \tau_0(s_i, m, i) + M(\xi_m(i, s_i)) \\ \quad - t_0(s_{i+1}, m, i+1), & 1 \leq i \leq K_m - 1; \\ t_0(s_i, m, i) + \tau_0(s_i, m, i) + M(\xi_m(i, s_i)), & i = K_m. \end{cases}$$

Если $r_m(i, s_i) < 0$, то можно утверждать, что в среднем на данном этапе задержки не влияют на выполнение маршрута, в противном случае будут систематические задержки, приводящие к срыву сроков выполнения маршрута.

Оценка временных рисков маршрута может быть вычислена на основе функционала:

$$R(z(m)) = \sum_{i=i_m}^{K_m} r_m(i, s_i) I(r_m(i, s_i) > 0).$$

Здесь $I(x) = 1$, если x – истина, иначе $I(x) = 0$.

Общая оценка временных рисков плана p может быть сведена к функционалу:

$$R(p) = \sum_{m \in \tilde{M}} R(z(m)). \quad (2.13)$$

Оптимизационная задача минимизации функционала (2.13) на множестве P представляет выбор плана при котором минимизируются суммарные временные риски. Функционал $R(p)$ ограничен снизу нулем, если этот инфимум достижим, то риски можно признать нулевыми. Применение поставленной оптимизационной задачи соответствует принципу управления «с учетом рисков».

2.1.3 Управление потребностью в режущем инструменте

На предприятиях часто используются автоматизированные системы, позволяющие создавать трехмерные модели инструментальных наладок и хранить

информацию о них в базах данных предприятия. Однако такие программы не позволяют проводить анализ потребности инструмента для выполнения плана производства и отслеживать наличие инструмента на складе.

В практике предприятий применяются статистические и нормативные методы расчета норм расхода режущего инструмента [76]. Данные методы не позволяют в полной мере выполнить принципы «точно в срок» и «под заданную себестоимость» при планировании производства.

Рассмотрим модель управления себестоимостью изделия за счет определения оптимальных значений факторов, связанных с выбором режущих инструментов в механообрабатывающем цехе [223]. Входными параметрами модели являются ежемесячный план производства для данного цеха и набор управляющих программ и САМ-проектов для производства продукции цеха. Выходными характеристиками является перечень режущих инструментов, необходимых для выполнения производственного плана.

Предположим, что в рамках производства выпускается n видов изделий. Введем переменные q_i , $1 \leq i \leq n$: q_i – планируемый объем производства изделий вида i .

Для производства изделия вида i заложен набор управляющих программ, с помощью которых производятся изделия данного вида. Предположим, что k_i – количество таких управляющих программ для изделия вида i . Для каждой программы определен свой набор режущих инструментов, на основе которого формируется инструментальная наладка для оборудования, определенного данной программой. Очевидно, что, исходя из набора режущих инструментов, можно определить стоимость инструментальной наладки и рабочее время её применимости.

Обозначим через τ_{ij} время обработки одной единицы i -го изделия в j -ой программе. Предположим, что при каждой обработке производственный процесс обработки имеет линейный многоэтапный последовательный характер, т.е.

может использоваться последовательно несколько инструментальных наладок разного вида. Пусть m_{ij} – количество этапов, a_{ijs} – количество инструментальных наладок, необходимых для изготовления одной единицы i -го изделия в j -ой программе на этапе s , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$, $1 \leq s \leq m_{ij}$. Будем считать, что величина a_{ijs} выражается в общем случае дробным числом, а τ_{ij} задано в часах.

Задачей управления будем считать определение количества вызовов управляющих программ для выполнения производственного плана цеха. Пусть x_{ij} – количество вызовов j -ой программы для изготовления i -го изделия. В предположении, что одна управляющая программа обеспечивает выпуск одной единицы изделия, справедливо балансовое соотношение:

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ik_i} = q_i.$$

При этом $x_{ij} \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$. Данное балансовое соотношение выполняется для всех видов продукции, т.е. при $1 \leq i \leq n$.

Можно отметить, что в данной постановке управляющая программа представляет собой аналог маршрута изделия (Определение 2.1.2). А общая задача управления – поиск плана, содержащего маршруты изделий в рамках цеха. Соответственно, для выбора конкретного плана требуется критерий сравнения планов.

Во введенных обозначениях общее количество инструментальных наладок для изготовления i -го изделия в j -ой программе на этапе s выражается произведением $a_{ijs}x_{ij}$. Если ввести цену p_{ijs} одной единицы инструментальной наладки для i -го изделия в j -ой программе на этапе s , то общие издержки C , связанные с формированием инструментальных наладок, выражаются линейным соотношением:

$$C(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{m_{ij}} p_{ijs} a_{ijs} x_{ij}.$$

А общие временные затраты можно вычислить на основе соответствующего

линейного соотношения:

$$T(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \tau_{ij} x_{ij}.$$

Выбор набора переменных величин x_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$) определяет денежные и временные издержки. Минимизация функции издержек C при условии соблюдения балансовых соотношений может привести к тому, что производственный план не будет выполнен в приемлемое время. В свою очередь, минимизация временных издержек T может слишком сильно увеличить издержки, связанные с приобретением режущего инструмента. В этом случае разумным представляется свертка данных критериев в единый критерий или минимизация одного из них при фиксированном уровне другого.

Например, можно зафиксировать допустимый уровень издержек C^* , направленных на приобретение режущего инструмента. Тогда задача (2.14) позволяет минимизировать временные издержки под заданную себестоимость.

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) \rightarrow \min, \\ C(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) \leq C^*, \\ \sum_{j=1}^{k_i} = q_i, \quad 1 \leq i \leq n; \\ x_{ij} \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k_i. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Если зафиксировать временные издержки, то другой задачей может быть минимизация себестоимости при заданном временном уровне T^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} C(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) \rightarrow \min, \\ T(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) \leq T^*, \\ \sum_{j=1}^{k_i} = q_i, \quad 1 \leq i \leq n; \\ x_{ij} \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k_i. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Третьим вариантом построения оптимизационной задачи может быть свертка критериев:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha C(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) + \\ (1 - \alpha)T(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) \rightarrow \min, \\ C(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) \leq C^*, \\ T(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}) \leq T^*, \\ \sum_{j=1}^{k_i} = q_i, \quad 1 \leq i \leq n; \\ x_{ij} \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k_i. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Здесь $\alpha \in [0; 1]$ и представляет значимость соответствующего критерия.

Все рассматриваемые варианты оптимизационных моделей являются задачами целочисленного линейного программирования, что требует применения соответствующего математического и инструментального аппарата анализа.

При решении задач (2.14), (2.15), (2.16) определяется не только оптимальное количество вызовов программ для выполнения плана (q_1, q_2, \dots, q_n) , но и потребность в инструментальных наладках. В связи с этим можно рассмотреть два варианта управления количеством наладок.

Пусть $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n})$ – оптимальный план, полученный в одной из рассматриваемых моделей (2.14), (2.15) или (2.16). В этом случае потребность в инструментальных наладках составит $b_{ijs} = a_{ijs}x_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$, $1 \leq s \leq m_{ij}$. Предположим, что цех имеет в наличии b_{ijs}^* наладок, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$, $1 \leq s \leq m_{ij}$. Тогда дополнительный план по обеспечению инструментальных наладок определяется величинами $d_{ijs} = \max\{0, b_{ijs} - b_{ijs}^*\}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$, $1 \leq s \leq m_{ij}$.

Возможны случаи, когда предприятие не имеет возможности быстрого обеспечения дополнительных инструментальных наладок. Тогда приходится ре-

шать задачу с учетом ограничений на количество имеющихся наладок:

$$a_{ijs}x_{ij} \leq b_{ijs}^*, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k_i, \quad 1 \leq s \leq m_{ij}. \quad (2.17)$$

Если к одной из задач (2.14), (2.15), (2.16) добавить условие (2.17), то мы можем трактовать такую задачу как поиск оптимального количества вызовов управляющих программ с учетом имеющихся запасов инструментальных наладок.

Предложенная модель управления потребностью в режущем инструменте в механообрабатывающем цехе позволяет оптимизировать складские запасы в соответствии с принципами «точно в срок» и «под заданную себестоимость» для многономенклатурного производства, за счёт решения оптимизационных задач (2.14), (2.15), (2.16). Применение данной модели позволит повысить эффективность планирования закупок режущего инструмента и сократить расходы на его приобретение. Отметим, что решение описанных оптимизационных задач требует наличия входных данных, таких как перечни применяемого инструмента для изготовления конкретных деталей, месячный производственный план изготовления деталей, наличие инструмента на складе, перечни инструмента для использования на конкретных станках и т.д.

2.1.4 Выбор оснастки

При организации производственного процесса перед инженером-технологом встает вопрос выбора наиболее целесообразной технологической оснастки. В общем случае выбор решения на множестве альтернатив представляет собой оптимизационную проблему при заданном критерии качества.

Основными видами технологической оснастки можно считать универсально-сборные приспособления (УСП) и неразборные специальные приспособления (НСП) [217]. Для рационального определения набора УСП и НСП основными показателями выбора являются вид детали, вид технологической обработки,

схема базирования, габариты обрабатываемой детали, точность обработки, материал, наличие поверхностей двойной кривизны и их расположение. В качестве множеств альтернатив выступают трудоёмкости проектирования и изготовления НСП и УСП.

Рассмотрим модель выбора оснастки с учетом принципов менеджмента «точно в срок», «под заданную себестоимость», «с учетом рисков», которая была предложена в работе [227, 229].

Предполагается, что на предприятии производственная линия выпускает некоторую совокупность деталей и сборок $D = \{D_1, D_2, \dots, D_{N^D}\}$ (N^D – общее количество сборок и видов деталей). Для этого используются универсально-сборные приспособления $UD = \{UD_1, UD_2, \dots, UD_{N^{UD}}\}$ (здесь UD – Universal Device, N^{UD} – общее количество видов УСП), а также неразборные специальные приспособления $SD = \{SD_1, SD_2, \dots, SD_{N^{SD}}\}$ (здесь SD – Special Device, N^{SD} – общее количество видов НСП).

Между деталями и приспособлениями заданы множественные отношения: φ^{SD} , φ^{UD} , которые позволяют определить принадлежность видов деталей (сборок) D_{i^D} к соответствующим видам приспособлений $SD_{i^{SD}}$ и $UD_{i^{UD}}$. Таким образом,

$$\varphi^{SD} = \{(D_{i^D}, SD_{i^{SD}}) : \begin{array}{l} D_{i^D} \in D, i^D \in \{1, 2, \dots, N^D\}, \\ SD_{i^{SD}} \in SD, i^{SD} \in \{1, 2, \dots, N^{SD}\} \end{array}\}$$

$$\varphi^{UD} = \{(D_{i^D}, UD_{i^{UD}}) : \begin{array}{l} D_{i^D} \in D, i^D \in \{1, 2, \dots, N^D\}, \\ UD_{i^{UD}} \in UD, i^{UD} \in \{1, 2, \dots, N^{UD}\} \end{array}\}$$

Пусть задан горизонт планирования T . В рамках планового периода при $t \in [t_0; T]$ определена вектор-функция требуемого объема деталей и сборок $V(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_{N^D}(t))$, $V_i(t)$ – планируемый объем производства детали (сборки) вида i в момент t .

Одной из важных задач на предприятии является выбор количества НСП и УСП, который может быть выполнен на основе определенного критерия каче-

ства. К основным характеристикам, влияющим на выбор, можно отнести следующие: себестоимость, риски при эксплуатации в процессе производства, производительность. На основе одной или нескольких таких характеристик строится критерий качества.

Обозначим некоторые показатели для УСП и НСП:

- p_{ij}^S – производительность НСП вида i при применении к производству деталей вида j , $j \in \{1, 2, \dots, N^D\}$, $i \in \{1, 2, \dots, N^{SD}\}$ (объем деталей (сборок) в ед. времени);
- p_{ij}^U – производительность УСП вида i при применении к производству деталей вида j , $j \in \{1, 2, \dots, N^D\}$, $i \in \{1, 2, \dots, N^{UD}\}$ (объем деталей (сборок) в ед. времени).

Также введем обозначения, связанные с количеством и длительностью эксплуатации УСП и НСП разного вида:

- $x_{ij}^S(t)$ – объем НСП вида i , запущенный в момент времени t , для производства деталей (сборок) вида j , $j \in \{1, 2, \dots, N^D\}$, $t \in [t_0; T]$, $i \in \{1, 2, \dots, N^{SD}\}$;
- $x_{ij}^U(t)$ – объем УСП вида i , запущенный в момент времени t , для производства деталей (сборок) вида j , $j \in \{1, 2, \dots, N^D\}$, $t \in [t_0; T]$, $i \in \{1, 2, \dots, N^{UD}\}$;
- $\tau_{ij}^U(t)$ – определенная в момент времени t непрерывная длительность работы УСП вида i при производстве деталей или сборок вида j , $j \in \{1, 2, \dots, N^D\}$, $i \in \{1, 2, \dots, N^{UD}\}$;
- $\tau_{ij}^S(t)$ – определенная в момент времени t непрерывная длительность работы НСП вида i при производстве деталей или сборок вида j , $j \in \{1, 2, \dots, N^D\}$, $i \in \{1, 2, \dots, N^{SD}\}$.

Пусть $Q_j(t)$ – количество деталей вида j , производимых в момент времени

t , тогда:

$$Q_j(t) = \sum_{i:(D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} (x_{ij}^U(\tau) p_{ij}^U I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau))) + \\ \sum_{i:(D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} (x_{ij}^S(\tau) p_{ij}^S I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau))).$$

Здесь $SI_{[t_0; t]}(\cdot)$ – функция вида (2.1).

Введем множество наборов УСП и НСП, которые могут быть созданы в момент t :

$$X(t) = \left\{ x(t) : x(t) = (x^U(t), x^S(t)), x^U(t) \in \mathbb{R}^{N^{UD} \times N^D}, x^S(t) \in \mathbb{R}^{N^{SD} \times N^D}, \right.$$

$$\left. 1 \leq j \leq N^D, x_{ij}^U, x_{kj}^S : (D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}, (D_j, SD_k) \in \varphi^{SD} \right\}.$$

Введем $A(t)$ – множество, содержащее наборы УСП и НСП, которые могут реализованы в силу ограничений прикладной проблемы, в момент t . Пусть N^L означает количество групп (квалификаций) трудовых ресурсов, используемых на предприятии, по каждой группе i есть максимально возможный объем ресурсов $L_i(t)$, свободный для распределения на производстве. В этом случае вектор-функция $L(t) = (L_1(t), L_2(t), \dots, L_{N^L}(t))$ представляет количественную оценку трудовых ресурсов по всем видам квалификации.

Обозначим через $a_{ij}^U = (a_{ij1}^U, a_{ij2}^U, \dots, a_{ijN^L}^U)$ нормативную векторную величину, соответствующую затратам трудовых ресурсов при производстве j -й детали (сборки), задействуя i -й УСП. Элементами вектора a_{ij}^U являются значения a_{ijk}^U , которые содержат нормы затрат труда для персонала квалификации k -го вида. Соответственно, $a_{ij}^S = (a_{ij1}^S, a_{ij2}^S, \dots, a_{ijN^L}^S)$ – нормативная векторная величина, соответствующая затратам трудовых ресурсов при производстве j -й детали (сборки), задействуя i -й НСП.

Таким образом, для каждого вида деталей j можно найти объем затрачен-

ного труда $\tilde{L}^j(t)$:

$$\tilde{L}^j(t) = \sum_{i:(D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} (x_{ij}^S(\tau) a_{ij}^S I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau))) + \sum_{i:(D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} (x_{ij}^U(\tau) a_{ij}^U I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau))).$$

Общая обеспеченность трудовыми ресурсами определяется неравенством:

$$\sum_{j=1}^{N^D} \tilde{L}^j(t) = \tilde{L}(t) \leq L(t),$$

здесь $\tilde{L}(t)$ – общие трудозатраты на обеспечение производства $Q(t)$.

Введем нормативные сроки эксплуатации приспособлений для деталей или сборок вида j , $j \in \{1, 2, \dots, N^D\}$:

- τ_{ij}^{UN} – нормативный срок эксплуатации УСП вида i ($i \in \{1, 2, \dots, N^{UD}\}$) для детали;
- τ_{ij}^{SN} – нормативный срок эксплуатации НСП вида l ($l \in \{1, 2, \dots, N^{SD}\}$) для детали.

Для расчета финансовых затрат, связанных с рассматриваемой задачей, будем предполагать, что сроки τ_{ij}^{UN} , τ_{ij}^{SN} приведены к моменту t_0 . Если устройство (УСП или НСП) не эксплуатировалось до начала периода планирования, то приведенные значения устанавливаются нормативными. Если же эксплуатация имела место быть, то длительность эксплуатации вычитается из нормативной и назначается приведенной. Введем c_{ij}^U , c_{ij}^S – затраты на проектирование и изготовление соответствующих УСП и НСП. Будем считать, что эти затраты являются приведенными.

Тогда общую стоимость затрат $C_j^P(t)$ для деталей вида j можно вычислить

по формуле:

$$C_j^P(t) = \sum_{i:(D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(x_{ij}^U(\tau) c_{ij}^U \min \left\{ \frac{\tau_{ij}^U(\tau)}{\tau_{ij}^{UN}}, 1 \right\} I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau)) \right) + \sum_{i:(D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(x_{ij}^S(\tau) c_{ij}^S \min \left\{ \frac{\tau_{ij}^S(\tau)}{\tau_{ij}^{SN}}, 1 \right\} I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau)) \right).$$

Для финансовой дифференциации трудовых ресурсов введем величину c_k^L , означающую норму оплаты для персонала группы k . Тогда оплата труда $C_j^L(t)$ (по детали вида j) может быть вычислена:

$$C_j^L(t) = \sum_{k=1}^{N^L} \tilde{L}_k^j(t) c_k^L.$$

Для поддержания работоспособности приспособлений необходимы соответствующие затраты, через b_{ij}^U , b_{ij}^S обозначим нормы затрат для УСП и НСП, соответственно. Тогда переменные затраты $C_j^b(t)$, связанные с поддержкой эксплуатации, могут быть найдены по формуле:

$$C_j^b(t) = \sum_{i:(D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} (x_{ij}^U(\tau) b_{ij}^U I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau))) + \sum_{i:(D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} (x_{ij}^S(\tau) b_{ij}^S I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau))).$$

Очевидным образом общие финансовые затраты $C_j(t)$ на производство деталей вида j определяются как сумма:

$$C_j(t) = C_j^P(t) + C_j^L(t) + C_j^b(t).$$

Функционирование приспособлений связано с рядом рисков, которые приводят к различным потерям при производстве. К таким потерям можно отнести

финансовые, временные потери, брак при производстве. Факторы, провоцирующие потери, являются в первую очередь внутренними, что позволяет влиять на них и изменять в нужном направлении.

Предположим, что вид НСП $l \in \{1, 2, \dots, N^{SD}\}$, вид УСП $i \in \{1, 2, \dots, N^{UD}\}$, вид детали $j \in \{1, 2, \dots, N^D\}$, временные скалярные величины $\tau \in [t_0; T]$ (момент создания приспособления), $t \in [\tau; T]$. Обозначим ряд случайных величин для детали вида j :

- $\xi_{ij}^U(t, \tau)$ – финансовые потери, случившиеся в момент t , при эксплуатации УСП i -го вида (денежные единицы);
- $\eta_{ij}^U(t, \tau)$ – временные потери, случившиеся в момент t , при эксплуатации УСП i -го вида (доля от единицы времени);
- $\zeta_{ij}^U(t, \tau)$ – объем брака, произведенного в момент t , при эксплуатации УСП i -го вида (количество единиц продукции);
- $\xi_{ij}^S(t, \tau)$ – финансовые потери, случившиеся в момент t , при эксплуатации НСП l -го вида (денежные единицы);
- $\eta_{ij}^S(t, \tau)$ – временные потери, случившиеся в момент t , при эксплуатации НСП l -го вида (доля от единицы времени);
- $\zeta_{ij}^S(t, \tau)$ – объем брака, произведенного в момент t , при эксплуатации НСП l -го вида (денежные единицы).

Очевидно, что случайные величины $\xi_{ij}^U(t, \tau)$, $\eta_{ij}^U(t, \tau)$, $\zeta_{ij}^U(t, \tau)$, $\xi_{ij}^S(t, \tau)$, $\eta_{ij}^S(t, \tau)$, $\zeta_{ij}^S(t, \tau)$ являются неотрицательными, в общем случае зависят от времени.

Для выбора конкретного набора УСП и НСП необходимо сформулировать критерий качества. Далее построим критерий на основе принципов менеджмента «точно в срок», «под заданную себестоимость», «с учетом рисков».

Пусть $[a]^+$ – функция срезки: $[a]^+ = 0$, если $a < 0$, иначе $[a]^+ = a$. Модифицируем введенные выше случайные величины:

$$\begin{aligned}
- \tilde{\xi}_{ij}^U(t, \tau) &= \xi_{ij}^U(t, \tau) \left(1 + \alpha_{ij}^U [t - \tau - \tau_{ij}^{UN}]^+ I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(t)) \right); \\
- \tilde{\xi}_{ij}^S(t, \tau) &= \xi_{ij}^S(t, \tau) \left(1 + \alpha_{ij}^S [t - \tau - \tau_{ij}^{SN}]^+ I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(t)) \right); \\
- \tilde{\eta}_{ij}^U(t, \tau) &= \eta_{ij}^U(t, \tau) \left(1 + \beta_{ij}^U [t - \tau - \tau_{ij}^{UN}]^+ I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(t)) \right); \\
- \tilde{\eta}_{ij}^S(t, \tau) &= \eta_{ij}^S(t, \tau) \left(1 + \beta_{ij}^S [t - \tau - \tau_{ij}^{SN}]^+ I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(t)) \right); \\
- \tilde{\zeta}_{ij}^U(t, \tau) &= \zeta_{ij}^U(t, \tau) \left(1 + \gamma_{ij}^U [t - \tau - \tau_{ij}^{UN}]^+ I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(t)) \right); \\
- \tilde{\zeta}_{ij}^S(t, \tau) &= \zeta_{ij}^S(t, \tau) \left(1 + \gamma_{ij}^S [t - \tau - \tau_{ij}^{SN}]^+ I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(t)) \right).
\end{aligned}$$

Если приспособления эксплуатируются в рамках нормативных временных сроков, то модифицированные случайные величины совпадают с исходными. При выходе за нормативные сроки происходит увеличение соответствующих рисков. Указанное свойство выполняется, если параметры $(\alpha_{ij}^U, \beta_{ij}^U, \gamma_{ij}^U, \alpha_{ij}^S, \beta_{ij}^S, \gamma_{ij}^S)$ случайных величин положительны.

Для модели управления УСП и НСП принцип «точно в срок» выполняется, если выполняется условие $Q(t) = V(t)$, $t \in [t_0; T]$.

Проведем переоценку производительности УСП и НСП с учетом временных задержек $\tilde{\eta}_{ij}^U(t, \tau)$, $\tilde{\eta}_{ij}^S(t, \tau)$, в этом случае имеем:

$$\tilde{p}_{ij}^U(t, \tau) = \frac{p_{ij}^U}{1 + \tilde{\eta}_{ij}^U(t, \tau)}, \quad \tilde{p}_{ij}^S(t, \tau) = \frac{p_{ij}^S}{1 + \tilde{\eta}_{ij}^S(t, \tau)}.$$

Если принимать во внимание объем произведенного брака $\tilde{\zeta}_{ij}^U(t, \tau)$, $\tilde{\zeta}_{ij}^S(t, \tau)$, то следует проводить корректировку плановых показателей с учетом брака.

Введем плановый объем выпуска j -го вида продукта в виде $\tilde{Q}_j(t)$:

$$\tilde{Q}_j(t) = \sum_{i:(D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(x_{ij}^U(\tau) \tilde{p}_{ij}^U(t, \tau) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau)) + \tilde{\zeta}_{ij}^U(t, \tau) \right) + \sum_{i:(D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(x_{ij}^S(\tau) \tilde{p}_{ij}^S(t, \tau) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau)) + \tilde{\zeta}_{ij}^S(t, \tau) \right).$$

Пусть множество $S_{JIT}(t)$ содержит набор допустимых УСП и НСП, которые позволяют произвести объем деталей (сборок) в заданное время так, чтобы обеспечить плановый объем продукции $V(t)$:

$$S_{JIT}(t) = \left\{ x(t) : x(t) \in X(t) \cap A(t), \tilde{Q}(t) \in [V(t); V(t) + \varepsilon], \tilde{L}(t) \leq L(t) \right\}.$$

ε – вектор допустимого превышения плановых показателей сверх установленного плана.

Если $S_{JIT}(t)$ содержит несколько элементов, то для выбора единственного решения, удовлетворяющего принципу «точно в срок», необходим дополнительный критерий. Но даже введение дополнительного критерия качества не закрывает проблему, так как $S_{JIT}(t)$ содержит случайные величины. Последнее существенно осложняет использование стандартных подходов к оптимизационной проблеме.

Выполним переход к детерминированной оптимизационной задаче посредством замены случайных величин их средними значениями. В этом случае можно ввести величину $\bar{Q}_j(t)$ для j -го продукта:

$$\bar{Q}_j(t) = \sum_{i:(D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(M \left(\tilde{\zeta}_{ij}^U(t, \tau) \right) + x_{ij}^U(\tau) M \left(\tilde{p}_{ij}^U(t, \tau) \right) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau)) \right) + \sum_{i:(D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(x_{ij}^S(\tau) M \left(\tilde{p}_{ij}^S(t, \tau) \right) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau)) + M \left(\tilde{\zeta}_{ij}^S(t, \tau) \right) \right).$$

В этом случае вместо множества $S_{JIT}(t)$ можно рассматривать $\bar{S}_{JIT}(t)$:

$$\bar{S}_{JIT}(t) = \left\{ x(t) : x(t) \in X(t) \cap A(t), \bar{Q}(t) = V(t), \tilde{L}(t) \leq L(t) \right\}.$$

Здесь $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \bar{Q}_2(t), \dots, \bar{Q}_{ND}(t))$.

Множество $\bar{S}_{JIT}(t)$ в отличие от $S_{JIT}(t)$ является линейной детерминированной системой условий. В качестве дополнительного критерия можно взять следующий:

$$J_{JIT}(x(\cdot)) = SI_{t \in [t_0; T]} \left(\sum_{i,j: (D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} (D(\tilde{\eta}_{ij}^U(t, \tau)) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau))) \right. \\ \left. + \sum_{i,j: (D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} (D(\tilde{\eta}_{ij}^S(t, \tau)) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau))) \right).$$

Введенный функционал $J_{JIT}(x(\cdot))$ – суть сумма дисперсий рисков, связанных с уменьшением производительности и тем самым влияющих на обеспечение принципа «точно в срок». Поставим оптимизационную проблему:

$$J_{JIT}(x^*(\cdot)) = \min_{x(\cdot) \in \bar{S}_{JIT}} J_{JIT}(x(\cdot)).$$

$x^*(\cdot)$ – искомое решение проблемы.

Поставленная таким образом оптимизационная проблема с содержательной точки зрения реализует принципы менеджмента «с учетом рисков» и «точно в срок». С точки зрения практического решения получаем задачу с квадратичным функционалом и линейными ограничениями.

Проведем оценку себестоимости продукции. Для этого можно рассматривать себестоимость каждого вида продукции в отдельности или интегральную себестоимость выпускаемой продукции в целом. Если предприятие выпускает многономенклатурную продукцию, то управляющие органы заинтересованы в большей степени в оценке интегральной себестоимости. Однако в этом случае

требуется агрегация всех видов продукции и приведение к одной единице измерения. Далее будем считать, что объем производства измеряется в денежном эквиваленте.

Принимая во внимание введенные предположения, сделаем оценку интегральной себестоимости $CP(t)$, обусловленную эксплуатацией УСП и НСП, в виде:

$$CP(t) = \frac{\sum_{j=1}^{N^D} C_j(t)}{\sum_{j=1}^{N^D} Q_j(t)}.$$

При эксплуатации приспособлений могут возникать требования по дополнительному финансированию, невыделенному в рамках утвержденного бюджета. Это может быть связано с выходом из строя оборудования, санкциями проверяющих органов, проблемами с энергообеспечением и т.д. В этом случае меняются затраты, связанные с эксплуатацией приспособлений, для каждого вида деталей j :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_j^b(t) = & \sum_{i:(D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(\left(x_{ij}^U(\tau) b_{ij}^U + \tilde{\xi}_{ij}^U(t, \tau) \right) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau)) \right) + \\ & \sum_{i:(D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(\left(x_{ij}^S(\tau) b_{ij}^S + \tilde{\xi}_{ij}^S(t, \tau) \right) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau)) \right). \end{aligned}$$

Тогда по деталям вида j общие затраты $\tilde{C}_j(t)$ могут вычислены в виде суммы:

$$\tilde{C}_j(t) = C_j^P(t) + C_j^L(t) + \tilde{C}_j^b(t).$$

Исходя из проведенной модификации затрат на производство продукции, можно привести измененную оценку интегральной себестоимости $\widetilde{CP}(t)$:

$$\widetilde{CP}(t) = \frac{\sum_{j=1}^{N^D} \tilde{C}_j(t)}{\sum_{j=1}^{N^D} \tilde{Q}_j(t)}.$$

Если предприятие управляет себестоимостью, то оно может задавать эту характеристику как по каждому виду продукции, так и по продукции в целом. Остановимся на случае фиксированной интегральной себестоимости CP^* .

Тогда условие обеспечения заданной себестоимости можно представить в виде неравенства:

$$\widetilde{CP}(t) \leq CP^*.$$

Стохастическое множество $S_{CP}(t)$ содержит множество допустимых наборов приспособлений, удовлетворяющих условию заданной себестоимости:

$$S_{CP}(t) = \left\{ x(t) : x(t) \in X(t) \cap A(t), \widetilde{CP}(t) \leq CP^*, \widetilde{L}(t) \leq L(t) \right\}.$$

В случае, когда множество $S_{CP}(t)$, $t \in [t_0; T]$ содержит несколько допустимых наборов, возникает вопрос введения критерия по определению лучшего из этих наборов. Можно рассмотреть следующий:

$$J_{CP}(x(\cdot)) = SI_{t \in [t_0; T]} \left(\sum_{i,j:(D_j, UD_i) \in \varphi^{UD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(D \left(\widetilde{\xi}_{ij}^U(t, \tau) \right) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^U(\tau)) \right) + \sum_{i,j:(D_j, SD_i) \in \varphi^{SD}} SI_{\tau \in [t_0; t]} \left(D \left(\widetilde{\xi}_{ij}^S(t, \tau) \right) I(t - \tau \leq \tau_{ij}^S(\tau)) \right) \right).$$

Детерминированная оценка интегральной себестоимости описывается условием:

$$\overline{\overline{CP}}(t) = M \left(\frac{\sum_{j=1}^{N^D} \widetilde{C}_j(t)}{\sum_{j=1}^{N^D} \widetilde{Q}_j(t)} \right).$$

Тогда детерминированное множество допустимых наборов приспособлений с заданной интегральной себестоимостью $\overline{S}_{CP}(t)$, $t \in [t_0; T]$ можно определить в виде:

$$\overline{S}_{CP}(t) = \left\{ x(t) : x(t) \in X(t) \cap A(t), \overline{\overline{CP}}(t) \leq CP^*, \widetilde{L}(t) \leq L(t) \right\}.$$

Когда пересечение $\overline{S}_{CP} \cap \overline{S}_{JIT}$ содержит несколько допустимых наборов, можно ввести дополнительный критерий и поставить задачу поиска единственного решения $x^*(\cdot)$:

$$J_{CP}(x^*(\cdot)) = \min_{x(\cdot) \in \overline{S}_{CP} \cap \overline{S}_{JIT}} J_{CP}(x(\cdot)).$$

Поставленная таким образом оптимизационная задача формализует выбор оптимального набора приспособлений с учетом принципов управления: «под заданную себестоимость», «с учетом рисков», «точно в срок».

2.2 Управление инвестициями

Инвестиции имеют эффект последствия в силу длительной временной трансформации при переходе с момента их выделения до момента отдачи в виде преобразованных фондов. В данном разделе приведены примеры моделей управления инвестициями с учетом запаздывающего эффекта.

2.2.1 Двухсекторная экономика

В [37] рассматривается модель двухсекторной экономики с различными технологиями производства: в первом секторе производятся однородные капитальные блага (средства производства), во втором однородные потребительские блага (предметы потребления).

Очевидно, что требование однородности сложно выполнить в реальной экономической системе. Поэтому в дальнейшем будем считать, что фонды представлены стоимостной оценкой, их количества в секторах обозначим через x_1 , x_2 , соответственно. Коэффициент фондоотдачи в секторе производства средств производства будем полагать α , введем коэффициенты амортизации фондов для секторов μ_1 , μ_2 , соответственно.

Справедливо балансовое соотношение

$$\alpha x_1(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + \mu_1 x_1(t) + \mu_2 x_2(t). \quad (2.18)$$

Величины $\dot{x}_i + \mu_i x_i$ ($i = 1, 2$) обозначают количества выпускаемых фондов, направляемых в соответствующий сектор. Обозначим

$$u = \frac{\dot{x}_1 + \mu_1 x_1}{\alpha x_1}. \quad (2.19)$$

Величина u – доля новых фондов, инвестируемых в сектор средств производства. Тогда во второй сектор доля новых фондов составит $(1 - u)$.

В предположении, что величины x_1 , x_2 , u зависят от времени t , а параметры α , μ_1 , μ_2 являются постоянными. Из соотношений (2.18), (2.19) можно получить модель динамики:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha u(t)x_1(t) - \mu_1 x_1(t), \\ \dot{x}_2 = \alpha(1 - u(t))x_1(t) - \mu_2 x_2(t). \end{cases} \quad (2.20)$$

Начальные условия в обоих секторах считаются заданными:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0. \quad (2.21)$$

Переменная u является управляющей функцией и выбирается из условия:

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (2.22)$$

В качестве критерия качества можно рассматривать максимизацию суммарного потребления благ на периоде планирования. Предполагая, что объем потребительских благ прямо пропорционален объему производственных фондов во втором секторе, можно в качестве критерия выбрать следующий:

$$\int_{t_0}^T x_2(t) dt \rightarrow \max, \quad (2.23)$$

здесь $[t_0; T]$ – интервал планирования.

2.2.2 Двухсекторная экономика с учетом лагового освоения инвестиций

Заметим, что в модели (2.20), (2.23) предполагается, что инвестиции трансформируются в производственные фонды в обоих секторах в том же такте времени, когда были выделены. На практике такая ситуация выполняется далеко

не всегда, поэтому в общем случае присутствует временное запаздывание при освоении инвестиций [211, 226].

Рассмотрим модифицированную модель двухсекторной экономики [211], в которой предполагается, что отдача от инвестиций в производственные фонды, как и соответствующее управленческое решение, происходят с постоянной задержкой.

В этом случае, на основе модели (2.20), (2.23) можно построить следующую модель:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha u(t - \tau_1)x_1(t - \tau_1) - \mu_1 x_1(t), \\ \dot{x}_2 = \alpha(1 - u(t - \tau_2))x_1(t - \tau_2) - \mu_2 x_2(t). \end{cases} \quad (2.24)$$

Различие в лагах запаздывания τ_1, τ_2 объясняется различной организационной технологией в секторах, что может повлечь различную скорость освоения инвестиций. Также несколько изменяются начальные условия: начальное состояние системы задается в виде известных детерминированных функций: $x_1^0(t), x_2^0(t), u^0(t)$, определенных при $t \leq t_0$.

Принимая во внимание введенные обозначения, можно сформулировать задачу оптимального распределения выпускающих фондов для достижения максимального суммарного выпуска потребительских благ в виде задачи оптимального управления с точечным запаздыванием: максимизировать функционал (2.23) при условиях на динамику (2.24), управление (2.22) и начальных условиях $x_1(t) = x_1^0(t), x_2(t) = x_2^0(t), u(t) = u^0(t)$ при $t \leq t_0$.

2.2.3 Оптимизация инвестиционной стратегии фирмы

При математическом моделировании деятельности крупного экономического объекта, оценки его валового выпуска используется производственная функция [132]. Она выражает количественно технологическое соотношение между производственными факторами и объемом выпуска. Традиционно капитал и

труд являются наиболее часто используемыми факторами производства.

В настоящее время в результате бурного развития информационных технологий экономика претерпевает фундаментальные изменения, предприятия вынуждены выживать в условиях, где мировой рынок характеризуется конкуренцией, разнообразием товаров и услуг, коротким жизненным циклом продукции [99]. Внедрение передовых технологий и автоматизированных систем в технологические процессы позволяет значительно снизить затраты труда. При этом, непосредственное влияние труда как фактора производства существенно уменьшается. Это приводит к тому, что использование фактора человеческого труда как одного из определяющих выпуск при моделировании производственного процесса становится неэффективным, а иногда даже некорректным.

Что касается капитала, то следует отметить, что исследователи располагают лишь сведениями о балансе фондов, которые зачастую слабо отражают реальное состояние экономического объекта. Трудности в оценке влияния эффективных производственных фондов на выпуск продукции вынуждают исследователей заменить фактор капитала на фактор инвестиций. Использование значений инвестиций является более гибким вариантом, доступным анализу и определяется текущей экономической конъюнктурой. Естественно, факторы капитала и инвестиций имеют различную природу, что нужно учитывать при построении корректной модели. Здесь стоит отметить работы [25, 26], в которых предлагается методика расчета эффективных фондов, амортизации, скорости освоения инвестиций.

Существует ряд моделей, описывающих производственный процесс с использованием инвестиций в качестве фактора производства. В модели Солоу-Свана предполагается, что инвестиции оказывают непосредственное влияние на выпуск продукции. Но процесс ввода инвестиций в эксплуатацию или модернизации обычно занимает достаточно много времени. Доход от реализации продукции, которая производится с использованием нового или модернизированного

оборудования, имеет запаздывающий характер. Так в работе [41] рассматривается модель Солоу-Свана, учитывающая распределенный характер освоения инвестиций. Отметим, что в [41] выбор ядра оператора в интегральной связи основывается на показательной функции, это позволяет авторам свести исходную интегральную проблему к решению линейных дифференциальных уравнений. Однако реальные экономические условия далеко не всегда удается описать в такой форме, требуются более сложные математические соотношения для отражения сущности изучаемого явления.

Инвестиционная деятельность любого предприятия состоит в финансировании развития производства, повышении качества выпускаемой продукции, расширении перечня предлагаемой продукции и, как следствие, увеличение объема продаж и получение прибыли. Инвестиции можно по разному типизировать, так к приобретению основных средств и нематериальных активов относят реальные инвестиции.

Рассмотрим модель, предложенную в [226]. Введем переменные:

- $y(t)$ – доход фирмы в момент времени t ;
- $I(t)$ – реальные инвестиции в момент времени t ;
- $v(t)$ – кумулятивный инвестиционный эффект к моменту времени t ;
- $w(t)$ – совокупный эффект от факторов, отличных от реальных инвестиций, в момент времени t .

Очевидно, что предприятия пытаются сбалансировать выпуск продукции и потребительский спрос. В этом случае, при отсутствии статистических данных о факторах производства, для построения математической модели выпуска можно использовать факторы спроса. В связи с этим, встает вопрос учета множества внутренних и внешних факторов, влияющих на спрос, например, размер заработной платы, ценообразование, общая рыночная тенденция и т. д. Прак-

тический учет всех факторов представляется малореальной задачей, но предполагая, что все неинвестиционные факторы меняются недостаточно быстро, для их оценки можно использовать значения дохода в прошлые моменты времени. Соответственно, текущая выручка оценивается посредством предыдущей выручки и накопленного реального инвестиционного эффекта.

С учетом сказанного введем связи между переменными модели:

$$v(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(\tau)I(t - \tau)d\tau; \quad (2.25)$$

$$w(t) = g(y(t - \tau_3)); \quad (2.26)$$

$$y(t) = f(v(t), w(t)). \quad (2.27)$$

В предложенных связях введена функция $G(\tau)$, которая определяет распределенный характер временной отдачи от инвестиций в стационарных условиях развития фирмы. Кумулятивный эффект от инвестиций наблюдается на множестве $[\tau_1; \tau_2]$ (теоретически τ_2 может быть равно $+\infty$, но на практике это значение ограничено). К функции $G(\tau)$ выдвигаются требования:

1. $G(\tau) \geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty)$;
2. $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G(\tau) = 0$;
3. $\exists \tau^* : G(\tau)$ возрастает при $\tau \in [0; \tau^*)$, $G(\tau)$ убывает при $\tau \in (\tau^*; +\infty)$.

Что касается функции $f(v, w)$, то, можно сказать, что она является аналогом производственной функции, следовательно, от нее можно потребовать следующие свойства:

1. функция $f(v, w) \geq 0, \forall v, w$;
2. функция $f(v, w)$ возрастает по переменной v ;
3. если инвестиции идут на восполнение или расширение фондов без принципиального изменения технологии, то функция $f(v, w)$ вогнута по v .

Функция $g(y)$ представляет собой оценку влияния факторов, отличных от реальных инвестиций, в том числе латентных факторов, на выпуск фирмы. Форма и степень влияния зависит от конкретной экономической ситуации и проводится эконометрическими методами. Параметр τ_3 является лагом, соответствующим запаздыванию по оценке совокупного влияния факторов, отличных от реальных инвестиций.

Из представленных соотношений следует, что увеличение инвестиций влечет увеличение выпуска. На практике инвестиции не могут быть получены в сколь угодно большом объеме, их ограниченность является следствием ограничений, связанных с инвестиционной политикой фирмы. Так, если инвестиционный фонд в каждый момент времени ограничен некоторой детерминированной функцией $\hat{I}(t)$ (заранее определена стратегия по формированию инвестиционного бюджета) на интервале планирования $t_0 \leq t \leq T$, то ограничения на функцию инвестиций можно записать в виде:

$$0 \leq I(t) \leq \hat{I}(t), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (2.28)$$

Другим вариантом ограничений на объем инвестиций может быть доля α от валового выпуска:

$$0 \leq I(t) \leq \alpha y(t), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (2.29)$$

Могут быть и иные ограничения на выбор инвестиционной функции, например, через заем средств в банке.

Для выбора конкретной инвестиционной функции нужен критерий определения эффективности инвестиционных затрат. Таким критерием может быть совокупная прибыль.

Пусть текущая прибыль $\pi(t)$ выражается в виде $\pi(t) = y(t) - I(t) - c(y(t), t)$, где $c(y(t), t)$ представляет собой постоянные издержки и издержки, связанные с производством продукции. Тогда совокупная прибыль на плановом периоде определяется функционалом:

$$\Pi(T) = \int_{t_0}^T \pi(t) dt = \int_{t_0}^T (y(t) - I(t) - c(y(t), t)) dt. \quad (2.30)$$

Таким образом, можно сформулировать задачу оптимального управления с эффектом последствия: максимизировать функционал (2.30) со связями на фазовые переменные (2.25), (2.26), (2.27) и ограничениями на управление (2.28) или (2.29).

Также к дополнительным условиям, влияющим на выбор инвестиционной стратегии, можно отнести требования к принципам менеджмента, реализуемым на данном предприятии.

Пусть y^* – требуемый объем валового выпуска, который нужно произвести за время T , тогда задача поиска инвестиционной стратегии: (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) при условии

$$\int_{t_0}^T y(t) dt = y^* \quad \left(\int_{t_0}^T y(t) dt \geq y^* \right) \quad (2.31)$$

обеспечивает принцип «точно в срок» и позволяет сформировать множество S_{JIT} (в данном случае это множество инвестиционных стратегий). Если это множество не пусто, то за счет максимизации (2.30) на множестве S_{JIT} можно найти инвестиционную стратегию, максимизирующую прибыль на множестве стратегий, удовлетворяющих принципу «точно в срок».

Таким образом, считая поток инвестиций управлением, можно ставить задачу максимизации прибыли (2.30) на интервале планирования при условиях (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.31). Полученная задача является задачей оптимального управления с интегральными связями, для решения этой задачи требуются соответствующие методы, в общем случае численные. Такая задача может быть решена методом параметризации [206].

Пусть CP^* – заданная себестоимость производимой продукции, тогда условие:

$$CP^* \geq \int_{t_0}^T c(y(t), t) dt / \int_{t_0}^T y(t) dt \quad (2.32)$$

представляет собой требование обеспечения себестоимости продукции в плановом периоде не выше заданной.

Вариационная задача (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.32) определяет множество S_{FPC} (множество инвестиционных стратегий), обеспечивающее принцип управления «под заданную себестоимость». Если множество S_{FPC} содержит несколько стратегий, то выбор единственного решения возможен за счет введения дополнительного критерия, например, максимизации функционала (2.30) на этом множестве. Полученная задача представляет собой задачу оптимального управления.

Реализация принципа «точно в срок, под заданную себестоимость» сводится к поиску инвестиционных стратегий: (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.31), (2.32). Выбор единственной инвестиционной стратегии возможен за счет введения дополнительного критерия, который рассматривается на множестве стратегий $S = S_{JIT} \cap S_{FPC}$. Практическое решение данной оптимизационной задачи может быть получено с использованием специальных численных методов, в частности, методом параметризации [206].

2.3 Рекламные затраты

Наряду с инвестициями важным фактором, имеющим эффект последствия на экономические явления, является реклама. В данном разделе рассмотрим некоторые модели, учитывающие распределенное воздействие рекламы.

В рамках рыночной экономики использование рекламы становится необходимым условием для ведения эффективной деятельности в любой фирме. С одной стороны, рекламные вложения представляют собой затраты. И аналогично другим статьям затрат учитываются в совокупных издержках фирмы. С другой стороны, рекламные вложения позволяют фирме увеличить объем продаж практически без внесения изменений в производственный процесс, тем самым

увеличивать доход. В этом проявляется инвестиционная сущность рекламы.

При этом вложения в рекламу обладают свойством регулируемости и практически не зависят от выпуска. Эффективная стратегия управления потребительскими предпочтениями с помощью рекламных воздействий позволяет любой фирме за короткое время при небольших издержках увеличить свою прибыль.

Если рассматривать свойства отдачи от рекламного воздействия, то можно отметить, что рекламные сообщения редко вызывают мгновенную потребительскую реакцию. В то же время эффект рекламного воздействия может сохраняться некоторое время после выхода такого сообщения. Следовательно, при разработке рекламной стратегии должна быть учтена возможность запаздывания по времени реакции потребителей.

Статистические модели с эффектом распределенного запаздывания, дискретные относительно параметра времени, были рассмотрены в [129]. Модель с непрерывно распределенным эффектом от рекламы впервые была предложена А. Бенсоуссаном [98] и позже модифицирована У. Пауэлсом [161]. В этих моделях предполагается, что эффект от воздействия длится сколь угодно долго и распределен с момента его произведения вплоть до текущего момента времени. Стоит отметить, что согласно анализа деятельности ряда фирм современного российского рынка [240], был сделан вывод о том, что наибольшее влияние на скорость реакции на рекламу оказывает длительность использования товаров. При разработке моделей для товаров недлительного использования, особенно для товаров первой необходимости, нет смысла рассматривать интервалы длительного воздействия факторов на спрос. Текущая отдача от достаточно давнего рекламного воздействия скорее всего будет носить случайный характер, как и отдача от рекламы на текущем этапе кампании.

Также в моделях [98, 161] не было учтено влияние факторов, имеющих нерекламный характер. При этом очевидно, потребительский спрос определяется не только рекламным воздействием, существуют другие внутренние и внешние

воздействия. При построении моделей, расширяющих классическую динамическую модель рекламы Нерлова-Эрроу [155], были выделены такие нерекламные факторы как цена товара [117, 126, 143], его качество [130], узнаваемость бренда [105]. В модели Видаля-Вольфа [175] и ее расширениях [110, 154] учитывается доля охваченного рынка, делается предположение об ограниченности рынка. Также в ряде существующих на сегодняшний день моделях рассматривается влияние других участников рынка [123, 124, 134, 141, 178]. Стоит отметить, что приведенный перечень нерекламных факторов не является полным, существуют и другие контролируемые и неконтролируемые фирмой причины изменения уровня продаж, сохранения или потери интереса к продукту у постоянных покупателей. К тому же ряд нерекламных факторов (например, качество товара, привлекательность бренда) практически не поддается измерению и оценке. Проблема совокупной оценки влияния нерекламных факторов может быть сведена к оценке опыта покупателя (для фирмы опыта предыдущих продаж), который рассматривается как неявный показатель нерекламного влияния на потребительский спрос. Учитывая тот факт, что реакция на приобретенный товар проявляется не сразу и сохраняется некоторое время, можно сделать вывод, что эффект предыдущих продаж для фирмы так же как и эффект рекламы имеет запаздывающий характер, в том числе распределенный во времени.

2.3.1 Одноканальная реклама

Обозначим через $y(t)$ выручку (выпуск) фирмы в момент времени t , а через $u(t)$ величину рекламных вложений, сделанных в t . Далее будем рассматривать поведение введенных величин на отрезке $[t_0; T]$. Очевидно, что выручка $y(t)$ определяется множеством факторов на рынке: репутация фирмы (зарабатывается некоторое время), уровень воздействия на спрос через свою рекламу u (реклама имеет эффект последствия), различные воздействия конкурентов, общая экономическая ситуация. Учет всех возможных факторов является

очень сложной задачей, в дальнейшем будем предполагать:

- объем спроса ограничен только возможностями фирмы;
- экономическая ситуация стабильна;
- воздействия конкурентов принципиально не меняются на временном промежутке планирования;
- выполняется локальное равновесие на рынке: спрос равен предложению (выпуску).

Таким образом, можно предположить, что текущая выручка фирмы определяется только двумя факторами: кумулятивное воздействие рекламы $v(t)$ в момент времени t и кумулятивный эффект от предыдущих продаж (бренд, репутация фирмы, гудвил) $w(t)$ в момент t , которые можно связать соотношениями:

$$v(t) = \int_{\tau_{0u}}^{\tau_{1u}} G_u(\tau)u(t - \tau)d\tau; \quad (2.33)$$

$$w(t) = \int_{\tau_{0y}}^{\tau_{1y}} G_y(\tau)y(t - \tau)d\tau; \quad (2.34)$$

$$y(t) = f(v(t), w(t)). \quad (2.35)$$

Здесь $[\tau_{0u}; \tau_{1u}]$ временной интервал, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие, $[\tau_{0y}; \tau_{1y}]$ временной интервал, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж (накопленная репутация фирмы), $G_u(\tau)$, $G_y(\tau)$ – функции, определяющие характер воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж соответственно. В общем случае величины τ_{0u} , τ_{1u} , τ_{0y} , τ_{1y} являются функциями времени t , при этом $\tau_{0u}(t) < \tau_{1u}(t) \leq t$, $\tau_{0y}(t) < \tau_{1y}(t) \leq t$.

Определение вида функций $f(v, w)$, $G_u(\tau)$, $G_y(\tau)$ – проблема эконометрического анализа, учитывающая общую ситуацию на рынке, вид производимой

продукции или предоставляемых услуг фирмой, относительную ограниченность спроса, наличие конкуренции и т.д. Приведем общие предположения относительно характера данных функций.

Функция $f(v, w)$ является аналогом производственной функции, что позволяет предполагать монотонное возрастание по переменным v, w . Сделанное предположение является справедливым, когда переменные v и w имеют относительно небольшое значение, т.е. фирма не насытила рынок своей продукцией (услугами), реклама воспринимается потребителями позитивно. Однако по мере роста рекламных воздействий на потребителей реакция переходит из позитивной в негативную [213, 238], в этом случае функция $f(v, w)$ становится невозрастающей (иногда убывающей) по переменной v . Относительно характера зависимости по переменной w можно высказать предположение об убывающем приросте, что связано с насыщением рынка, с производственными ограничениями. Последнее позволяет потребовать свойство вогнутости функции $f(v, w)$ по переменной w .

Исходя из эконометрического анализа зависимости текущих продаж от накопленных рекламных воздействий и накопленной репутации фирмы [213, 238] можно сделать некоторые предположения относительно вида функций G_u :

- в ретроспективе рекламные воздействия вызывают увеличение спроса до определенного момента времени τ_u^* , после чего воздействие рекламы начинает ослабевать, пока вовсе не исчезнет;
- кумулятивный эффект от рекламных воздействий не уменьшается по мере увеличения рекламных затрат фирмы.

Таким образом, функция G_u неотрицательна, имеет единственный локальный (он же глобальный) максимум, который в виде выручки определяет наибольшую отдачу от рекламных затрат. Если при этом функция дифференци-

руема, то предположения эквивалентны следующей группе условий:

$$G_u(\tau) \geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty); \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_u(\tau) = 0;$$

$$G'_u(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau_u^*); \quad G'_u(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_u^*; +\infty).$$

Аналогичным образом можно рассмотреть влияние предыдущих продаж на текущие продажи, приняв следующие условия относительно функции G_y :

- потребитель, приобретая продукцию данной фирмы, может пожелать снова приобрести продукцию этой фирмы (частота покупок зависит от специфики товара, срока службы и т.д.);
- как правило, опыт первых покупок со временем забывается, уступая место недавнему опыту;
- в отличие от рекламы, задача которой состоит в стимулировании спроса на продукцию, интенсификации интереса на продукцию на начальном этапе, собственный опыт потребителей не однозначен: в одном случае покупатели могут отказаться от дальнейшего приобретения товара уже после первого раза, тогда функция G_y изначально монотонно убывает; в другом случае они могут обеспечивать до момента насыщения τ_y^* увеличивающийся приток новых покупок, после чего происходит спад, в этом случае функция G_y имеет точку глобального максимума, которой соответствует наибольшая отдача от прошлых продаж.

Таким образом, функция G_y будет удовлетворять следующим условиям:

$$G_y(\tau) \geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty); \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_y(\tau) = 0;$$

$$G'_y(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau_y^*); \quad G'_y(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_y^*; +\infty).$$

При этом, может иметь место условие: в ретроспективе момент максимальной отдачи $\tau_y^* = 0$.

Очевидно, что в каждый момент времени t прибыль π определяется стандартным условием $\pi(y(t), u(t), t) = y(t) - c(y(t), t)$, где c – затраты, связанные с получением выручки y , в момент t . Функция $c(y, t)$ включает в себя постоянные издержки, в общем случае определяемые временным трендом, и переменные издержки, связанные с выпуском продукции (предоставлением услуг). Рекламные расходы u с финансовой точки зрения являются издержками и должны входить в затраты фирмы, при этом с экономической точки зрения реклама стимулирует спрос, тем самым увеличивает выручку y .

Таким образом, функционал $\Pi(T)$, представляющий собой накопленную прибыль на временном интервале планирования $[t_0; T]$, определяется:

$$\Pi(T) = \int_{t_0}^T \pi(y(t), u(t), t) dt = \int_{t_0}^T (f(v(t), w(t)) - u(t) - c(y(t), t)) dt. \quad (2.36)$$

Здесь $c(y, t)$ включает в себя постоянные издержки и издержки, связанные с выручкой (выпуском) y без учета рекламных издержек.

Фирмы по разному подходят к определению рекламного бюджета [9], однако затраты на рекламу, если планируются расходы на определенный временной промежуток, практически всегда имеют пороговое значение. Можно выделить вариант с ограничением по интенсивности выделения средств из рекламного бюджета:

$$0 \leq u(t) \leq b(t), \quad t \in [t_0; T], \quad (2.37)$$

где $b(t)$ – детерминированная функция, определяющая стратегию лимитирования рекламного бюджета. Другим вариантом ограничения может быть фиксация суммарного бюджета:

$$\int_{t_0}^T u(t) dt \leq B, \quad u(t) \geq 0, \quad t \in [t_0; T], \quad (2.38)$$

здесь B – величина рекламного бюджета на весь плановый период.

Основная задача фирмы состоит в максимизации прибыли при наличии ограничений, соответствующих поставленной проблеме. Предположим, при $t \leq t_0$

известна функция дохода $\tilde{y}(t)$ и функция рекламных издержек $\tilde{u}(t)$. Тогда можно сформулировать следующую оптимизационную динамическую задачу: максимизировать функционал (2.36) при ограничениях на рекламный бюджет (2.37) (или (2.38)) и интегральном уравнении (2.35) с условиями (2.33), (2.34).

2.3.2 Многоканальная реклама

Рассмотрим развитие модели выбора оптимальной рекламной стратегии в условиях ограниченного рекламного бюджета. Сделаем предположение, что фирма имеет возможность проводить рекламную кампанию посредством использования нескольких медиаканалов.

Обозначим через $y(t)$ доход фирмы в момент времени t , который отражает спрос на рекламируемый товар в денежном выражении, и через $u(t)$ – рекламные затраты в момент времени t . Переменная времени t выбирается из заданного периода планирования $[t_0; T]$.

Будем предполагать, что:

- объем спроса ограничен только возможностями фирмы;
- экономическая ситуация стабильна;
- воздействия конкурентов принципиально не меняются на периоде планирования;
- спрос равен предложению.

Пусть r – количество медиаканалов, услугами которых фирма может воспользоваться для диверсификации своих рекламных вложений. Обозначим $u_i(t)$ как величину рекламных вложений в i -й медиаканал, $i = 1, 2, \dots, r$. Набор величин $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ представляет собой управленческое решение фирмы. В этом случае $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ можно считать управляющей вектор-функцией, $u(t) \in \mathbb{R}_+^r$.

Введем функцию кумулятивного рекламного воздействия $v(t)$ и функцию кумулятивного воздействия предыдущих продаж $w(t)$, которые определены $t \in [t_0; T]$. Для введенных функций можно определить следующие соотношения :

$$v(t) = \begin{pmatrix} \int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}} G_1(\tau) g_1(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \dots, u_r(t-\tau)) d\tau \\ \int_{\tau_{21}}^{\tau_{22}} G_2(\tau) g_2(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \dots, u_r(t-\tau)) d\tau \\ \dots \\ \int_{\tau_{r1}}^{\tau_{r2}} G_r(\tau) g_r(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \dots, u_r(t-\tau)) d\tau \end{pmatrix}; \quad (2.39)$$

$$w(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_y(\tau) y(t-\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Здесь $G_1(\tau), G_2(\tau), \dots, G_r(\tau), G_y(\tau)$ – функции, определяющие весовой характер воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж, соответственно, на текущий момент; $g_i(u_1(s), u_2(s), \dots, u_r(s))$ – функция, отображающая совокупный эффект на аудиторию i -го медиаканала от текущих вложений в рекламу, $i = 1, 2, \dots, r$; τ – лаг запаздывания реакции потребителей на рекламные и нерекламные воздействия; $[\tau_{i1}; \tau_{i2}]$ – интервал лагов запаздывания, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие от использования i -го медиаканала, $i = 1, 2, \dots, r$; $[\tau_1; \tau_2]$ – интервал лагов запаздывания, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж.

В общем случае величины $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_1, \tau_2$ являются функциями времени t , при этом $\tau_{i1}(t) < \tau_{i2}(t) \leq t, i = 1, 2, \dots, r, \tau_1(t) < \tau_2(t) \leq t$.

Если аудитория i -го медиаканала практически не получает воздействия от других медиаканалов, то функция $g_i(u_1(s), u_2(s), \dots, u_r(s)) \equiv g_i(u_i(s))$, а в простейшем случае можно полагать $g_i(u_1(s), u_2(s), \dots, u_r(s)) \equiv u_i(s)$.

Также будем предполагать, что известны фактические данные по рекламе $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_r(t))$ и выручке $\tilde{y}(t)$ до начала планируемого периода:

$\tilde{u}_i(t)$ – кусочно непрерывная функция, $i = 1, 2, \dots, r$, $\tilde{y}(t)$ – непрерывная при $t < 0$, и $u_i(t) = \tilde{u}_i(t)$, $y(t) = \tilde{y}(t)$ при $t < 0$.

Значение выручки в момент времени t определяется соотношением:

$$y(t) = f(v(t), w(t)). \quad (2.41)$$

Анализ вида функций $G_i(\tau)$, $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r)$, $i = 1, 2, \dots, r$, $G_y(\tau)$ – проблема эконометрического анализа, учитывающая общую ситуацию на рынке, вид производимой продукции или предоставляемых услуг фирмой, относительную ограниченность спроса, наличие конкуренции, взаимное воздействие медиаканалов и т. д.

Введем некоторые предположения относительно этих функций и выручки $f(v, w)$:

1) Пока рынок не насытился продукцией фирмы, и реклама позитивно воспринимается потребителем, функция выручки монотонно возрастает по v и w . Однако дополнительная отдача от рекламы убывает со временем, т.е. рост вложений в рекламу сопровождается замедлением роста функции $f(v, w)$, такое качество соответствует вогнутости $f(v, w)$ по v . Также вследствие перенасыщаемости рынка и (или) производственных ограничений убывает прирост выручки, что дает основание требовать вогнутость $f(v, w)$ по w .

2) В ретроспективе по мере увеличения лага запаздывания до определенного $\tau_{u_i}^*$ реклама медиаканала i вызывает увеличение спроса, после чего воздействие рекламы начинает ослабевать, пока вовсе не исчезнет. Такое предположение справедливо для всех медиаканалов $i = 1, 2, \dots, r$. Тогда функции $G_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, r$, неотрицательны, каждая из них имеет единственный локальный (он же глобальный) максимум, который в виде выручки определяет наибольшую отдачу от рекламных затрат на соответствующем медиаканале. Таким образом, при всех i , $i = 1, 2, \dots, r$, выполняются условия:

$$G_i(\tau) \geq 0, \tau \in [0; +\infty); \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_i(\tau) = 0;$$

$$G'_i(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau_{u_i}^*); \quad G'_i(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_{u_i}^*; +\infty).$$

3) При положительном опыте пользования товара покупатели могут повторить покупки и посоветовать его другим потенциальным покупателям, в этом случае, предыдущие покупки стимулируют текущий спрос и функция возрастает. Однако совокупный потребительский опыт предыдущих покупок постепенно забывается, уступая место текущему впечатлению от товара. Поэтому функция $G_y(\tau)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам $G_i(\tau)$:

$$G_y(\tau) \geq 0, \tau \in [0; +\infty); \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_y(\tau) = 0;$$

$$G'_y(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau^*); \quad G'_y(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau^*; +\infty).$$

Здесь τ^* – точка максимальной отдачи от эффекта бренда.

4) Функции $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r)$, $i = 1, 2, \dots, r$, предполагаются непрерывными по всем аргументам, $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r) \geq 0$ для любых u_1, u_2, \dots, u_r . В точке $u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0$ и некоторой окрестности нулевых рекламных затрат $O_{\varepsilon_1} = \{u \in \mathbb{R}_+^r : \|u\| < \varepsilon_1\}$ отдача от рекламы не дает эффекта, что дает основание сделать предположение: $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r) = 0$, $u \in O_{\varepsilon_1}$. Начиная с некоторого суммарного воздействия, аудитория начинает реагировать на рекламу позитивно при соответствующих рекламных затратах, что можно выразить в следующем виде: существует $O_{\varepsilon_2} = \{u \in \mathbb{R}_+^r : \|u\| < \varepsilon_2\}$, для любых $u^1, u^2 \in O_{\varepsilon_2}$, $u^1 < u^2$, $g_i(u^1) \leq g_i(u^2)$. При дальнейшем увеличении рекламы может произойти негативное влияние: увеличение воздействия рекламы будет приводить к уменьшению отдачи. Вопрос эконометрической оценки функций $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r)$, $i = 1, 2, \dots, r$, является отдельной сложной практической задачей.

Пусть поток рекламного бюджета, выделяемого на использование r медиаканалов, ограничен некоторой функцией $B(t)$ в каждый момент t . Введем множество $U_B(t)$, ограничивающее поток инвестиций в рекламу, и множество ре-

кламных программ U :

$$U_B(t) = \left\{ u(t) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r u_i(t) \leq B(t), u_i(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, r \right\},$$

$$U = \{u(\cdot) : u(t) \in U_B(t), t \in [0; T]\}. \quad (2.42)$$

Предположим, что совокупные издержки компании состоят из рекламных затрат и затрат c , связанных с производимым благом. В этом случае, текущую прибыль $\pi(t)$ в момент времени t можно определить соотношением:

$$\pi(y(t), u(t), t) = y(t) - c(y(t), t) - \sum_{i=1}^r u_i(t).$$

Здесь, $c(y(t), t) = c(y(t))$ – совокупные издержки за исключением рекламных затрат.

Накопленную прибыль Π за планируемый период $[0; T]$ можно определить:

$$\Pi(T) = \int_0^T \pi(y(s), u(s), s) ds. \quad (2.43)$$

Если исходить из теории фирмы, то можно поставить задачу максимизации накопленной прибыли (2.43)

$$\Pi(T) \rightarrow \max. \quad (2.44)$$

Таким образом, задача оптимального управления рекламными расходами для случая фиксированного момента начала их воздействия задается системой (2.39), (2.40), (2.41), (2.42), (2.44).

2.4 Управление экономической системой в условиях массового заболевания

2.4.1 Постановка проблемы

Результатом роста численности мирового населения и глобализации экономических процессов является то, что массовые заболевания становятся фактором,

определяющим поведение всех экономических субъектов в мировом пространстве. Такие заболевания способны оказывать сильное влияние как на экономические взаимоотношения внутри конкретного региона (например, области, страны, содружества стран и т.д.), так и на межрегиональные связи. В частности, они затрагивают социальную сферу, поскольку заболеваемость сказывается на количестве трудоспособных лиц, а в некоторых случаях и на общей численности населения [49]. Кроме того, происходят изменения в экономической сфере: при введении ограничительных мер с целью предотвращения роста заболеваемости снижается деловая активность экономических субъектов [10]. В сложившихся условиях перед руководством региона возникает ряд управленческих задач, связанных с необходимостью минимизировать негативные воздействия массового заболевания. К таким задачам можно отнести: определение объёма расходов на госпитализацию заболевших и оказание им медицинской помощи, информирование граждан о заболевании и способах борьбы с ним, принятие решения о вводе ограничительных мер [125]. Для их эффективного решения необходимо иметь инструмент, позволяющий количественно оценить влияние массовой заболеваемости на социально-экономические факторы и определить стратегию управления в сложившихся условиях.

Недавним примером массового заболевания, затронувшего экономику всего мира, является пандемия новой коронавирусной инфекции. Из-за скорости распространения заболевания возникла необходимость оперативно принимать решения о распределении ресурсов, выделенных на здравоохранение и социальную поддержку, и о необходимости введения ограничительных мер. В качестве эффективного инструмента, позволяющего реализовывать указанные действия, может выступать математическая модель, описывающая данную ситуацию, и программный продукт, предназначенный для её анализа.

В актуальных публикациях, посвященных моделированию динамики массовых заболеваний [92, 103, 104, 148, 176], учитывается только социально-

биологический аспект развития эпидемии (используются модели компартиментализации типа SIR или SEIR), однако не менее важным является также сопутствующий анализ экономических показателей, которые находятся в тесной взаимосвязи с социально-биологическими факторами.

В [168] приведена модель динамики инфекционных заболеваний, основанная на SEIR-модели. Замкнутая популяция разбивается на непересекающиеся группы: восприимчивые к заражению, контактные, госпитализированные, выздоровевшие/умершие. Динамика заболевания рассматривается как дискретный по времени процесс, в котором переход индивида из одной группы в другую описывается случайными величинами. Параметры модели оцениваются на основе данных о распространении коронавирусной инфекции в КНР. Авторами рассматриваются четыре сценария развития эпидемии в зависимости от величины горизонта анализа, а также интенсивности контакта между указанными группами. Также авторы делают выводы об эффективности введения карантинных мер для сдерживания эпидемии.

В [57, 89, 95] рассматриваются модели типа SIR и SEIR. В частности, в [92] прогнозируется динамика эпидемии с помощью экспериментов на моделях типа SEIR с различными значениями параметров, для оценки которых используются статистические данные о распространении коронавирусной инфекции в США. Значения параметров задаются в зависимости от составляющих стратегии сдерживания заболеваемости: длительности самого горизонта прогнозирования, длительности и жёсткости карантинных мер, соблюдения большинством социальной дистанции. Особо отмечается необходимость количественных оценок взаимосвязи пандемии с экономикой и здравоохранением для построения стратегий управления ими. Делается вывод, что рассматриваемая модель [95] требует дальнейшего развития, поскольку в ней отсутствуют факторы, позволяющие произвести такие оценки. Кроме того, стратегии управления введены в неё опосредованно: через предполагаемые значения параметров, соответствующие

ющих биологическим характеристикам популяции.

Вышеизложенное подтверждает, что существующие модели не позволяют в полной мере оценивать влияние массовых заболеваний на экономику, поскольку предназначены для описания их воздействия только на популяцию. Это приводит к необходимости создания новой математической модели. Требуемая модель должна описывать ситуацию, складывающуюся на пересечении биосоциальной среды, экономики и здравоохранения. Кроме того, модель должна позволять прогнозировать динамику массовых заболеваний и оценивать стратегии сдерживания заболеваний через управление социально-экономической сферой.

2.4.2 Формализация модели

Проблема влияния пандемии на экономику рассматривается в ряде работ, например, в [149]. В исследованиях диссертанта [209, 242] была предложена математическая модель, учитывающая социальные, биологические, экономические факторы. Опишем данную модель.

Рассматривая биологический аспект влияния массового заболевания, введём разбиение населения (N , чел.) региона на следующие группы:

P – число соблюдающих ограничительные меры (например, режим самоизоляции) и тем самым минимизирующие для себя риск заражения;

S – число не соблюдающих ограничительные меры и, следовательно, потенциально подверженных заражению;

E – число заразившихся, у которых заболевание находится в инкубационной стадии;

I – число заболевших (учитываются лица как с бессимптомной формой заболевания, так и с явной);

Q – число заболевших, которые были госпитализированы;

R – число выздоровевших;

D – число умерших.

Социально-экономический аспект представим следующими показателями:

Y – валовый выпуск (руб.);

Π – прибыль экономического субъекта (руб.);

K – стоимость основных фондов экономического субъекта (руб.);

L – объём результативного труда (чел.);

Z – количество койко-мест в госпиталях для размещения заболевших (ед.).

Кроме того, рассмотрим вложения в реализацию управляющих воздействий органов власти:

u_1 – вложения в переоборудование существующих койко-мест для размещения заболевших (руб.);

u_2 – вложения в увеличение числа койко-мест за счёт строительства новых больниц (руб.);

u_3 – вложения в информационную кампанию по борьбе с заболеванием (руб.),

а также моменты принятия управленческих решений:

τ_1 – момент времени, когда органы управления вводят ограничительные меры;

τ_2 – момент времени, когда происходит снятие ограничений.

Эффект от принимаемых управленческих решений может быть описан следующим образом:

$$S(\tau_1+) = (1 - a)S(\tau_1-), \quad P(\tau_1+) = P(\tau_1-) + aS(\tau_1-);$$

$$S(\tau_2+) = S(\tau_2-) + bP(\tau_2-), \quad P(\tau_2+) = (1 - b)P(\tau_2-),$$

где a – доля группы «потенциально подверженные заражению», переходящая в группу «соблюдающие защитные меры» в момент $t = \tau_1$; b – доля группы «соблюдающие защитные меры», переходящая в группу «потенциально подверженные заражению» в момент $t = \tau_2$.

Сформулируем математическую модель управления экономическим субъектом в условиях массовых заболеваний в виде системы дифференциальных и алгебраических связей.

Динамику численности лиц, подверженных риску заражения, предлагается описать дифференциальным уравнением:

$$\frac{dS}{dt} = k_{PS}P(t) + k_{RS}R(t - \tau) - \left(k_{SE} \left(\frac{I(t)}{N(t)} \right) + k_{SP}(U_3(t)) - \rho \right) S(t), \quad (2.45)$$

где ρ – естественный прирост населения в долях от общей численности населения; τ – время, в течение которого сохраняется иммунитет у выздоровевших; k_{SP} – интенсивность перехода лиц, подверженных риску заражения, в группу соблюдающих ограничительные меры; k_{SE} – интенсивность перехода лиц из числа подверженных риску заражения в группу носителей заболевания в инкубационном периоде; k_{RS} – интенсивность повторной заболеваемости; k_{PS} – интенсивность выбытия людей из числа соблюдающих ограничительные меры.

В общем случае величина k_{SE} представляет собой функцию от отношения численности заболевших к общей численности населения, а величина k_{SP} является функцией от объёма вложений в информационную кампанию. Тогда динамику численности лиц, соблюдающих ограничительные меры, можно представить в виде:

$$\frac{dP}{dt} = k_{SP}(U_3(t))S(t) - k_{PS}P(t). \quad (2.46)$$

Прирост количества лиц, у которых заболевание находится в инкубационной стадии, опишем дифференциальным уравнением:

$$\frac{dE}{dt} = k_{SE} \left(\frac{I(t)}{N(t)} \right) S(t) - k_{EI}E(t), \quad (2.47)$$

где k_{SI} – интенсивность перехода заразившихся, у которых заболевание находится в инкубационной стадии, в число заболевших.

Изменение количества заболевших предлагается описать дифференциальным уравнением:

$$\frac{dI}{dt} = k_{EI}E(t) - (k_{IQ} + k_{IR} + k_{ID})I(t), \quad (2.48)$$

где k_{IQ} – интенсивность госпитализации заболевших, k_{IR} – интенсивность выздоровления негоспитализированных больных, k_{ID} – интенсивность смертности негоспитализированных больных.

Динамику госпитализации заболевших представим в виде:

$$\frac{dQ}{dt} = k_{IQ}I(t) - (k_{QD} + k_{QR})Q(t), \quad (2.49)$$

где k_{QD} – интенсивность смертности госпитализированных больных, k_{QR} – интенсивность выздоровления госпитализированных больных.

Прирост количества выздоровевших лиц опишем уравнением динамики:

$$\frac{dR}{dt} = k_{IR}I(t) + k_{QR}Q(t) - k_{RS}R(t - \tau). \quad (2.50)$$

Изменение количества умерших опишем дифференциальным уравнением:

$$\frac{dD}{dt} = k_{QD}Q(t) + k_{ID}I(t). \quad (2.51)$$

Изменение количества койко-мест, предназначенных для размещения заболевших, представим в виде:

$$\frac{dZ}{dt} = g(u_2(t - \tilde{\tau})) - \mu Z(t) + ku_1(t), \quad (2.52)$$

где $g(u_2)$ – функция, ставящая в соответствие вложениям в строительство новых больниц увеличение количества койко-мест; $\tilde{\tau}$ – лаг запаздывания в освоении инвестиций, направленных на строительство больниц; μ – амортизация больничных фондов; k – параметр, определяющий соотношение количества

койко-мест, переоборудованных для размещения заболевших, и вложений в их переоборудование.

Общая численность населения региона предполагается равной совокупной численности следующих групп: соблюдающие ограничительные меры; потенциально подверженные заражению; заразившиеся, у которых заболевание находится в инкубационной стадии; заболевшие; госпитализированные; выздоровевшие:

$$N(t) = P(t) + S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t). \quad (2.53)$$

Общий объём результативного труда предполагается равным суммарному результативному труду лиц, входящих в следующие группы: соблюдающие ограничительные меры; потенциально подверженные заражению; заразившиеся, у которых заболевание находится в инкубационной стадии; выздоровевшие. Величина вложений в результативный труд определяется коэффициентами s_1, s_2, s_3, s_4 :

$$L(t) = s_1 P(t) + s_2 S(t) + s_3 E(t) + s_4 R(t). \quad (2.54)$$

где $s_k = e_k \cdot m$, $k = \overline{1, 4}$, m – доля трудоспособного населения от общей численности населения, e_1 – коэффициент эффективности труда здорового человека, соблюдающего ограничительные меры и работающего удалённо, e_2 – коэффициент эффективности труда здорового человека, работающего очно, e_3 – коэффициент эффективности труда человека, у которого заболевание находится в инкубационной стадии, e_4 – коэффициент эффективности труда выздоровевшего человека, работающего очно. Таким образом, s_1 – доля вложений результативного труда лиц, работающих дистанционно, s_2 – доля вложений результативного труда лиц, работающих очно и подверженных риску заражения, s_3 – доля вложений результативного труда лиц, у которых заболевание находится в инкубационной стадии, s_4 – доля вложений труда выздоровевших лиц, работающих

очно.

Величина валового выпуска экономического субъекта определяется производственной функцией F , аргументы которой – стоимость основных фондов экономического субъекта и объём результативного труда:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)). \quad (2.55)$$

Заметим, что величина $L(t)$, согласно формуле (2.54), учитывает влияние массового заболевания. Тем самым оно опосредованно содержится в величине валового выпуска Y .

Прибыль региона предполагается равной его валовому выпуску за вычетом вложений в переоборудование существующих койко-мест, инвестиций в строительство новых больниц, инвестиций в информационную кампанию. Валовый выпуск, как было показано выше, зависит от биосоциального эффекта массового заболевания. Следовательно, величина прибыли также опосредованно учитывает данный эффект:

$$\pi(t) = Y(t) - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t). \quad (2.56)$$

Объёмы вложений предполагаются ограниченными:

$$u_1(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^T u_1(t) dt \leq B_1, \quad (2.57)$$

где B_1 – объём бюджета, выделяемого на переоборудование существующих койко-мест;

$$u_2(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^T u_2(t) dt \leq B_2, \quad (2.58)$$

где B_2 – объём бюджета, выделяемого на строительство новых больниц;

$$u_3(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^T u_3(t) dt \leq B_3, \quad (2.59)$$

где B_3 – объём бюджета, выделяемого на информационную кампанию по доведению до населения необходимых сведений по борьбе с массовым заболеванием.

Предполагается, что общее число госпитализированных больных не превышает число койко-мест, предназначенных для их размещения:

$$Q(t) \leq Z(t). \quad (2.60)$$

Система (2.45)-(2.60) позволяет отслеживать динамику биосоциальных и экономических показателей при конкретной стратегии управления, включающей в себя: вложения в переоборудование существующих койко-мест, в строительство новых больниц, в информационную кампанию, а также моменты введения и отмены ограничительных мер.

В случае необходимости выбора некоторой управленческой стратегии из множества возможных возникает проблема определения наилучшего варианта. Для её разрешения необходимо ввести критерий качества, позволяющий определить оптимальный вариант управления системой на множестве управленческих решений [3, 90, 93, 147, 158]. Рассматриваемая система, являясь социально-экономической, предполагает введение различных функционалов.

Если перед социально-экономической системой стоит на первом месте задача сохранения здоровья и жизни людей, то в качестве функционала может быть выбран социальный критерий

$$\int_{t_0}^T E(t)dt \rightarrow \min_{u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2}. \quad (2.61)$$

Здесь требуется минимизировать общее количество заболевших на планируемом периоде.

Если в рамках социально-экономической системы наиболее важной является задача максимизации прибыли, то можно установить экономический критерий

$$\int_{t_0}^T \pi(t)dt \rightarrow \max_{u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2}. \quad (2.62)$$

Здесь максимизируется прибыль, полученная на планируемом интервале.

Каждый из критериев (2.61), (2.62) по отдельности дает радикальное решение, на практике требуется принимать во внимание одновременно оба критерия. Однако, разумное сочетание этих критериев представляет собой отдельную серьезную проблему.

Система (2.45)-(2.60) в сочетании с одним из критериев качества (2.61), (2.62) представляет собой задачу оптимального управления с запаздыванием. Для её решения требуется применение специализированных численных методов, например, рассмотренных в [206].

Глава 3

Качественный анализ моделей

3.1 Управление инвестициями

3.1.1 Модель двухсекторной экономики

Рассмотрим модель управления инвестициями в двухсекторной экономике: динамика развития основных фондов описывается уравнениями (2.20), начальное состояние фиксированно (2.21), ограничения на инвестиции представляются долей (2.22), критерий качества (2.23) является интегральным по объему фондов во втором секторе.

Для анализа модели применим принцип максимума Понтрягина. Прежде всего отметим, максимизация функционала (2.23) с интегрантом $x_2(t)$ эквивалентна минимизации функционала с интегрантом $(-x_2(t))$. Соответственно, функция Понтрягина будет

$$\begin{aligned} H(p, x, u) &= x_2 + p_1(\alpha u x_1 - \mu_1 x_1) + p_2(\alpha(1-u)x_1 - \mu_2 x_2) = \\ &= x_2 - \mu_1 x_1 p_1 + \alpha x_1 p_2 - \mu_2 x_2 p_2 + \alpha x_1 (p_1 - p_2) u, \end{aligned} \quad (3.1)$$

сопряженная система:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -(\alpha u - \mu_1)p_1 - \alpha(1-u)p_2, \\ \dot{p}_2 = -1 + \mu_2 p_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Конечные условия для $p(t)$:

$$p_1(T) = p_2(T) = 0. \quad (3.3)$$

Условие максимума функции H при $x = x(t)$, $p = p(t)$ по параметру управления u позволяет сформулировать условие, которому удовлетворяет оптималь-

ное управление

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1(t) < p_2(t), \\ 1, & \text{если } p_1(t) > p_2(t), \\ \bar{u}, & \text{если } p_1(t) = p_2(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Неоднозначность выбора \bar{u} ограничивается условием $\bar{u} \in [0; 1]$.

Если $\mu_2 > 0$, то из (3.2) и (3.3) следует, что

$$p_2(t) = \frac{1 - \exp\{\mu_2(t - T)\}}{\mu_2}. \quad (3.5)$$

При предположении несущественности амортизации во втором секторе ($\mu_2 = 0$), решение для p_2 представляется в виде

$$p_2(t) = T - t. \quad (3.6)$$

Очевидно, что, в силу неотрицательности μ_2 , $p_2(t) > 0$, $\forall t < T$, при этом монотонно убывает. Дальнейший вопрос построения управления, удовлетворяющего условию максимума, можно решить, если выяснить поведение $p_1(t)$.

Рассмотрим возможность $p_1(t) \equiv p_2(t)$ на некотором интервале. В этом случае уравнение для p_1 в (3.2) принимает вид

$$-1 + p_2\mu_2 = -\alpha p_2 u + \mu_1 p_2 - \alpha p_2(1 - u).$$

Полученное соотношение можно преобразовать к виду

$$-1 = \frac{\mu_1 - \mu_2 - \alpha}{\mu_2} (1 - \exp\{\mu_2(t - T)\})$$

при $\mu_2 > 0$ и соответствующем решении (3.5), а также виду

$$-1 = (T - t)(\mu_1 - \alpha)$$

при $\mu_2 = 0$ и решении (3.6).

Последние равенства относительно переменной t невозможны на интервале, поэтому неопределенность выбора $u(t)$ в (3.4) возможна лишь в отдельных точках, что несущественно для дифференциальных уравнений (3.2). Таким образом, оптимальное управление $u(t)$ может быть только кусочно-постоянной функцией со значениями 0 и 1.

Рассмотрение случаев, когда в одном секторе амортизация есть, а в другом нет, представляет собой скорее схоластический случай. Поэтому варианты $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$ и $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$ рассматривать не будем.

Рассмотрим последний интервал постоянства управления $[\tau, T]$. Предположим, что $u(t) = 1$ при $\tau < t < T$. Тогда из (3.2) получаем $\dot{p}_1 = (\mu_1 - \alpha)p_1$. Учитывая конечное условие (3.3), находим решение $p_1(t) \equiv 0 < p_2(t)$, а это противоречит необходимым условиям оптимальности управления (3.4).

Таким образом, $u(t) = 0$ при $\tau < t < T$, следовательно, $\dot{p}_1 = \mu_1 p_1 - \alpha p_2$, что в силу (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) приводит к условию

$$p_1(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\mu_2 \mu_1} \left(1 + \frac{\mu_1 e^{\mu_2(t-T)}}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{\mu_2 e^{\mu_1(t-T)}}{\mu_2 - \mu_1} \right), & \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_1 \neq \mu_2; \\ \frac{\alpha}{\mu^2} \left(1 + e^{\mu(t-T)} (\mu(t-T) - 1) \right), & \mu_1 = \mu_2 = \mu > 0; \\ \frac{\alpha(T-t)^2}{2}, & \mu_1 = \mu_2 = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Момент τ является моментом возможного переключения управления $u(t)$ с 1 на 0. Это определяется условием $p_1(\tau) = p_2(\tau)$.

Рассмотрим вариант, когда амортизация нулевая ($\mu_1 = \mu_2 = 0$). В этом случае, сравнивая (3.6) и (3.7), получим

$$\tau = T - \frac{2}{\alpha}. \quad (3.8)$$

Переключение управления с 1 на 0 произойдет, если точка (3.8) принадлежит

промежутку $[0, T]$, т.е. при условии $\tau > 0$:

$$\alpha T > 2. \quad (3.9)$$

Пусть условие (3.9) выполнено и $u(t) = 1$ на некотором интервале $s < t < \tau$. В этом случае $\dot{p}_1 = -\alpha p_1$, причем $p_1(\tau) = T - \tau$. Из этого следует, что

$$p_1(t) = (T - \tau)e^{-\alpha(t-\tau)}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим разность функций p_1 и p_2 на интервале $s < t < \tau$, т.е. $q(t) = p_1(t) - p_2(t)$. Дифференцируя $q(t)$, получим

$$\dot{q}(t) = -\alpha p_1(t) + 1, \quad \ddot{q}(t) = \alpha^2 p_1(t).$$

Так как функция $p_1(t)$ (3.10) положительная, то $q(t)$ – выпуклая функция. Кроме того,

$$q(\tau) = 0, \quad \dot{q}(\tau) = -\alpha(T - \tau) + 1 = -1 < 0.$$

Из этого следует, что $q(t) > 0$ при $t < \tau$, следовательно, $u(t) = 1$ при всех $0 \leq t < \tau$, и других нулей нет.

Итак, в случае (3.9) оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.11)$$

В противном случае переключения нет и $u(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$.

Таким образом, в случае нулевой амортизации в задаче имеется единственное управление, удовлетворяющее принципу максимума. Если решение задачи существует, то управление (3.11) является решением задачи. Вид оптимальной траектории легко получить, проинтегрировав уравнение (2.20) с начальными условиями $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$ и управляющей функцией (3.11).

Структура оптимального управления (3.11) имеет простую экономическую интерпретацию. Если промежуток планирования T достаточно велик, т.е. выполнено условие (3.9), то на первом этапе следует развивать первый сектор, направляя в него все создаваемые фонды. После момента времени (3.8) все новые

фонды направляются во второй сектор, производящий конечную продукцию. Если времени мало, то все фонды направляются сразу во второй сектор.

На рисунках 3.1, 3.2, 3.3 представлены графики оптимального решения в рассматриваемой модели при отсутствии амортизации основных фондов ($T = 10$, $\alpha = 0,27$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$; размерность параметров условна: например, время измеряется в кварталах, x_1 , x_2 в условных денежных единицах). Решение находилось методом параметризации в классе кусочно-постоянных управлений с одним переключением. Соответствующие задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 2-го порядка с шагом интегрирования 0,01.

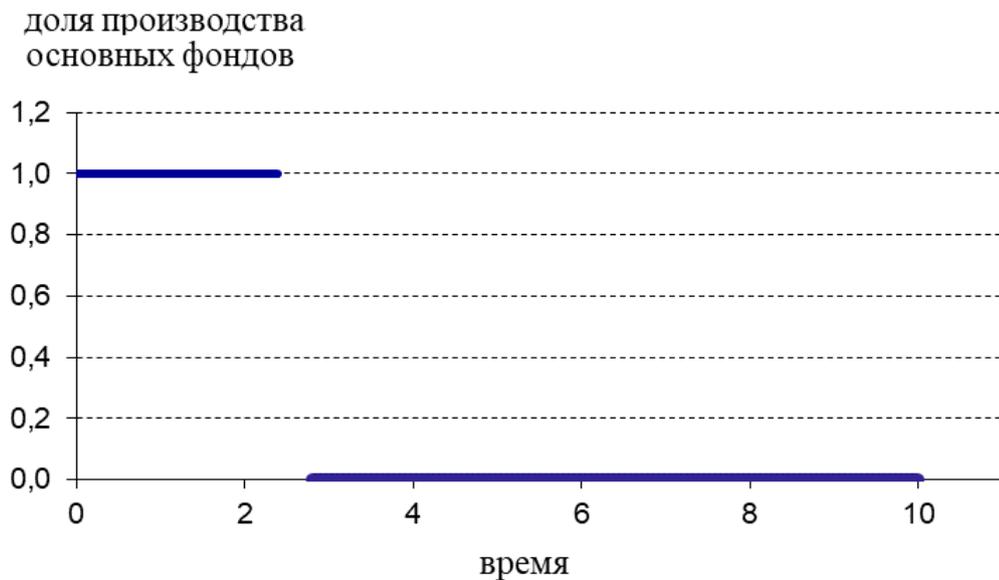


Рис. 3.1: Доля средств производства при отсутствии амортизации основных фондов

Для нахождения оптимального управления при ненулевой амортизации, для определения возможного момента переключения управления требуется решать уравнение $p_1(\tau) = p_2(\tau)$ относительно τ . При совпадающей в обоих секторах амортизации $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, исходя из условий (3.5), (3.7), получаем уравнение

$$e^{\mu(\tau-T)}(\alpha\mu(\tau-T) - \alpha + \mu) = \mu - \alpha.$$

А при различных ненулевых амортизациях, принимая в учет условия (3.5),

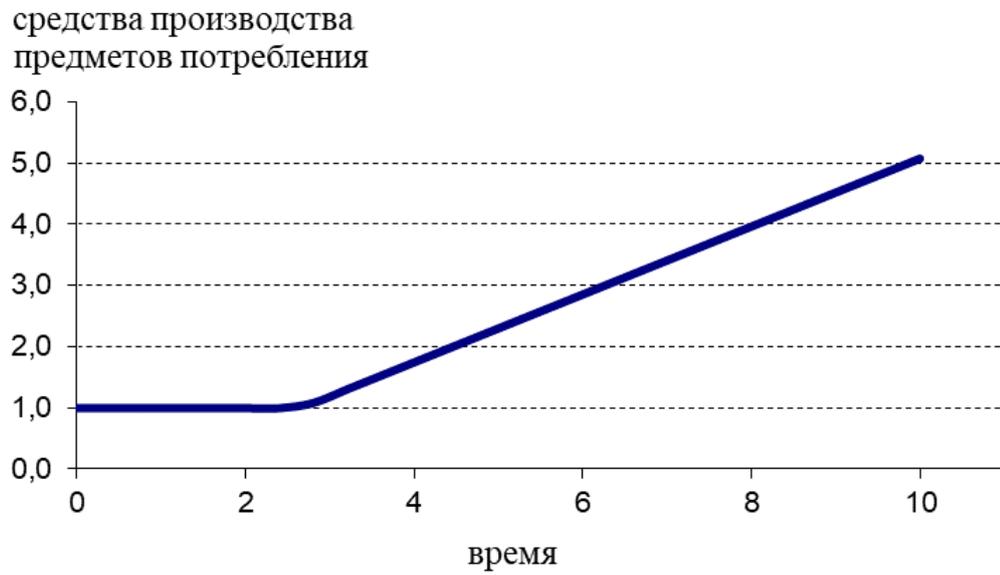


Рис. 3.2: Фонды для производства предметов потребления при отсутствии амортизации

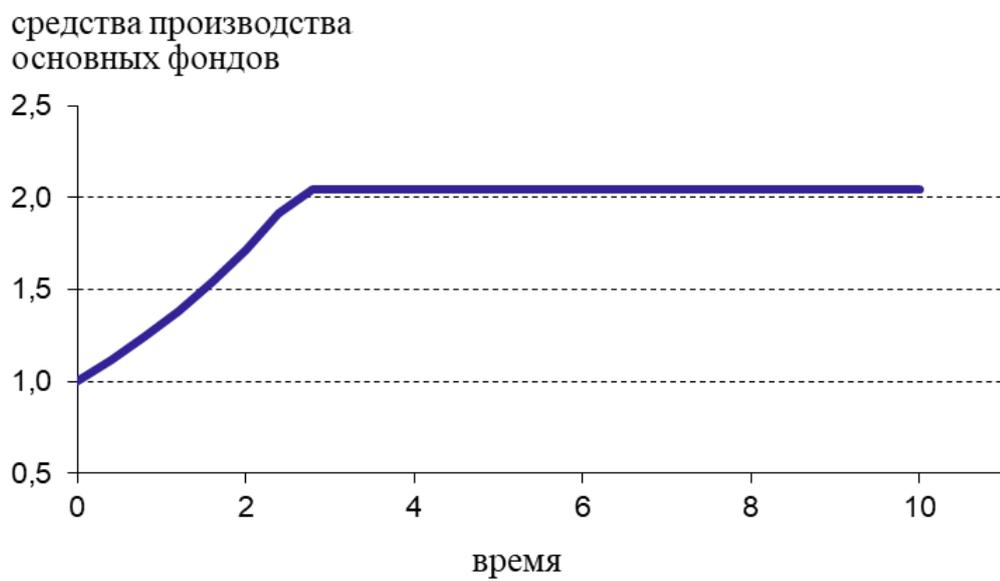


Рис. 3.3: Фонды для производства основных фондов при отсутствии амортизации

(3.7), получаем уравнение

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{\alpha}{\mu_1} \right) e^{\mu_2(\tau - T)} = \frac{\alpha}{\mu_1} - 1 + \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{\mu_1(\tau - T)}.$$

Аналитическое решение полученных уравнений относительно τ представля-

ется затруднительным. Для нахождения момента переключения в обоих случаях при известных значениях параметров следует использовать численные методы.

Если решение уравнения $\tau \leq 0$, то оптимальное управление будет постоянным на всем плановом периоде: $u(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Предположим, что решение $\tau > 0$. В этом случае $u(t) = 1$ на некотором интервале $s < t < \tau$, последнее означает, что $p_1(t) > p_2(t)$ при $s < t < \tau$.

Нахождение $p_1(t)$ на интервале $s < t < \tau$ сводится к решению задачи Коши:

$$\dot{p}_1 = (\mu_1 - \alpha)p_1, \quad p_1(\tau) = p_2(\tau) = \frac{1 - e^{\mu_2(\tau-T)}}{\mu_2} > 0.$$

Таким образом, $p_1(t) = p_1(\tau)e^{(\mu_1 - \alpha)(\tau - t)}$, $p_1(t) > 0$ при $s < t < \tau$.

Введем функцию $q(t) = p_1(t) - p_2(t)$. Очевидно, $q(\tau) = 0$, $q(t)$ непрерывно дифференцируема и $q(t) > 0$ при $s < t < \tau$. Следовательно, существует \bar{s} : $s \leq \bar{s} < \tau$, функция $q(t)$ убывает при $\bar{s} < t < \tau$. Найдем производные $q(t)$:

$$\dot{q} = \dot{p}_1 - \dot{p}_2 = (\mu_1 - \alpha)p_1 - (\mu_2 p_2 - 1);$$

$$\ddot{q} = (\mu_1 - \alpha)^2 p_1 - \mu_2(\mu_2 p_2 - 1) = (\mu_1 - \alpha)^2 p_1 + \mu_2 e^{\mu_2(t-T)}.$$

Можно заключить, что $\ddot{q}(t) > 0$ при $t < \tau$. Следовательно, $q(t)$ – выпуклая функция, которая убывает слева от τ , при этом $q(\tau) = 0$. Таким образом, $q(t) > 0$ при $t < \tau$, и структура оптимального управления повторяет структуру для случая с нулевой амортизацией (3.11).

На рисунках 3.4, 3.5, 3.6 представлены графики оптимального решения в рассматриваемой модели при наличии амортизации основных фондов в обоих секторах ($T = 10$, $\alpha = 0,27$, $\mu_1 = \mu_2 = 0,07$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$; размерность параметров условна: время измеряется в кварталах, x_1 , x_2 в условных денежных единицах). Решение находилось методом параметризации в классе кусочно-постоянных управлений с одним переключением. Соответствующие задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 2-го порядка с шагом интегрирования 0,01.

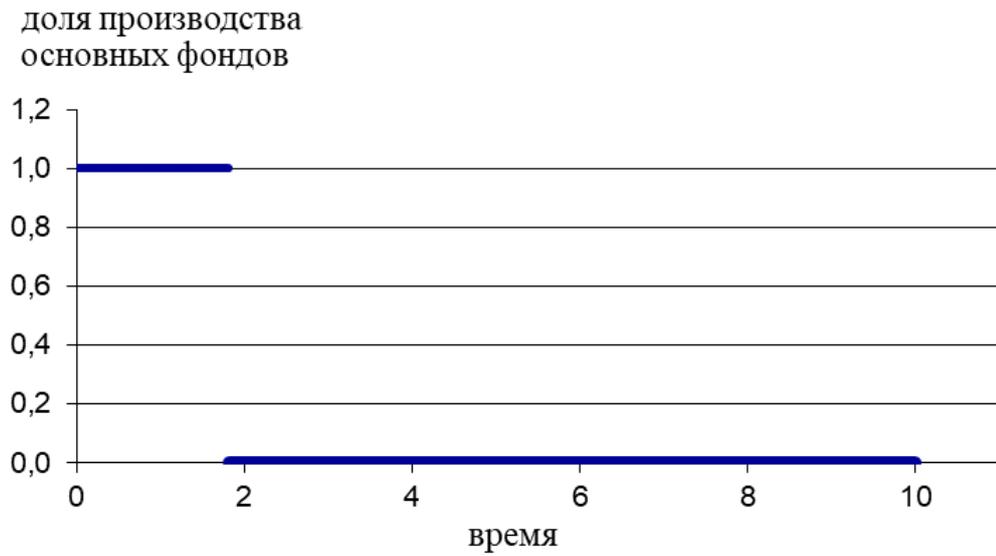


Рис. 3.4: Доля средств производства при наличии амортизации

Управление на рисунке 3.4 соответствует выводам, сделанным выше, т.е. структуре (3.11).

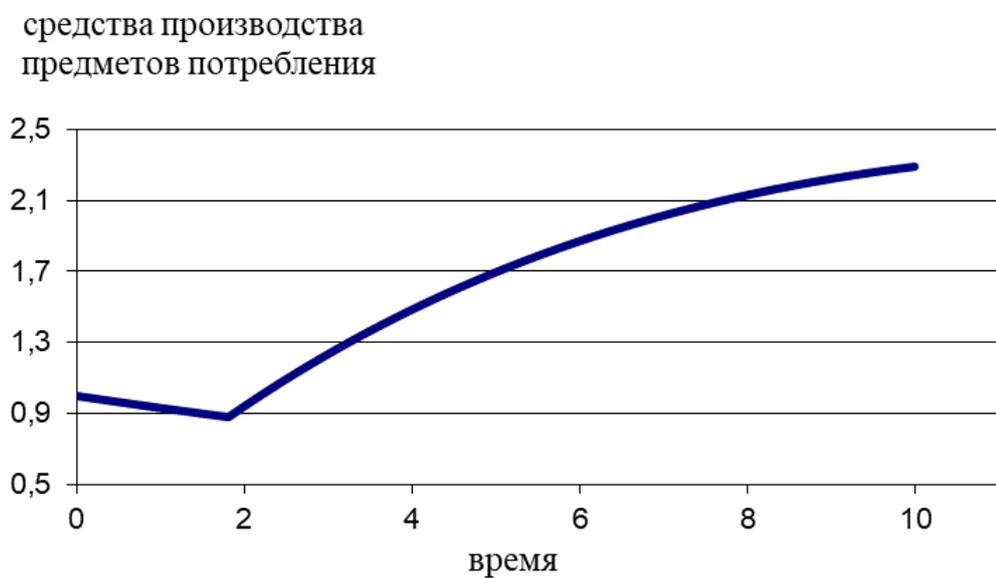


Рис. 3.5: Фонды для производства предметов потребления при наличии амортизации

На рисунке 3.5 видно, что в случае наличия амортизации фонды в секторе производства предметов потребления на первоначальном этапе разрушаются,

что ведет к уменьшению производства предметов потребления. И только после переключения управления начинается процесс увеличения производства предметов потребления.

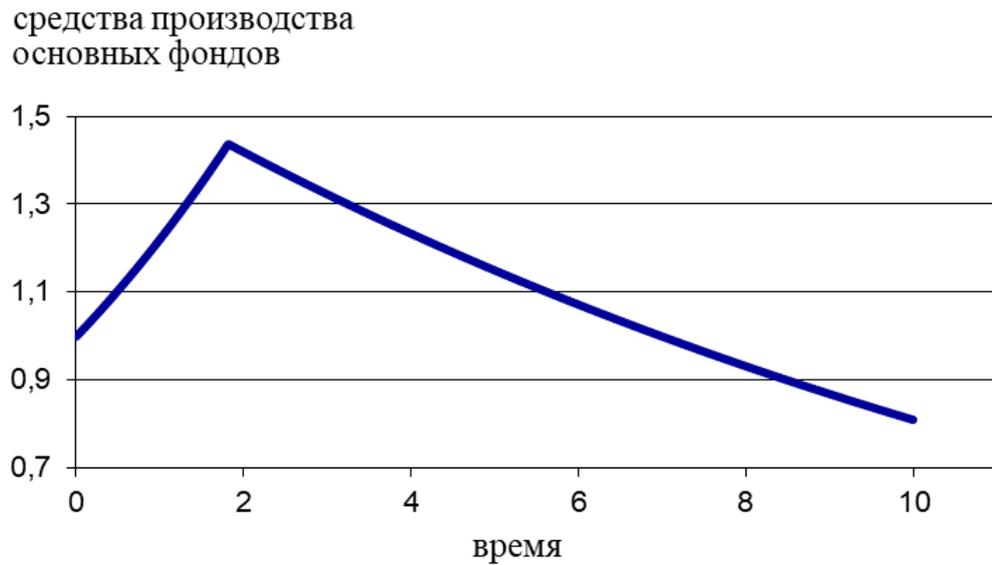


Рис. 3.6: Фонды для производства основных фондов при наличии амортизации

Анализ динамики средств производства (рисунок 3.6) показывает, что при достаточно большом T разрушение фондов в первом секторе может приводить к состоянию ниже первоначального уровня.

3.1.2 Модель оптимальной инвестиционной стратегии фирмы

Рассмотрим задачу оптимального управления инвестиционными вложениями: максимизировать функционал (2.30) со связями на фазовые переменные (2.25), (2.26), (2.27) и ограничениями на управление (2.28).

Пусть заданы кусочно непрерывная функция реальных инвестиций $\tilde{I}(t)$ и непрерывная функция выпуска $\tilde{y}(t)$ при $t < t_0$, $y(t_0) = \tilde{y}(t_0)$.

Рассмотрим вопрос существования оптимального решения в задаче (2.30), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28).

Конечное значение общей прибыли $\Pi(T)$ является функционалом управления $I(\cdot)$. Введем функционал $J(I(\cdot)) \equiv \Pi(T)$. Предположим, что $G(\tau)$ непрерывна при $\tau \geq 0$.

Решение поставленной задачи ОУ будем искать в классе кусочно непрерывных справа инвестиционных функций $I(t)$ на интервале $[t_0, T]$. Сформулируем теорему о существовании решения оптимизационной динамической задачи.

Теорема 9. Пусть $f(v, w)$ непрерывна по переменным v, w и монотонно не убывает по переменной v , $g(y)$ непрерывна по переменной y . Тогда выполняются одна из следующих альтернатив:

1. Существует $\{I^*(t), t_0 \leq t \leq T\} : (2.28)$, решение уравнений (2.25), (2.26), (2.27) $\{v^*(t), w^*(t), \Pi^*(t), t_0 \leq t \leq T\} : J(I^*(\cdot)) \geq J(I(\cdot))$ для любой $I(\cdot) : (2.28)$.
2. Существует последовательность инвестиционных функций $\{I^s(t), t_0 \leq t \leq T\} : (2.28)$ и значение $\bar{J} : J(I^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}, s \rightarrow \infty, J(I(\cdot)) \leq \bar{J}$ для любой $I(\cdot) : (2.28)$.

Доказательство. Если $G(\tau)$ непрерывна при $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, то $v(t)$ непрерывна на $[t_0; T]$.

Пусть $b = \max_{t_0 \leq t \leq T} \hat{I}(t)$. Принимая во внимание соотношения (2.28), (2.25), можно утверждать, что существует $b_1 \geq 0$:

$$0 \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(s)I(t-s)ds \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(s)bds \leq b_1.$$

Таким образом функция кумулятивного инвестиционного эффекта удовлетворяет условиям $0 \leq v(t) \leq b_1$ для любой $I(t) : (2.28)$.

Рассмотрим (2.26). Согласно свойству $\tilde{y}(t)$, функция $w(t) = g(\tilde{y}(t-\tau_3))$ непрерывна при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_3$. Непрерывность $w(t)$ на отрезке $[t_0 + \tau_3; t_0 + 2\tau_3]$ объясняется непрерывностью $v(t)$, $w(t)$ на отрезке $t \in [t_0; t_0 + \tau_3]$, так как $w(t) = g(f(v(t-\tau_3), w(t-\tau_3)))$. Аналогично непрерывность показывается далее вплоть до $t = T$.

Таким образом, для любой инвестиционной стратегии (2.28) функция влияния предыдущих продаж $w(t)$ является непрерывной на отрезке $[t_0; T]$ и соответственно ограничена величиной K :

$$K = \max_{t_0 \leq t \leq T} w(t).$$

В силу определения затраты $c(y(t), t)$ неотрицательны, тогда можно показать, что общая прибыль $J(I(\cdot))$ ограничена:

$$\begin{aligned} J(I(\cdot)) &= \int_{t_0}^T (f(v(s), w(s)) - I(s) - c(f(v(s), w(s), s))) ds \leq \\ &\int_{t_0}^T f(v(s), w(s)) ds \leq T \max_{(v, w) \in D} f(v, w), \end{aligned}$$

где $D = \{(v, w) : 0 \leq w \leq K, 0 \leq v \leq b_1\}$.

Таким образом, область значений функционала $J(u(\cdot))$ в рассматриваемой задаче оптимального управления (2.30), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) ограничена сверху. Обозначим область значений как L .

Пусть $\bar{J} = \sup L$. Очевидно, что \bar{J} существует и конечно.

Если $\bar{J} \in L$, то выполняется первая альтернатива, иначе реализуется вторая альтернатива [63]. \square

Замечание 3.14. Если выполняется вторая альтернатива теоремы 9, то существует приближенное решение в задаче оптимального управления (2.30), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), что для любого $\varepsilon > 0$ существует инвестиционная стратегия $I_\varepsilon(\cdot)$: (2.28) и соответствующие решения (2.25), (2.26), (2.27), что $\bar{J} - J(u_\varepsilon(\cdot)) < \varepsilon$.

Теперь определим структуру оптимального решения в задаче (2.30), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28). Для этого введем кусочно непрерывные функции $\bar{G}(t-s)$, $\varphi_I(t)$, $\varphi_y(t)$:

$$\bar{G}(\tau) = \begin{cases} G(\tau), & \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\varphi_I(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} G(t-s)\tilde{I}(s)ds, & t_0 \leq t < t_0 + \tau_1, \\ \int_{t-\tau_2}^0 G(t-s)\tilde{I}(s)ds, & t_0 + \tau_1 \leq t < t_0 + \tau_2, \\ 0, & t \geq t_0 + \tau_2; \end{cases}$$

$$\varphi_y(t) = \begin{cases} g(\tilde{y}(t-\tau_3)), & t_0 \leq t < t_0 + \tau_3, \\ 0, & t \geq t_0 + \tau_3. \end{cases}$$

Также введем функцию:

$$\bar{\delta}(s-t+\tau_3) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t < \tau_3, \\ \delta(s-t+\tau_3), & t \geq t_0 + \tau_3, \end{cases}$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

В этом случае, $v(t)$, $w(t)$, $\Pi(t)$ могут быть представлены как система уравнений:

$$v(t) = \varphi_I(t) + \int_{t_0}^t \bar{G}(t-s)I(s)ds, \quad (3.12)$$

$$w(t) = \varphi_y(t) + \int_{t_0}^t \bar{\delta}(s-t+\tau_3)g(f(v(s), w(s)))ds, \quad (3.13)$$

$$\Pi(t) = \int_{t_0}^t (f(v(s), w(s)) - I(s) - c(f(v(s), w(s)), s)) ds. \quad (3.14)$$

Можно утверждать, что максимизация (2.30) при условиях (2.28), (3.12), (3.13), (3.14) эквивалентна максимизации (2.30) при условиях (2.28), (2.25), (2.26), (2.27).

Введем функцию Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Применим принцип максимума для поставленной оптимизационной проблемы.

Теорема 10. Пусть $\{I^*(t), v^*(t), w^*(t), \Pi^*(t)\}$ является оптимальным процессом в задаче максимизации (2.30) при условиях (2.28), (3.12), (3.13), (3.14), тогда существуют функции $H_I(t), p_1(t), p_2(t)$:

$$H_I = p_1(s)\bar{G}(0) - 1 + \int_s^T p_1(t) \frac{\partial \bar{G}(t-s)}{\partial t} dt, \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(t) = p_2(t + \tau_3) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t+\tau_3), w=w(t+\tau_3)} \theta(T-t-\tau_3) \\ \quad - \int_t^T \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left(\frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} ds; \\ p_2(t) = p_2(t + \tau_3) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial w} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t+\tau_3), w=w(t+\tau_3)} \theta(T-t-\tau_3) \\ \quad - \int_t^T \frac{\partial f(v, w)}{\partial w} \left(\frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} ds; \end{array} \right. \quad (3.16)$$

и структура оптимального управления реальными инвестициями имеет следующую форму:

$$I^*(t) = \begin{cases} \hat{I}(t), & H_I(t) > 0, \\ 0, & H_I(t) < 0, \\ \bar{I}, & H_I(t) = 0, \quad 0 \leq \bar{I} \leq \hat{I}(t). \end{cases} \quad (3.17)$$

Доказательство. Пусть $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ – вектор сопряженных переменных. Введем модифицированную функцию Понтрягина [30]:

$$\begin{aligned} H(t, v, w, I, p_1, p_2) &= f(v, w) - I - c(f(v, w), t) + \langle p(t), F(t, t, v, w, I) \rangle \\ &+ \int_t^T \left\langle p(s), \frac{\partial F(s, t, v, w, I)}{\partial s} \right\rangle ds + h_1(t) (I - \hat{I}(t)) + h_2(t)(-I), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$F(t, s, v, w, I) = \begin{pmatrix} \bar{G}(t-s)I \\ \bar{\delta}(s-t+\tau_3)g(f(v, w)) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Функции $h_1(t) \geq 0$, $h_2(t) \geq 0$, и выполняется условие дополняющей нежесткости $h_1(t) (I(t) - \hat{I}(t)) = 0$, $h_2(t)(-I(t))$ при $t \in [t_0; T]$.

Определим задачу Коши для сопряженных переменных

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t, v, w, I, p)}{\partial v}, & p_1(T) = 0; \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t, v, w, I, p)}{\partial w}, & p_2(T) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Подставляя (3.19) в функцию (3.18), получим следующий вид функции Понтрягина:

$$\begin{aligned} H(t, v, w, I, p) &= f(v(t), w(t)) - I(t) - c(f(v(t), w(t)), t) + p_1(t)\bar{G}(0)I(t) \\ &+ \int_t^T p_1(s) \frac{\partial \bar{G}(s-t)}{\partial s} I(s) ds + \int_t^T p_2(s) \frac{\partial \bar{\delta}(t-s+\tau_3)}{\partial s} g(f(v(s), w(s))) ds \\ &- h_1(t) (I - \hat{I}(t)) - h_2(t)(-I). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Исходя из вида функции Понтрягина (3.21), формального представления (3.20) и, принимая во внимание свойства дельта-функции Дирака, рассмотрим уравнение для p_1 :

$$\begin{aligned}
& \frac{dp_1(t)}{dt} = - \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} + \frac{\partial c(y, s)}{\partial y} \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t), w=w(t)} - \\
& \int_t^T p_2(s) \frac{\partial \bar{\delta}(t-s+\tau_3)}{\partial s} \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} ds = \\
& \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left(\frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(t), w=w(t)} - \\
& \int_t^T p_2(s) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} d(\bar{\delta}(t-s+\tau_3)) = \\
& \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left(\frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(t), w=w(t)} - \\
& p_2(s) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} \bar{\delta}(t-s+\tau_3) \Big|_t^T + \\
& \int_t^T \bar{\delta}(t-s+\tau_3) d \left(p_2(s) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} \right) = \\
& \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left(\frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(t), w=w(t)} + \\
& \frac{d}{dt} \left(p_2(t+\tau_3) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t+\tau_3), w=w(t+\tau_3)} \theta(T-t-\tau_3) \right).
\end{aligned}$$

Из полученного соотношения можно записать условие:

$$\begin{aligned}
& \int_t^T dp_1(t) = \int_t^T \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left(\frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(t), w=w(t)} dt + \\
& \int_t^T d \left(p_2(t+\tau_3) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t+\tau_3), w=w(t+\tau_3)} \theta(T-t-\tau_3) \right).
\end{aligned}$$

Последнее, с учетом конечных условий в (3.20), приводит к первому уравнению в (3.16). Аналогично выводится второе уравнение в (3.16).

Необходимым условием минимума является $\frac{\partial H(t, v, w, I, p_1, p_2)}{\partial I} = 0$. В данном случае:

$$\frac{\partial H(t, v, w, I, p_1, p_2)}{\partial I} = p_1(t) \bar{G}(0) - 1 + \int_t^T p_1(s) \frac{\partial \bar{G}(s-t)}{\partial s} ds - h_1(t) + h_2(t).$$

Таким образом

$$p_1(t)\bar{G}(0) - 1 + \int_t^T p_1(s) \frac{\partial \bar{G}(s-t)}{\partial s} ds = -h_1(t) + h_2(t).$$

Полученное уравнение не зависит от I , т.е. функция Понтрягина (3.18) является линейной по управлению, а значит, имеет релейный характер. Если управление $I(t) = 0$, то $h_1(t) = 0$, в этом случае $H_I(t) = -h_2(t) \leq 0$. Если управление $I(t) = \hat{I}(t)$, то $h_2(t) = 0$, в этом случае $H_I(t) = h_1(t) \geq 0$. Полученные неравенства подтверждают структуру оптимального управления (3.17). □

В общем случае краевая задача по переменным $v(t)$, $w(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ аналитически не решается, требуется применение численных схем.

3.2 Управление рекламными расходами

В работе [214] было дано обоснование существования решения для случая одноканальной рекламы, в [215] для многоканальной рекламы.

Рассмотрим модель оптимального распределения рекламных расходов между несколькими медиаканалами в условиях ограниченного совокупного рекламного бюджета (2.39), (2.40), (2.41), (2.42), (2.44).

Преобразуем соотношения (2.39), (2.40). Введем кусочно-непрерывные функции $\bar{G}_i(\tau)$, $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\bar{G}_y(\tau)$, $\varphi_y(t)$:

$$\bar{G}_i(\tau) = \begin{cases} G_i(\tau), & \tau_{i1} \leq \tau \leq \tau_{i2}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau_{i2}}^{t-\tau_{i1}} G_i(t-s)g_i(\tilde{u}(s))ds, & 0 \leq t < \tau_{i1}; \\ \int_{t-\tau_{i2}}^0 G_i(t-s)g_i(\tilde{u}(s))ds, & \tau_{i1} \leq t < \tau_{i2}; \\ 0, & t \geq \tau_{i2}. \end{cases}$$

$$\bar{G}_y(\tau) = \begin{cases} G_y(\tau), & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\varphi_y(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} G_y(t-s)\tilde{y}(s)ds, & 0 \leq t < \tau_1; \\ \int_{t-\tau_2}^0 G_y(t-s)\tilde{y}(s)ds, & \tau_1 \leq t < \tau_2; \\ 0, & t \geq \tau_2. \end{cases}$$

Тогда накопленные воздействия рекламных затрат (2.39) и предыдущих продаж (2.40) можно представить:

$$v(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) + \int_0^t \bar{G}_1(t-s)g_1(u(s))ds \\ \varphi_2(t) + \int_0^t \bar{G}_2(t-s)g_2(u(s))ds \\ \dots \\ \varphi_r(t) + \int_0^t \bar{G}_r(t-s)g_r(u(s))ds \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$w(t) = \varphi_y(t) + \int_0^t \bar{G}_y(t-s)f(v(s), w(s))ds. \quad (3.23)$$

Таким образом, задача оптимального распределения рекламных расходов представляет из себя систему условий (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23), одно из которых – интегральное уравнение Вольтерра (3.23).

3.2.1 Существование решения

Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23).

Пусть функции рекламных затрат $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) – кусочно-непрерывны справа на интервале $[0; T]$; функции $G_i(\tau) \in C([\tau_{i1}; \tau_{i2}])$, $g_i(u) \in C(U)$, $i = 1, 2, \dots, r$, $G_y(\tau) \in C([\tau_1; \tau_2])$.

Если $G_i(\tau)$ непрерывна, то $\bar{G}_i(\tau)$ кусочно-непрерывна, и в этом случае $v_i(t)$ непрерывна на отрезке $[0; T]$. Принимая во внимание (2.42) можно утверждать, что существуют числа $B_i : B_i = \max_{u \in U} g_i(u)$. Тогда, существует \tilde{B}_i :

$$0 \leq \varphi_i(t) + \int_0^t \bar{G}_i(t-s)g_i(u(s))ds \leq \max_{0 \leq t \leq T} \left(\varphi_i(t) + \int_0^t \bar{G}_i(t-s)B_i ds \right) = \tilde{B}_i,$$

$i = 1, 2, \dots, r$.

Таким образом, для любой рекламной программы, удовлетворяющей условию (2.42), выполняется $0 \leq v_i(t) \leq \tilde{B}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Теорема 11. Пусть функция $G_y(\tau) \in C([\tau_1; \tau_2])$, функция $f(v, w)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной w для всех w . Тогда для любой кусочно-непрерывной вектор-функции $u(\cdot) \in U$, существует непрерывная единственная на этом отрезке функция $w(t)$, удовлетворяющая (3.23).

Доказательство. Так как функция $f(v, w)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной w , то существует константа L , что выполняется неравенство $|f(v, w_1) - f(v, w_2)| \leq L|w_1 - w_2|$, $\forall w_1, w_2$.

Введем оператор A :

$$Aw(t) = \varphi_y(t) + \int_0^t \bar{G}_y(t-s)f(v(s), w(s))ds.$$

Очевидно, существует конечное число $M = \max_{\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2} G_y(\tau)$. В силу построения $\bar{G}_y(\tau)$, $\bar{G}_y(\tau) \leq M$, $\forall \tau \geq 0$.

С учетом введенных предположений для любых непрерывных функций $w_1(t)$, $w_2(t)$ верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |Aw_1(t) - Aw_2(t)| &= \left| \int_0^t \bar{G}_y(t-s)(f(v(s), w_1(s)) - f(v(s), w_2(s)))ds \right| \leq \\ &\leq MLt \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|. \end{aligned}$$

Обозначим через A^k k -кратное последовательное применение оператора A , т.е. $A^2w = A(Aw)$, $A^kw = A(A^{k-1}w)$. В этом случае:

$$\begin{aligned} |A^2w_1(t) - A^2w_2(t)| &= \left| \int_0^t \bar{G}_y(t-s)(f(v(s), Aw_1(s)) - f(v(s), Aw_2(s)))ds \right| \leq \\ &\leq ML \int_0^t |Aw_1(s) - Aw_2(s)|ds \leq \frac{(MLt)^2}{2} \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать:

$$|A^kw_1(t) - A^kw_2(t)| \leq \frac{(MLt)^k}{k!} \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|.$$

Используя метрику в пространстве непрерывных функций $\rho(w_1, w_2) = \max_{0 \leq s \leq T} |w_1(s) - w_2(s)|$, получаем соотношение:

$$\rho(A^kw_1, A^kw_2) = \frac{(MLt)^k}{k!} \rho(w_1, w_2).$$

Существует $k : \frac{(MLt)^k}{k!} < 1$. Это означает, что оператор A^k является сжимающим, следовательно, решение $w(t)$ существует и единственно на отрезке $[0; T]$. При этом $w(t)$ непрерывна на этом отрезке. [47] \square

Теорема 11 дает условия существования глобального решения уравнения (3.23).

Замечание 3.25. Если функция $f(v, w)$ неотрицательна, вогнута и монотонно не убывает по переменной w , существует конечная частная производная $f'_w(v, 0)$, тогда функция $f(v, w)$ удовлетворяет условию Липшица по w для любого w . В этом случае существует неотрицательное решение уравнения (3.23) на отрезке $[0; T]$.

Перейдем к вопросу существования решения оптимизационной задачи (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23). Введем функционал $J(u(\cdot)) \equiv \Pi(T)$.

Теорема 12. Пусть функция $G_y(\tau) \in C([\tau_1; \tau_2])$; функция $f(v, w)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной w для всех w ; $v \equiv (v_1, v_2, \dots, v_r)$, $f(v, w)$ монотонно не убывает по всем v_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Тогда имеет место одна из следующих альтернатив:

1. Существует допустимая вектор-функция $u^*(\cdot) \in U$, соответствующие данному управлению функции $v(t), w(t) : (3.22), (3.23)$ и значение функционала $J(u^*(\cdot)) : J(u^*(\cdot)) \geq J(u(\cdot))$ для любой $u(\cdot) \in U$.

2. Существует последовательность допустимых вектор-функций $u^s(\cdot) \in U$ и такое число $\bar{J} : J(u^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}$ при $s \rightarrow \infty$, что $J(u(\cdot)) \leq \bar{J}$ для любого $u(\cdot) \in U$.

Доказательство. Проведем оценку решения уравнения (3.23).

$$w(t) = \varphi_y(t) + \int_0^t \bar{G}_y(t-s) f(v(s), w(s)) ds \leq \\ \varphi_y(t) + \int_0^t \bar{G}_y(t-s) f(\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_r, w(s)) ds = w_B(t).$$

Здесь $w_B(t)$ – решение уравнения (3.23) при рекламной программе $u(t) \equiv (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_r)$.

Следовательно, для любой рекламной программы (2.42) функция накопленного воздействия предыдущих продаж $w(t)$ ограничена некоторым значением $K : w(t) \leq K = \max_{0 \leq t \leq T} w_B(t)$.

Покажем ограниченность сверху функционала $\Pi(T)$ в задаче (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23).

$$\Pi(T) = \int_0^T \left(f(v(t), w(t)) - c(f(v(t), w(t)), t) - \sum_{i=1}^r u_i(t) \right) dt \leq \\ \int_0^T f(v(t), w(t)) dt \leq T \max_{(v,w) \in D} f(v, w).$$

где $D = \{(v, w) : 0 \leq v_i \leq \tilde{B}_i, 1 \leq i \leq r, 0 \leq w \leq K\}$.

Таким образом множество значений функционала в задаче (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23) ограничено сверху, обозначим это множество как L .

Пусть $\bar{J} = \sup L$. Очевидно, что \bar{J} существует и конечно.

Если $\bar{J} \in L$, то выполняется первая альтернатива теоремы, в противном случае – вторая альтернатива. \square

Замечание 3.26. Если выполняется вторая альтернатива теоремы 12, то существует допустимая рекламная программа, сколь угодно близкая, относительно значения целевого функционала, к возможной максимальной прибыли в задаче (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23). Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует управляющая функция $u_\varepsilon(\cdot)$, удовлетворяющая (2.42) и соответствующие данному управлению решения (3.22), (3.23): $\bar{J} - J(u_\varepsilon(\cdot)) < \varepsilon$.

3.2.2 Необходимые условия оптимальности

Сформулируем необходимые условия для оптимальной рекламной программы в задаче (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23).

Введем вектор-функцию $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t), x_{r+1}(t), x_{r+2}(t))^T$:

$$x_i(t) = v_i(t) - \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad x_{r+1}(t) = w(t) - \varphi_y(t), \quad x_{r+2}(t) = \Pi(t).$$

А также вектор-функцию $F(t, s, x, u)$:

$$F(t, s, x, u) = \left(\begin{array}{c} \bar{G}_1(t-s)g_1(u) \\ \bar{G}_2(t-s)g_2(u) \\ \dots \\ \bar{G}_r(t-s)g_r(u) \\ \bar{G}_y(t-s)f(v, w) \\ f(v, w) - c(f(v, w), s) - \sum_{i=1}^r u_i \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{v = \begin{pmatrix} \varphi_1(s) + x_1 \\ \dots \\ \varphi_r(s) + x_r \end{pmatrix} \\ w = \varphi_y(s) + x_{r+1}}} \quad (3.24)$$

Исходная задача (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23) эквивалентна задаче:

$$x(t) = \int_0^t F(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad x_{r+2}(T) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in U}. \quad (3.25)$$

Теорема 13. Пусть $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$ – оптимальный процесс в задаче (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23), тогда найдутся такие функции $h_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $p_j(s)$ ($j = 1, 2, \dots, r+1$):

$$h_i(s) = p_i(s)\bar{G}_i(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} dt, \quad (3.26)$$

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial f(v^*(s), w^*(s))}{\partial v_i} \left(p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T p_{r+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} dt \right), \quad (3.27)$$

$$\frac{dp_{r+1}}{ds} = -\frac{\partial f(v^*(s), w^*(s))}{\partial w} \left(p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T p_{r+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} dt \right) \quad (3.28)$$

с конечными условиями $p_i(T) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r+1$, что оптимальное распределение рекламных расходов при всех $s \in [0; T]$ будет являться решением задачи:

$$u^*(s) = \arg \max_{u \in U_B} \sum_{i=1}^r (g_i(u)h_i(s) - u_i). \quad (3.29)$$

Доказательство. Введем модифицированную функцию Понтрягина [30] для задачи с интегральными уравнениями (3.25):

$$H(s, x, u) = p(s)F(s, s, x, u) + \int_s^T p(t) \frac{\partial F(t, s, x, u)}{\partial t} dt, \quad (3.30)$$

где $p(s) = (p_1(s), p_2(s), \dots, p_r(s), p_{r+1}(s), p_{r+2}(s))$ – вектор сопряженных переменных:

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H(s, x, u)}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq r+2. \quad (3.31)$$

Введем терминальную функцию Лагранжа:

$$L(x(0), x(T)) = \sum_{k=1}^{r+2} \beta_k x_k(0) - \beta_{r+3} x_{r+2}(T), \quad \beta_{r+3} \geq 0. \quad (3.32)$$

Краевые условия для сопряженных переменных определяются из соотношений:

$$p_i(0) = \frac{\partial L(x(0), x(T))}{\partial x_i(0)}, \quad p_i(T) = -\frac{\partial L(x(0), x(T))}{\partial x_i(T)}, \quad 1 \leq i \leq r+2.$$

Исходя из вида введенной функции (3.32), краевые условия принимают вид:

$$p_i(0) = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq r+2, \quad p_i(T) = 0, \quad 1 \leq i \leq r+1, \quad p_{r+2}(T) = \beta_{r+3}.$$

Если $\beta_{r+3} = 0$, то решение однородной системы интегродифференциальных уравнений (3.31) в точке T равно тривиальному вектору, что влечет тривиальность решения системы (3.31), следовательно, тривиальность чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+3}$. Таким образом, β_{r+3} можно положить равным любому положительному числу. Положим $\beta_{r+3} = 1$.

Принимая во внимание вид $F(t, s, x, u)$ (3.24), рассмотрим функцию Понт-

рягина (3.30):

$$\begin{aligned}
H(s, x, u) = & \sum_{i=1}^r p_i(s) \bar{G}_i(0) g_i(u) + \\
& p_{r+1}(s) \bar{G}_y(0) f(\varphi_1(s) + x_1, \dots, \varphi_r(s) + x_r, \varphi_y(s) + x_{r+1}) \\
& + p_{r+2}(s) \left(f(\varphi_1(s) + x_1, \dots, \varphi_r(s) + x_r, \varphi_y(s) + x_{r+1}) - \right. \\
& \left. c(f(\varphi_1(s) + x_1, \dots, \varphi_r(s) + x_r, \varphi_y(s) + x_{r+1}), s) - \sum_{i=1}^r u_i \right) \\
& + \int_s^T \left(\sum_{i=1}^r p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} g_i(u) + \right. \\
& \left. p_{r+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} f(\varphi_1(s) + x_1, \dots, \varphi_r(s) + x_r, \varphi_y(s) + x_{r+1}) \right) dt.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Так как, $\frac{dp_{r+2}}{ds} = 0$, $p_{r+2}(T) = 1$, то $p_{r+2}(s) \equiv 1$ при $s \in [0; T]$.

Обозначим через $h(s, x, u)$ слагаемые функции (3.33), зависящие от управления u .

$$\begin{aligned}
h(s, x, u) = & \sum_{i=1}^r p_i(s) \bar{G}_i(0) g_i(u) - p_{r+2}(s) \sum_{i=1}^r u_i \\
& + \int_s^T \left(\sum_{i=1}^r p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} g_i(u) \right) dt.
\end{aligned}$$

Максимизация функции (3.33) эквивалентна максимизации функции $h(s, x, u)$. Очевидно, что

$$h(s, x, u) = \sum_{i=1}^r \left(g_i(u) \left(p_i(s) \bar{G}_i(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} dt \right) - u_i \right).$$

Так как $h_i(s) = p_i(s) \bar{G}_i(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} dt$, то оптимальное управление в задаче (2.41), (2.42), (2.44), (3.22), (3.23) удовлетворяет при любом s решению задачи нелинейного программирования:

$$h(s, x, u) = \sum_{i=1}^r (g_i(u) h_i(s) - u_i) \rightarrow \max_{u \in U_B}.$$

Последнее означает выполнение условия (3.29).

При этом сопряженные переменные $p_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) удовлетворяют задаче Коши (3.27), (3.28).

□

Замечание 3.27. Если фирма проводит рекламную политику достаточно долгое время, то реакция потребителей имеет устойчивый характер, который выражается в эффекте убывающей дополнительной отдачи. При моделировании данного свойства можно потребовать вогнутость и монотонное возрастание функций $g_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, r$. В этом случае задача (3.29) становится задачей выпуклого программирования, для которой условие седловой точки является необходимым и достаточным условием:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^r u_i - B \right) \mu = 0, \quad \mu \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r u_i \leq B, \\ u_j \left(\mu + 1 - \sum_{i=1}^r h_i(s) \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_j} \right) = 0, \quad u_j \geq 0, \\ \mu + 1 - \sum_{i=1}^r h_i(s) \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \end{array} \right.$$

Здесь μ – двойственная переменная в задаче выпуклого программирования.

Замечание 3.28. Если функция выручки $f(v, w)$ является линейной по всем своим переменным v и w , то система сопряженных переменных (3.27), (3.28) не зависит от фазовых переменных v, w и управления u , следовательно, решение $p^*(s)$ задачи Коши (3.27), (3.28) будет соответствовать оптимальному процессу $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$. В этом случае оптимальное управление может быть найдено непосредственно из последовательного решения задачи (3.29), после подставления $p^*(s)$.

Отметим, что при нахождении оптимального решения поставленной задачи требуется решать краевую задачу в интегро-дифференциальных уравнениях, задачу Коши в интегро-дифференциальных уравнениях, задачу нелинейного

программирования, это вызывает необходимость применения численных методов решения. В работе [225] применен модифицированный метод локальных вариаций для линейной модели рекламных расходов с одним медиаканалом. В [224] дана практическая реализация модели для нелинейного случая рекламных расходов с одним медиаканалом. Верификация данных моделей на реальных статистических данных показала эффективность предлагаемого подхода моделирования и возможность применения для построения оптимальных рекламных программ.

3.3 Одновременный учет критериев в модели массового заболевания

При рассмотрении модели динамики экономической системы в условиях массового заболевания (2.45)-(2.60) для оптимизации предлагается один из критериев: социальный (2.61) или экономический (2.62). Социальный критерий состоит в минимизации количества заболевших на выбранном горизонте планирования, экономический – в максимизации прибыли на горизонте. Данные критерии между собой слабосогласованы, а в общем случае противоречивы. Рассмотрим варианты одновременного учета обоих критериев.

3.3.1 VSL-критерий

Данный подход основан на использовании такой величины, как «ценность статистической жизни» (VSL).

Согласно одному из определений, значение VSL показывает, какую стоимость в среднем создаёт человек в течение жизни [14]. Таким образом, значение VSL напрямую зависит от среднедушевого объёма производства в денежном выражении (т.е. от ВВП или ВРП, в зависимости от масштаба объекта моделирования). Будем предполагать, что VSL вычисляется именно по такому прин-

ципу, так как модель (2.45)-(2.60) относится к моделям макроэкономических (мезоэкономических) систем. Для систем такого вида ценность жизни индивида определяется тем, какой вклад в её доход он вносит, т.е. его экономической эффективностью.

Пусть T_1 – средняя продолжительность трудового стажа в рассматриваемой экономической системе. Введём $VSL_{mod}(t, T_1)$ – модифицированная «ценность статистической жизни». Она показывает ценность жизни человека, начавшего трудовую деятельность в момент времени t и проработавшего T_1 лет.

Рассмотрим формулу для вычисления VSL по среднему ВВП [14], преобразовав её к виду:

$$VSL_{mod}(t, T_1) = \int_t^{t+T_1} \frac{Y(s)}{N(s)} (1 + i(s))^{t-s} ds. \quad (3.34)$$

Здесь $\frac{Y(s)}{N(s)}$ – среднемушевой объём производства в единицу времени; i – годовая банковская процентная ставка. Валовой выпуск Y для макроэкономических и мезоэкономических систем измеряется в соответствующих денежных единицах.

Предположим, что к моменту времени t человек имеет трудовой стаж τ лет, $\tau \in [0; T_1]$, тогда $VSL_{mod}(t, T_1 - \tau)$ – доход, который принесёт экономической системе работающий человек за $(T_1 - \tau)$ лет, начиная с момента t . Введем $p(t, \tau)$ – доля трудоспособного населения, имеющая стаж работы τ в момент времени t : $\int_0^{T_1} p(t, \tau) d\tau = 1$.

В этом случае величина

$$C_1(t) = \int_0^{T_1} D(t) p(t, \tau) VSL_{mod}(t, T_1 - \tau) d\tau$$

означает недополученный доход экономической системы, обусловленный смертностью вследствие заболевания.

Некоторые заболевания сопровождаются осложнениями, вызывающими дальнейшие проблемы со здоровьем, и/или приводят к сокращению продолжительности жизни. Потенциальный трудовой стаж человека при этом также

уменьшается. Обозначим величину сокращения через T_2 . Тогда

$$C_2(t) = \int_{T_1-T_2}^{T_1} (I(t) - D(t))p(t, \tau) VSL_{mod}(t, T_1 - \tau) d\tau$$

означает недополученный доход экономической системы, обусловленный сокращением трудового стажа вследствие заболевания.

Также на недополученный доход влияет временная потеря человеком трудоспособности во время заболевания:

$$C_3(t) = (m \cdot N(t) - L(t)) \frac{Y(t)}{N(t)}.$$

Здесь величина $(m \cdot N(t) - L(t))$ оценивает численность трудоспособных людей, временно не работающих по причине болезни; величина $(m \cdot N(t) - L(t)) \frac{Y(t)}{N(t)}$ представляет оценку экономических потерь, обусловленных временной нетрудоспособностью заболевших.

Используя формулы (2.56), (3.34), соотношения (2.53), (2.54), представим выражение для оценивания прибыли с учётом недополученного дохода:

$$\pi_{VSL}(t) = Y(t) - \sum_{i=1}^3 u_i(t) - C_1(t) - C_2(t) - C_3(t). \quad (3.35)$$

Заметим, что соотношение (3.35) позволяет учесть как экономический, так и социальный аспект. Поставим задачу максимизации интегральной прибыли $\pi_{VSL}(t)$ на интервале планирования $[t_0; T]$:

$$J_{VSL}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2) = \int_{t_0}^T \pi_{VSL}(t) dt \rightarrow \max_{u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2}. \quad (3.36)$$

Решение задачи (3.36) с условиями (2.45)-(2.60) позволяет найти оптимальное решение двухкритериальной проблемы (максимизация прибыли, минимизация количества заболевших) путем преобразования к однокритериальной форме (3.36).

3.3.2 Свертка критериев

В [209] сформулирована линейная свертка социального и экономического критериев в функционал:

$$\int_{t_0}^T (\alpha_1 \pi(t) - \alpha_2 E(t)) dt \rightarrow \max_{u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2}, \quad (3.37)$$

здесь α_1, α_2 – весовые параметры, такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Значения этих параметров выбираются экспертами, они определяют субъективную значимость свертываемых критериев.

При вычислительных экспериментах с использованием в модели (2.45)-(2.60) функционала (3.37) возникли затруднения. Причина затруднений в существенной разнице (на несколько порядков) между значениями слагаемых в функционале. Таким образом, для разрешения проблемы при многокритериальной оптимизации было предложено представление экономического и социального критериев в виде весовой суммы относительных безразмерных величин (долей).

Приведение к безразмерным величинам проводилось следующим образом: текущая величина прибыли $\pi(t)$ делилась на объём производства $Y(t_0)$ в момент начала массового заболевания t_0 , а текущее количество заболевших $E(t)$ – на численность населения $N(t_0)$ в момент начала массового заболевания t_0 . Выбор делителей определялся так, чтобы величины полученных долей на начальном этапе находились на отрезке $[0; 1]$. Так как $Y(t_0)$ и $N(t_0)$ являются константами, это позволяет при делении пропорционально сократить масштаб значений компонент без смещения локальных экстремумов.

В этом случае получим функционал:

$$J_{CONV}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2) = \int_{t_0}^T \left(\alpha_1 \frac{\pi(t)}{Y(t_0)} - \alpha_2 \frac{E(t)}{N(t_0)} \right) dt \rightarrow \max_{u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2}, \quad (3.38)$$

где $0 < \frac{\pi(t_0)}{Y(t_0)}, \frac{E(t_0)}{N(t_0)} \leq 1, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Для нахождения оптимума в задаче (2.45)-(2.60), (3.38) необходимо указать значения весовых параметров α_1, α_2 .

Глава 4

Программный комплекс и вычислительные алгоритмы

4.1 Программный комплекс

4.1.1 Концепция построения программного комплекса

Для моделирования динамических систем разработан ряд программных инструментов, содержащих необходимое лингвистическое, информационное и алгоритмическое обеспечение. Наиболее популярными инструментами являются программные пакеты общего назначения: Matlab, Maple, GNU Octave, Mathematica, Scilab, SCADE Suite, OpenModelica, Julia и другие.

Некоторые пакеты, ориентированные на математические вычисления (например, Matlab, Maple, GNU Octave, Mathematica, Julia), в качестве основы используют специализированные языки программирования высокого уровня. Данные языки можно отнести к мультипарадигменным, интерпретируемым, полным. При использовании данных пакетов в основном применяют сочетание процедурной, структурной и функциональной парадигм программирования.

Другие пакеты (например, OpenModelica) функционируют в компонентно-ориентированной парадигме и реализуют декларативные компилируемые объектно-ориентированные языки. Пакеты такого рода можно отнести к имитационным: исполнение модели в модельной среде. Также для имитационного моделирования динамических систем используются инструменты компонентно-ориентированного визуального программирования (например, Matlab+Simulink, OpenModelica OMEdit, SCADE Suite). В этих пакетах модель представляет собой иерархически связанную совокупность функциональных элементов.

Если специализированные пакеты не позволяют решить изучаемую пробле-

му, то можно перейти к разработке специализированных библиотек на основе существующих языков общего назначения (например, библиотеки SciPy, NumPy на базе Python).

При моделировании оптимизационных динамических систем в терминах задач ОУ наиболее часто в инструментах применяются прямые методы, основанные на преобразовании ЗОУ в конечномерную задачу НП [101]. Прямые методы не требуют предварительных аналитических решений и относительно просты в использовании, однако при их реализации возникает ряд проблем [27], не позволяющих включить такие инструменты в пакеты общего назначения. На текущий момент можно выделить ряд специализированных инструментов численного решения ЗОУ, реализованных как приложения, библиотеки или дополнения к существующим пакетам общего назначения [71, 86, 165, 166]. К наиболее известным зарубежным инструментам относятся: CasADi, PSOPT, PROPT, GPOPS, ICLOCS2, ACADO, acados, GPOPS-II, CGPOPS, GEKKO; к российским – МЕОПТ, ОПТСОН.

При этом существующие инструменты либо являются библиотеками (например, CGPOPS), либо реализуют eDSL (например, GEKKO, PROPT) и базируются на полных языках общего назначения (Python, Matlab, Modelica). В этом случае в инструментах сохраняются синтаксические решения и парадигмы, присущие базовому языку, это повышает уровень входа для пользователя, требует специализированных знаний. Также стоит отметить, что перманентное расширение пакетов общего назначения существенно усложняет процесс обучения пользователя.

Таким образом, создание простых, удобных и эффективных предметно-ориентированных инструментов (программных комплексов) является актуальной задачей. Для решения этой задачи можно использовать метод параметризации, позволяющий на основе единого концептуального подхода решать задачи ОУ в различных постановках. Основные положения, описывающие структуру

программного комплекса и набор функций, входящих в комплекс, определяются спецификой метода параметризации.

В рамках программного комплекса можно выделить: роль разработчика (исследователя) модели и роль пользователя модели. Различие ролей определяется целью роли и набором используемых функций. Разработчик модели выбирает математический вид задачи ОУ: задача со связями в виде ОДУ без запаздывания; задача с точечным запаздыванием в фазовых и/или управляющих переменных; с распределенным запаздыванием в фазовых и/или управляющих переменных. Также к функциям роли разработчика относятся: ввод уравнений модели; ввод промежуточных и терминальных ограничений; идентификация параметров модели; ввод функционала задачи в терминальной форме; ввод частных производных функций, входящих в исходную постановку задачи ОУ. Роль пользователя модели относится к процессу решения задачи ОУ, в ходе решения пользователь может: менять параметрическое представление управляющих функций; выбирать сценарий решения задачи НП; обрабатывать отчеты, полученные при решении задачи.

Метод параметризации позволяет независимо от дискретизации динамики применять различные методы решения задачи НП и задачи Коши, так как дискретная схема решения задачи Коши разделена с переменными задачи НП. Это позволяет в структуре ПО использовать не связанные библиотеки: для решения задач НП и для решения задач Коши. Так как вычисление производных целевой функции в получаемой задаче НП представляет собой отдельный алгоритм, то в рамках программного комплекса реализуется несколько подходов к реализации этого алгоритма: на основе решения задач Коши для прямой и сопряженной систем и последующего численного интегрирования; аппроксимация на основе конечных разностей; комбинация разностного дифференцирования и решения задач Коши для прямой и сопряженной систем.

Представление управляющей функции в виде обобщенного сплайна опреде-

ляется только предметной областью и не зависит от формы задачи ОУ, а также вида уравнений, описывающих динамику. Это позволяет в рамках программного комплекса реализовать единый подход к параметрическому представлению управляющих функций.

Таким образом, можно сформулировать основные характеристики программного комплекса:

- выделение роли разработчика модели и роли пользователя модели;
- независимость модуля для решения задачи НП и модуля решения задач Коши;
- расширяемая модульная архитектура, позволяющая добавлять новые модули решения НП и модули решения задач Коши в виде библиотек;
- единый модуль параметрического представления управления;
- единый концептуальный подход к решению задач ОУ достаточно разного вида.

4.1.2 Функции пользователя

Опишем функции, выполняемые пользователем при работе с программным комплексом.

На рисунке 4.1 приведена диаграмма общих функций пользователя при использовании программного комплекса, а на рисунке 4.2 алгоритм действий пользователя. Подробное описание функций и алгоритма приводится ниже.

Первоначально пользователю (роль разработчика модели) необходимо идентифицировать задачу оптимального управления:

- Выбор типа задачи ОУ. Возможны варианты задачи ОУ с описанием динамики в виде: обыкновенных дифференциальных уравнений;

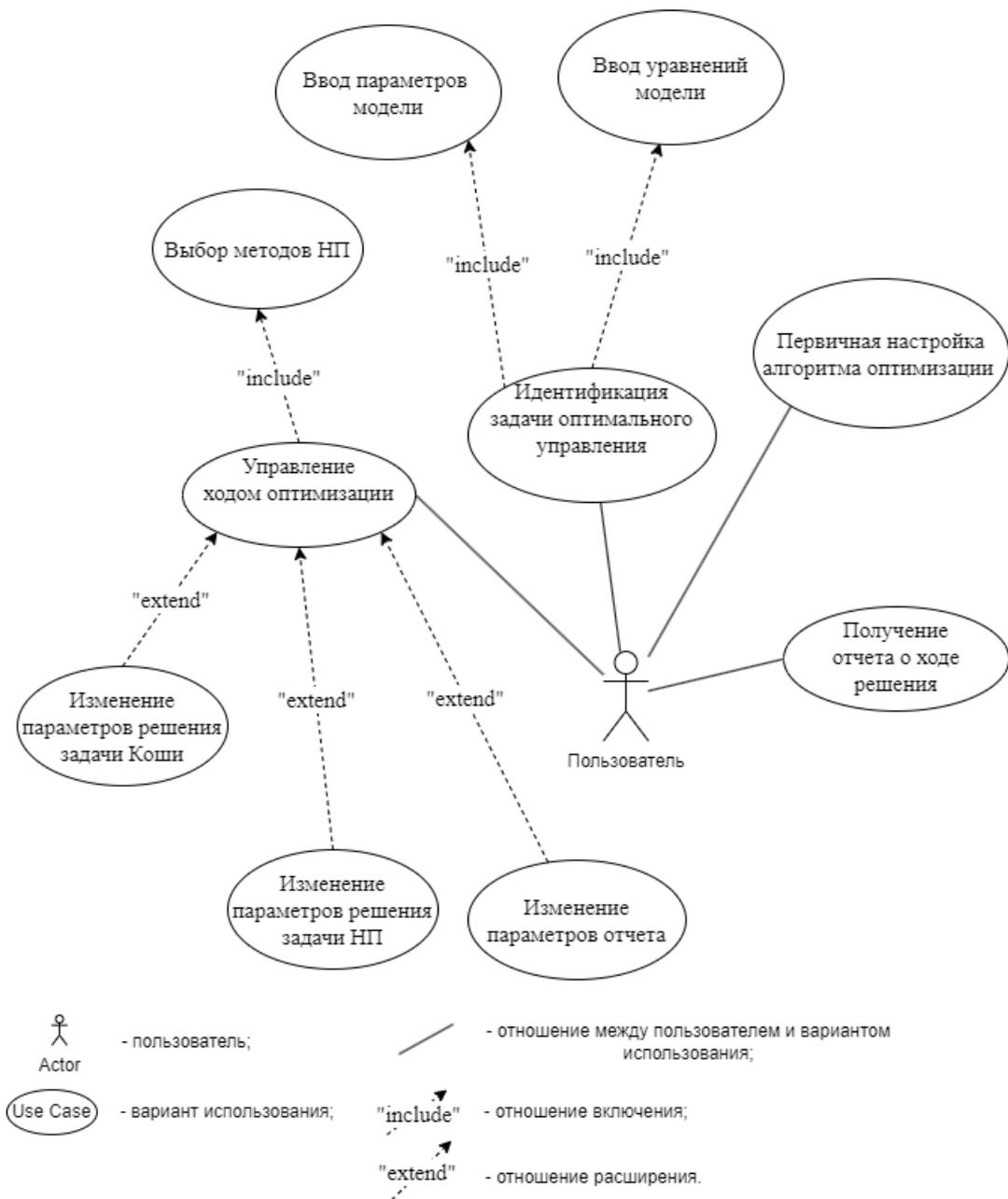


Рис. 4.1: Диаграмма функций пользователя

дифференциальных уравнений с точечным запаздыванием; интегро-дифференциальных уравнений.

- Идентификация модели: ввод структурных параметров (размерность фазовых переменных, размерность управляющих переменных); ввод постоянных параметров модели; ввод функций, описывающих заранее опреде-

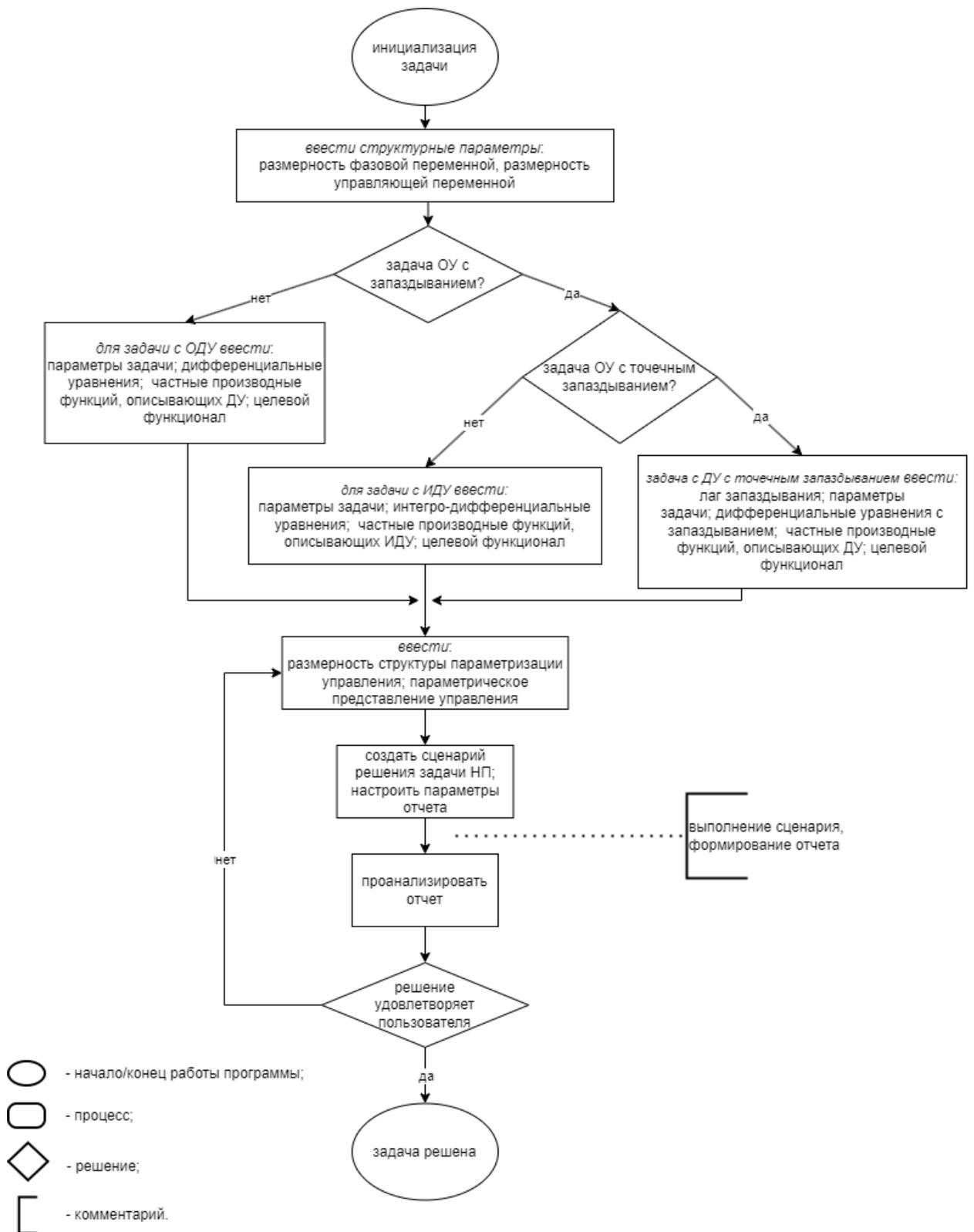


Рис. 4.2: Общий алгоритм действий пользователя при решении задачи ОУ

ленные зависимости в модели; ввод дифференциальных уравнений, описывающих динамику; ввод производных функций, входящих в постановку задачи.

После идентификации модели пользователю (роль пользователя модели) необходимо провести настройку алгоритма решения задачи нелинейного программирования. Первичная настройка алгоритма оптимизации включает в себя параметрическое представление управляющих воздействий и сценарий решения задачи НП, порождаемой этим представлением.

Параметризация управления

Согласно методике, применяемой в методе параметризации, после идентификации задачи ОУ требуется определить структуру управляющих воздействий (1.7).

Для каждой управляющей переменной на временной оси нужно определить количество точек переключения управления. Между узлами параметризации (точки переключения, начальная точка периода управления, конечная точка периода управления) требуется определить количество параметров и вид управляющей функции, зависящей от этих параметров. По умолчанию в системе между узлами параметризации функция управления представлена в виде полинома соответствующей степени. Пользователь имеет возможность ввести параметризацию управления, отличную от полиномиальной.

Сценарий решения задачи НП

В программном комплексе есть различные варианты для настройки схемы решения задачи оптимального управления. В частности, реализованы следующие методы решения задачи нелинейного программирования: метод Хука-Дживса (рисунок 4.5), градиентные методы (простого градиента, скорейшего спуска, рисунок 4.6), метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла (рисунок 4.8), метод Ньютона (классический метод Ньютона, метод Ньютона-Рафсона, рисунок 4.7). Пользователь устанавливает начальное приближение для решения задачи НП,

настраивает сценарий решения задачи НП, порождаемой методом параметризации.

Сценарий решения включает в себя последовательность методов НП, а также параметров этих методов. Так пользователь определяет набор реализованных в системе методов НП и их последовательность для применения к полученной задаче НП. У каждого метода определяется условие остановки итерационного процесса: максимальное число итераций, минимальная величина нормы градиента (для методов, требующих вычисление градиента), минимальная величина модуля приращения целевой функции. Также для каждого метода НП определяется способ вычисления производных.

Решение задачи Коши

В методе параметризации алгоритмы решения задачи НП и алгоритмы решения соответствующих задач Коши не связаны в рамках единой дискретной схемы. Это позволяет пользователю выбирать метод и параметры решения задач Коши независимо от алгоритмов решения задачи НП.

В программном комплексе для численного решения задачи Коши реализованы методы Рунге-Кутты 2-го и 4-го порядка в прямом и обратном времени. Методы решения в прямом времени применяются для нахождения фазовых переменных модели, методы решения в обратном времени применяются для нахождения сопряженных переменных. Пользователь выбирает один из методов решения задачи Коши, а также шаг интегрирования.

Также пользователь определяет размерность массива, в котором сохраняются значения фазовых и сопряженных переменных. Так при вычислении фазовых и сопряженных переменных их значения сохраняются в отдельном массиве с равным шагом дискретизации, величина которого не зависит от шага интегрирования. В последующем эти значения используются для вычисления интегралов (1.19), (1.24), (1.23), (1.87), (1.111), а также при решении интегродифференциальной задачи Коши, когда метод решения этой задачи использует

ранее вычисленные значения переменных.

Отчет о ходе решения

После выполнения сценария система генерирует отчет в файл формата csv. Формат csv позволяет представленные в отчете данные обрабатывать в табличном процессоре Excel.

t	u1(t)	u2(t)	u3(t)	x1(t)	x2(t)	x3(t)	x4(t)	x5(t)	x6(t)
0	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	1,47E+08	0	0	34	0	0
0,169642857	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	1,43E+08	4055570	49,95849	17,95219	10,00312	17,14992
0,339285714	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	1,39E+08	7587774	74,00017	19,58732	11,23756	37,36217
0,508928571	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	1,36E+08	10664147	98,35887	25,19556	13,66067	61,14757
0,678571429	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	1,33E+08	13343505	128,1326	32,86953	17,55024	91,37816
0,848214286	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	1,31E+08	15677077	165,3546	42,63185	22,7664	130,5631
1,017857143	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	1,29E+08	17709482	211,8434	54,88649	29,41666	181,2761
1,1875	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	1,27E+08	19479579	269,7112	70,18681	37,76595	246,5092
1,357142857	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	74284101	72446474	332,0993	89,01279	48,18125	329,8835
1,526785714	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	79575577	67153618	342,4443	100,3195	57,97429	432,8783
1,696428571	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	84184041	62543673	367,7754	108,15	64,40098	549,4196
1,866071429	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	88197623	58528517	403,3404	117,4151	70,06757	676,5508
2,035714286	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	91693079	55031402	449,0575	129,2954	76,62491	815,2026
2,205357143	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	94737258	51985481	506,181	144,3308	84,81074	968,0761
2,375	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	97388381	49332534	576,6179	163,0486	95,05261	1138,776
2,544642857	6,28E+09	1,35E+09	2,37E+07	99697153	47021851	662,8398	186,0984	107,7412	1331,628

Рис. 4.3: Фрагмент файла отчета

На рисунке 4.3 представлен фрагмент файла, содержащего отчет о выполнении работы программы.

По умолчанию в отчет выводится:

- динамика управляющих воздействий (управляющие переменные обозначены u_1, u_2, \dots, u_r), динамика фазовых переменных (фазовые переменные обозначены x_1, x_2, \dots, x_n) на интервале планирования при начальных значе-

- ниях параметров параметризованного управления (по умолчанию дискретизация по времени соответствует дискретизации сохраненных значений фазовых переменных);
- результаты решения по каждому методу НП, выбранному в сценарии: название метода, количество итераций, значения искомым параметров, значение целевой функции, значение градиента (если он используется в методе);
 - время поиска решения в сценарии, шаг интегрирования задачи Коши;
 - динамика управляющих воздействий, динамика фазовых переменных на интервале планирования при найденных значениях параметров параметризованного управления.

Пользователь имеет возможность провести настройку отчета:

- изменить название файла-отчета, по умолчанию имя файла "otchet.csv";
- настроить вывод динамики значений сопряженных переменных, функции Понтрягина;
- вывод в отчет значений некоторых параметров модели.

На основе анализа результатов, представленных в отчете, пользователь имеет возможность продолжить вычислительный процесс или принять полученные результаты конечным решением. В случае продолжения поиска оптимального решения пользователь может: переопределить параметризацию управляющей функции, создать новый сценарий поиска оптимума в задаче НП, изменить параметры для решения задачи Коши, перенастроить параметры отчета.

4.1.3 Описание параметров

Приведем описание параметров, которые изменяет пользователь в процессе работы. В таблице 4.1.1 представлены параметры задачи ОУ.

Таблица 4.1.1: Параметры модели

имя параметра	тип данных	описание параметра
dim	целое число (положительное)	размерность фазовых переменных в модели
$udim$	целое число (положительное)	размерность управляющих переменных в модели
t_0	действительное число	начальный момент управления в задаче ОУ
T	действительное число	конечный момент управления в задаче ОУ (необязательный параметр)

Параметры dim , $udim$ представляют собой структурные параметры, t_0 , T – временные моменты. Параметр T задается в том случае, если интервал управления модели фиксирован. Если момент окончания управления является свободным, то задавать T не требуется, в этом случае T становится переменной величиной в задаче нелинейного программирования (НП).

В таблице 4.1.2 содержатся параметры для настройки сценария решения задачи нелинейного программирования.

Параметры $NSwitch[...]$, $NParam[...]$, $dim2$, $dim3$, $pk[...]$ в таблице 4.1.2 являются структурными, они определяют размерности задачи НП и размерности параметризации.

При решении задачи НП параметры $pk[...]$ представляют собой коэффициенты штрафа в методе штрафных функций. Для каждого ограничения используется свой коэффициент.

В таблице 4.1.3 представлены параметры для решения задачи Коши.

Параметр $step$ содержит значение шага интегрирования при численном решении задачи Коши методом Рунге-Кутты 2-го порядка или методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Параметр $discr$ определяет размерность массива, в котором сохраняются вычисленные значения фазовой траектории x и сопряженных переменных p . При этом $discr$ не влияет на дискретную схему решения диффе-

Таблица 4.1.2: Параметры сценария решения задачи НП

имя параметра	тип данных	описание параметра
<i>NSwitch</i> [<i>udim</i>]	массив целых чисел (положительных)	элемент массива содержит количество переключений управления в соответствующей управляющей переменной
<i>NParam</i> [<i>udim</i>]	массив целых чисел (положительных)	элемент массива содержит количество параметров в параметризации соответствующей управляющей переменной
<i>dim2</i>	целое число (положительное)	размерность переменных в задаче нелинейного программирования
<i>dim3</i>	целое число (положительное)	общее количество переключений в системе (переключения управления и другие)
<i>pk</i> [...]	массив действительных чисел	элемент массива является коэффициентом штрафа (по умолчанию равен 1000)

Таблица 4.1.3: Параметры для решения задачи Коши

имя параметра	тип данных	описание параметра
<i>step</i>	действительное число	шаг интегрирования в задаче Коши
<i>discr</i>	целое число (положительное)	размер массива для хранения фазовых и сопряженных переменных

ренциального уравнения. Значения переменных x и p сохраняются в точках t_i , $0 \leq i \leq discr - 1$. Здесь $t_i = t_0 + i * \Delta$, $\Delta = \frac{T - t_0}{discr - 1}$.

4.1.4 Архитектура

Программный комплекс реализован на языке C++ на основе модульной архитектуры системы. На рисунке 4.4 представлена структура разработанных модулей: модуль управления решением задачи нелинейного программирования, пакет функций для решения задач нелинейного программирования, модуль обработки данных задачи оптимального управления, пакет функций для числен-

ного дифференцирования, пакет функций для обработки структур данных, пакет функций для решения задач квадратичного программирования.

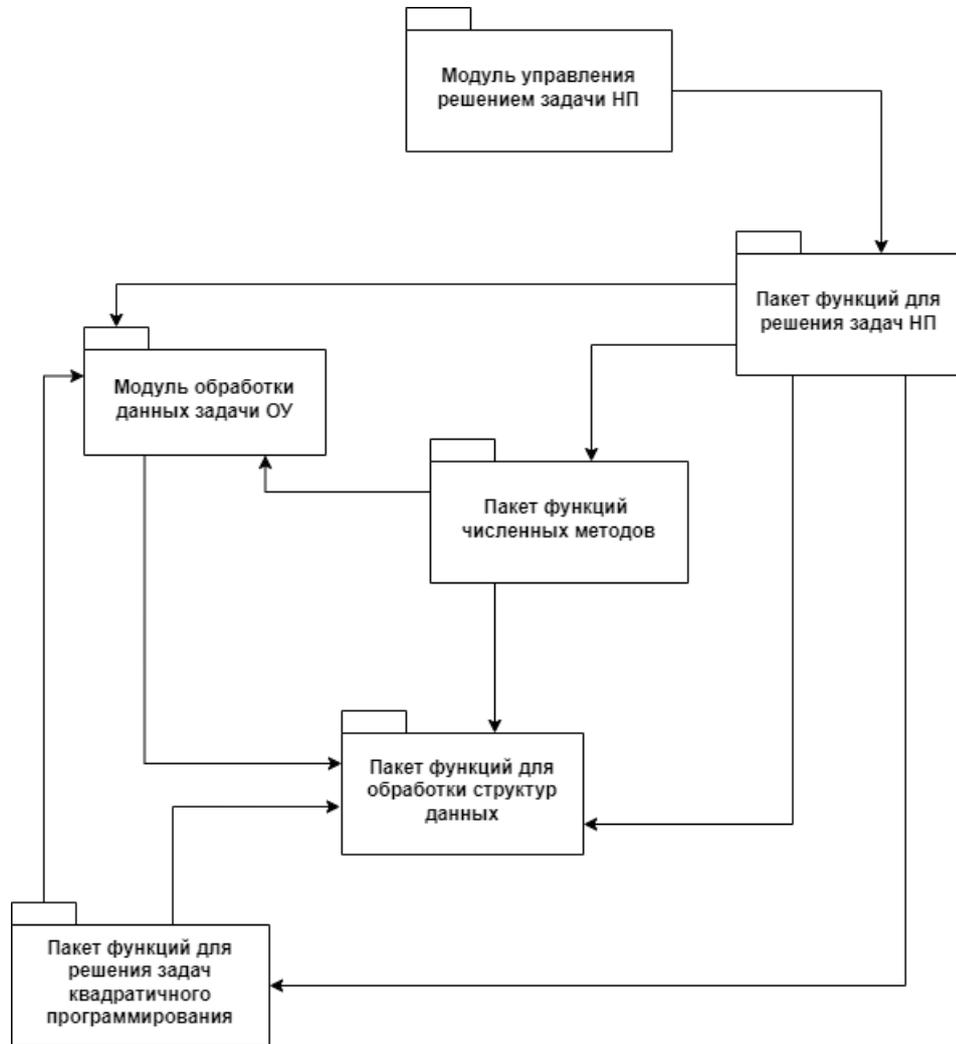


Рис. 4.4: Структура пакетов программного комплекса

Модуль управления решением задачи нелинейного программирования содержит ряд функций для решения задачи НП, порождаемой методом параметризации:

- *Организация сценария* реализует сценарий решения задачи нелинейного программирования. Во время выполнения сценария формируются матрица дискретного представления значений фазовой траектории и матрица

дискретного представления значений сопряженных переменных. В процессе выполнения функции `DecGas(...)` в файл-отчет вносятся результаты выполнения методов нелинейного программирования.

- *Ввод начального приближения* инициализирует начальное приближение для задачи нелинейного программирования.
- *Формирование отчета* выводит в файл-отчет динамику управляющих, фазовых, сопряженных переменных, а также параметры задачи.

Пакет функций для решения задач нелинейного программирования включает функции для решения задач на безусловный экстремум:

- *Одномерная минимизация* реализует алгоритм золотого сечения для решения одномерной задачи поиска минимума на отрезке.
- *Ньютон* реализует алгоритм метода Ньютона (классический метод и метод Ньютона-Рафсона) для решения многомерной задачи на безусловный минимум.
- *Спуск* реализует алгоритм метода скорейшего спуска для решения многомерной задачи на безусловный минимум.
- *ДФП* реализует алгоритм метода Дэвидона-Флетчера-Пауэлла для решения многомерной задачи на безусловный минимум.
- *Хук-Дживс* реализует алгоритм метода Хука-Дживса для решения многомерной задачи на безусловный минимум.

Пакет функций численных методов содержит функции для разностного вычисления производных, численного интегрирования, численного решения систем дифференциальных уравнений:

- *Численное дифференцирование* реализует алгоритм вычисления производной функции на основе использования интерполяционного полинома Ньютона.
- *Численное вычисление градиента* реализует алгоритм вычисления градиента на основе значений целевой функции.
- *Численно-аналитическое вычисление матрицы Гессе* реализует алгоритм вычисления матрицы Гессе на основе градиентов, полученных с помощью функции Понтрягина.
- *Численное вычисление матрицы Гессе* реализует алгоритм вычисления матрицы Гессе на основе значений целевой функции.
- *Аналитическое вычисление матрицы Гессе* реализует алгоритм вычисления матрицы Гессе на основе задач Коши для фазовых, сопряженных переменных, вариаций траектории, матричных импульсов.
- *Интегральный компонент для фазовых переменных* вычисляет значение интеграла в правой части интегро-дифференциального уравнения для фазовых переменных. Вычисление проводится методом трапеций.
- *Интегральный компонент для сопряженных переменных* вычисляет значение интеграла в правой части интегро-дифференциального уравнения для сопряженных переменных. Вычисление проводится методом трапеций.
- *Производная сопряженной переменной* вычисляет выражение в правой части дифференциального уравнения для сопряженных переменных.
- *Интегральный компонент в функции Понтрягина* вычисляет значение интеграла в функции Понтрягина для задачи с интегро-дифференциальными уравнениями.
- *Функция Понтрягина* вычисляет значение функции Понтрягина.

- *Интегральный компонент в производной функции Понтрягина* вычисляет значение интеграла в представлении частной производной функции Понтрягина по переменной управления.
- *Производная функции Понтрягина* вычисляет значение частной производной функции Понтрягина по переменной управления.
- *Производная функции Понтрягина по запаздыванию* вычисляет значение частной производной слагаемого функции Понтрягина, отвечающего за запаздывание по фазовой переменной.
- *Значение фазовой переменной* вычисляет значение фазовой переменной на основе массива значений фазовых переменных.
- *Решение задачи Коши* реализует алгоритм Рунге-Кутты для решения задачи Коши для фазовых переменных.
- *Значение сопряженной переменной* вычисляет значение сопряженных переменных на основе массива значений сопряженных переменных.
- *Решение задачи Коши в обратном времени* реализует алгоритм Рунге-Кутты для решения задачи Коши для сопряженных переменных.
- *Массив фазовых переменных* формирует матрицу, в которой сохраняется сеточное представление фазовой переменной.
- *Массив сопряженных переменных* формирует матрицу, в которой сохраняется сеточное представление сопряженной переменной.
- *Вычисление интеграла* реализует метод Симпсона для вычисления интегралов, позволяющих найти производные задачи нелинейного программирования, порожденной методом параметризации.

- *Аналитическое вычисление градиента* вычисление градиента целевой функции задачи нелинейного программирования, порожденной методом параметризации.
- *Вариация траектории* вычисляет вариацию траектории по параметрам управления в конечный момент времени.
- *Производная матричного импульса по времени* вычисляет выражения в правой части дифференциальной системы для матричного импульса.
- *Матричный импульс* вычисляет значение матричного импульса в конечный момент времени.

Пакет функций для решения задач квадратичного программирования содержит ряд функций, реализующих решение задачи квадратичного программирования, а также решение системы линейных уравнений:

- *Решение системы линейных уравнения* реализует алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса.
- *Проекция точек переключения* реализует алгоритм решения задачи квадратичного программирования для построения проекции части переменных (точек переключения управления) задачи НП на специализированное множество (1.6).

Модуль обработки данных задачи оптимального управления содержит функции, связанные с представлением конкретной модели, описываемой задачей ОУ:

- *Ввод начальных условий* проводит инициализацию начальных условий для фазовых переменных.
- *Ввод конечных условий* проводит инициализацию конечных условий для сопряженных переменных.

- *Вычисление управления* вычисляет значение управляющих функций в заданный момент времени.
- *Производные управления по параметрам* вычисляет значение производных управляющих функций по параметрам обобщенного сплайна в заданный момент времени.
- *Подынтегральная функция* вычисляет значение подынтегрального выражения в правой части интегро-дифференциального уравнения для фазовых переменных.
- *Производная фазовой переменной по времени* вычисляет значение выражения в правой части системы дифференциальных уравнений для фазовых переменных.
- *Производная ДУ по управлению* вычисляет значение частных производных по переменной управления от функций, находящихся в правой части системы дифференциальных уравнений для фазовой переменной.
- *Производная ДУ по управлению с запаздыванием* вычисляет значение частных производных по переменной управления с точечным запаздыванием от функций, находящихся в правой части системы дифференциальных уравнений для фазовой переменной.
- *Производная подынтегральной функции по управлению* вычисляет значение частных производных по переменной управления от функций, находящихся в подынтегральном выражении в правой части системы интегро-дифференциальных уравнений для фазовой переменной.
- *Производная ДУ по фазовым переменным* вычисляет значение частных производных по фазовым переменным от функций, находящихся в правой части системы дифференциальных уравнений для фазовой переменной.

- *Производная ДУ по фазовым переменным с запаздыванием* вычисляет значение частных производных по фазовым переменным с точечным запаздыванием от функций, находящихся в правой части системы дифференциальных уравнений для фазовой переменной.
- *Вторая производная ДУ по управлению* вычисляет значение частных производных второго порядка по переменной управления от функций, находящихся в правой части системы дифференциальных уравнений.
- *Производная подынтегральной функции по фазовой переменной* вычисляет значение частных производных по фазовой переменной от функций, находящихся в подынтегральном выражении в правой части системы интегро-дифференциальных уравнений для фазовой переменной.
- *Вторая производная ДУ по фазовым переменным* вычисляет значение частных производных второго порядка по фазовым переменным от функций, находящихся в правой части системы дифференциальных уравнений.
- *Вторая производная ДУ по управлению и фазовым переменным* вычисляет значение частных производных второго порядка по управляющим и фазовым переменным от функций, находящихся в правой части системы дифференциальных уравнений для фазовых переменных.
- *Целевой функционал* вычисляет значение целевого функционала, заданного в терминальной форме.

Пакет функций для обработки структур данных содержит ряд функций и классов, позволяющих обрабатывать данные при реализации численных методов:

- *Класс Вектор* реализует организацию структуры данных в виде числового вектора, также реализован ряд арифметических операций с векторами.

- *Класс Матрица* реализует организацию структуры данных в виде числовой матрицы, также реализован ряд арифметических операций с матрицами и векторами.

4.2 Основные вычислительные алгоритмы программного комплекса

4.2.1 Алгоритмы решения задачи НП

Задача нелинейного программирования, порожденная параметризацией исходной задачи оптимального управления, может иметь достаточно сложный вид. При этом она содержит ряд специфических ограничений:

- упорядочение точек сетки, определяющей структуру искомого управления;
- при поиске непрерывного (непрерывно дифференцируемого) управления добавляются специальные условия на параметры управления.

Для создания эффективных алгоритмов решения задач ОУ методом параметризации следует использовать методы нелинейного программирования, учитывающие специфику ограничений, возникающих при реализации метода параметризации.

В рамках программного комплекса для решения конечномерных задач на безусловный экстремум реализованы методы: метод Хука-Дживса, градиентные методы (простого градиента, наискорейший спуск), метод Дэвидона-Флэтчера-Пауэлла, метод Ньютона (классический метод, метод Ньютона-Рафсона).

В зависимости от выбранного в сценарии набора методов НП может потребоваться вычисление первых и/или вторых производных целевой функции. Вычисления градиента целевой функции требуется во всех методах, кроме метода Хука-Дживса. Вычисление производных второго порядка (матрица Гессе) тре-

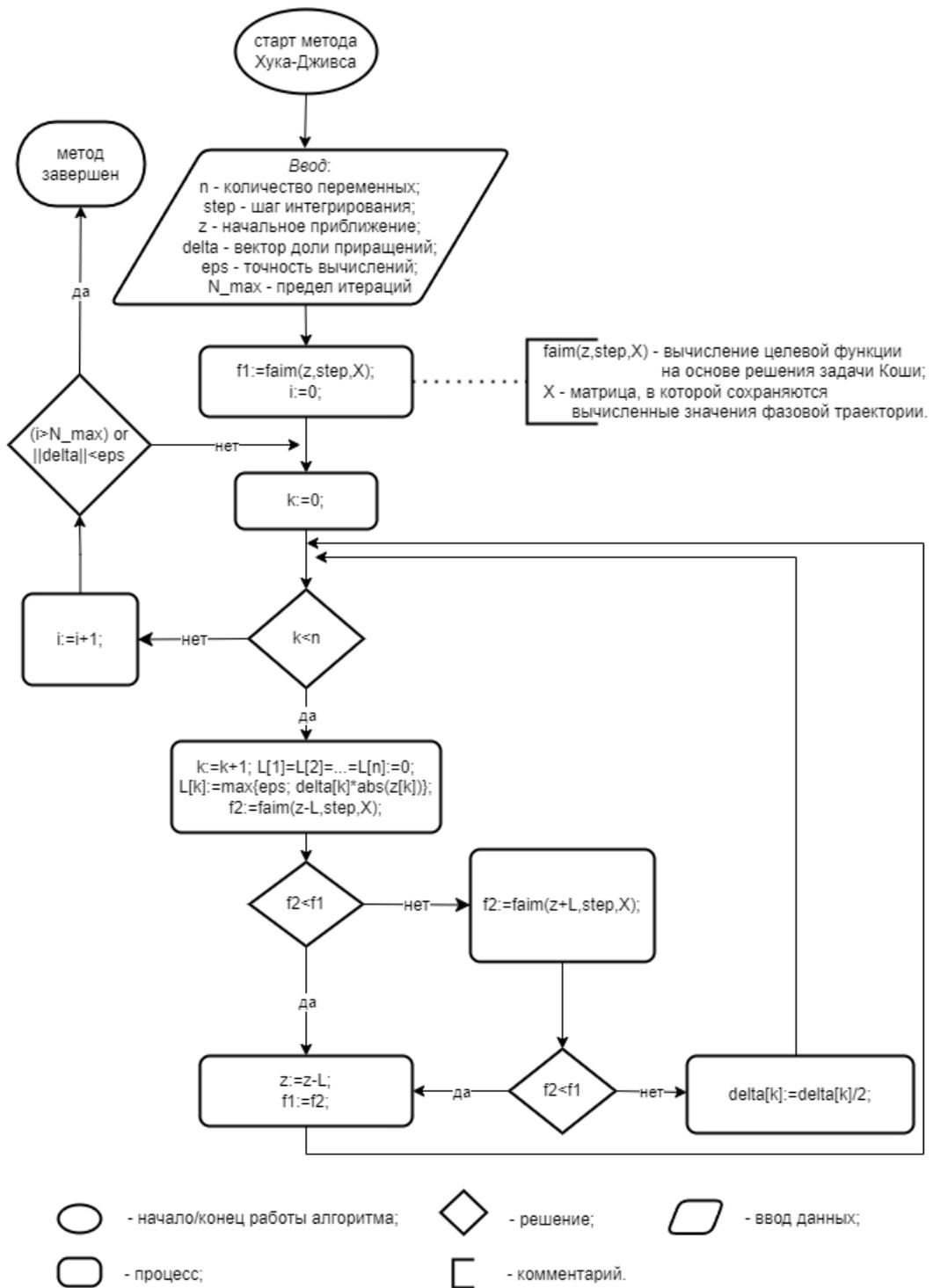


Рис. 4.5: Алгоритм модифицированного метода Хука-Дживиса

буется в методе Ньютона. Пользователь в рамках взаимодействия с программным комплексом выбирает один из вариантов вычисления производных.

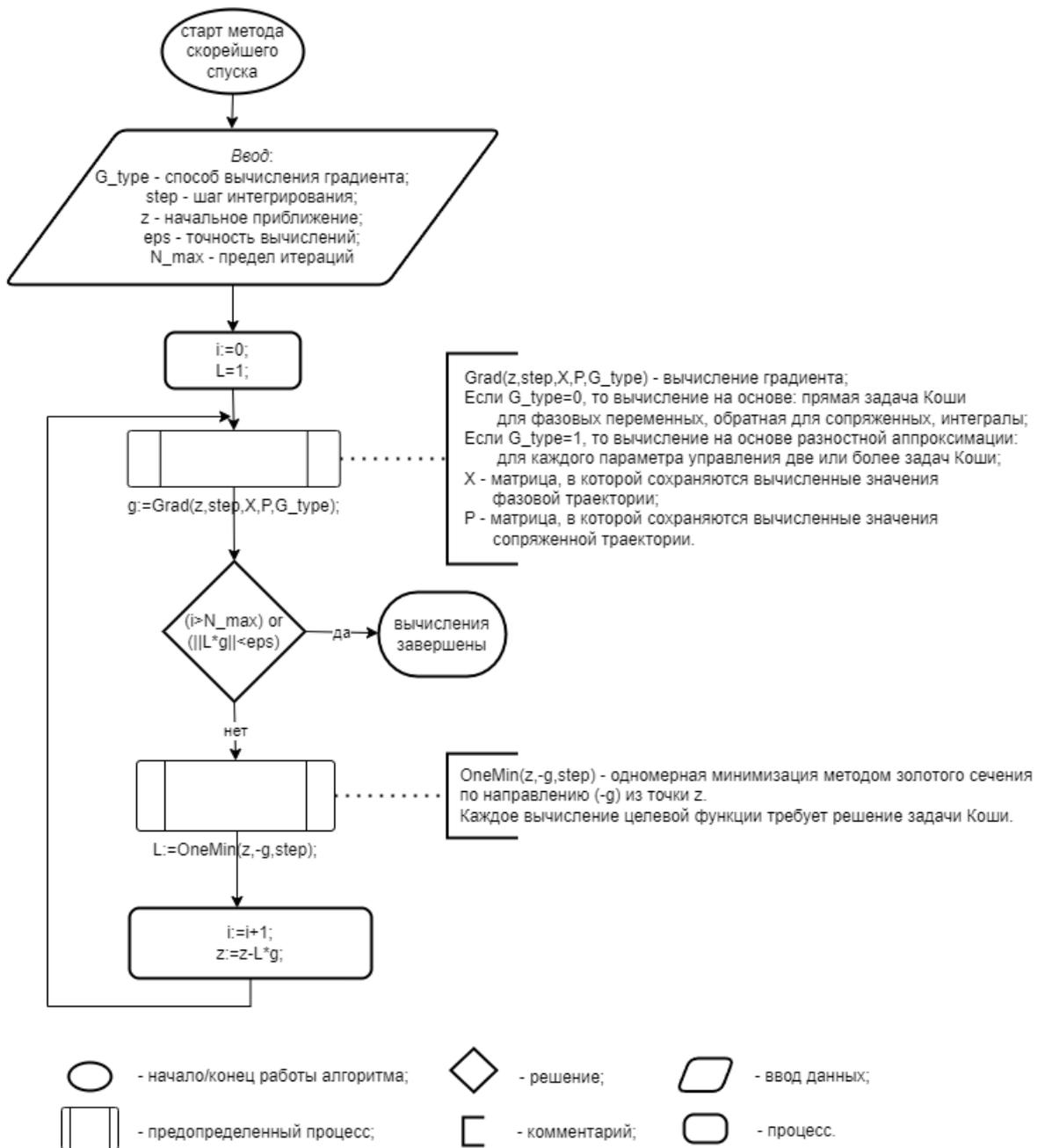


Рис. 4.6: Алгоритм метода скорейшего спуска

Для задачи ОУ с описанием динамики в виде обыкновенных дифференциальных уравнений вычисление градиента сводится к одной из альтернатив:

A1 численное дифференцирование на основе значений целевого функционала (1.4), формально φ_0 в задаче (1.10). Каждое вычисление функционала (1.4) требует решения задачи Коши (1.1), (1.7). По умолчанию в программ-

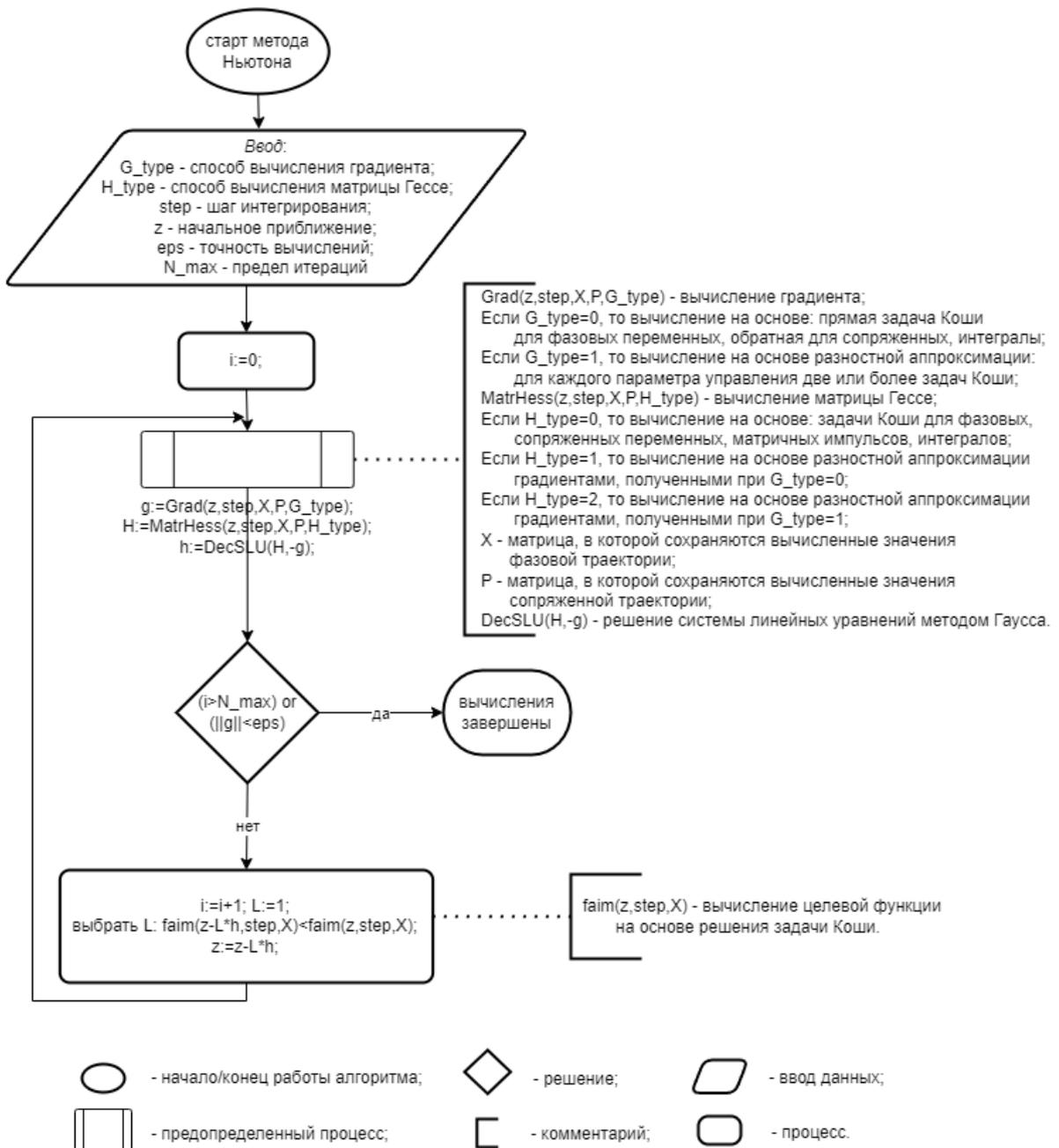


Рис. 4.7: Алгоритм модифицированного метода Ньютона

ном комплексе настроено численное дифференцирование на основе квадратичной аппроксимации полиномом Ньютона, это требует трехкратного решения задачи Коши (1.1), (1.7) по каждой переменной целевой функции φ_0 ;

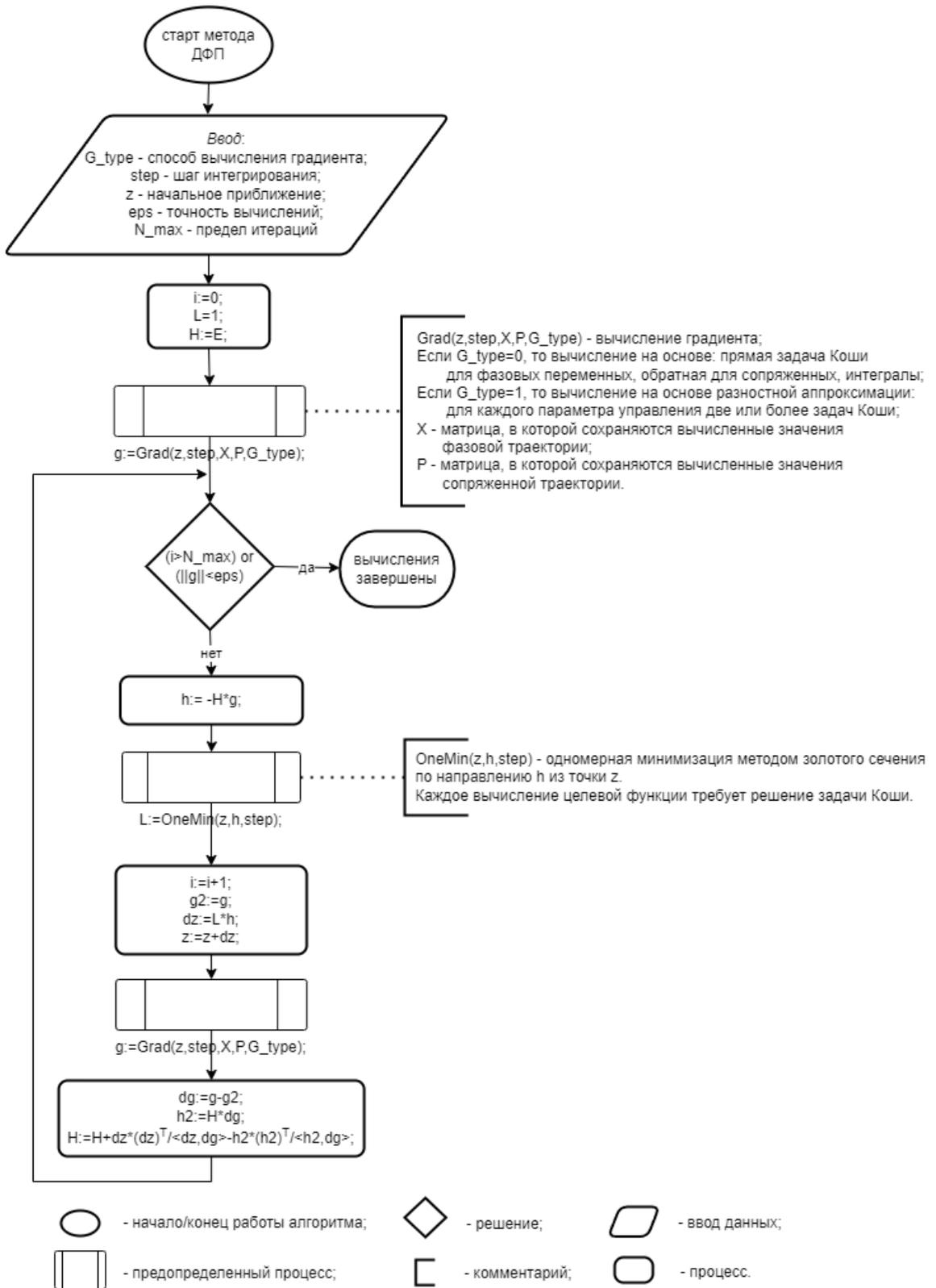


Рис. 4.8: Алгоритм метода Дэвидона-Флэтчера-Пауэлла

A2 на основе нахождения вариаций траектории по параметрам управления: сперва численное решение задач Коши (1.1), (1.7), а затем (1.14), (1.15);

A3 численное решение по формулам (1.19) (интегралы находятся методом трапеций). Для вычисления сначала нужно найти численное решение задач Коши (1.1), (1.7), а затем (1.17). Здесь используются двойственные переменные.

Вычисление производных второго порядка (матрица Гессе) в задаче ОУ с ОДУ задается одной из альтернатив:

A4 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного численным дифференцированием целевого функционала (1.4) (альтернатива A1);

A5 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного с помощью вариаций траектории по параметрам управления (A2);

A6 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного по формулам (1.19) (A3);

A7 численное решение по формулам (1.24), (1.22), (1.23), (1.25). Для этого требуется решить задачи Коши (1.1), (1.7), задачи (1.14), (1.15), а затем (1.17) и (1.20), (1.21).

Для задачи ОУ с описанием динамики в виде дифференциальных уравнений с точечным запаздыванием вычисление градиента сводится к одной из альтернатив:

A8 численное дифференцирование на основе значений целевого функционала (1.77), формально φ в задаче (1.79). Каждое вычисление функционала (1.77) требует решения задачи Коши (1.74), (1.76), (1.7). По умолчанию в программном комплексе настроено численное дифференцирование на основе квадратичной аппроксимации полиномом Ньютона;

A9 на основе нахождения вариаций траектории по параметрам управления: сперва численное решение задач Коши (1.74), (1.76), (1.7), а затем (1.81), (1.82);

A10 численное решение по формулам (1.85), (1.86), (1.87) (интегралы находятся методом Симпсона). Для вычисления сперва нужно найти численное решение задач Коши (1.74), (1.76), (1.7), а затем (1.83), (1.84).

Вычисление производных второго порядка (матрица Гессе) в задаче ОУ с точечным запаздыванием задается одной из альтернатив:

A11 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного численным дифференцированием целевого функционала (1.77) (альтернатива A8);

A12 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного с помощью вариаций траектории по параметрам управления (альтернатива A9);

A13 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного с по формулам (1.85), (1.86), (1.87) (альтернатива A10).

Для задачи ОУ с описанием динамики в виде интегро-дифференциальных уравнений вычисление градиента сводится к одной из альтернатив:

A14 численное дифференцирование на основе значений целевого функционала (1.91), формально φ в задаче (1.97). Каждое вычисление функционала (1.91) требует решения задачи Коши (1.92), (1.7). По умолчанию в программном комплексе настроено численное дифференцирование на основе квадратичной аппроксимации полиномом Ньютона;

A15 на основе нахождения вариаций траектории по параметрам управления: сперва численное решение задач Коши (1.92), (1.7), а затем (1.101), (1.103);

A16 численное решение по формулам (1.109), (1.110), (1.111) (интегралы находятся методом трапеций). Для вычисления сперва нужно найти численное решение задач Коши (1.92), (1.7), а затем (1.106), (1.107), (1.108).

Вычисление производных второго порядка (матрица Гессе) в задаче ОУ с интегро-дифференциальными связями задается одной из альтернатив:

A17 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного численным дифференцированием целевого функционала (1.91) (альтернатива A14);

A18 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного с помощью вариаций траектории по параметрам управления (альтернатива A15);

A19 численное дифференцирование на основе значений градиента, полученного с по формулам (1.109), (1.110), (1.111) (альтернатива A16).

Для решения задач НП на условный экстремум реализованы: метод проекции градиента, модифицированный метод штрафных функций.

Общая схема решения задачи нелинейного программирования, порожденной параметризацией управления, может быть описана следующим образом.

Требуется минимизировать функционал

$$\varphi_0(w) \rightarrow \min, \quad w \in R^{\tilde{N}}, \quad (4.1)$$

на множестве, описываемом системой неравенств

$$\varphi_i(w) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.2)$$

здесь $\varphi_i : R^{\tilde{N}} \rightarrow R$, $0 \leq i \leq m$.

Также есть ограничения на $w \in R^{\tilde{N}}$, являющиеся простыми, поэтому они не включены в (4.2). Предположим, что простые ограничения могут быть пред-

ставлены множествами W_1, W_2 . Множество W_1 описывает упорядоченную временную сетку, на которой рассматривается задача НП:

$$W_1 = \{(w_1, w_2, \dots, w_s) : t_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_s \leq T\}, \quad 0 \leq s < \tilde{N}, \quad (4.3)$$

В свою очередь множество $W_2 = \{(w_{s+1}, w_{s+2}, \dots, w_{\tilde{N}})\}$ имеет структуру, позволяющую относительно легко (возможно аналитически) проецировать точку на W_2 .

При решении задачи НП (4.1), (4.2) на простых множествах W_1, W_2 применялась схема модифицированных штрафных функций [174]. Дадим её описание.

Введем штрафной функционал

$$\Phi(w, p^k) = \varphi_0(w) + \sum_{i=1}^m p_i^k (\varphi_i^+(w))^2, \quad (4.4)$$

где $p^k = (p_1^k, p_2^k, \dots, p_m^k) \in R^m$, $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$. В отличие от стандартного метода штрафных функций, требующего $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_i^k = +\infty$ ($i = 1, \dots, m$), в модифицированной схеме коэффициенты штрафа изменяются согласно условию

$$p_i^{k+1} = p_i^k + C (\varphi_i^+(w^k))^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

Здесь w^k – решение $\Phi(w, p^k)$ на всем пространстве $w \in R^{\tilde{N}}$, C – фиксированный параметр штрафа.

В этом случае поставленная задача НП (4.1), (4.2) с учетом принадлежности к W_1, W_2 может быть сведена сводится к задаче НП: минимизация (4.4) на W_1, W_2 .

В программном комплексе реализован специальный алгоритм для решения задачи о проекции на множество W_1 . Пусть z – фиксированная точка пространства R^s . Построение проекции z на множество W_1 эквивалентно решению задачи квадратичного программирования (КП):

$$\|z - v\|^2 \rightarrow \min_{v \in R^s}, \quad \text{при ограничениях}$$

$$t_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_s \leq T.$$

Для решения поставленной задачи КП применялся алгоритм из [22], который был разработан для задач вида:

$$\|z - v\|^2 \rightarrow \min, \quad z, v \in R^s,$$

$$Av \leq b, \quad A \in R^{t \times s}, \quad b \in R^t.$$

В случае поставленной задачи о проекции на W_1 матрица линейных ограничений A имеет слабую заполненность и определена в виде

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет данный вид, когда T (горизонт планирования) в задаче ОУ является постоянным. В этом случае матрица A содержит $(s + 1)$ строчку и s столбцов. Если момент T является подвижным, то матрица ограничений квадратная ($s \times s$): последняя строка в матрице A отсутствует.

В программном комплексе реализован алгоритм решения задач квадратичного программирования [22], особенностью которого является использование матрицы Грама. Элементы матрицы Грама вычисляются как скалярное произведение активных ограничений соответствующих строк матрицы A . В данной задаче (ограничения (4.3)) матрица Грама является разреженной, это позволяет находить решение проще, чем в общем случае. Более того, хранение матрицы Грама не является обязательным, в отличие от общего случая.

4.2.2 Идентификация модели

После формирования структуры модели, представленной в виде системы дифференциальных уравнений, встает вопрос об идентификации параметров

этой модели. Часть параметров может быть получена на основании нормативов или экспертных данных предметной области. Однако некоторые параметры не могут быть оценены в силу отсутствия корректной информации по соответствующим данным или параметры имеют технический характер, который не позволяет определить их явным образом.

Рассмотрим управляемую систему дифференциальных уравнений с неизвестным набором параметров $\beta \in R^k$:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), \beta), \quad x(t_0) = x^0, \quad (4.6)$$

при условии $x(t) \in R^n$, $u(t) \in U$, $t_0 \leq t \leq T$, $U \subset \mathbb{R}^r$.

Пусть известны функции $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$, являющиеся одним из решений системы (4.6). Обозначим через $x(t, \beta)$ решение системы (4.6) при фиксированном управлении $u(t) = \tilde{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq T$.

В этом случае можно сформулировать меру отклонения решения $x(t, \beta)$ от известного решения $\tilde{x}(t)$:

$$\varphi(\beta) = \int_{t_0}^T \|x(t, \beta) - \tilde{x}(t)\|^2 dt. \quad (4.7)$$

Задача минимизации функционала (4.7) по величинам β при выполнении условий (4.6) позволяет получить оценки для искомых параметров β . Поставленная экстремальная задача может быть решена методом параметризации.

Пусть параметры β являются управляющими функциями, постоянными на всем промежутке $[t_0; T]$. На параметры β могут быть наложены ограничения, порожденные предметной областью и свойствами построенной модели: $\beta \in \mathbf{B}$.

В этом случае задача минимизации (4.7) при условии (4.6) и ограничений $\beta \in \mathbf{B}$ является задачей оптимального управления, которая естественно решается методом параметризации в классе постоянных управлений.

Может быть рассмотрен иной вариант идентификации параметров модели (4.6). Предположим, что известно значение системы в момент T , например, из

статистических данных известно $x(T) = \tilde{x}(T)$. Тогда можно ввести функционал, отражающий меру отклонения решения $x(T, \beta)$ от целевого значения

$$\varphi(\beta) = \|x(T, \beta) - \tilde{x}(T)\|^2. \quad (4.8)$$

Если считать β постоянными управляющими функциями, то задача минимизации (4.8) при условии (4.6) представляет собой задачу оптимального управления с фиксированным правым концом. Идентификация параметров модели (4.6) может быть проведена методом параметризации, примененном к задаче минимизации (4.8) при условии (4.6), $\beta \in \mathbf{B}$.

Пример 4.2.1

При оценке параметров модели (2.45)-(2.60), построенной на статистических данных экономики РФ и Ульяновской области в период эпидемии COVID-19 в 2020 году, возникли затруднения по ряду параметров. Так для параметров k_{SE} , k_{EI} , k_{IQ} , k_{IR} , k_{QD} , k_{QR} не были найдены статистические данные, позволяющие дать непосредственную оценку этим параметрам. Для их оценки была использована схема минимизации (4.8) при условии (4.6), $\beta \in \mathbf{B}$. Здесь $\beta = (k_{SE}, k_{EI}, k_{IQ}, k_{IR}, k_{QD}, k_{QR})$.

Система (4.6) содержательно была замещена дифференциальными уравнениями (2.45)-(2.52). Пусть $I(t, \beta)$, $Q(t, \beta)$, $R(t, \beta)$, $D(t, \beta)$ – решения соответствующих дифференциальных уравнений (2.48), (2.49), (2.50), (2.51) при решении системы (2.45)-(2.52) с известным набором параметров β .

Аналог функционала (4.8) рассматривался в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(\beta) = & \left(\frac{\int_{t_0}^T R(t, \beta) dt - R^*}{R^*} \right)^2 + \left(\frac{\int_{t_0}^T I(t, \beta) dt - I^*}{I^*} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\int_{t_0}^T Q(t, \beta) dt - Q^*}{Q^*} \right)^2 + \left(\frac{D(T, \beta) - D^*}{D^*} \right)^2. \end{aligned}$$

Известное управленческое решение $\tilde{u}(t)$ соответствовало управлению в РФ и Ульяновской области во время пандемии COVID-19. Для РФ это соответствует

значениям: $\tau_1 = 0,5$ мес., $\tau_2 = 2,5$ мес., $T = 9,5$ мес., $u_1 = 8,6$ млрд. руб., $u_2 = 3,047$ млрд. руб., $u_3 = 0,0528$ млрд. руб. Для Ульяновской области: $\tau_1 = 0,5$ мес., $\tau_2 = 2,5$ мес., $T = 9,5$ мес., $u_1 = 0,079$ млрд. руб., $u_2 = 0$, $u_3 = 0,0528$ млрд. руб.

Соответственно, кумулятивные показатели для РФ составили: $R^* = 2554340$, $I^* = 3159297$, $Q^* = 2124379$, $D^* = 57019$. Для Ульяновской области: $R^* = 33336$, $I^* = 36313$, $Q^* = 12797$, $D^* = 474$.

Для нахождения параметров β применялся метод параметризации для задачи с оптимизируемыми параметрами, шаг интегрирования задач Коши принимался равным 0,03. В таблице 4.2.4 приведены результаты решения $\hat{\beta}$.

Таблица 4.2.4: Оценка параметров в модели управления экономической системой в условиях массового заболевания

Регион	\hat{k}_{SE}	\hat{k}_{EI}	\hat{k}_{IQ}	\hat{k}_{IR}	\hat{k}_{QD}	\hat{k}_{QR}
Россия	$1,096 \cdot 10^{-7}$	2,22215	5,22036	1,88745	$2,5736 \cdot 10^{-1}$	7,99051
Ульяновская область	$7,96 \cdot 10^{-6}$	2,13118	1,71217	2,53673	$5,0830 \cdot 10^{-1}$	12,3335

Введем относительные ошибки по целевым показателям:

$$\Delta_R = \frac{|R^* - R(T, \hat{\beta})|}{R^*}, \quad \Delta_I = \frac{|I^* - I(T, \hat{\beta})|}{I^*},$$

$$\Delta_Q = \frac{|Q^* - Q(T, \hat{\beta})|}{Q^*}, \quad \Delta_D = \frac{|D^* - D(T, \hat{\beta})|}{D^*}.$$

Таблица 4.2.5: Целевые показатели в модели управления экономической системой в условиях массового заболевания

Регион	$R(T, \hat{\beta})$	$I(T, \hat{\beta})$	$Q(T, \hat{\beta})$	$D(T, \hat{\beta})$	Δ_R	Δ_I	Δ_Q	Δ_D
Россия	2474141	3365709	2036703	56988	0,031	0,065	0,041	0,0005
Ульяновская область	30607	38788	12823	473	0,081	0,068	0,002	0,0018

В таблице 4.2.5 приведены оценки целевых показателей, соответствующие набору параметров $\hat{\beta}$.

Анализ данных в таблице 4.2.5 показывает, что в РФ и УО: наименьшая относительная ошибка по показателю «количество умерших»; относительная ошибка по показателю «количество заболевших» практически одинаковая; абсолютные ошибки по всем показателям в УО меньше, чем в РФ, однако относительные ошибки по трем показателям из четырех меньше в РФ.

Глава 5

Численный анализ моделей

5.1 Двухсекторная экономика

Рассмотрим модели экономического роста с динамикой без запаздывания в освоении инвестиций (2.20) и с динамикой, учитывающей эффект запаздывания (2.24). Функционал в моделях (2.23) отражает интегральные фонды для производства товаров конечного потребления, управление (2.22) определяет долю новых фондов, направляемых на развитие сектора средств производства.

5.1.1 Ограничения по уровню фондов

Модель двухсекторной экономики в виде (2.20), (2.21), (2.22), (2.23) отображает экономику депрессивного характера, так как при достаточно большом горизонте планирования T к концу планируемого периода может быть даже $x_1(T) < x_1(t_0)$ (при наличии амортизации). Таким образом, развитие средств производства является затухающим (рисунок 3.6). Логично было бы дополнить модель дополнительными условиями, устраняющими указанный недостаток.

Рассмотрим фазовые ограничения вида

$$x_1(t) \geq x_1(t_0), \quad x_2(t) \geq x_2(t_0), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (5.1)$$

Экономическая интерпретация этих фазовых ограничений очевидна: на всем протяжении времени планирования ($t_0 \leq t \leq T$) требуется, чтобы выпуск обоих секторов не опускался ниже начального.

Теперь, используя метод снятия фазовых ограничений [23, 205], сведем задачу (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (5.1) к задаче без фазовых ограничений.

Динамика будет описываться следующей системой:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha u x_1 - \mu_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha(1 - u)x_1 - \mu_2 x_2, \\ \dot{x}_3 &= ([x_1^0 - x_1(t)]^+)^2 + ([x_2^0 - x_2(t)]^+)^2,\end{aligned}\tag{5.2}$$

с краевыми условиями

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad x_3(t_0) = x_3(T) = 0.\tag{5.3}$$

Ограничение на управление (2.21) и целевая функция (2.23) остаются без изменений. Отметим, что при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ решение задачи (2.21), (5.2), (5.3), (2.23) совпадает с решением задачи (2.20)–(2.23).

Для анализа поведения динамики экономических характеристик поставленной задачи использование аналитических методов чрезвычайно затруднительно, поэтому задача анализировалась численно, в частности, использовался метод параметризации. Решение искалось в классе кусочно-постоянных управлений с одним моментом переключения:

$$u(t) = \begin{cases} v_1, & t_0 \leq t < \tau; \\ v_2, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

При использовании метода параметризации были задействованы методы НП (простого градиента, Ньютона, Хука-Дживса), которые направлены на поиск безусловного минимума. В связи с этим была проведена модификация целевого функционала (2.23) (J).

$$J_C = C \left(x_3(T) + \int_{t_0}^T (([u(t) - 1]^+)^2 + ([-u(t)]^+)^2) dt \right) - \int_{t_0}^T x_2(t) dt \rightarrow \min.\tag{5.4}$$

Таким образом, далее решалась задача (5.2), (5.3), (5.4) с начальными условиями $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, $x_3(t_0) = 0$.

В таблице 5.1.1 представлены значения параметров (v_1 , v_2 , τ) оптимального решения при различных значениях коэффициентов фондоотдачи α и амортизации $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Также приведено соответствующее оптимальное значение

функционалов J и J_C при $C = 1000$. Задачи Коши, порождаемые методом параметризации, решались методом Рунге-Кутты 2-го порядка с шагом интегрирования 0,01. Схема использования алгоритмов простого градиента, Ньютона, Хука-Дживса состояла в последовательном их применении. Окончанием итерационного процесса в каждом из методов было условие, при котором норма приращения аргумента (при последовательных итерациях) становилась меньше заданной.

Таблица 5.1.1: Значение параметров оптимального решения в модели с ограничением на уровень фондов ($t_0 = 0$, $T = 10$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$)

α	μ	v_1	v_2	τ	J	J_C
0,27	0,05	0,8354	$-1,781 \cdot 10^{-4}$	2,2078	18,0793	-18,0765
0,30	0,05	0,8597	$-2,415 \cdot 10^{-4}$	2,9167	19,9632	-19,9535
0,33	0,05	0,8797	$-3,199 \cdot 10^{-4}$	3,5993	22,3625	-22,3375
0,36	0,05	0,8962	$-4,267 \cdot 10^{-4}$	4,1617	25,4246	-25,3734
0,27	0,07	0,7675	$-3,587 \cdot 10^{-5}$	3,3304	15,8324	-15,8213
0,30	0,07	0,7948	$-1,808 \cdot 10^{-4}$	2,9238	17,5642	-17,5559
0,33	0,07	0,8215	$-2,454 \cdot 10^{-4}$	3,4395	19,4945	-19,4745
0,36	0,07	0,8444	$-3,243 \cdot 10^{-4}$	4,0305	21,9392	-21,8964
0,27	0,09	0,6903	0,1365	3,4907	13,6968	-13,6871
0,30	0,09	0,7305	$-5,151 \cdot 10^{-5}$	4,0591	15,3098	-15,2939
0,33	0,09	0,7604	$-1,838 \cdot 10^{-4}$	3,5721	17,0866	-17,0709
0,36	0,09	0,7884	$-2,460 \cdot 10^{-4}$	3,8873	19,0488	-19,0187
0,27	0,11	0,6080	0,3276	2,7642	11,8908	-11,8860
0,30	0,11	0,6595	0,1558	4,1193	13,2239	-13,210
0,33	0,11	0,7011	$1,178 \cdot 10^{-2}$	4,6100	14,8225	-14,7947
0,36	0,11	0,7319	$-1,861 \cdot 10^{-4}$	4,1584	16,6305	-16,6035

На рисунках 5.1, 5.2, 5.3 представлены графики оптимального решения в модели двухсекторной экономики при наличии амортизации основных фондов и ограничений на фазовые переменные ($t_0 = 0$, $T = 10$, $\alpha = 0,27$, $\mu_1 = \mu_2 = 0,07$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$; размерность параметров условна: время измеряется в кварталах,

x_1, x_2 в условных денежных единицах).

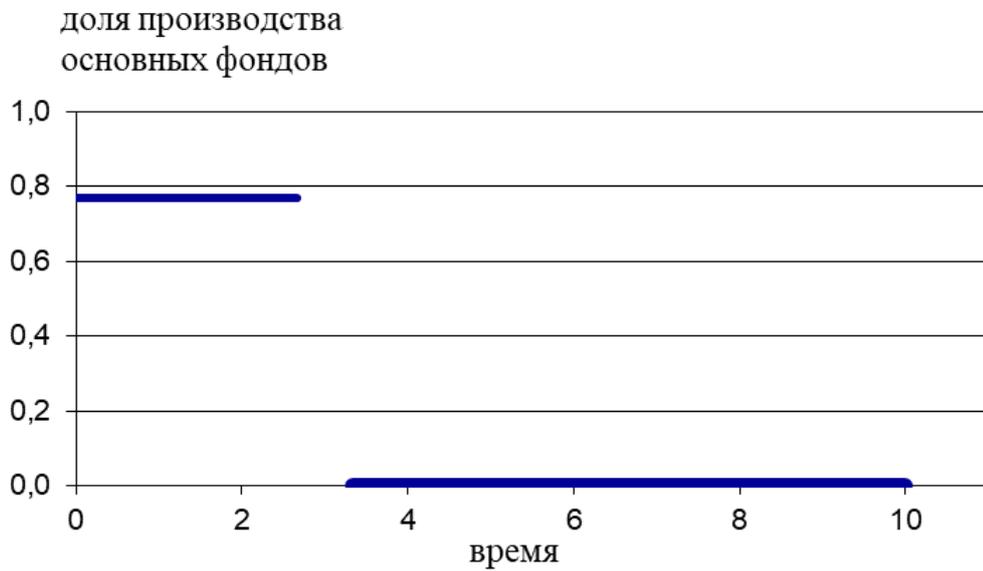


Рис. 5.1: Доля средств производства с ограничением на фазовые переменные



Рис. 5.2: Фонды для производства предметов потребления с ограничением на фазовые переменные

Наиболее типичные оптимальные решения (получаемые при «разумном» выборе параметров α, μ_1, μ_2) содержат два периода управления:

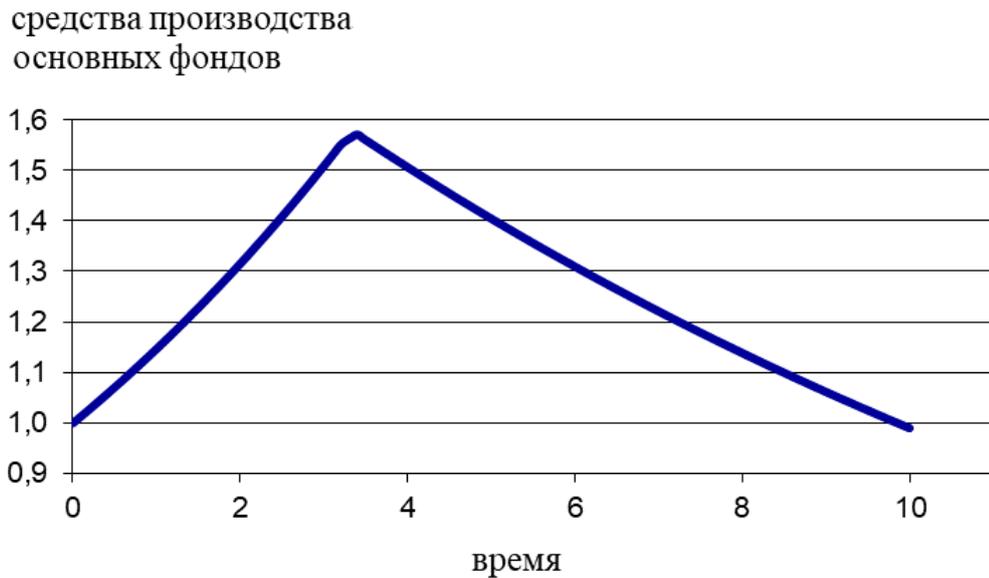


Рис. 5.3: Фонды для производства основных фондов с ограничением на фазовые переменные

- в первом периоде накапливаются средства производства, при этом уровень производства предметов потребления поддерживается на начальном состоянии;
- второй период характеризуется тем, что все ресурсы переходят на производство товаров потребления, производственный фонд разрушается, но, в отличие от модели (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), к конечному моменту времени состояние производственного фонда не опускается ниже начального.

5.1.2 Ограничения по монотонности развития фондов

Оптимальное решение в задаче (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (5.1) содержит период, на котором идет разрушение фондов первого сектора, что для экономики представляет негативный эффект. Введем предположение: пусть требуется обеспечить темп роста в первом секторе не менее ρ_1 , во втором не менее ρ_2 . Это эквивалентно добавлению в задачу (2.20), (2.21), (2.22), (2.23) условия

$$\dot{x}_1 \geq \rho_1 x_1, \quad \dot{x}_2 \geq \rho_2 x_2, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (5.5)$$

Используя метод снятия фазовых ограничений [23, 205], сведем задачу (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (5.5) к задаче без фазовых ограничений.

В этом случае динамика будет описываться системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha u x_1 - \mu_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha(1 - u)x_1 - \mu_2 x_2, \\ \dot{x}_3 &= ([-\alpha u x_1 + (\mu_1 + \rho_1)x_1]^+)^2 + ([-\alpha(1 - u)x_1 + (\mu_2 + \rho_2)x_2]^+)^2, \end{aligned} \quad (5.6)$$

с краевыми условиями

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad x_3(t_0) = x_3(T) = 0. \quad (5.7)$$

Ограничение на управление (2.22) и целевая функция (2.23) остаются без изменений.

Применение аналитических методов к задаче (5.6), (5.7), (2.22), (2.23) достаточно затруднительно, поэтому задача анализировалась численно, в частности, методом параметризации. Решение искалось в классе кусочно-постоянных управлений с одним моментом переключения:

$$u(t) = \begin{cases} v_1, & t_0 \leq t < \tau; \\ v_2, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

При использовании метода параметризации были задействованы методы НП (простого градиента, Ньютона, Хука-Дживса), направленные на поиск безусловного минимума. В связи с этим была проведена модификация целевого функционала (2.23) (J) к виду (5.4). Таким образом, далее решалась задача (5.6), (5.7), (5.4) с начальными условиями $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, $x_3(t_0) = 0$.

В таблице 5.1.2 представлены значения параметров (v_1, v_2, τ) оптимального решения при различных значениях коэффициентов фондоотдачи α и амортизации $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Также приведено соответствующее оптимальное значение функционалов J и J_C при $C = 1000$. Темп роста фондов в секторах принимался

одинаковым $\rho = \rho_1 = \rho_2$ и полагался равным 0,02. Задачи Коши, порождаемые методом параметризации, решались методом Рунге-Кутты 2-го порядка с шагом интегрирования 0,01. Схема использования алгоритмов простого градиента, Ньютона, Хука-Дживса состояла в последовательном их применении. Окончанием итерационного процесса в каждом из методов было условие, при котором норма приращения аргумента (при последовательных итерациях) становилась меньше заданной.

Таблица 5.1.2: Значение параметров оптимального решения в модели с ограничением на динамику фондов ($t_0 = 0$, $T = 10$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$, $\rho = 0,02$)

α	μ	v_1	v_2	τ	J	J_C
0,27	0,05	0,7501	0,2573	1,2366	17,1296	-17,1249
0,30	0,05	0,7877	0,2322	2,2603	18,9236	-18,9137
0,33	0,05	0,8194	0,2113	3,0690	21,1644	-21,1333
0,36	0,05	0,8471	0,1942	3,7242	24,0053	-23,9272
0,27	0,07	0,6700	0,3310	0,6298	14,9745	-14,9696
0,30	0,07	0,7151	0,2985	1,7966	16,4622	-16,4564
0,33	0,07	0,7530	0,2719	2,703	18,2675	-18,2512
0,36	0,07	0,7864	0,2499	3,4276	20,5166	-20,4702
0,27	0,09	0,4065	0,4047	1,3559	13,1166	-13,1108
0,30	0,09	0,6416	0,3649	1,2562	14,3925	-14,3882
0,33	0,09	0,6854	0,3321	2,2840	15,8767	-15,8680
0,36	0,09	0,7240	0,3052	3,0936	17,6778	-17,6526
0,27	0,11	0,4783	0,4804	8,3769	11,4700	-11,4626
0,30	0,11	0,5696	0,4313	0,6176	12,6248	-12,6204
0,33	0,11	0,6178	0,3925	1,7987	13,8806	-13,8756
0,36	0,11	0,6608	0,3604	2,7129	15,3488	-15,3361

На рисунках 5.4, 5.5, 5.6 представлены графики оптимального решения в модели двухсекторной экономики при наличии амортизации основных фондов и ограничений на монотонность их развития ($t_0 = 0$, $T = 10$, $\alpha = 0,3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0,07$, $\rho_1 = \rho_2 = 0,02$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$; размерность параметров условна: время

измеряется в кварталах, x_1 , x_2 в условных денежных единицах).

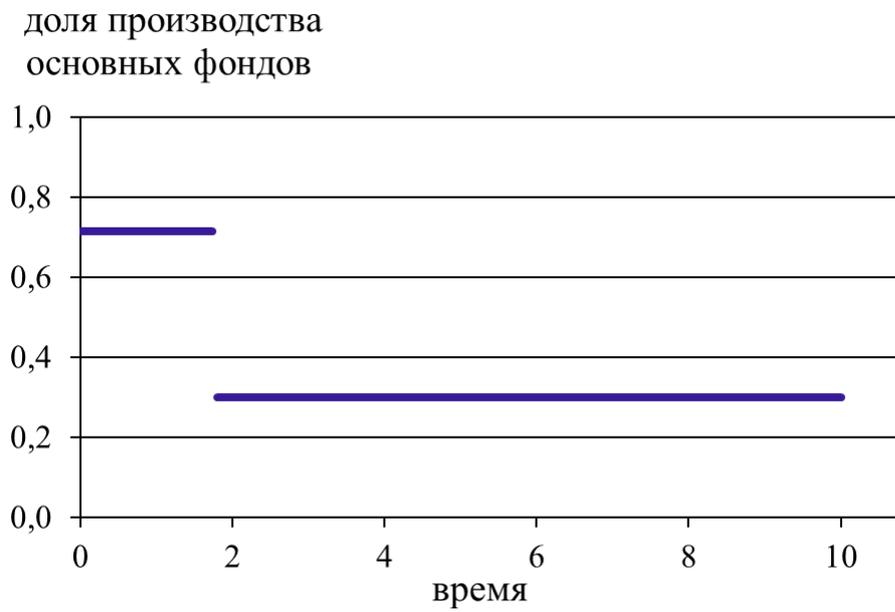


Рис. 5.4: Доля средств производства с ограничением на монотонность развития фондов

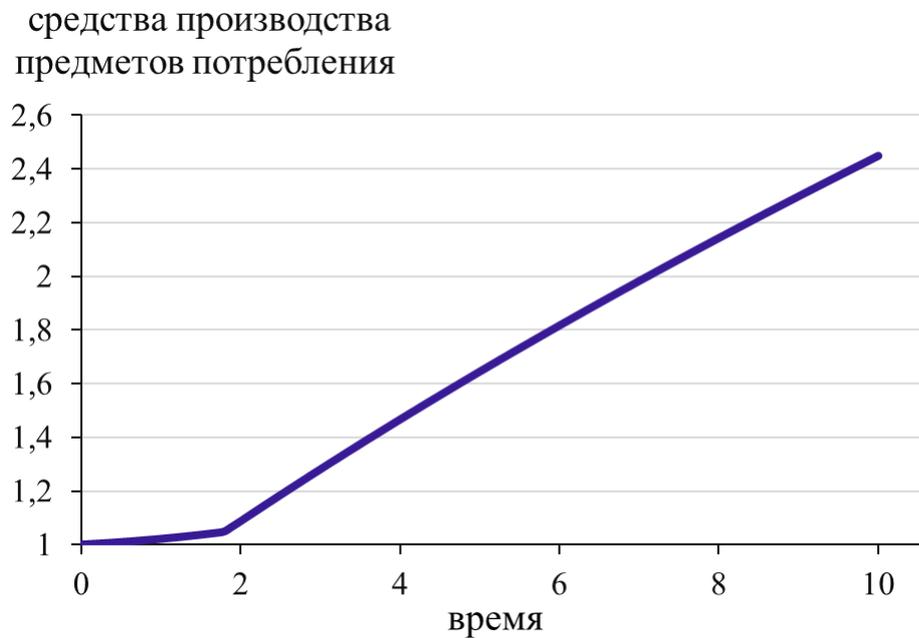


Рис. 5.5: Фонды для производства предметов потребления с ограничением на монотонность развития фондов

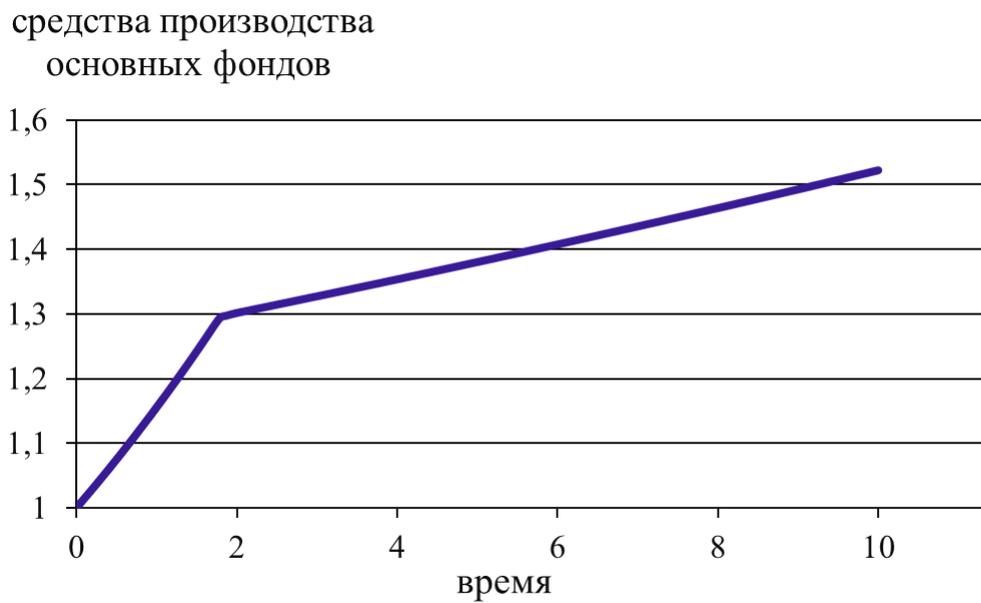


Рис. 5.6: Фонды для производства основных фондов с ограничением на монотонность развития фондов

При анализе были выявлены два вида управления. Первый тип управления получался при относительно небольшом отношении фондоотдачи и амортизации: на всем промежутке планирования темп роста фондов в первом секторе поддерживается на уровне ρ_1 , производство фондов для товаров потребления увеличивается с темпом выше ρ_2 . Второй тип оптимального управления получался при достаточно большом T и «разумном» выборе параметров α , μ_1 , μ_2 . Такое управление содержит два периода:

- в первом периоде интенсивно (выше ρ_1) накапливаются средства производства в первом секторе, при этом темп увеличения фондов для производства предметов потребления поддерживается на уровне ρ_2 ;
- во втором периоде фонды для производства товаров потребления накапливаются с темпом выше ρ_2 , при этом фонды в первом секторе увеличиваются с темпом ρ_1 .

5.1.3 Точечное запаздывание в инвестициях, динамике освоения фондов

Проведем анализ модели двухсекторной экономики с постоянным запаздыванием (2.24), (2.22), (2.23). Наличие запаздывания в управляющих и фазовых переменных затрудняет поиск аналитического решения задачи ОУ. Поставленную проблему будем анализировать методом параметризации.

Сперва протестируем метод параметризации как метод численного анализа данной модели. Зафиксируем значения параметров: $\alpha = 0,3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0,05$, $\tau_1 = \tau_2 = 0,5$ и начальные условия $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 1$, $u(t) = 0$ при $t \leq t_0$. Горизонт планирования установим в 10 лет: $t_0 = 0$, $T = 10$.

Применение метода параметризации требует на первом этапе параметризацию управления, на втором решение полученной конечномерной задачи НП. В данном случае задача НП решалась градиентным методом и методом Ньютона последовательно. При этом вычисление градиента происходило двумя способами: первый основан на вычислении градиента по формулам (1.85), (1.87); во втором способе градиент находился на основе разностной аппроксимации по значениям целевого функционала. В методе Ньютона матрица Гессе вычислялась на основе разностной аппроксимации соответствующими градиентами: в первом способе градиентами, полученными по формулам (1.85), (1.87), во втором способе разностными градиентами.

Все эксперименты начинались с одинакового начального приближения. Полученные решения подтверждают выводы, сделанные по приведенной модели для случая нулевого запаздывания [53]. Для оценки эффективности метода рассмотрим таблицы 5.1.3 и 5.1.4, которые содержат столбцы: шаг интегрирования, время, функционал. Первый из них указывает значение шага интегрирования задачи Коши (2.24), с условиями $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 1$, $u(t) = 0$ при $t \leq t_0$ и сопряженной к ней, построенной по формулам (1.83), (1.84). Задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 2-го порядка. Столбец “время” содержит общее

время работы программы при соответствующих параметрах, к данной характеристике нужно относиться как к условной (например, секунды), в силу ее сильной зависимости от характеристик компьютера и выбора средств реализации. Столбец “функционал” содержит значение целевого функционала (2.23) на полученном решении. В таблице 5.1.3 решения искались в классе кусочно-линейных управлений с одним моментом переключения (5 переменных).

Таблица 5.1.3: Метод параметризации в модели экономического роста

шаг интегрирования	1-й способ		2-й способ	
	время	функционал	время	функционал
0,0100	43	19,28260	52	19,24416
0,0050	64	19,28268	80	19,24382
0,0010	546	19,28261	579	19,28124
0,0005	719	19,28262	1390	19,28167

Таблица 5.1.4 сравнивает сходимость метода при первом и втором способах при усложнении параметризации и фиксированном шаге интегрирования задач Коши (шаг равен 0,001).

Таблица 5.1.4: Сравнение видов параметризации в модели экономического роста

вычисление градиента	вид параметризации					
	кусочно постоянная с одним переключением (3 переменных)		кусочно линейная с одним переключением (5 переменных)		кусочно линейная с двумя переключениями (8 переменных)	
	время	функционал	время	функционал	время	функционал
1-й способ	160	19,28261	546	19,28261	611	19,28274
2-й способ	268	19,24370	579	19,28124	1267	19,28240

Основываясь на результатах, приведенных в таблицах 5.1.3, 5.1.4, можно сделать вывод о том, что использование первого способа вычисления градиента более эффективно, чем второго. Это подтверждается лучшим значением функ-

ционала и временными характеристиками. При этом разница становится более значительной при уменьшении шага интегрирования и усложнении структуры управления.

Теперь проведем анализ влияния параметров модели на оптимальное решение. Начальные условия состояния экономики зафиксируем на уровне: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 1$, $u(t) = 0$ при $t \leq t_0$. Также сделаем предположение, что в секторе производства основных фондов и в секторе производства потребительских благ технологии освоения инвестиций значимо не различаются. Из этого, в частности, следует, что $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

Оценки значений параметров α и $\mu = \mu_1 = \mu_2$ были получены на основе статистических данных по макроэкономическим показателям РФ, представленных на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики. Так как данные параметры могут иметь разные значения в различные периоды времени, в рамках эксперимента оценки были проварьированы.

Вычислительный эксперимент проводился методом параметризации: конечномерные задачи, полученные в результате редукции управляющей функции, решались градиентным методом и методом Ньютона последовательно. При этом вычисление градиента происходило по формулам (1.85), (1.87). В методе Ньютона матрица Гессе вычислялась на основе разностной аппроксимации соответствующими градиентами по формулам (1.85), (1.87).

Для оценки анализируемой модели рассмотрим таблицу 5.1.5, которая содержит столбцы: коэффициент фондоотдачи (со значениями параметра α), коэффициент амортизации (со значениями параметра μ), лаг запаздывания (τ , 4 вариации). В таблице указаны значения максимизируемого функционала для 16 комбинаций значений параметров α , μ , τ .

Анализируя полученные результаты, можно констатировать, что увеличение фондоотдачи на 10% повышает выпуск продукции за 10-тилетний период в 1,92 раза при запаздывании в отдаче производственного фонда и введение новых

Таблица 5.1.5: Значение функционала в модели экономического роста

коэффициент фондоотдачи	коэффициент амортизации	общий объем товаров конечного потребления (в зависимости от τ)			
		месяц	квартал	полгода	год
α	μ				
0,5	0,05	53,73	44,95	37,34	30,64
0,5	0,06	49,76	41,90	35,05	29,01
0,6	0,05	103,30	76,45	55,94	39,82
0,6	0,06	95,27	71,03	52,39	37,66

фондов на месяц и в 1,3 раза при запаздывании на год.

Увеличение коэффициента амортизации фондов на 1% говорит об увеличении технического износа оборудования, устаревании производственных фондов и как следствие увеличение затрат, связанных с поддержанием выпуска продукции. Таким образом, в десятилетний период увеличение коэффициента амортизации на 1% снижает выпуск продукции на 8% и на 5,6% при запаздывании на 1 месяц и на год соответственно.

Типичные оптимальные решения содержат 3 периода управления:

- в первом периоде происходит незначительное увеличение выпуска товаров потребления, тогда как наращивание производственных фондов не наблюдается. Это объясняется запаздыванием во внедрение новых фондов.
- во втором периоде (после истечения периода запаздывания) накапливаются средства производства, при этом уровень выпуска предметов потребления поддерживается на начальном уровне;
- третий период характеризуется тем, что все ресурсы переходят на производство товаров потребления, производственный фонд разрушается, при этом, к конечному моменту времени состояние производственного фонда не опускается ниже начального.

Вычислительный эксперимент показал адекватность предлагаемой модели

для исследования макроэкономических показателей: производство средств производства и производство товаров потребления. Полученные при анализе результаты решения задачи максимизации выпуска товаров потребления в модифицированной модели двухсекторной экономики позволяют выбрать оптимальный путь развития экономики, эффективно распределить имеющиеся ресурсы, используя современные средства автоматизированного управления.

5.2 Оптимальная инвестиционная стратегия фирмы

Рассмотрим модель с распределенным запаздыванием в инвестиционных вложениях: максимизировать функционал (2.30) со связями на фазовые переменные (2.25), (2.26), (2.27) и ограничением на управление (2.28).

В целевом функционале (2.30) вычитаются общие издержки $c = c(y(t), t)$. Обычно издержки делят на постоянные и переменные: $c(y(t), t) = c_1(y(t), t) + c_2(t)$, c_1 – переменные издержки (без учета реальных инвестиций), c_2 – постоянные издержки. Сделаем традиционное предположение о прямой зависимости с некоторым коэффициентом μ переменных издержек от объема выпускаемой продукции. Тогда функционал (2.30) примет вид:

$$\Pi(T) = \int_0^T ((1 - \mu)f(v(t), w(t)) - I(t) - c_2(t)) dt. \quad (5.8)$$

Далее будем рассматривать задачу: (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (5.8).

Для оценки параметров модели рассматривались полугодовые данные о выручке и реальных инвестициях (в миллионах российских рублей) из консолидированной финансовой отчетности за период с января 2007 г. по июнь 2017 г. публичного акционерного общества «Объединенная авиастроительная корпорация» (ПАО «ОАК») (до апреля 2015 г. ОАО «ОАК») [194].

Для определения интервала влияния инвестиций, сделанных в предыдущие периоды времени, на текущий объем производства был проведен корреляционный анализ. На основе анализа взаимосвязи между инвестициями и продажами

были выявлены временные лаги, в рамках которых статистическая связь была наивысшей. Это позволило определить верхнюю и нижнюю границы интеграла (2.25), т.е. параметры $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 5$. Полученные оценки говорят в пользу того, что наибольшее влияние инвестиций приходится на интервал от года до 2,5 лет после вложения средств в материальную базу. Это дает основание утверждать, что модели, основанные на предположении об освоении инвестиций в тот же временной такт, когда производится продукция, в данном случае неприменимы.

Также регрессионный анализ используется для понимания характера влияния материальных инвестиций (в основные средства производства) и нематериальных активов на объем продаж. В данном случае можно отметить, что распределение влияния нематериальных активов полностью соответствует свойствам $G(\tau)$. Поскольку материальные инвестиции не оказывают сильного влияния, нематериальные активы определяют структуру реальных инвестиций. Полученный факт соответствует современному состоянию экономики, когда информационные факторы становятся все более важными. Кроме того, регрессионный анализ позволил определить значение лага запаздывания, отвечающего за совокупное влияние факторов, отличных от реальных инвестиций. Это значение соответствует полугодию, т.е. $\tau_3 = 1$.

Введем кусочно непрерывные функции $\bar{G}(t - s)$, $\varphi_I(t)$:

$$\bar{G}(\tau) = \begin{cases} G(\tau), & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\varphi_I(t) = \begin{cases} \int_{t-5}^{t-2} G(t-s)\tilde{I}(s)ds, & 0 \leq t \leq 2, \\ \int_{t-5}^0 G(t-s)\tilde{I}(s)ds, & 2 \leq t \leq 5, \\ 0, & t \geq 5; \end{cases}$$

Таким образом, $v(t)$, $\Pi(t)$ могут быть записаны в виде системы:

$$v(t) = \varphi_I(t) + \int_0^t \bar{G}(t-s)I(s)ds, \quad (5.9)$$

$$\Pi(t) = \int_0^t ((1-\mu)f(v(s), w(s)) - I(s) - c_2(s))ds. \quad (5.10)$$

Рассмотрим случай, когда производственная функция $f(v, w)$ имеет линейный характер по переменным v и w , $g(y)$ прямо пропорционально y . Тогда $y(t)$ может быть представлено в виде:

$$y(t) = \varphi_I(t) + \int_0^t \bar{G}(t-s)I(s)ds + \alpha y(t-1).$$

Основываясь на свойствах функции $G(\tau)$, можно рассмотреть следующее параметрическое представление:

$$G(\tau) = \exp(a\tau^2 + b\tau + c).$$

Было сделано предположение, что инвестиций до начала планирования не было достаточно долго. Это означает, что $\varphi_I(t) = 0$ на рассматриваемом интервале. Для оценки параметров функции $G(\tau)$ и α использовался метод наименьших квадратов, были получены следующие значения: $\hat{a} = -0,68009$, $\hat{b} = 6,4509$, $\hat{c} = -12,78169$, $\hat{\alpha} = -0,56369$.

В качестве горизонта планирования возьмем 1,5 года ($T = 3$). Ограничение на интенсивность инвестиционного бюджета установим в размере b равном 25902,5 млн. руб. (максимальное из значений реальных инвестиций, приведенных в полугодовых данных за период с 2007 г. по 2017 г.).

Так как постоянные издержки не влияют на изменение прибыли, вызванное инвестиционной стратегией, будем в качестве критерия качества рассматривать относительную прибыль:

$$\bar{\Pi}(T) = \int_0^3 (f(v(t), w(t)) - I(t)) dt. \quad (5.11)$$

Оптимальная стратегия, полученная с использованием функционалов (5.11) и (5.8), будет одинаковой.

Отметим, что общая относительная прибыль за 1,5 года, представленная в статистической отчетности корпорации, составила 989012,5 млн. рубл. Поставим задачу поиска инвестиционной стратегии, которая обеспечила бы за 1,5 года относительную прибыль в размере 1000000 млн.руб.

Множество решений поставленной проблемы формирует множество S_{JIT} . Вопрос наличия элементов в множестве может быть решен с помощью экстремальной задачи: максимизировать суммарную прибыль (5.11) при условиях (5.9), (5.10), (2.26), (2.28).

Для решения задачи Коши для сопряженных и фазовых переменных использовалась вычислительная схема, основанная на методе Рунге-Кутты второго порядка. Вычислительный эксперимент выполнялся с различным шагом интегрирования.

Поиск оптимального решения находился с помощью непосредственного применения принципа максимума Понтрягина для систем с интегродифференциальными связями. При всех вычислительных экспериментах инвестиционная функция имела схожую структуру:

$$I(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t < t^*, \\ 0, & t^* \leq t \leq T; \end{cases}$$

здесь t^* представляет момент переключения управления.

В таблице 5.2.6 представлены вычисленные значения общей прибыли, момент переключения управления в оптимальном случае при различных шагах интегрирования Δt .

Получение максимальной прибыли достигается за счет стратегии, при которой в начале периода планирования происходит максимально возможное инвестирование, а затем оно обнуляется. Эффект от первоначальных вложений длится достаточное время в рамках периода планирования.

Таблица 5.2.6: Оптимальное решение в задаче инвестирования

Δt	$\bar{P}(T)$, млн. рубл.	t^* , полугодие
0,01000	$1,26372 \cdot 10^6$	1,37000
0,00500	$1,26240 \cdot 10^6$	1,37100
0,00250	$1,26175 \cdot 10^6$	1,37130
0,00125	$1,26142 \cdot 10^6$	1,37125

5.3 Управление рекламными затратами

Проведем вычислительные эксперименты на основе модели одноканальной рекламы (2.36), (2.37), (2.35), (2.33), (2.34).

5.3.1 Предоставление услуг связи

Рассмотрим модель управления рекламными расходами в компании, занимающейся предоставлением услуг сотовой связи. Компании данного типа не относятся к производственным предприятиям, имеют относительно невысокую материальную базу, их основные затраты связаны с обеспечением взаимодействия с потребителем, с выплатами заработной платы. Производимая продукция имеет виртуальный характер, последнее позволяет полагать, что спрос на услуги компании совпадает с производством этих услуг.

Для оценки параметров модели (2.36), (2.37), (2.35), (2.33), (2.34) были взяты ежеквартальные статистические данные о рекламных затратах и продажах компании ОАО «Мегафон». Выборочные данные соответствовали рекламным затратам $u(t)$ и продажам $y(t)$ компании за период с 1-го квартала 2004 года по третий квартал 2013 года. Все показатели приведены в млн. рублей [185].

В [213] проведен статистический анализ выборочных значений по затратам на рекламу и объемам продаж. Так были проведены оценки статистической связи между $y(t)$ и $u(t - k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, а также $y(t)$ и $y(t - k)$ при $k = 1, 2, \dots$. В частности, были получены следующие значения выборочных ко-

эффициентов корреляции: $\text{corr}(y(t), u(t)) = 0,83$, $\text{corr}(y(t), u(t-1)) = 0,79$, $\text{corr}(y(t), u(t-2)) = 0,62$; $\text{corr}(y(t), y(t-1)) = 0,92$, $\text{corr}(y(t), y(t-2)) = 0,73$.

На основе анализа коэффициентов корреляции можно сделать вывод об ослаблении статистической связи между текущими продажами и предыдущими затратами на рекламу, текущими и предыдущими продажами с увеличением временного лага. Такой характер поведения коэффициентов связи подтверждает гипотезу, высказанную ранее при описании модели (2.36), (2.37), (2.35), (2.33), (2.34).

Была проведена проверка значимости полученных параметров связи. Согласно t -критерию Стьюдента с вероятностью ошибки в 3% была отвергнута гипотеза о том, что при нормальном распределении случайной величины, порождающей затраты на рекламу и объем продаж, связь выручки и рекламных затрат отсутствует. С вероятностью ошибки существенно меньше 1% можно утверждать о наличии связи между текущей выручкой и выручкой прошлых периодов. Таким образом, были определены лаги запаздывания, определяющие влияние ранее сделанных рекламных затрат и предыдущих объемов продаж: $\tau_{0u} = 0$, $\tau_{1u} = 2$, $\tau_{0y} = 1$, $\tau_{1y} = 2$.

Также статистические данные использовались для оценки функции продаж и функции рекламы до начала периода планирования. Была проведена линейная регрессия по временному фактору:

$$\hat{u}(t) = -0,09t + 2,06;$$

$$\hat{y}(t) = 1,472t + 68,45.$$

В [213] был рассмотрен вариант линейного представления функции выручки $f(v, w)$ в (2.35): $y = v + w$. Исходя из полученных значений коэффициентов корреляций, функции G_u , G_y в соотношениях (2.33), (2.34) представлялись в виде: $G_u(\tau) = g_u \exp(b_u \tau)$, $G_y(\tau) = g_y \exp(b_y \tau)$.

В этом случае соотношение (2.35) приняло вид:

$$y(t) = g_u \int_0^2 \exp(b_u \tau) u(t - \tau) d\tau + g_y \int_1^2 \exp(b_y \tau) y(t - \tau) d\tau.$$

Оценка параметров введенных функций проводилась методом наименьших квадратов с использованием функционала:

$$\varphi(g_u, b_u, g_y, b_y) = \sum_{t=1}^{\tilde{T}} \left(y(t) - g_u \sum_{\tau=0}^2 \exp(b_u \tau) u(t - \tau) - g_y \sum_{\tau=1}^2 \exp(b_y \tau) y(t - \tau) \right)^2.$$

Здесь $\{u(t), y(t)\}$ (при $1 \leq t \leq \tilde{T}$) – выборка, содержащая данные о ежемесячных затратах на рекламу и продажах; \tilde{T} – объем выборки.

Минимизация функционала $\varphi(g_u, b_u, g_y, b_y)$ с использованием ежеквартальных данных по рекламным затратам $u(t)$ и продажам $y(t)$ за период с 1 квартала 2004 года по третий квартал 2013 года позволила получить следующие оценки: $\hat{g}_u = 2,87$, $\hat{b}_u = -7,87$, $\hat{g}_y = 3,05$, $\hat{b}_y = -0,97$.

Дальнейший эксперимент предполагает поиск оптимальной программы рекламных затрат. Для данного эксперимента выберем в качестве горизонта планирования 1 год ($T = 4$ квартала), ограничение на интенсивность рекламных затрат $b = 2,4$ млн. руб. Выбор данных значений мотивирован тем, что обычно компании планируют свою деятельность, бюджеты на 1 год. Что же касается интенсивности b , то в выборочных данных максимальные затраты на один квартал составили чуть менее 2,4 млн. руб., b было положено максимальному значению.

Так как функция выручки имеет линейный характер, то поиск оптимального решения может быть сведен к непосредственному применению принципа максимума для задачи ОУ с интегро-дифференциальными связями. Согласно замечанию 2.28 к теореме 13, в этом случае система сопряженных переменных (3.27), (3.28) не зависит от фазовых переменных v, w и управления u . Таким

образом, решение $p^*(s)$ задачи Коши (3.27), (3.28) можно непосредственно найти с помощью соответствующей численной схемы. Это решение будет соответствовать оптимальному процессу $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$ исходной задачи оптимального управления. После подставления $p^*(s)$ в (3.26) нахождение оптимального управления сводится к решению задачи (3.29).

Дальнейший численный анализ проводился с различными шагами дискретизации, задача Коши решалась модифицированным методом Эйлера, интеграл в правой части интегро-дифференциального уравнения вычислялся методом трапеций.

Так как компания ОАО «Мегафон» является непроизводственной компанией, то издержки, определяемые увеличением объема услуг, представляют относительно небольшую величину. Это позволяет вместо целевого функционала $\Pi(T)$ в (2.36) рассматривать

$$\bar{\Pi}(T) = \int_0^4 (f(v(t), w(t)) - u(t)) dt.$$

Оптимальное решение во всех экспериментах имело схожую структуру управления

$$u(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t < t^*, \\ 0, & t^* \leq t \leq T; \end{cases}$$

здесь t^* – момент переключения управления.

В таблице 5.3.7 представлены параметры оптимального решения при различных шагах дискретизации Δt .

Результаты, представленные в таблице 5.3.7, позволяют сделать вывод, что при уменьшении шага интегрирования оптимальные решения сходятся к некоторой функции управления.

Для проверки устойчивости получаемого оптимального решения, была проведена вариация оценок параметров модели. Параметры g_u, b_u, g_y, b_y изменялись поочередно на 10% в обе стороны, после этого находилось оптимальное решение

Таблица 5.3.7: Оптимальное решение в задаче предоставления услуг связи (линейная функция дохода)

Δt	$\bar{\Pi}(T)$, млн. руб.	t^* , квартал
0,001000	640,119	3,57
0,000500	640,136	3,64
0,000250	640,142	3,70
0,000125	640,143	3,74

задачи. Результаты решений, полученных при шаге дискретизации 0,000125, приведены в таблице 5.3.8.

Таблица 5.3.8: Оптимальное решение в задаче предоставления услуг связи при вариации параметров (линейная функция дохода)

изменение параметра	t^* , квартал	$\bar{\Pi}(T)$, млн. руб.
–	3,742	640,143
$1,1\hat{g}_u$	3,742	640,410
$0,9\hat{g}_u$	3,742	639,876
$1,1\hat{g}_y$	3,738	640,184
$0,9\hat{g}_y$	3,745	639,870
$1,1\hat{b}_u$	3,748	700,438
$0,9\hat{b}_u$	3,736	586,203
$1,1\hat{b}_y$	3,740	761,984
$0,9\hat{b}_y$	3,743	571,539

Анализ результатов, представленных в в таблице 5.3.8, позволяет сделать вывод, что вариация параметров на 10% меняет момент переключения управления не более чем на 0,16%. Это показывает высокую устойчивость оптимального решения по отношению к параметрам модели. Если же рассмотреть влияние параметров на оценку прибыли, то здесь можно отметить параметры b_u , b_y . Так при увеличении b_u на 10% функционал увеличивается на 9,47%, а увеличение b_y на 10% влечет увеличение функционала на 29,99%. Аналогично, уменьшение b_u на 10% снижает функционал на 16,31%, а уменьшение b_y на 10% снижает функ-

ционал на 24,99%. Таким образом, можно сделать вывод, что оценка прибыли высоко чувствительна к вариации некоторых параметров.

5.3.2 Производство и продажа одежды

Для оценки параметров модели (2.36), (2.37), (2.35), (2.33), (2.34) были взяты ежемесячные статистические данные о рекламных затратах и продажах фирмы (фирма пожелала остаться неизвестной), занимающейся производством классической одежды. Выборочные данные соответствовали рекламным затратам $u(t)$ и продажам $y(t)$ фирмы за период с января 2009 года по июль 2014 года (t измеряется в месяцах).

На первом этапе были проведен статистический анализ данных, позволивший получить оценки для параметров τ_{0u} , τ_{1u} , τ_{0y} , τ_{1y} в соотношениях (2.33), (2.34). Так корреляционный анализ между показателями $y(t)$ и $u(t - \tau)$ выявил наибольшие значения коэффициентов корреляции Пирсона при $\tau = 0, 1, 2$, а между показателями $y(t)$ и $y(t - \tau)$ при $\tau = 1, 2, 3$. Гипотеза о равенстве коэффициентов корреляции нулю была отвергнута на основании критерия Стьюдента при уровне значимости менее 1%. Таким образом, были получены следующие оценки параметров: $\tau_{0u} = 0$, $\tau_{1u} = 2$, $\tau_{0y} = 1$, $\tau_{1y} = 3$ (значимый эффект от воздействия рекламы первые два месяца после её проведения; эффект от других факторов проявляется до трех месяцев).

Также на основе статистических данных были оценены функция рекламных затрат $\hat{u}(t)$ и функция продаж одежды $\hat{y}(t)$, которые позволяют вычислить соответствующие показатели до начала периода планирования (при $t \leq t_0$):

$$\hat{u}(t) = 767,88t^2 - 436,86t + 52137,23;$$

$$\hat{y}(t) = 3865969,7t^2 - 10396213,84t + 25563046,61.$$

Линейная функция выручки

В [225] был рассмотрен вариант линейного представления функции $f(v, w)$ в (2.35): $y = v + w$; функций G_u, G_y в соотношениях (2.33), (2.34): $G_u(\tau) = \exp(a_u\tau^2 + b_u\tau)$, $G_y(\tau) = \exp(a_y\tau^2 + b_y\tau)$.

В этом случае соотношение (2.35) может быть представлено в виде:

$$y(t) = \int_0^2 \exp(a_u\tau^2 + b_u\tau)u(t - \tau)d\tau + \int_1^3 \exp(a_y\tau^2 + b_y\tau)y(t - \tau)d\tau.$$

Оценка параметров введенных функций происходила методом наименьших квадратов с использованием функционала:

$$\varphi(a_u, b_u, a_y, b_y) = \sum_{t=1}^{\tilde{T}} \left(y(t) - \sum_{\tau=0}^2 \exp(a_u\tau^2 + b_u\tau)u(t - \tau) - \sum_{\tau=1}^3 \exp(a_y\tau^2 + b_y\tau)y(t - \tau) \right)^2.$$

Здесь $\{u(t), y(t)\}$ (при $1 \leq t \leq \tilde{T}$) – выборка, содержащая данные о ежемесячных затратах на рекламу и продажах; \tilde{T} – объем выборки.

Минимизация функционала $\varphi(a_u, b_u, a_y, b_y)$ с использованием ежемесячных данных фирмы по производству одежды о рекламных затратах $u(t)$ и продажах фирмы $y(t)$ за период с января 2009 года по июль 2014 года позволила получить следующие оценки: $\hat{a}_u = -0,39268$, $\hat{b}_u = 1,91388$, $\hat{a}_y = -0,10000$, $\hat{b}_y = 1,00128$.

Дальнейшее проведение эксперимента состояло в поиске оптимального распределения рекламного бюджета. В ограничении на интенсивность потока рекламы (2.37) величина $b(t)$ была рассмотрена как постоянная величина, равная максимальному ежемесячному значению расходов на рекламу за последний год, представленный в выборке. Таким образом, $b(t) = 54335$ руб. при всех $t \in [t_0; T]$ Так как планирование деятельности компаний обычно проводится на 1 год, то в качестве горизонта планирования выбрано 12 месяцев ($t_0 = 0, T = 12$).

Будем предполагать, что издержки $c(y(t), t)$ в (2.36) представляют относительно небольшую величину или являются постоянными. Это позволяет вместо

целевого функционала $\Pi(T)$ рассматривать

$$\bar{\Pi}(T) = \int_0^{12} (f(v(t), w(t)) - u(t)) dt.$$

Решение задачи оптимального управления находилось модифицированным методом локальных вариаций [225]. Эксперимент проводился при различных шагах интегрирования, в каждом случае структура оптимального управления имела одинаковый вид:

$$u(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t < t^*, \\ 0, & t^* \leq t \leq T; \end{cases}$$

здесь t^* – момент переключения управления.

В таблице 5.3.9 приведены значения оптимального решения при различных шагах интегрирования Δt .

Таблица 5.3.9: Оптимальное решение в задаче продажи одежды (линейная функция дохода)

Δt	$\bar{\Pi}(T)$, руб.	t^* , мес.
0,1000	$2,88826 \cdot 10^8$	11,92
0,0500	$2,11906 \cdot 10^8$	11,96
0,0250	$1,96675 \cdot 10^8$	11,96
0,0125	$1,92915 \cdot 10^8$	11,96

Из полученных значений можно сделать заключение: при уменьшении шага интегрирования численное решение сходится к некоторой кусочно-постоянной управляющей функции, при этом момент переключения управления практически не меняется.

Проведем вариацию параметров модели с целью определения устойчивости оптимального решения. Каждый параметр модели был изменен на 5% как в сторону повышения, так и в сторону понижения значения параметра при неизменности остальных значений параметров. Здесь Δt – шаг интегрирования.

Анализируя данные, приведенные в таблице 5.3.10, можно сделать вывод, что параметры оптимального управления практически не зависят от вариации

Таблица 5.3.10: Оптимальное решение в задаче продажи одежды при вариации параметров (линейная функция дохода)

изменение параметра	$\Delta t = 0, 1000$		$\Delta t = 0, 0500$		$\Delta t = 0, 0250$		$\Delta t = 0, 0125$	
	t^* , мес.	$\bar{\Pi}(T)$, руб.						
$1, 05\hat{a}_u$	11, 92	$2, 7575 \cdot 10^8$	11, 96	$2, 0131 \cdot 10^8$	11, 96	$1, 8661 \cdot 10^8$	11, 96	$1, 8298 \cdot 10^8$
$0, 95\hat{a}_u$	11, 92	$3, 0534 \cdot 10^8$	11, 96	$2, 2528 \cdot 10^8$	11, 96	$2, 0938 \cdot 10^8$	11, 96	$2, 0545 \cdot 10^8$
$1, 05\hat{a}_y$	11, 92	$6, 1276 \cdot 10^7$	11, 96	$5, 5005 \cdot 10^7$	11, 96	$5, 3503 \cdot 10^7$	11, 96	$5, 3101 \cdot 10^7$
$0, 95\hat{a}_y$	11, 92	$2, 4268 \cdot 10^{10}$	11, 96	$1, 3042 \cdot 10^{10}$	11, 96	$1, 1074 \cdot 10^{10}$	11, 96	$1, 0594 \cdot 10^{10}$
$1, 05\hat{b}_u$	11, 92	$3, 1680 \cdot 10^8$	11, 96	$2, 3456 \cdot 10^8$	11, 96	$2, 1820 \cdot 10^8$	11, 96	$2, 1415 \cdot 10^8$
$0, 95\hat{b}_u$	11, 92	$2, 6767 \cdot 10^8$	11, 96	$1, 9483 \cdot 10^8$	11, 96	$1, 8045 \cdot 10^8$	11, 96	$1, 7690 \cdot 10^8$
$1, 05\hat{b}_y$	11, 92	$1, 6908 \cdot 10^{11}$	11, 96	$8, 7380 \cdot 10^{10}$	11, 96	$7, 3515 \cdot 10^{10}$	11, 96	$7, 0181 \cdot 10^{10}$
$0, 95\hat{b}_y$	11, 92	$6, 4459 \cdot 10^7$	11, 96	$5, 7997 \cdot 10^7$	11, 96	$5, 6448 \cdot 10^7$	11, 96	$5, 6031 \cdot 10^7$

параметров модели. Это позволяет утверждать, что оптимальное управление достаточно устойчиво по отношению к ошибкам в оценке параметров модели. При этом влияние изменения параметров модели на оценку прибыли фирмы достаточно существенно, наиболее существенное влияние оказывает изменение параметров a_y , b_y . Также важен выбор шага интегрирования для более точной оценки прибыли.

Нелинейная функция выручки

В [224] рассмотрен вариант, когда выручка (2.35) представляется в нелинейном виде: $y = \alpha v^{\beta_1} w^{\beta_2}$.

Исходя из полученных значений коэффициентов корреляции, в соотношениях (2.33), (2.34) было сделано предположение о виде функций $G_u(\tau)$, $G_y(\tau)$: $G_u(\tau) = \exp(a_u \tau^2 + b_u \tau + c_u)$, $G_y(\tau) = \exp(b_y \tau + c_y)$. В этом случае

$$y(t) = \alpha \left(\int_{\tau_{0u}}^{\tau_{1u}} G_u(\tau) u(t - \tau) d\tau \right)^{\beta_1} \left(\int_{\tau_{0y}}^{\tau_{1y}} G_y(\tau) y(t - \tau) d\tau \right)^{\beta_2}$$

Принимая во внимание мультипликативный характер функции выручки,

можно агрегировать c_u, c_x в параметр α . Таким образом, для дальнейшего моделирования берется $G_u(\tau) = \exp(a_u\tau^2 + b_u\tau)$, $G_y(\tau) = \exp(b_y\tau)$.

Оценка параметров введенных функций происходила методом наименьших квадратов с использованием функционала:

$$\varphi(\alpha, \beta_1, \beta_2, a_u, b_u, b_y) = \sum_{t=1}^{\tilde{T}} \left(y(t) - \alpha \left(\sum_{\tau=0}^2 \exp(a_u\tau^2 + b_u\tau) u(t-\tau) \right)^{\beta_1} \left(\sum_{\tau=1}^3 \exp(b_y\tau) y(t-\tau) \right)^{\beta_2} \right)^2.$$

Здесь $\{u(t), y(t)\}$ (при $1 \leq t \leq \tilde{T}$) – выборка, содержащая данные о ежемесячных затратах на рекламу и продажах; \tilde{T} – объем выборки.

Минимизация функционала $\varphi(\alpha, \beta_1, \beta_2, a_u, b_u, b_y)$ с использованием ежемесячных данных фирмы по производству одежды о рекламных затратах $u(t)$ и продажах фирмы $y(t)$ за период с января 2009 года по июль 2014 года позволила получить следующие оценки: $\hat{\alpha} = 1,38$, $\hat{\beta}_1 = 0,16$, $\hat{\beta}_2 = 0,93$, $\hat{a}_u = -0,35$, $\hat{b}_u = 0,97$, $\hat{b}_y = -1,37$.

Для дальнейшего эксперимента был выбран горизонт планирования 12 месяцев ($t_0 = 0$, $T = 12$). Оценка интенсивности рекламных затрат (2.37) была выбрана постоянной величиной $b(t) = \hat{b}$, $t \in [t_0; T]$. Совокупные затраты на рекламу за последний год, представленный в выборке, составили 578174,13 руб. Исходя из анализа динамики рекламных затрат, было сделано предположение, что темп роста рекламного бюджета наближаший год составит 150%. Это позволило построить оценку ежемесячной интенсивности потока рекламы $\hat{b} = 72525$ руб.

Оптимизация функционала $\bar{\Pi}(T)$ при ограничениях (2.37), (2.35), (2.33), (2.34) решалась модифицированным методом локальных вариаций [224] при различных шагах интегрирования интегро-дифференциальных задач, входящих в постановку. Структура полученного оптимального управления имела ре-

лейный характер:

$$u(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t < t^*, \\ 0, & t^* \leq t \leq T; \end{cases}$$

здесь t^* – момент переключения управления.

В первой строке таблицы 5.3.11 приведены параметры оптимального управления для поставленной оптимизационной задачи при различных шагах интегрирования Δt .

Таблица 5.3.11: Оптимальное решение в задаче продажи одежды при вариации параметров (нелинейная функция дохода)

изменение параметра	$\Delta t = 0,020$		$\Delta t = 0,010$		$\Delta t = 0,005$	
	t^* , мес.	$\bar{\Pi}(T)$, руб.	t^* , мес.	$\bar{\Pi}(T)$, руб.	t^* , мес.	$\bar{\Pi}(T)$, руб.
–	11,90	$1,82477 \cdot 10^9$	11,90	$1,82566 \cdot 10^9$	11,90	$1,82619 \cdot 10^9$
$1,03\hat{\alpha}$	11,90	$1,95370 \cdot 10^9$	11,90	$1,95465 \cdot 10^9$	11,90	$1,95521 \cdot 10^9$
$0,97\hat{\alpha}$	11,89	$1,70346 \cdot 10^9$	11,89	$1,70429 \cdot 10^9$	11,89	$1,70478 \cdot 10^9$
$1,03\hat{\beta}_1$	11,94	$2,35239 \cdot 10^9$	11,94	$2,35353 \cdot 10^9$	11,94	$2,35421 \cdot 10^9$
$0,97\hat{\beta}_1$	11,84	$1,43107 \cdot 10^9$	11,84	$1,43177 \cdot 10^9$	11,84	$1,43217 \cdot 10^9$
$1,03\hat{\beta}_2$	12,00	$7,04069 \cdot 10^9$	12,00	$7,04241 \cdot 10^9$	12,00	$7,04374 \cdot 10^9$
$0,97\hat{\beta}_2$	11,30	$7,67903 \cdot 10^8$	11,30	$7,68209 \cdot 10^8$	11,30	$7,68385 \cdot 10^8$
$1,03\hat{a}_u$	11,90	$1,82103 \cdot 10^9$	11,90	$1,82191 \cdot 10^9$	11,90	$1,82243 \cdot 10^9$
$0,97\hat{a}_u$	11,90	$1,82858 \cdot 10^9$	11,90	$1,82947 \cdot 10^9$	11,90	$1,83000 \cdot 10^9$
$1,03\hat{b}_u$	11,90	$1,83257 \cdot 10^9$	11,90	$1,83346 \cdot 10^9$	11,90	$1,83399 \cdot 10^9$
$0,97\hat{b}_u$	11,90	$1,81714 \cdot 10^9$	11,90	$1,81803 \cdot 10^9$	11,90	$1,81855 \cdot 10^9$
$1,03\hat{b}_y$	11,86	$1,60661 \cdot 10^9$	11,86	$1,60740 \cdot 10^9$	11,86	$1,60787 \cdot 10^9$
$0,97\hat{b}_y$	11,94	$2,08622 \cdot 10^9$	11,94	$2,08722 \cdot 10^9$	11,94	$2,08781 \cdot 10^9$

Для проверки устойчивости оптимального управления проводилась вариация параметров модели: параметры варьировались на 3% влево и вправо от имеющихся оценок этих параметров; при измененных параметрах находилось оптимальное решение. Результаты экспериментов с измененными параметрами приведены в таблице 5.3.11.

Исходя их анализа результатов, приведенных в таблице 5.3.11, можно сде-

лать вывод, что вариация оценок параметров функции G_u , а также параметра α не приводит к существенному изменению оптимального управления. Также оптимальное управление является достаточно устойчивым относительно выбора шага интегрирования. В свою очередь, оптимальное управление является чувствительным при изменении эластичности спроса по накопленным рекламным воздействиям и воздействиям предыдущих продаж (β_1, β_2) , также на оптимальное управление существенно влияет изменение параметра b_y .

В рамках данной модели был проведен сравнительный анализ численных методов решения задач ОУ: метода параметризации (МП) и модифицированного метода локальных вариаций (ММЛВ). Предположим, что горизонт планирования составляет $T = 1$ месяц.

В таблице 5.3.12¹ представлены результаты решения задачи (2.36), (2.37), (2.35), (2.33), (2.34) при различных шагах дискретизации Δt .

Таблица 5.3.12: Результаты решения методами ММЛВ и МП

Δt	t^* , мес.		$\bar{P}(T)$, руб.		время вычисления, сек.	
	МП	ММЛВ	МП	ММЛВ	МП	ММЛВ
0,010000	0,98842	0,98000	$3,20378 \cdot 10^7$	$2,81215 \cdot 10^7$	36	6
0,005000	0,98842	0,98500	$3,01256 \cdot 10^7$	$2,86469 \cdot 10^7$	74	13
0,002500	0,98842	0,98750	$2,94799 \cdot 10^7$	$2,89185 \cdot 10^7$	263	78
0,001250	0,98842	0,98000	$2,92896 \cdot 10^7$	$2,90565 \cdot 10^7$	992	530
0,000625	0,98842	0,988125	$2,92387 \cdot 10^7$	$2,91261 \cdot 10^7$	3710	4555

При решении задачи методом параметризации предполагалось, что управление является кусочно-постоянным с одним моментом переключения, задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 2-го порядка, получаемая при этом задача нелинейного программирования решалась методом наискорейшего спуска.

Анализируя данные, представленные в таблице 5.3.12, можно сделать вывод, что при более грубой аппроксимации (большом шаге интегрирования) метод

¹Ямалтдинова Н. Р. Моделирование рекламных расходов с учетом эффекта распределенного запаздывания: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. –Ульяновский государственный университет, Ульяновск, 2019 – 108 с.

ММЛВ сходится быстрее метода МП к оптимальному управлению. Однако по мере увеличения точности расчетов (уменьшении шага интегрирования) метод параметризации сходится быстрее метода ММЛВ. Это объясняется тем, что задача нелинейного программирования, порождаемая двумя этими методами имеет отличия. В методе параметризации задача НП не зависит от шага интегрирования (зависит только от параметризации управления), в отличие от ММЛВ. Однако в МП требуется решать большее число задач Коши, по сравнению с ММЛВ. Кроме того, метод решения задачи НП, порожденной ММЛВ, является по сути методом нулевого порядка. В свою очередь МП может использовать методы НП более высоких порядков.

Также из результатов таблицы 5.3.12 можно сделать вывод, что оптимальный момент переключения управления в методе МП находится достаточно точно даже при грубом шаге интегрирования, так как нет прямой зависимости данного параметра управления от шага интегрирования. В методе ММЛВ точность вычисления момента переключения не может быть выше шага дискретизации.

Следующий вычислительный эксперимент в данной модели был проведен методом параметризации в предположении, что управление имеет кусочно-постоянный вид с одним моментом переключения. Результаты эксперимента представлены в таблице 5.3.13.

Таблица 5.3.13: Результаты, полученные МП для кусочно-постоянного управления

Δt	t^* , мес.	$\bar{P}(T)$, руб.	время вычисления, сек.
0,010000	0,98837	$3,19626 \cdot 10^7$	141
0,005000	0,98839	$3,00762 \cdot 10^7$	520
0,002500	0,98831	$2,94398 \cdot 10^7$	1902
0,001250	0,98823	$2,92524 \cdot 10^7$	8618
0,000625	0,98822	$2,92022 \cdot 10^7$	27771

Задачи НП, порожденные параметризацией управления, в данном случае решались в два этапа: на первом методом Ньютона, на втором уточнялись ме-

тодом скорейшего спуска.

Анализируя данные таблицы 5.3.13 и сравнивая с результатами, приведенными в таблице 5.3.12, можно отметить, что при усложнении параметризации увеличивается время нахождения оптимального управления. При этом, скорость роста вычислений при уменьшении шага интегрирования не увеличивается. Последнее позволяет высказать предположение, что при увеличении точности вычислений существует некоторое значение шага интегрирования, при котором МП будет находить решение быстрее ММЛВ.

5.4 Управление экономической системой в условиях массового заболевания

5.4.1 Оценка параметров модели

Для практического использования модели (2.45)-(2.60) следует вычислить её параметры, основываясь на статистических или нормативных данных о социальном и экономическом положении в определённом регионе, а также на информации об особенностях распространения и течения рассматриваемого массового заболевания. Методика расчета и сами вычисления представлены в [242].

В качестве примеров применения модели рассмотрим экономику РФ и экономику Ульяновской области в период эпидемии COVID-19 в 2020 году. Все параметры модели (2.45)-(2.60) оценивались либо в виде константы, либо в виде функциональной зависимости от управляющих или эндогенных переменных модели. Для оценки использовались данные, полученных из открытых источников в сети Интернет. При таком оценивании неизбежны затруднения, обусловленные отсутствием в открытом доступе достоверных данных по ряду показателей [69, 150]. Например, в открытом доступе отсутствовали статистические данные о частоте случаев повторной заболеваемости в РФ, а её экспертные оценки являлись условными. В силу этого при расчётах использовались акту-

альные оценки повторной заболеваемости Covid-19 в других странах. Кроме того, вычисление некоторых параметров (а именно – интенсивности смертности негоспитализированных лиц k_{ID}) было затруднено в силу отсутствия статистических данных, обусловленного объективной трудностью их получения, и отсутствия экспертных оценок. Это привело к необходимости делать упрощающие предположения относительно модели.

С учётом изложенного выше были оценены параметры модели для РФ и для Ульяновской области. При оценке предполагалось, что временной квант равен одному месяцу.

Коэффициент a для РФ был оценён на основе данных компании "Яндекс" о динамике индекса самоизоляции [189]. Индекс самоизоляции принимает значения от 0 до 5; при значении индекса, равном 5, 100% людей соблюдают самоизоляцию, а при отсутствии самоизоляции индекс равен 0. Значение индекса в РФ 27.03.2020 (будний день, предшествовавший введению ограничительных мер 30.03.2020²) составляло 1,53, а 30.03.2020 оно возросло до 2,97. Это позволяет вычислить добавленную долю a населения, которая стала следовать ограничительным мерам:

$$a^{RF} = \frac{2,97 - 1,53}{5 - 1,53} = 0,415.$$

Аналогичным образом можно оценить коэффициент a для Ульяновской области, используя соответствующую выборку из данных о динамике индекса самоизоляции. Значение индекса самоизоляции 27.03.2020 составляло 1,40, а 30.03.2020 оно стало равным 2,90.

$$a^{UR} = \frac{2,90 - 1,40}{5 - 1,40} = 0,416.$$

²Нерабочие дни с 30 марта по 30 апреля и с 6 по 8 мая 2020 года в вопросах и ответах // Информационно-правовой портал "Гарант.ру". [Электронный ресурс]. URL: <https://base.garant.ru/77398903/> (дата обращения: 29.11.2021).

Для вычисления коэффициента b для России также использовались данные о динамике индекса самоизоляции в РФ [189]. Значение индекса 11.05.2020 (когда было объявлено о завершении периода нерабочих дней) равнялось 2,84, а 12.05.2020 оно снизилось до 2,07. Таким образом, доля населения, переставшая соблюдать ограничительные меры:

$$b^{RF} = \left| \frac{2,07 - 2,84}{2,84} \right| = 0,271.$$

Применяя данную методологию и используя соответствующие данные, можно оценить коэффициент b для Ульяновской области. Значение индекса самоизоляции 11.05.2020 составило 2,65, а 12.05.2020 - 1,65. Следовательно,

$$b^{UR} = \left| \frac{1,65 - 2,65}{2,65} \right| = 0,377.$$

Параметр k_{PS} для РФ также был оценён с помощью данных о динамике индекса самоизоляции в России. Значение параметра рассчитывалось как противоположное значение к тангенсу угла наклона прямой, аппроксимирующей график индекса самоизоляции в отсутствие ограничительных мер с 12.05.2020 по 11.06.2020. Значение индекса 12.05.2020, после отмены локдауна, равнялось 2,07, а 11.06.2020 оно составило 1,43. Таким образом:

$$k_{PS}^{RF} = -(1,43 - 2,07) = 0,64.$$

Аналогично вычислим значение параметра k_{PS} для Ульяновской области, используя соответствующие значения индекса самоизоляции в те же даты:

$$k_{PS}^{UR} = -(1,15 - 1,65) = 0,5.$$

Интенсивность k_{SP} оценивалась в виде функции $k_{SP} = c_1 + c_2 u_3$, где c_1, c_2 – константы, требующие определения.

Постоянная часть величины k_{SP} для РФ была вычислена на основе данных о динамике индекса самоизоляции. Для этого были рассмотрены данные за начало 2020 года, когда не проводилась информационная кампания против коронавируса. Отслеживание динамики индекса было начато «Яндексом» 24.02.2020. Датой начала информационной кампании предполагается 16.03.2020, когда был запущен сайт «Стопкоронавирус.рф»³. В промежутке между этими датами значение индекса самоизоляции оставалось примерно неизменным, что позволяет составить следующее уравнение баланса:

$$k_{SP}S = k_{PS}P.$$

Поскольку колебания индекса были незначительны, будем считать его значение постоянным и равным средней его величине за указанный период. Она составляет 1,068. Тогда из уравнения баланса, принимая во внимание диапазон значений индекса, получим следующее соотношение:

$$\frac{k_{SP}}{k_{PS}} = \frac{1,068}{5 - 1,068} = 0,272$$

Постоянная часть параметра k_{SP}^{RF} :

$$c_1^{RF} = 0,272k_{PS}^{RF} = 0,174.$$

Значение постоянной части параметра k_{SP} для Ульяновской области было вычислено аналогично. Использовалось среднее значение индекса самоизоляции в области за указанный выше период, равное 0,981. Таким образом,

$$c_1^{UR} = 0,244k_{PS}^{UR} = 0,122.$$

³Правительство запустит сайт стопкоронавирус.рф // Российская газета. [Электронный ресурс]. URL: <https://rg.ru/2020/03/16/pravitelstvo-zapustit-sajt-stopkoronavirusrf.html> (дата обращения: 29.11.2021).

Переменная часть параметра k_{SP} для РФ была оценена с использованием данных о затратах на организацию и проведение информационной кампании против COVID-19 в России [200] и данных о динамике индекса самоизоляции в РФ [189]. Значение индекса 16.03.2020 составило 1,19, а 30.12.2020 – 1,63. Изменение доли населения, начавшей соблюдать ограничительные меры в этот период, выражается через значения индекса как $\frac{1,63 - 1,19}{5}$. Предположим, что это изменение обусловлено только информационным воздействием. Следовательно, можно вычислить переменную часть величины k_{SP} , разделив полученную величину изменения на стоимость информационной кампании и на длительность её проведения. Преобразовав выражение, имеем:

$$c_2^{RF} = \frac{1,63 - 1,19}{5 \cdot 9,5 \cdot 502 \cdot 10^6} = 1,845 \cdot 10^{-11}.$$

Таким образом, интенсивность k_{SP} была оценена как функция, имеющая вид:

$$k_{SP}^{RF} = 0,174 + 1,845 \cdot 10^{-11} \cdot u_3.$$

Для Ульяновской области, произведя аналогичные вычисления и полагая, что в области проводилась только федеральная информационная кампания и у руководства области не было необходимости осуществлять вложения в организацию локальной информационной кампании, имеем:

$$c_2^{UR} = \frac{1,60 - 1,10}{5 \cdot 9,5 \cdot 502 \cdot 10^6} = 2,097 \cdot 10^{-11}.$$

Следовательно,

$$k_{SP}^{UR} = 0,122 + 2,097 \cdot 10^{-11} \cdot u_3.$$

Выздоровевшие после перенесённого заболевания COVID-19 могут в течение года заболеть повторно, т.к. иммунитет к новому коронавирусу, по данным

“Nature”, сохраняется от 6 до 12 месяцев [167]. Параметр k_{RS} был оценен как среднее значение отношения числа случаев повторной заболеваемости в некоторых странах, экспертную оценку которого приводит “Science” [177], к общему числу выздоровлений от коронавирусной инфекции в этих странах [202]:

$$k_{RS} = 0,0002.$$

Предполагается, что полученное значение актуально также для РФ и Ульяновской области.

Значение параметра k для Российской Федерации было вычислено как отношение количества переоснащённых и модернизированных койко-мест к объёму затрат на их переоборудование⁴:

$$k^{RF} = \frac{279 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^9} = 3,415 \cdot 10^{-6}.$$

Для Ульяновской области данный параметр был рассчитан аналогично, использовались соответствующие данные по региону⁵

$$k^{UR} = 2053 / (755 \cdot 10^6) = 2,719 \cdot 10^{-6}.$$

Параметр k_{ID} как для РФ, так и для Ульяновской области предполагается равным нулю: $k_{ID} = 0$. Коэффициент m для России был оценен на основе данных за 2011-2019 гг. как среднее значение отношения среднегодовой численности занятых [197], [198], [199] к общей численности населения [201]:

$$m^{RF} = 0,482.$$

⁴Об итогах работы Министерства здравоохранения Российской Федерации в 2020 году и задачах на 2021 год // Министерство здравоохранения Российской Федерации. [Электронный ресурс]. URL: https://static-0.minzdrav.gov.ru/system/attachments/attaches/000/055/642/original/MZRF_2021_All_08-04-2021-Preview.pdf?1619014721 (дата обращения: 29.11.2021).

⁵Более 1,7 млрд рублей было выделено на здравоохранение из резервного фонда Ульяновской области в 2020 году // Губернатор и Правительство Ульяновской области. Официальный сайт. [Электронный ресурс]. URL: <https://ulgov.ru/news/index/permlink/id/58829/> (дата обращения: 29.11.2021).

Для Ульяновской области данный коэффициент был рассчитан аналогично по данным за 2011-2019 гг. [195]:

$$m^{UR} = 0,467.$$

Значение коэффициента e_1 было определено на основе экспертной оценки [204]:

$$e_1 = 0,879.$$

Коэффициент e_2 предполагается равным 1 в силу того, что эффективность труда здорового человека, работающего очно, принимается за 100%.

Значение коэффициента e_3 было определено на основе экспертной оценки [187] :

$$e_3 = 0,43.$$

Коэффициент e_4 на основании содержания модели принимается равным e_2 в соответствии с предположением, что эффективность труда выздоровевшего человека, вернувшегося к очной работе, эквивалентна эффективности труда здорового человека.

Значения коэффициентов e_i , $i = \overline{1,4}$, предполагаются совпадающими для России и Ульяновской области.

Значение параметра ρ для РФ было оценено по данным за 2016-2019 гг. как среднее значение отношения естественного прироста населения [196] к общей численности населения [201]:

$$\rho^{RF} = -9,516 \cdot 10^{-5}.$$

Для Ульяновской области данный параметр был оценен аналогично, как среднее значение отношения естественного прироста населения [192] к численности населения на конец года [195], по данным за 2017-2019 гг.:

$$\rho^{UR} = -3,636 \cdot 10^{-3}.$$

Значение параметра μ для России было оценено по данным статистического ежегодника «Здравоохранение в России» [186] как среднее значение коэффициента выбытия основных фондов сферы здравоохранения в 2016-2018 годах:

$$\mu^{RF} = 8,33 \cdot 10^{-3}.$$

Для Ульяновской области значение коэффициента μ^{UR} предполагается равным μ^{RF} , поскольку в открытом доступе отсутствовали требуемые для его вычисления данные.

Функция $g(u_2)$ для России была задана как отношение объёма инвестиций в возведение новых больниц к частному стоимости сооружения одной больницы и количества койко-мест в ней⁶:

$$g^{RF}(u_2) = \frac{u_2}{7237788}.$$

В Ульяновской области в 2020 году не потребовалось возводить специальные стационары, поскольку размещение госпитализированных с новой коронавирусной инфекцией было организовано за счёт переоборудования существующих койко-мест в больницах. Следовательно,

$$g^{UR}(u_2) \equiv 0.$$

Относительно функции $F(K(t), L(t))$ было сделано предположение о том, что она относится к классу производственных функций Кобба-Дугласа. Данная функция для РФ была оценена с использованием годовой статистики за 2011-2019 гг. о стоимости основных фондов предприятий [191], о среднегодовой численности занятых [197], [198], [199] и величине ВВП [182]. Оценивание производилось с помощью построения линейной многофакторной регрессионной модели на основе логарифмированных рядов исходных данных. Пусть в

⁶Распоряжение Правительства Российской Федерации от 06.08.2020 № 2041-р // Официальный интернет-портал правовой информации. [Электронный ресурс]. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202008110020> (дата обращения: 29.11.2021).

течение года структура зависимости выпуска F от факторов K, L не меняется. Тогда выпуск за месяц можно оценить как:

$$F^{RF}(K, L) = \frac{8,96 \cdot 10^{-4} \cdot K^{0,4387} \cdot L^{1,3667}}{12} = 7,47 \cdot 10^{-5} \cdot K^{0,4387} \cdot L^{1,3667}.$$

(коэффициент детерминации 0,914, уровень значимости 0,0006).

Зависимость стоимости основных фондов от времени предполагается экспоненциальной:

$$K^{RF}(t) = 3,4973 \cdot 10^{14} \cdot e^{0,0102t}$$

(коэффициент детерминации 0,9035).

Обобщая две функции, с учётом формулы (2.54) можно записать:

$$F^{RF}(K(t), L(t)) = 7,47 \cdot 10^{-5} \cdot K(t)^{0,4387} \cdot L(t)^{1,3667}.$$

Для Ульяновской области с использованием соответствующих данных за 2011-2019 гг. о стоимости основных фондов предприятий, о среднегодовой численности занятых [195] и величине ВРП [184] были получены оценки функций:

$$F^{UR}(K, L) = \frac{338,739 \cdot K^{0,3815} \cdot L^{0,5728}}{12} = 28,228 \cdot K^{0,3815} \cdot L^{0,5728}$$

(коэффициент детерминации 0,911, уровень значимости 0,0007),

$$K^{UR}(t) = 1,256128 \cdot 10^{12} \cdot e^{0,01178t}$$

(коэффициент детерминации 0,949).

С учётом (2.54) имеем:

$$F^{UR}(K(t), L(t)) = 28,228 \cdot K(t)^{0,3815} \cdot L(t)^{0,5728}.$$

Параметры $k_{SE}, k_{EI}, k_{IQ}, k_{IR}, k_{QD}, k_{QR}$ оценивались методом параметризации, примененном к задаче ОУ, основанной на минимизации:

$$\varphi(k_{SE}, k_{EI}, k_{IQ}, k_{IR}, k_{QD}, k_{QR}) = \left(\frac{\int_{t_0}^T R(t)dt - R^*}{R^*} \right)^2 + \left(\frac{\int_{t_0}^T I(t)dt - I^*}{I^*} \right)^2 + \left(\frac{\int_{t_0}^T Q(t)dt - Q^*}{Q^*} \right)^2 + \left(\frac{D(T) - D^*}{D^*} \right)^2.$$

при условиях (2.45)-(2.52). Здесь R^* – кумулятивное количество выздоровевших за период $[t_0; T]$, I^* – кумулятивное количество заболевших за период $[t_0; T]$, Q^* – кумулятивное количество госпитализированных за период $[t_0; T]$, D^* – кумулятивное количество умерших от Covid-19 за период $[t_0; T]$.

Подбор параметров проводился с учетом известных значений показателей численности заболевших коронавирусной инфекцией в РФ на 31.12.2020 [189], госпитализированных с Covid-19 в России в 2020 году [193], выздоровевших [189], умерших [189], полученные из официальной статистики о коронавирусной инфекции Covid-19, а также с использованием информации о численности постоянного населения РФ на 01.01.2020 [200].

Так кумулятивные показатели для РФ составили: $R^* = 2554340$, $I^* = 3159297$, $Q^* = 2124379$, $D^* = 57019$. Аналогичные значения для Ульяновской области: $R^* = 33336$, $I^* = 36313$, $Q^* = 12797$, $D^* = 474$.

Для определения параметров k_{SE} , k_{EI} , k_{IQ} , k_{IR} , k_{QD} , k_{QR} в дифференциальные уравнения (2.45)-(2.52) вместо управления $u(t)$ подставлялась функция $\tilde{u}(t)$, реализующая известное управление во время пандемии COVID-19.

В РФ во время пандемии COVID-19 в 2020 году было реализовано следующее управленческое решение. Через 2 недели после того, как уровень заболеваемости принял критическое значение, было объявлено о введении ограничительных мер; спустя 2 месяца они были сняты. Были выделены средства на переоборудование существующих койко-мест для размещения заболевших новой коронавирусной инфекцией, на увеличение числа койко-мест за счёт строительства новых больниц, на информационную кампанию по борьбе с заболеванием. Для РФ это соответствует следующим значениям переменных⁷⁸: $\tau_1 = 0,5$ мес.,

⁷⁸Об итогах работы Министерства здравоохранения Российской Федерации в 2020 году и задачах на 2021 год // Министерство здравоохранения Российской Федерации. [Электронный ресурс]. URL: https://static-0.minzdrav.gov.ru/system/attachments/attaches/000/055/642/original/MZRF_2021_All_08-04-2021-Preview.pdf?1619014721 (дата обращения: 29.11.2021).

⁸Распоряжение Правительства Российской Федерации от 06.08.2020 № 2041-р // Официальный интернет-портал правовой информации. [Электронный ресурс]. URL:

$\tau_2 = 2,5$ мес., $T = 9,5$ мес., $B_1 = 81,7$ млрд. руб., $B_2 = 28,951$ млрд. руб., $B_3 = 0,502$ млрд. руб.

В Ульяновской области в период пандемии COVID-19 управленческая стратегия во многом определялась решениями, принимаемыми на федеральном уровне. Поэтому моменты введения и отмены ограничительных мер в данном регионе совпадают с указанными для РФ. Кроме того, федеральная информационная кампания против коронавируса проводилась в том числе и в Ульяновской области. Это позволяет предполагать, что у руководства области не было необходимости осуществлять вложения в организацию локальной информационной кампании. Также в области в 2020 году не потребовалось возводить специальные стационары, поскольку размещение госпитализированных с новой коронавирусной инфекцией было организовано за счёт переоборудования существующих койко-мест в больницах. Вышесказанное соответствует следующим значениям переменных модели (2.45)-(2.60): $\tau_1 = 0,5$ мес., $\tau_2 = 2,5$ мес., $T = 9,5$ мес., $B_1 = 0,755$ млрд. руб., $B_2 = 0$, $B_3 = 0,502$ млрд. руб.

Далее были сделаны предположения, что управляющие воздействия были постоянны на всем периоде планирования, это соответствует управлению $u_i = B_i/(T - t_0)$, $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, как для РФ, так и для Ульяновской области были определены управляющие воздействия $\tilde{u}(t)$. В итоге были получены следующие оценки интенсивностей.

Величина k_{SE} для России была оценена как функция, имеющая вид $k_{SE} = c_3 I$ [103]:

$$k_{SE}^{RF} = 1,096 \cdot 10^{-7} \cdot I.$$

Для Ульяновской области величина k_{SE} была оценена аналогично:

$$k_{SE}^{UR} = 7,944172 \cdot 10^{-6} \cdot I.$$

Значение параметра k_{EI} для России:

$$k_{EI}^{RF} = 2,222153.$$

Для Ульяновской области было получено значение параметра k_{EI} в соответствии с показателями региона:

$$k_{EI}^{UR} = 2,126901.$$

Параметр k_{IQ} для РФ:

$$k_{IQ}^{RF} = 5,220368.$$

Для Ульяновской области было получено значение:

$$k_{IQ}^{UR} = 1,698258.$$

Параметр k_{QD} для России:

$$k_{QD}^{RF} = 0,2573602.$$

Для Ульяновской области значение параметра k_{QD} :

$$k_{QD}^{UR} = 0,4418016.$$

Параметры k_{IR} и k_{QR} для РФ:

$$k_{IR}^{RF} = 1,887451, \quad k_{QR}^{RF} = 7,990511.$$

Параметры k_{IR} и k_{QR} для Ульяновской области:

$$k_{IR}^{UR} = 2,534197, \quad k_{QR}^{UR} = 10,57628.$$

Приведенные в данном разделе оценки параметров и некоторых функциональных зависимостей модели (2.45)-(2.60) позволяют перейти к следующему этапу моделирования: оценка существующих управленческих решений и нахождение оптимальных решений.

5.4.2 Оценка управленческих решений

Оценить эффективность управленческой стратегии можно с помощью анализа значений определённых целевых показателей. Для региона как экономической системы таким целевым показателем зачастую является величина валового выпуска. В условиях массового заболевания руководству региона необходимо также контролировать численность заболевших: желательно, чтобы она была как можно меньше. Таким образом, в случае эпидемии, значения двух указанных целевых показателей могут использоваться для оценивания эффективности стратегии управления. При этом очевидно, что значения таких показателей находятся не только в зависимости от управленческих воздействий, но и от факторов внешней среды (особенности массового заболевания, социально-демографическая ситуация в регионе, состояние экономики и т.д.).

Поскольку модель (2.45)-(2.60) позволяет вычислять значения вышеназванных целевых показателей, а также учитывает требуемые внешние факторы, при её помощи можно оценить эффективность выбранной управленческой стратегии, используя методологию имитационного моделирования [94].

На основе модели (2.45)-(2.60) и оценок её параметров в [242] был проведен вычислительный эксперимент, направленный на исследование значений целевых показателей (количества заболевших и величины валового выпуска) при изменении значений параметров модели, которые учитывают условия внешней среды, социально-экономические факторы, особенности управленческих решений.

В РФ во время пандемии COVID-19 в 2020 году было реализовано управленческое решение, соответствующее следующим значениям параметров модели (2.45)-(2.60): $\tau_1 = 0,5$ мес., $\tau_2 = 2,5$ мес., $T = 9,5$ мес., $B_1 = 81,7$ млрд. руб., $B_2 = 28,951$ млрд. руб., $B_3 = 0,502$ млрд. руб.

В период пандемии COVID-19 в Ульяновской области управленческая стратегия соответствовала значениям параметров модели (2.45)-(2.60): $\tau_1 = 0,5$ мес.,

$\tau_2 = 2,5$ мес., $T = 9,5$ мес., $B_1 = 0,755$ млрд. руб., $B_2 = 0$, $B_3 = 0,502$ млрд. руб.

В рамках вычислительного эксперимента для данных стратегий управления были рассчитаны значения целевых показателей, которые считались базовыми при дальнейших сравнениях: для РФ суммарная численность заболевших к моменту времени T – 3378455 чел., валовый выпуск – 80509,32 млрд. руб.; для Ульяновской области суммарная численность заболевших 37073 чел., валовый выпуск 21,98 млрд. руб.

Исследование изменчивости значений целевых показателей при заданной стратегии в зависимости от изменения внешних условий осуществлялось при помощи варьирования параметров модели на $\pm 1\%$. Исключение составили параметры s_1, s_2, s_3, s_4 , которые находятся в прямой линейной связи с параметрами e_1, e_2, e_3, e_4 .

Значения целевых показателей, наблюдаемые при изменениях значений параметров, сравнивались с их базовыми значениями; рассчитывалось относительное изменение значений (см. таблицы 5.4.14, 5.4.15, 5.4.16). В таблицы 5.4.14, 5.4.15, 5.4.16 не включено варьирование параметров, влияние которых отсутствует либо несущественно.

Таблица 5.4.14: Изменение значений целевых показателей при варьировании значений параметров (сверхкритические)

Вариация параметра	Количество заболевших в РФ (в Ульяновской области)	Валовый выпуск РФ (Ульяновской области)
$0,99k_{SE}$	-17,73949% (-14,75185%)	0,03278% (0,01556%)
$1,01k_{SE}$	21,31859% (17,09955%)	-0,03933% (-0,01804%)
$0,99k_{IQ}$	12,19974% 5,42178%)	-0,02256% (-0,00572%)
$1,01k_{IQ}$	-10,84887% (-5,13967%)	0,02007% (0,00542%)

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

Таблица 5.4.15: Изменение значений целевых показателей при варьировании значений параметров (критические)

Вариация параметра	Количество заболевших в РФ (в Ульяновской области)	Валовый выпуск РФ (Ульяновской области)
0,99 k_{IR}	4,89544% (7,51416%)	-0,00929% (-0,00822%)
1,01 k_{IR}	-4,66246% (-6,98297%)	0,00884% (0,00762%)
0,99 k_{EI}	-7,50406% (-5,17955%)	0,01302% (0,00498%)
1,01 k_{EI}	8,04136% (5,40941%)	-0,01388% (-0,00518%)
0,99 k_{PS}	-3,74694% (-2,57191%)	-0,01866% (-0,00568%)
1,01 k_{PS}	3,83571% (2,60454%)	0,01817% (0,00555%)
0,99 m	0,00000% (0,00000%)	-1,36422% (-0,57403%)
1,01 m	0,00000% (0,00000%)	1,36923% (0,57158%)
0,99 a	1,38503% (1,36927%)	0,00523% (0,00180%)
1,01 a	-1,36852% (-1,35370%)	-0,00526% (-0,00181%)
0,99 e_2	0,00000% (0,00000%)	-1,08193% (-0,46087%)
1,01 e_2	0,00000% (0,00000%)	1,08510% (0,45928%)

- параметры (факторы) по силе их влияния на целевые показатели можно разделить на 3 группы: «сверхкритические» (изменение хотя бы одного целевого показателя более 10%) 5.4.14, «критические» (изменение хотя бы одного целевого показателя для одного из регионов от 1% до 10%) 5.4.15, «слабокритические» (изменение всех целевых показателей для обоих регионов менее 1%) 5.4.16;
- различие в степени влияния параметров на целевые показатели для РФ и Ульяновской области объясняется их социально-экономическими отличиями: степенью эластичности валового выпуска по численности трудовых ресурсов; наличием и объёмом вложений в реализацию тех или иных управленческих воздействий и т.д.;
- для достоверного определения эффективности управленческой стратегии необходимо использовать как можно более точные оценки параметров, от-

Таблица 5.4.16: Изменение значений целевых показателей при варьировании значений параметров (слабокритические)

Вариация параметра	Количество заболевших в РФ (в Ульяновской области)	Валовый выпуск РФ (Ульяновской области)
0,99 c_2	0,01891% (0,02027%)	0,00009% (0,00005%)
1,01 c_2	-0,01891% (-0,02027%)	-0,00009% (-0,00005%)
0,99 k_{QD}	0,00000% (0,00000%)	0,00003% (0,00002%)
1,01 k_{QD}	0,00000% (0,00000%)	-0,00003% (-0,00002%)
0,99 k_{QR}	0,00000% (0,00000%)	-0,00038% (-0,00014%)
1,01 k_{QR}	0,00000% (0,00000%)	0,00037% (0,00014%)
0,99 k_{RS}	0,00000% (-0,00001%)	0,00000% (0,00000%)
1,01 k_{RS}	0,00000% (0,00001%)	0,00000% (0,00000%)
0,99 b	-0,24873% (-0,35650%)	-0,00108% (-0,00063%)
1,01 b	0,24928% (0,35761%)	0,00108% (0,00063%)
0,99 e_1	0,00000% (0,00000%)	-0,28053% (-0,11096%)
1,01 e_1	0,00000% (0,00000%)	0,28077% (0,11086%)
0,99 e_3	0,00000% (0,00000%)	-0,00070% (-0,00039%)
1,01 e_3	0,00000% (0,00000%)	0,00070% (0,00039%)
0,99 e_4	0,00000% (0,00000%)	-0,00186% (-0,00143%)
1,01 e_4	0,00000% (0,00000%)	0,00186% (0,00143%)
0,99 ρ	0,00676% (0,20596%)	0,00047% (0,00753%)
1,01 ρ	-0,00676% (-0,20551%)	-0,00047% (-0,00753%)

- носящихся к группе «сверхкритические», поскольку целевые показатели имеют высокую эластичность по отношению к этим параметрам;
- оценка параметров группы «критические» должна быть также достаточно аккуратной, несмотря на то, что влияние этих параметров на целевые показатели слабее, чем параметров группы «сверхкритические»;
 - целевые показатели демонстрируют устойчивое поведение относительно параметров, отнесённых к группе «слабокритические», но такие параметры всё же нельзя исключать из рассмотрения при анализе стратегии, т.к. степень влияния тех или иных параметров может изменяться в зависимости от рассматриваемой ситуации.

Предлагаемая модель позволяет не только проводить оценку выбранной управленческой стратегии, но и сравнивать такие стратегии между собой. Проведём на основе модели (2.45)-(2.60) и оценок её параметров вычислительный эксперимент, направленный на исследование значений целевых показателей (количества заболевших и величины валового выпуска) в зависимости от реализуемой управленческой стратегии.

Рассмотрим две альтернативы для стратегий в 2020 году:

- в начале эпидемии в регионе вводятся ограничительные меры, которые сохраняются в течение рассматриваемого периода (в данном случае равен 9,5 месяцам);
- в течение рассматриваемого периода в регионе не вводятся ограничительных мер.

Предположим, что через 0,5 месяца после того, как уровень заболеваемости принял критическое значение, в РФ был введён режим самоизоляции, который продлился до конца календарного года. В этом случае, согласно расчётам, относительно базовых значений в рассматриваемом периоде в РФ валовый выпуск

уменьшается на 0,11% (по Ульяновской области уменьшается на 0,07%), число заболевших уменьшается на 22,31% (по Ульяновской области - на 30,59%).

Если бы ограничительные меры не вводились, то в рассматриваемом периоде в РФ наблюдались бы следующие изменения показателей относительно базовых значений: увеличение валового выпуска на 0,3% (в Ульяновской области - на 0,07%), увеличение числа заболевших на 197,36% (в Ульяновской области - на 179,78%).

Отметим, что вариабельность валового выпуска в обоих случаях существенно выше по РФ, чем по Ульяновской области. Это можно объяснить большей эластичностью валового выпуска по труду для России и влиянием пандемии на результативность труда и численность трудовых ресурсов. Что касается количества заболевших, то результаты показывают существенное увеличение этого показателя в случае полного отказа от ограничительных мер. Следовательно, введение ограничительных мер на территории России в 2020 г. было оправданным решением в сложившейся ситуации.

5.4.3 Оптимальная стратегия управления экономической системой в условиях массового заболевания

В рамках модели (2.45)-(2.60) проводились вычислительные эксперименты: решалась задача ОУ с социальным критерием (2.61) и с экономическим критерием (2.62) по отдельности. Результаты расчетов, проведенных методом параметризации приведены в [209].

Модель (2.45)-(2.60) не учитывает фактор вакцинации, поэтому вычислительный эксперимент проводился на данных, полученных от наблюдения за массовым заболеванием при отсутствии вакцинации. Начало пандемии в РФ пришлось на середину марта 2020 года, окончанием периода без вакцинации стал декабрь 2020 года. Это позволило рассматривать период планирования со значениями параметров: $t_0 = 0$, $T = 9,5$.

Для решения задачи ОУ (2.45)-(2.60), (2.62), а также задачи ОУ (2.45)-(2.60), (2.61) применялся метод параметризации. При использовании численного метода параметризации необходимо задать структуру управляющего воздействия: вложения в переоборудование существующих койко-мест для размещения заболевших, вложения в увеличение числа койко-мест за счёт строительства новых больниц, вложения в информационную кампанию по борьбе с заболеванием. Если предположить, что данные вложения на периоде планирования должны носить постоянный характер (такое предположение удобно для управляющих органов), то управляющую функцию $u = (u_1, u_2, u_3)$ можно представить в виде:

$$u_i(t) = c_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad t \in [t_0; T].$$

Здесь c_i представляют собой постоянные значения при $1 \leq i \leq 3$.

Также в качестве управляющих параметров рассматривались моменты разрыва фазовой траектории, связанные с переходом на карантин τ_1 и снятием жестких ограничительных мер τ_2 , т.е. по сути выходом из состояния карантина.

В таблицах 5.4.17 и 5.4.18 приведены оптимальные управленческие решения, соответствующие оценкам выше параметрам анализируемой системы. В таблице 5.4.17 представлены результаты оценок оптимального управления для Российской Федерации, в таблице 5.4.18 аналогичные результаты для Ульяновской области.

Также таблицы 5.4.17, 5.4.18 содержат значения оптимальных решений при варьировании параметров модели, в частности, бюджетных ограничений. Изменение бюджетных ограничений проводилось влево и вправо на 1% и на 10% от имеющихся оценок параметров. При этом остальные параметры модели оставались равными исходным значениям.

В таблице 5.4.18 отсутствует значение управления u_2 , так как в Ульяновской области не было расходов данного вида, т.е. можно считать, что $u_2 = 0$.

Таблица 5.4.17: Оптимальные параметры управления для России

Функционал	Величина бюджета	u_1 , руб.	u_2 , руб.	u_3 , руб.	τ_1 , месяцев	τ_2 , месяцев
экономический критерий (2.62)	-	7153989000	2521637000	43737850	0,896	2,029
	$0,9B_1$	6919106000	2712544000	47096230	0,834	2,180
	$0,9B_2$	7153989000	2280855000	43957200	0,893	2,034
	$0,9B_3$	7161150000	2526688000	39482390	0,894	2,034
	$1,1B_1$	7381289000	2367600000	41148330	0,953	1,908
	$1,1B_2$	7146835000	2776578000	43781630	0,897	2,027
	$1,1B_3$	7139688000	2524162000	48183900	0,896	2,028
	$0,99B_1$	7125093000	2544446000	44177640	0,889	2,047
	$0,99B_2$	7153989000	2498920000	43781630	0,896	2,030
	$0,99B_3$	7153989000	2526688000	43430630	0,896	2,030
	$1,01B_1$	7175102000	2506545000	43497840	0,901	2,017
	$1,01B_2$	7146835000	2549403000	43825460	0,894	2,032
	$1,01B_3$	7146835000	2529218000	44308020	0,894	2,032
социальный критерий (2.61)	-	8463473000	3031374000	52842080	0,000	9,500
	$0,9B_1$	7617126000	3031374000	52842080	0,000	9,500
	$0,9B_2$	8463473000	2728237000	52842080	0,000	9,500
	$0,9B_3$	8463473000	3031374000	47557870	0,000	9,500
	$1,1B_1$	9309820000	3031374000	52842080	0,000	9,500
	$1,1B_2$	8463473000	3334511000	52842080	0,000	9,500
	$1,1B_3$	8463473000	3031374000	58126290	0,000	9,500
	$0,99B_1$	8378838000	3031374000	52842080	0,000	9,500
	$0,99B_2$	8463473000	3001060000	52842080	0,000	9,500
	$0,99B_3$	8463473000	3031374000	52313660	0,000	9,500
	$1,01B_1$	8548108000	3031374000	52842080	0,000	9,500
	$1,01B_2$	8463473000	3061688000	52842080	0,000	9,500
	$1,01B_3$	8463473000	3031374000	53370500	0,000	9,500

Анализ значений, приведенных в таблицах 5.4.17, 5.4.18, показывает:

- При изменении бюджетов для социального и для экономического критериев параметры оптимального решения ведут себя устойчиво: при измене-

Таблица 5.4.18: Оптимальные параметры управления для Ульяновской области

Функционал	Величина бюджета	u_1 , руб.	u_3 , руб.	τ_1 , месяцев	τ_2 , месяцев
экономический критерий (2.62)	-	1302991	43215870	1,068	1,691
	$0,9B_1$	1246425	45979050	1,003	1,795
	$0,9B_3$	1304295	38933220	1,065	1,693
	$1,1B_1$	1357908	41066070	1,126	1,604
	$1,1B_3$	1300386	47632680	1,068	1,690
	$0,99B_1$	1296430	43606770	1,060	1,702
	$0,99B_3$	1302991	42869410	1,067	1,691
	$1,01B_1$	1308145	43000220	1,073	1,682
	$1,01B_3$	1302991	43735460	1,068	1,690
социальный критерий (2.61)	-	1578947	52842106	0,000	9,500
	$0,9B_1$	1421052	52842060	0,000	9,500
	$0,9B_3$	1578947	47557850	0,000	9,500
	$1,1B_1$	1736842	52842060	0,000	9,500
	$1,1B_3$	1578947	58126260	0,000	9,500
	$0,99B_1$	1563158	52842060	0,000	9,500
	$0,99B_3$	1578947	52313640	0,000	9,500
	$1,01B_1$	1594736	52842060	0,000	9,500
	$1,01B_3$	1578947	53370480	0,000	9,500

ние бюджета на 1% (10%) параметры оптимального решения меняются менее 1% (10%). В нашей терминологии можно сказать, что параметры оптимального управления слабо эластичны.

- Параметры оптимального решения при использовании экономического критерия более чувствительны к изменению по сравнению с использованием социального критерия.
- Характер изменения параметров оптимального решения как для РФ, так и для Ульяновской области является общим.

5.4.4 Одновременный учет социального и экономического критериев

Найдем оптимальное решение в модели (2.45)-(2.60) с целевыми функционалами (3.38), (3.36). В каждом из функционалов проводится одновременный учет социального и экономического критериев.

Для вычислительных экспериментов оценки параметров модели (2.45)-(2.60) определялись по той же методике, что и в [242]. Некоторые значения параметров были пересчитаны с учетом обновлённой информации, актуальные значения представлены в таблице 5.4.19. Также в [242] получены оценки функциональных зависимостей между параметрами, результаты приведены в таблице 5.4.20.

Таблица 5.4.19: Обновленные значения параметров модели

Параметр	Регион		Параметр	Регион	
	Россия	Ульяновская область		Россия	Ульяновская область
a	0,415	0,416	b	0,271	0,377
k_{PS}	0,64	0,5	k_{QD}	0,2573602	0,5083035
k_{RS}	0,0002	0,0002	k_{IR}	1,887451	2,536730
k_{QR}	7,990511	12,33356	k_{ID}	0	0
k_{EI}	2,222153	2,131188	k_{IQ}	5,220368	1,712176
k	$3,415 \cdot 10^{-6}$	$2,719 \cdot 10^{-6}$	m	0,482	0,467
e_1	0,879	0,879	e_2	1	1
e_3	0,43	0,43	e_4	1	1
μ	$8,33 \cdot 10^{-3}$	$8,33 \cdot 10^{-3}$	ρ	$-9,516 \cdot 10^{-5}$	$-3,636 \cdot 10^{-3}$
$\tilde{\tau}$	0	0	B_1	$8,17 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^7$
B_2	$2,9 \cdot 10^{10}$	0	B_3	$5,02 \cdot 10^8$	$5,02 \cdot 10^8$

При вычислении недополученного дохода $C_1(t)$, $C_2(t)$ требуется нахождение $VSL_{mod}(t, T_1 - \tau)$. Проведем оценку этой величины. Предположим, что $VSL_{mod}(t, T_1 - \tau)$ представляет собой дисконтированный суммарный доход для государства, который мог бы принести работающий человек при условии, что на

Таблица 5.4.20: Оценки функциональных зависимостей

Параметрическая функция	Регион	
	Россия	Ульяновская область
$k_{SE}(I)$	$1,096 \cdot 10^{-7}I$	$7,96 \cdot 10^{-6}I$
$k_{SP}(u_3)$	$0,174 + 1,845 \cdot 10^{-11}u_3$	$0,122 + 2,097 \cdot 10^{-11}u_3$
$g(u_2)$	$1,381 \cdot 10^{-7}u_2$	0
$F(K, L)$	$7,47 \cdot 10^{-5}K^{0,4387}L^{1,3667}$	$28,228 \cdot K^{0,3815}L^{0,5728}$
$K(t)$	$2,74632 \cdot 10^{14} \cdot e^{0,0102t}$	$1,256128 \cdot 10^{12} \cdot e^{0,01178t}$

момент времени t среднедушевой ВВП $\frac{Y(t)}{N(t)}$ и банковская ставка $i(t)$ в будущем останутся без изменений. В этом случае

$$VSL_{mod}(t, T_1 - \tau) = \frac{Y(t)}{N(t)} \int_t^{t+T_1-\tau} (1+i(t))^{t-s} ds = \frac{Y(t) (1 - (1+i(t))^{\tau-T_1})}{N(t) \ln(1+i(t))}.$$

Тогда

$$C_1(t) = \frac{D(t)Y(t)}{N(t) \ln(1+i(t))} \int_0^{T_1} p(t, \tau) (1 - (1+i(t))^{\tau-T_1}) d\tau,$$

$$C_2(t) = \frac{(I(t) - D(t))Y(t)}{N(t) \ln(1+i(t))} \int_{T_1-T_2}^{T_1} p(t, \tau) (1 - (1+i(t))^{\tau-T_1}) d\tau.$$

Для вычислительного эксперимента значения $p(t, \tau)$ были приняты постоянными, с условием нормировки $p(t, \tau) = 1/T_1$. В этом случае

$$C_1(t) = \frac{D(t)Y(t)}{N(t) \ln(1+i(t))} \left(1 + \frac{(1+i(t))^{-T_1} - 1}{T_1 \ln(1+i(t))} \right),$$

$$C_2(t) = \frac{(I(t) - D(t))Y(t)}{N(t) \ln(1+i(t))} \left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{(1+i(t))^{-T_2} - 1}{T_1 \ln(1+i(t))} \right).$$

Для решения задачи оптимального управления (2.45)-(2.60) с критерием (3.36) использовалось значение $T_1 = 34,5$ года – среднее для РФ⁹. В качестве $i(t)$ была взята ключевая ставка ЦБ РФ. На начало 2020 г. (с января по апрель)

⁹Средний трудовой стаж в РФ при выходе на пенсию составляет 34,5 года // РИА Новости. [Электронный ресурс]. URL: <https://ria.ru/20131119/977986173.html> (дата обращения 19.01.2023).

она составляла 6% [188]. Это оценка нижней границы значения i , поскольку на основе ключевой ставки коммерческие банки определяют свою ставку, которая превышает ключевую.

В силу сделанных предположений о допустимых управлениях и свойствах дифференциальных связей, можно утверждать, что задача ОУ (2.45)-(2.60), (3.36) имеет точное решение на допустимом множестве или существует сходящаяся последовательность процессов, определенных на допустимом множестве. В свою очередь, управляющий орган экономической системы на практике принимает управление достаточно простой структуры, это обусловлено механизмом выделения финансирования, контролем за исполнением расходов. Предположим, что инвестирование является постоянным в течение периода планирования, это сужает класс допустимых управлений и полученное решение может отличаться от решения в классе кусочно-непрерывных управлений.

Решение задачи (2.45)-(2.60), (3.36) находилось методом параметризации в классе постоянных управлений. В таблице 5.4.21 представлены решения для России и Ульяновской области.

Таблица 5.4.21: Оптимальные решения с целевым функционалом $J_{VSL}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2)$

Параметр решения	u_1 , млн. руб./мес.	u_2 , млн. руб./мес.	u_3 , млн. руб./мес.	τ_1 , мес.	τ_2 , мес.
Россия	1505,178	0	0	0	0,14
Ульяновская область	0	–	0	0	6,49

Отметим, что в Ульяновской области строительство больниц в период пандемии не проводилось, поэтому при проведении эксперимента на данных этого региона управление u_2 было исключено из модели.

Анализируя полученные оптимальные решения, можно отметить, что при учёте ценности статистической жизни для Ульяновской области важным фактором максимизации прибыли является введение ограничительных мер в момент начала эпидемии ($\tau_1 = 0$) на длительный срок ($\tau_2 = 6,49$ месяца). Противопо-

ложный результат наблюдается для России – срок ограничительных мер должен быть минимальным и составлять всего $\tau_2 = 0,14$ месяца ($\tau_1 = 0$). Можно предположить, что отличия в полученных стратегиях обусловлены различным влиянием фактора трудовых ресурсов на валовый выпуск: по стране оно в 2,4 раза выше, чем по области. Введение ограничительных мер на длительный срок в РФ негативно отразилось бы на результативности труда, что, в свою очередь, привело бы к заметному снижению объёмов производства. Для Ульяновской области при этом экономические последствия ограничительных мер будут менее выраженными, поэтому для данного региона, напротив, предлагается стратегия поддержания таких мер на протяжении значительной части периода планирования.

Кроме того, расчёты показывают, что ни для России, ни для Ульяновской области не требуется проведение информационной кампании по борьбе с распространением заболевания ($u_3 = 0$). Для РФ спонсирование такой кампании повлекло бы увеличение количества людей, соблюдающих ограничительные меры. Это, как и законодательное введение ограничительных мер, рассмотренное выше, уменьшило бы результативность труда и повлияло на валовый выпуск. В свою очередь, для Ульяновской области финансовая поддержка информационной кампании не требуется, поскольку предполагается, что длительные ограничения, объявленные официально, будут достаточными.

Наконец, согласно результатам эксперимента, для РФ необходимы вложения в переоборудование существующих койко-мест в больницах, чтобы размещать заболевших: $u_1 = 1505,178$ млн. руб. в месяц. Также можно заключить, что количества переоборудованных мест будет достаточно, и возводить новые больницы не потребуется ($u_2 = 0$). В свою очередь, в Ульяновской области будет достаточно уже существующих койко-мест, вследствие чего не требуются затраты на их переоборудование ($u_1 = 0$).

Теперь рассмотрим задачу ОУ (2.45)-(2.60) с критерием (3.38). Решение на-

ходило в классе постоянных управлений методом параметризации. В функционале (3.38) параметр α_1 определяет значимость экономической составляющей при поиске оптимальной стратегии в условиях массового заболевания, а параметр α_2 задаёт значимость социальной компоненты. В таблицах 5.4.22, 5.4.22 при различных α_1, α_2 приведены оптимальные стратегии для РФ и Ульяновской области, соответственно.

Таблица 5.4.22: Оптимальные решения для РФ с целевым функционалом $J_{CONV}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2)$

Вес критериев	Параметры управления				
	u_1 , млн. руб./ мес.	u_2 , млн. руб./ мес.	u_3 , млн. руб./ мес.	τ_1 , мес.	τ_2 , мес.
$\alpha_1 = 1, 0; \alpha_2 = 0, 0$	7247, 645	2567, 461	44, 53266	0, 86	2, 07
$\alpha_1 = 0, 9; \alpha_2 = 0, 1$	7247, 645	2567, 461	44, 53266	0, 86	2, 07
$\alpha_1 = 0, 8; \alpha_2 = 0, 2$	7247, 645	2567, 461	44, 53266	0, 86	2, 07
$\alpha_1 = 0, 75; \alpha_2 = 0, 25$	6280, 311	1368, 244	23, 73222	1, 34	8, 05
$\alpha_1 = 0, 7; \alpha_2 = 0, 3$	6077, 355	712, 1869	13, 69642	1, 13	8, 31
$\alpha_1 = 0, 65; \alpha_2 = 0, 35$	3704, 039	19, 82288	8, 34577	0	7, 94
$\alpha_1 = 0, 6; \alpha_2 = 0, 4$	498, 7971	0, 23730	0, 17861	0	0, 96
$\alpha_1 = 0, 5; \alpha_2 = 0, 5$	498, 7971	0, 93368	0, 46104	0	0, 96
$\alpha_1 = 0, 4; \alpha_2 = 0, 6$	43, 72145	0, 15886	0	0	6, 97
$\alpha_1 = 0, 3; \alpha_2 = 0, 7$	0	0	0	0	8, 02
$\alpha_1 = 0, 25; \alpha_2 = 0, 75$	0	0	0	0	8, 39
$\alpha_1 = 0, 2; \alpha_2 = 0, 8$	0	0	52, 8421	0	8, 67
$\alpha_1 = 0, 1; \alpha_2 = 0, 9$	0	0	52, 8421	0	9, 16
$\alpha_1 = 0, 0; \alpha_2 = 1, 0$	0	0	52, 8421	0	9, 5

Для РФ в поведении оптимального решения наблюдаются следующие закономерности:

- С увеличением веса социальной компоненты уменьшаются затраты на переоборудование койко-мест и строительство больниц; при этом увеличи-

- вается длительность ограничительных мер. Исключение здесь составляют случаи, когда вес экономической и социальной компонент является близким ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$; $\alpha_1 = 0,6, \alpha_2 = 0,4$); здесь длительность ограничительных мер составляет чуть менее месяца в начале периода планирования.
- В случае, когда вес экономической компоненты более 80% ($\alpha_1 \geq 0,8$), вкладываются значительные средства в переоборудование койко-мест, строительство больниц, информационную кампанию. При этом ограничительные меры нужно вводить ближе к концу первого месяца, отменять меры после окончания второго месяца. Такое решение близко к тому, что было реализовано в РФ в период пандемии 2020 года ($\tau_1 = 0,5, \tau_2 = 2,5$).
 - При значении веса экономической компоненты 65-80% уменьшение ее веса ведет к увеличению длительности ограничительных мер практически на весь период планирования; к сокращению затрат на переоборудование койко-мест, строительство больниц, информационную кампанию.
 - При близких значениях веса экономической и социальной компоненты ($0,5 \leq \alpha_1 \leq 0,6$) оптимальное решение в наибольшей степени соответствует решению, полученному с помощью VSL-критерия: затраты на переоборудование койко-мест поддерживаются на некотором уровне; затраты на строительство больниц и информационную кампанию практически равны нулю; длительность ограничительных мер составляет менее месяца с начала периода планирования.
 - В случае преобладания веса социальной компоненты над экономической ($\alpha_2 \geq 0,7$): затраты на переоборудование койко-мест, строительство больниц обнуляются; длительность ограничительных мер растет с увеличением веса социальной компоненты и при $\alpha_2 = 1$ распространяется на весь период планирования; если $\alpha_2 \geq 0,8$, то требуются максимальные вложения в информационную кампанию.

Таблица 5.4.23: Оптимальные решения для Ульяновской области с целевым функционалом $J_{CONV}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2)$

Параметр решения	u_1 , млн. руб./мес.	u_3 , млн. руб./мес.	τ_1 , мес.	τ_2 , мес.
$\alpha_1 = 1, 0; \alpha_2 = 0, 0$	0	0	0	0, 18
$\alpha_1 = 0, 9; \alpha_2 = 0, 1$	0	0	0	0, 25
$\alpha_1 = 0, 8; \alpha_2 = 0, 2$	0	0	0	0, 59
$\alpha_1 = 0, 7; \alpha_2 = 0, 3$	0	0	0	1, 68
$\alpha_1 = 0, 65; \alpha_2 = 0, 35$	0	0	0	6, 99
$\alpha_1 = 0, 6; \alpha_2 = 0, 4$	0	0	0	7, 39
$\alpha_1 = 0, 5; \alpha_2 = 0, 5$	0	0	0	8, 02
$\alpha_1 = 0, 4; \alpha_2 = 0, 6$	0	0	0	8, 62
$\alpha_1 = 0, 3; \alpha_2 = 0, 7$	0	0	0	8, 94
$\alpha_1 = 0, 2; \alpha_2 = 0, 8$	0	0	0	9, 01
$\alpha_1 = 0, 1; \alpha_2 = 0, 9$	0	0	0	9, 48
$\alpha_1 = 0, 0; \alpha_2 = 1, 0$	0	0	0	9, 5

Для Ульяновской области практически все стратегии носят общий характер: введение ограничительных мер с самого начала массового заболевания; отказ от информационной кампании; отказ от затрат на переоборудование койко-мест. При этом с увеличением веса социальной компоненты увеличивается длительность ограничительных мер. Если вес социальной компоненты менее 30%, то ограничительные меры снимаются менее чем через 2 месяца. При значении веса более 35% оптимальное решение предлагает сохранять ограничительные меры в течение более 7 месяцев, при $\alpha_2 = 1$ на протяжении всего моделируемого периода. Оптимальное решение, полученное при $\alpha_1 = 0, 65, \alpha_2 = 0, 35$, в наибольшей степени соответствует решению, полученному с помощью VSL-критерия.

Подводя итоги проведенным экспериментам, можно отметить, что стратегия, реализованная в РФ в период пандемии 2020 года, в большей мере соответствует экономическому критерию, нежели социальному. Также при сравнении критерия свертки и VSL-критерия можно сделать вывод, что VSL-критерий со-

ответствует критерию свертки при значимости экономической компоненты на уровне 60-65%.

Заключение

В диссертационной работе предложен единый подход к решению задач оптимального управления с постоянным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания. Запаздывание рассматривается как в фазовых переменных, так и в управляющих. Единый подход строится на основе метода параметризации – численного метода решения задач оптимального управления.

Разработаны оптимизационные модели экономической динамики, учитывающие запаздывание в управляющих и фазовых переменных. Для моделей управления рекламными затратами, инвестиционными вложениями выведены необходимые условия, позволяющие определять структуру оптимального управления, сформулированы достаточные условия существования оптимального решения.

Для реализации метода параметризации разработан программный комплекс, позволяющий в рамках единого подхода решать задачи оптимального управления, содержащие запаздывание в дифференциальных связях. Показана применимость данного подхода к соответствующим моделям экономической динамики.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Метод параметризации для решения задач ОУ, содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием.
2. Метод параметризации для решения задач ОУ, содержащих интегро-дифференциальные связи.
3. Обоснование сходимости метода параметризации при усложнении искомого сплайна для управляющей функции. Сходимость обосновывается по функционалу задачи оптимального управления с учетом запаздывания.
4. Модели экономических систем, представленные в терминах задач ОУ с

точечным запаздыванием: класс моделей управления организационно-техническими системами; двухсекторная модель управления производственными инвестициями в экономике с запаздыванием как в управлении, так и в фазовых переменных; класс моделей управления экономической системой в условиях массового заболевания с учетом социальных и экономических показателей.

5. Модели экономических систем, представленные в терминах задач ОУ с распределенным запаздыванием: инвестиционная модель производственной компании; обобщенная модель построения рекламных стратегий.
6. Концепция построения программных средств для реализации единого подхода на основе метода параметризации для решения задач ОУ с учетом запаздывания в дифференциальных уравнениях как по фазовым, так и по управляющим переменным.
7. Проблемно-ориентированный комплекс, предназначенный для решения задач ОУ с точечным и распределенным запаздыванием как в фазовых, так и в управляющих переменных. Реализация комплекса на языке C++ позволяет эффективно включать вспомогательные вычислительные алгоритмы: методы решения задач нелинейного программирования, методы решения задач Коши, методы численного интегрирования и дифференцирования.

Литература

1. Алексеев, В. М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин – М.: Наука, 1979 – 432 с.
2. Аллен, Р. Математическая экономия. / Р. Аллен – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 668 с.
3. Андреева, Е. А. Оптимальное управление процессом распространения инфекционного заболевания с учетом латентного периода/ Е. А. Андреева, Н. А. Семькина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 7. – С. 1174-1180.
4. Анрион, Р. Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. / Р. Анрион – М.: Наука, 1979. – 207 с.
5. Антоник, В. Г. Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления/ В. Г. Антоник, В. А. Срочко// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 4. – С. 564-572.
6. Аргучинцев, А. В. Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели / А. В. Аргучинцев, В. А. Срочко // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2022. – Т. 18. Вып. 1. – С. 179-187. – <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115>

7. Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику. / С. А. Ашманов – М.: Наука, 1984. – 296 с.
8. Беллман, Р. Динамическое программирование. / Р. Беллман; под ред. Н. Н. Воробьева ; пер. с англ. И. М. Андреевой, А. А. Корбут, И. В. Романовского [и др.]. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
9. Берндт, Э. Р. Практика эконометрики: классика и современность: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям 060000 экономики и управления / Пер. с англ. под ред. проф. С. А. Айвазяна / Э. Р. Берндт. – М.: ЮНИТИ-ДИАНА, 2005. – 863 с.
10. Бобков, А. В. Коррекционная динамика экономической активности в условиях воздействия мер купирования пандемии / А. В. Бобков, В. К. Верещагина // Инновации и инвестиции. – 2020. – № 8. – С. 94-98.
11. Бояринцев, Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы и оптимальное управление. / Ю. Е. Бояринцев // Методы оптимизации и их приложения: труды 11-ой Байкальской международной школы-семинар. Иркутск. – 1998. – С. 60-63.
12. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши, пер. с англ. Э. М. Макашова, Ю. П. Плотникова; под ред. А. М. Летова. – М.: Мир, 1972. – 544 с. (Bryson A. E. Jr., Ho Yu-Chi. Applied optimal control.)
13. Будаков, Б. М. О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления / Б. М. Будаков, Е. М. Беркович, Е. П. Соловьева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1969. – Т. 9. № 3. – С. 522-547.

14. Быков, А. А. О методологии экономической оценки жизни среднестатистического человека (пояснительная записка) / А. А. Быков // Проблемы анализа риска. – 2007. – Т. 4. № 2. – С. 178-191.
15. Васильев, Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
16. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.
17. Габасов, Р. Особые оптимальные управления. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова – М.: Наука, 1973. – 256 с.
18. Габасов, Р. Численные методы оптимизации нестационарных многомерных систем с полиэдральными ограничениями / Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45. № 4. – С. 617–636.
19. Гилл, Ф. Практическая оптимизация. / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт – М.: Мир, 1985. – 509 с.
20. Горбунов, В. К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным / В. К. Горбунов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18. № 5. – С. 1083-1095.
21. Горбунов, В. К. Метод параметризации задач оптимального управления / В. К. Горбунов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19. № 2. – С. 292-303.
22. Горбунов, В. К. Методы редукции неустойчивых вычислительных задач. / В. К. Горбунов – Фрунзе: “Илим”, 1984. – 134 с.

23. Горбунов, В. К. Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и особые управления / В. К. Горбунов // Дифференциальные уравнения и их приложения: тезисы докладов 1-й междун. научно-практ. конф. – СПб. – 1996. – С. 58.
24. Горбунов, В. К. Вторые производные параметризованной задачи оптимального управления / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Ученые записки УлГУ. Сер. "Фундаментальные проблемы математики и механики". – Ульяновск, 1997. – Выпуск 3 – С. 17-24.
25. Горбунов, В. К. Построение производственных функций по данным об инвестициях / В. К. Горбунов, А. Г. Львов // Экономика и математические методы. – 2012. – Т. 48, № 2. – С. 95–107.
26. Горбунов, В. К. Анализ малого и среднего предпринимательства: построение производственных функций с оценкой эффективных фондов / В. К. Горбунов, А. Г. Львов // Экономика и математические методы. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 45–56.
27. Горнов, А. Ю. Классификация проблем, возникающих при численном решении задач оптимального управления / А. Ю. Горнов // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № S1. – С. 17–26.
28. Гранберг, А. Г. Динамические модели народного хозяйства. / А. Г. Гранберг – М.: Экономика, 1985. – 240 с.
29. Дждеед, М. Методы и алгоритмы оптимального управления системами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями. Диссертация на соискание степени канд. физ.-мат. наук. / М. Дждеед – Тверь, 2004. – 114 с.
30. Дмитрук, А. В. Необходимые условия слабого минимума в задачах с интегральными уравнениями / А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский // Труды

- 12 всероссийского совещания по проблемам управления. – Москва, 2014. – Т. 19. № 3 – С. 709-713.
31. Дривотин, О. И. О численном решении задачи оптимального управления на основе метода, использующего вторую вариацию траектории / О. И. Дривотин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2019. – Т. 15. Вып. 2. – С. 283-295. – <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.211>
32. Дыхта, В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями. / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонок – М. : Физматлит, 2000. – 256 с.
33. Евтушенко, Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. / Ю. Г. Евтушенко – М. : Наука, 1982. – 432 с.
34. Задорин, А. И. Численное решение краевой задачи для системы уравнений с малым параметром. / А. И. Задорин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. № 8. – С. 1255-1265.
35. Задорин, А. И. Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка. / А. И. Задорин, В. Н. Игнатьев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1991. – Т. 31. № 1. – С. 157-161.
36. Иванилов, Ю. П. Математические модели в экономике. / Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов – М. : Наука, 1979. – 303 с.
37. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. / М. Интрилигатор – М. : Прогресс, 1975. – 607 с.
38. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач. / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров – М. : Наука, 1974. – 478 с.

39. Келли, Г. Необходимое условие для особых экстремалей, основанное на второй вариации / Г. Келли // Ракетная техника и космонавтика. – 1964. – № 8. – С. 26-29.
40. Клочков, В. В. Проблема обеспечения производства авиационной техники "Точно в срок" и концепция "Быстро реагирующего производства" / В. В. Клочков, В. А. Вдовенков // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. № 1(5). – С. 1418-1425.
41. Колемаев, В. А. Математическая экономика: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям / В. А. Колемаев. – 3-е стер. изд. – Москва: ЮНИТИ, 2012. – 399 с.
42. Колесин, И. Д. Управление в социально-экономических, медико-биологических системах / И. Д. Колесин, Е. Житкова // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 6. – С. 109–120.
43. Костина, Е. А. Исследование одной задачи оптимального управления со смешанным критерием качества / Е. А. Костина, О. И. Костюкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1997. – Т. 37. № 2. – С. 153-161.
44. Костюкова, О. И. Конечный алгоритм решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями в дискретные моменты времени / О. И. Костюкова, С. В. Прищепова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. № 2. – С. 189-206.
45. Копп, Р. Необходимые условия оптимальности особых экстремалей. / Р. Копп, Г. Мойер // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 8. – С. 84-91.
46. Котина, Е. Д. Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах / Е. Д. Котина,

- Д. А. Овсянников // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2021. – Т. 17. Вып. 2. – С. 213–224. – <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.210>
47. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов – М.: Наука, 1975. – 302 с.
48. Красовский, А. А. Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста / А. А. Красовский, А. М. Тарасьев // Автоматика и телемеханика – 2007. – № 10. – С. 38–52.
49. Кулькова, И. А. Влияние пандемии коронавируса на демографические процессы в России / И. А. Кулькова // Human Progress. – 2020. – 6 (1). – С. 2-11. – <https://doi.org/10.34709/IM.161.5>.
50. Крылов, И. А. О методе последовательных приближений для решений задач оптимального управления. / И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – Т. 2. № 6. – С. 1132-1138.
51. Лагоша, Б. А. Оптимальное управление в экономике: Учеб. пособие. / Б. А. Лагоша – М.: Финансы и статистика. – 2003. – 192 с.
52. Ли, Э. Б. Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1972. – 576 с.
53. Лутошкин, И. В. Численное решение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями / И. В. Лутошкин // Ученые записки УлГУ. Сер. "Фундаментальные проблемы математики и механики". – Ульяновск, 1998. – Выпуск 5 – С. 85-91.

54. Любушин, А. А. Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления / А. А. Любушин, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Техническая кибернетика – 1983. – № 2. – С. 147-159.
55. Макаров, В. Л. Математическая теория экономической динамики и равновесия / В. Л. Макаров, А. М. Рубинов – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 336 с.
56. Максимов, В. П. Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики / В. П. Максимов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2019. – № 4. – С. 124-135. EDN: CXBWRE
57. Матвеев, А. В. Математическое моделирование оценки эффективности мер против распространения эпидемии COVID-19 / А. В. Матвеев // Национальная безопасность и стратегическое планирование – 2020. – № 1 (29). – С. 23-39. – <https://doi.org/10.37468/2307-1400-2020-1-23-39>
58. Методы оптимизации: учебник и практикум для вузов / Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, Б. А. Будаков, Л. А. Артемьева; под редакцией Ф. П. Васильева. – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 375 с.
59. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко – М.: Наука, 1969. – 393 с.
60. Метод кодифференциального спуска в задаче нахождения глобального минимума кусочно-аффинного целевого функционала в линейных системах управления / А. В. Фоминых, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова [и др.] // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2021. – Т. 17. Вып. 1. – С. 47–58. – <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.105>

61. Моисеев, Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 424 с.
62. Мультиагентная система "Smart Factory" для стратегического и оперативного управления машиностроительным производством "Точно в срок" и "Под заданную стоимость" / В. И. Баклашов, Д. Н. Казанская, П. О. Скобелев [и др.] // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. № 1(5). – С. 1292-1295.
63. Основы теории оптимального управления / В. Ф. Кротов, Б. А. Лагоша, С. М. Лобанов [и др.]. – М.: Высш.шк., 1990. – 431 с.
64. Полак, Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. / Э. Полак. – М.: Мир, 1974. – 376 с.
65. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – Москва: УРСС, 2014. – 392 с.
66. Поманский, А. Б. Математические модели в теории экономического цикла / А. Б. Поманский, Г. Ю. Трофимов // Экономика и математические методы. – 1989. – Т. 25. Вып. 5. – С. 825-840.
67. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин – М.: Наука, 1974. – 331 с.
68. Прасолов, А. В. Математические методы экономической динамики. 2-е изд., испр. / А. В. Прасолов. – СПб.: Изд-во Лань, 2015. – 352 с.
69. Рыбина, М. С. Проблема оценки параметров математической модели влияния пандемии на экономику / М. С. Рыбина // Сборник тезисов докладов конгресса молодых ученых (Университет ИТМО). – 2021. – [Электронный ресурс]. URL: <https://kmu.itmo.ru/digests/article/7045> (дата обращения: 29.05.2021).

70. Симонов, П. М. Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики / П. М. Симонов // Вестник Перм. ун-та. Сер. Экономика. – 2014. – № 1. – С. 14–27.
71. Сороковиков П. С. Пакет программ МЕОРТ для решения невыпуклых задач параметрической идентификации / П. С. Сороковиков, А. Ю. Горнов // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2022. № 2(26). С. 53–60. <https://doi.org/10.38028/ESI.2022.26.2.005>
72. Срочко, В. А. Параметризация некоторых задач управления линейными системами / В. А. Срочко, Е. В. Аксенюшкина // Известия Иркутского государственного университета. Сер. “Математика”. – 2019. – Т. 30. С. 83–98. – <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83>
73. Табак, Д. Оптимальное управление и математическое программирование. / Д. Табак, Б. Куо – Гл. ред. физико-математической литературы, М.: Наука, 1975. – 280 с.
74. Тер-Крикоров, А. М. Оптимальное управление и математическая экономика. / А. М. Тер-Крикоров – М.: Наука, 1977. – 216 с.
75. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. – 4-е изд. / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.
76. Туровец, О. Г. Организация производства и управление предприятием: Учебник. / О. Г. Туровец – М.: ИНФРА-М, 2011. – 506 с.
77. Тятюшкин, А. И. Численные методы решения задач оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты. / А. И. Тятюшкин // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования № 6. – Научн. изд. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.

78. Федоренко, Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. / Р. П. Федоренко – М.: Наука, 1978. – 488 с.
79. Федоров, В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М.: Наука, 1979 – 280 с.
80. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк – М.: Наука, 1980 – 448 с.
81. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер – М.: Мир, 1990. – 512 с.
82. Чернов, А. В. О применении функций Гаусса для численного решения задач оптимального управления / А. В. Чернов // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 6. – С. 51–69. – <https://doi.org/10.1134/S0005231019060035>
83. Черноусько, Ф. Л. Вариационные задачи механики и управления. / Ф. Л. Черноусько, Н. В. Баничук – М.: Наука, 1973. – 240 с.
84. Численные методы решения сингулярных систем. / Ю. Е. Бояринцев, В. А. Данилов, А. А. Логинов, А. Ф. Чистяков – Новосибирск: Наука, Сиб.отд., 1989. – 223 с.
85. Шалашилин, В. И. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике) / В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.
86. A Comparative Survey Of Software Computational Tools In The Field Of Optimal Control /S. Ozana, T. Docekal, J. Nemcik, F. Krupa, J. Mozaryn // 2021 23rd International Conference on Process Control (PC). – Strbske Pleso, Slovakia. – 2021. – pp. 284-289. – doi:10.1109/PC52310.2021.9447510.

87. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods. / D.Garg, M. A. Patterson, W. W. Hager [et al.] // Automatica. – 2010. – V. 46. № 11. – pp. 1843–1851. – <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.06.048>
88. Agamawi, Y. M. CGPOPS: A C++ Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using Adaptive Gaussian Quadrature Collocation and Sparse Nonlinear Programming. / Y. M. Agamawi, A. V. Rao – ACM Trans Math Softw. – 2020. – V. 46. № 3. – pp. 1-38. – <https://doi.org/10.1145/3390463>
89. Ali, U. Dynamics of COVID-19: Modelling and Analysis. / U. Ali, A. Bakshi, M. Wani // Journal of Infectious Diseases and Epidemiology. – 2020. – 6:128. – <https://doi.org/10.23937/2474-3658/1510128>.
90. An optimal control analysis of a COVID-19 model. / M. Zamir, T. Abdeljawad, F. Nadeem [et al] // Alexandria Engineering Journal. – 2021. – 60 (2). – pp. 2875-2884. – <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.01.022>.
91. Application of the ARIMA model on the COVID-2019 epidemic dataset / D. Benvenuto, M. Giovanetti, L. Vassallo [et al] // Data in Brief – 2020. – V. 29. – <https://doi.org/10.1016/j.dib.2020.105340>
92. Arino, J. Simple models for containment of a pandemic / J. Arino, F. Brauer, P. van den Driessche [et al] // J. R. Soc. Interface. – 2006. – 3 (8). – pp. 453-457. – <https://doi.org/10.1098/rsif.2006.0112>.
93. Araz, S. I. Analysis of a Covid-19 model: Optimal control, stability and simulations. / S. I. Araz // Alexandria Engineering Journal. – 2020. – 60 (1). – pp. 1-12. – <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.09.058>.
94. Arsekar, R. EpiStrat: A Tool for Comparing Strategies for Tackling Urban Epidemic Outbreaks. / R. Arsekar, D. K. Mandarapu, M. V. P. Rao // In

- Chen H., Zeng D., Karahanna E., Bardhan I. (Eds.), Smart Health. ICSH 2017. Lecture Notes in Computer Science. – Cham: Springer. – 2017. – 10347 – pp. 256-267.– https://doi.org/10.1007/978-3-319-67964-8_25.
95. Atkeson, A. What will be the economic impact of Covid-19 in the US? Rough estimates of disease scenarios. / A. Atkeson – NBER Working Papers. [Electronic source]. – 2020 – URL: https://www.nber.org/system/files/working_papers/w26867/w26867.pdf (date of access: 29.05.2021).
96. Aubin, J.-P. Time and Money. How Long and How Much Money is Needed to Regulate a Viable Economy. / J.-P. Aubin // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. – V. 670. – Springer, Cham, 2014. – 144 p. – <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00005-3>
97. Benson, D. A. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method. / D. A. Benson, G. T. Huntington, T. P. Thorvaldsen, A. V. Rao. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2006. – V. 29. № 6. – pp. 1435–1440. – <https://doi.org/10.2514/1.20478>
98. Bensoussan, A. A generalization of the Nerlove-Arrow optimality condition / A. Bensoussan, A. Bultez, P. Naert. – Brussels: Technical Report European Institute for Advanced Studies in Management, 1973. – pp. 73-75.
99. Berisha-Shaqiri, A. Information Technology and the Digital Economy / A. Berisha-Shaqiri, M. Berisha-Namani // Mediterranean Journal of Social Sciences. – 2015. – V. 6. № 6. – pp. 78-83.
100. Betts, J. T. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization. / J. T. Betts. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1998. – V. 21. № 2. – pp. 193–207. – <https://doi.org/10.2514/2.4231>

101. Biral, F. Notes on Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems. / F. Biral, E. Bertolazzi, P. Bosetti. // IEEJ Journal of Industry Applications. – 2016. – V. 5. № 2. – pp. 154–166. – <https://doi.org/10.1541/ieejia.5.154>
102. Blok, M. W. J. Dynamic Models of the Firm. / M. W. J. Blok – Berlin : Springer, 1996. – 193 p.
103. Brauer, F. Mathematical models in population biology and epidemiology / F. Brauer, C. Castillo-Chavez – V. 40. New York : Springer, 2012. – 508 p.
104. Britton, N. F. Essential Mathematical Biology. / N. F. Britton – London : Springer, 2003. – 335 p. – <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0049-2>.
105. Buratto, A. Coordination of advertising strategies in a fashion licensing contract / A. Buratto, G. Zaccour // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2009. – Vol. 142. № 1. – pp. 31-53.
106. Conway, B. A. A Survey of Methods Available for the Numerical Optimization of Continuous Dynamic Systems. / B. A. Conway. // J. Optim. Theory Appl. – 2012. – V. 152. – pp. 271–306. – <https://doi.org/10.1007/s10957-011-9918-z>
107. Connections between the covector mapping theorem and convergence of pseudospectral methods. / Q. Gong, I. M. Ross, W. Kang, F. Fahroo. // Computational Optimization and Applications. – 2008. – V. 41. № 3. – pp. 307–335. – <https://doi.org/10.1007/s10589-007-9102-4>
108. Co-op advertising in randomly fluctuating markets. / J. Han, S. P. Sethi, C. C. Siu, S. C. P. Yam // Production and operations management – 2023. – V. 32. № 6. – pp. 1617–1635. – <https://doi.org/10.1111/poms.13929>
109. Darby, C. L. Costate estimation using multiple-interval pseudospectral methods. / C. L. Darby, D. Garg, A. V. Rao. // Journal of

- Spacecraft and Rockets. – 2011. – V. 48. № 5. – pp. 856–866. – <https://doi.org/10.2514/1.A32040>
110. Deal, K. R. Optimizing advertising expenditures in a dynamic duopoly / K. R. Deal // Operations Research. – 1979. – Vol. 27. № 4. – pp. 682–692.
111. Direct trajectory optimization and costate estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems via a Radau pseudospectral method. / D. Garg, M. A. Patterson, C. L. Darby [et al.] // Computational Optimization and Applications. – 2011. – V. 49. № 2. – pp. 335–358. – <https://doi.org/10.1007/s10589-00-09291-0>
112. Dynamic market share through advertising and loyalty reward programs: A case study of Ofo versus Mobike / J. Wang, Y. Li, W. Jiang, Y. Wang, S. Zhang // RAIRO-Oper. Res. – 2022. – V. 56. № 5 – pp. 3545–3560 – <https://doi.org/10.1051/ro/2022166>
113. Early dynamics of transmission and control of COVID-19: a mathematical modelling study / A. J. Kucharski, T. Russell, Ch. Diamond [et al.] // The Lancet Infectious Diseases – March 11, 2020. – 20 (5). – pp. 553–558 – [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30144-4](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30144-4)
114. Elnagar, G. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems. / G. Elnagar, M. Kazemi, M. Razzaghi. // IEEE Transactions on Automatic Control – 1995. – Vol. 40. № 10. – pp. 1793–1796. – <https://doi.org/10.1109/9.467672>
115. Elnagar, G. A collocation-type method for linear quadratic optimal control problems. / G. Elnagar, M. Razzaghi. // Optimal Control Applications and Methods – 1998. – Vol. 18, № 3. – pp. 227–235. – [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1514\(199705/06\)18:3<227::AID-OCA598>3.0.CO;2-A](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1514(199705/06)18:3<227::AID-OCA598>3.0.CO;2-A)

116. Enright, P. J. Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming. / P. J. Enright, B. A. Conway. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1992. – V. 15. № 4. – pp. 994-1002. – <https://doi.org/10.2514/3.20934>
117. Erickson, G. M. A differential game model of the marketing-operations interface / G. M. Erickson // European Journal of Operational Research. – 2011. – V. 211. № 2. – pp. 394-402.
118. Esfandiari, M. Dynamic Optimization of Capital Stock: An Application of Maximum Principle / M. Esfandiari // Ind. Eng. Manag. Syst. – 2020. – V. 19. № 3. – pp. 589–596. – <https://doi.org/10.7232/iems.2020.19.3.589>
119. Ezimadu, P. E. Modelling cooperative advertising decisions in a manufacturer-distributor-retailer supply chain using game theory / P. E. Ezimadu // Yugoslav Journal of Operations Research. – 2020. – V. 30. № 2. – pp. 147-176. – <https://doi.org/10.2298/YJOR181115001E>
120. Estimates of the severity of coronavirus disease 2019: A model-based analysis / R. Verity, L.C. Okell, I. Dorigatti [et al.] // The Lancet Infectious Diseases. – 2020 – 20 (6). – pp. 669-677 – [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30243-7](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30243-7)
121. Estimating the future number of cases in the Ebola epidemic–Liberia and Sierra Leone, 2014-2015. / M. I. Meltzer, C. Y. Atkins, S. Santibanez [et al.] // MMWR Suppl. – 2014. – 63 (3) – pp. 1-14.
122. Fabbri, G. Dynamic programming, maximum principle and vintage capital / G. Fabbri, M. Iacopetta. – MPRA, 2007. – paper № 5115. – 54 p. – https://mpra.ub.uni-muenchen.de/5115/1/MPRA_paper_5115.pdf
123. Fershtman, C. Goodwill and market shares in oligopoly / C. Fershtman // Economica. – 1984. – V. 51. № 203. – pp. 271-281.

124. Fershtman, C. Market share pioneering advantage: A theoretical approach / C. Fershtman, M. Vijay, M. Eitan // *Management Science*. – 1990. – V. 36. № 8. – pp. 900-918.
125. Funk, S. The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks. / S. Funk, E. Gilad, C. Watkins, V. A. A. Jansen // *Proceedings of the National Academy of Sciences* Apr 2009. – 2009. – 106 (16). – pp. 6872-6877. – <https://doi.org/10.1073/pnas.0810762106>.
126. Fruchter, G. E. Signaling quality: Dynamic price-advertising model / G. E. Fruchter // *Journal of Optimization Theory and Applications* – 2009. – V. 143. № 3. – pp. 479-496.
127. Gardashova, L. A. Decision Making Problem of a Single Product Dynamic Macroeconomic Model on Base of Fuzzy Uncertainty. / L. A. Gardashova, B. G. Guirimov // 10 Th International Conference on Theory and Application of Soft Computing, Computing With Words and Perceptions – Icscw-2019, Advances in Intelligent Systems and Computing, 1095, ed. Aliev R., Kacprzyk J., Pedrycz W., Jamshidi M., Babanli M., Sadikoglu F. – Springer International Publishing Ag. – 2020. – pp. 237–245 – https://doi.org/10.1007/978-3-030-35249-3_30
128. Garg, D. Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems. / D. Garg, W.W. Hager, A.V. Rao. // *Automatica*. – 2011. – V. 47. № 4 – pp. 829–837. – <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.01.085>
129. Granger, C. W. J. Investigating causal relations by econometric model and cross-spectral methods / C. W. J. Granger // *Econometrica*. – 1969. – V. 37. № 3. – pp. 424-438.

130. Giovanni, P. D. Quality improvement vs. advertising support: Which strategy works better for a manufacturer? / P. D. Giovanni // *European Journal of Operational Research*. – 2011. – V. 208. № 2. – pp. 119-130.
131. Gomez, M. C. Qualitative analysis of generalized multistage epidemic model with immigration / M. C. Gomez, F. A. Rubio, E. I. Mondragon // *Mathematical Biosciences and Engineering* – 2023. – V. 20, Issue 9. – pp. 15765-15780. – <https://doi.org/10.3934/mbe.2023702>
132. Hackman, S. T. *Production Economics: Integrating the Microeconomics and Engineering Perspectives*. / S. T. Hackman. – Berlin: Springer, 2008. – 540 p.
133. Hayes, B. First links in the Markov chain / B. Hayes // *Am. Sci.* – 2013. – V. 101, № 2. – pp. 92–97. – <https://doi.org/10.1511/2013.101.92>
134. He, X. L. Retail competition and cooperative advertising / X. L. He, A. Krishnamoorthy, A. Prasad, S. P. Sethi // *Operations Research Letters*. – 2011. – V. 39. № 1. – pp. 11-16.
135. Herman, A. L. Direct optimization using collocation based on high-order Gauss-Lobatto quadrature rules/ A. L. Herman, B. A. Conway. // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 1996. – V. 19. № 3. – pp. 592-599. – <https://doi.org/10.2514/3.21662>
136. Hethcote, H. W. *The Mathematics of Infectious Diseases*. / H. W. Hethcote // *SIAM Review*. – 2000. – V. 42. № 4. – pp. 599–653. – <http://www.jstor.org/stable/2653135>.
137. Jian, H.. Recent Developments in Dynamic Advertising Research, / H. Jian, L. Mingming, L. Liping // *European Journal of Operational Research*. – 2012. – V. 220. № 3. – pp. 591–609.

138. Huntington, G. T. Optimal configuration of tetrahedral spacecraft formations. / G. T. Huntington, D. A. Benson, A. V. Rao. // Journal of the Astronautical Sciences. – 2007. – V. 55. № 2. – pp. 141–169. – <https://doi.org/10.1007/BF03256518>
139. Huntington, G. T. Optimal reconfiguration of spacecraft formations using the Gauss pseudospectral method. / G. T. Huntington, A. V. Rao. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2008. – V. 31. № 3. – pp. 689–698. – <https://doi.org/10.2514/1.31083>
140. Kameswaran, S. Convergence rates for direct transcription of optimal control problems using collocation at Radau points. / S. Kameswaran, L. T. Biegler. // Computational Optimization and Applications. – 2008. – V. 41. № 1. – pp. 81–126. – <https://doi.org/10.1007/s10589-007-9098-9>
141. Kimball, G. E. Some industrial applications of military operations research methods. / G. E. Kimball // Operations Research. – 1957. – V. 5. № 2. – pp. 201–204.
142. Korsun, O. N. Direct method for forming the optimal open loop control of aerial vehicles / O. N. Korsun, A. V. Stulovskii // J. Comput. Syst. Sci. Int. – 2019. – V. 58. № 2. – pp. 229–243. – <https://doi.org/10.1134/S1064230719020114>
143. Lambertini, L. Advertising in a dynamic spatial monopoly / L. Lambertini // European Journal of Operational Research. – 2005. – V. 166. № 2. – pp. 547–556.
144. Liu, C. Modeling and optimal control of a nonlinear dynamical system in microbial fed-batch fermentation / C. Liu, Z. Gong, E. Feng // Mathematical and Computer Modelling – 2011. – V. 53, Iss. 1–2. – pp. 168–178, – <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.08.001>.
145. Liu, F. Adaptive Mesh Refinement Method for Optimal Control Using Decay Rates of Legendre Polynomial Coefficients. / F. Liu, W. W. Hager, A. V. Rao //

- IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2018. – V. 26. № 4, – pp. 1475-1483. – <https://doi.org/10.1109/TCST.2017.2702122>.
146. Luebben, G. Study of optimal vaccination strategies for early COVID-19 pandemic using an age-structured mathematical model: A case study of the USA / G. Luebben, G. Gonzalez-Parra, B. Cervantes // *Mathematical Biosciences and Engineering* – 2023. – V. 20, Issue 6. – pp. 10828-10865. – <https://doi.org/10.3934/mbe.2023481>
147. Macalisang, J. Optimal Control for a COVID-19 Model Accounting for Symptomatic and Asymptomatic. / J. Macalisang, M. Caay, J. Arcede, R. Caganan // *Computational and Mathematical Biophysics*. – 2020. – 8. – pp. 168-179. – <https://doi.org/10.1515/cmb-2020-0109>.
148. *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: Models, Methods and Theory*. – Edited by C. Castillo-Chavez with S. Blower, P. van den Driessche, D. Kirschner, and A. A. Yakubu. – New York: Springer, 2002. – 377 p. – <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0065-6>.
149. *Mathematical Modeling of Business Reopening When Facing SARS-CoV-2 Pandemic: Protection, Cost, and Risk*. / H. Miao, Q. Gao, H. Feng [et al.] // *Front. Appl. Math. Stat.* – 2020. – 6 (35). – pp. 1-16. – <https://doi.org/10.3389/fams.2020.00035>.
150. Miller, J. C. Epidemics on Networks with Large Initial Conditions or Changing Structure. / J. C. Miller // *PLoS ONE*. – 2014. – 9 (7). – pp. 1-9. – <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0101421>.
151. Milyutin, A. A. *Calculus of variations and optimal control* / A. A. Milyutin and N. P. Osmolovskii // – Amer. Math. Soc., Providence, RI – 1998. – *Transl. Math. Monographs*, vol. 180.

152. Modelling and optimal control for a fed-batch fermentation process / C. Liu, Z. Gong, B. Shen, E. Feng // *Applied Mathematical Modelling*. – 2013. – V. 37. Iss. 3. – pp. 695-706. – <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.044>.
153. Modeling epidemics: A primer and Numerus Model Builder implementation / W. M. Getz, R. Salter, O. Muellerklein [et al.] // *Epidemics*. – 2018. – V. 25. – pp. 9–19. – <https://doi.org/10.1016/j.epidem.2018.06.001>.
154. Mukundan, R. Linear feedback strategies in non-zero-sum differential / R. Mukundan, W. B. Elsner // *International Journal of System Science*. – 1975. – V. 6. № 6. – pp. 513-532.
155. Nerlove, M. Optimal advertising policy under dynamic / M. Nerlove, K. J. Arrow // *Economica*. – 1962. – V. 29. № 114. – pp. 129-142.
156. Numerical Solution of Optimal Control Problems with Constant Control Delays. / Brandt-Pollmann, U., Winkler, R., Sager, S., Moslener, U., Schloder, J. // *Computational Economics*. – 2007. – V. 31. – pp. 181-206. – <https://doi.org/10.1007/s10614-007-9113-3>.
157. Nonlinear dynamical systems of fed-batch fermentation and their optimal control / C. Liu, Z. Gong, E. Feng, H. Yin // *International Journal of Systems Science* – 2012. – V. 43. Iss. 5. – pp. 809-819. – <https://doi.org/10.1080/00207721.2010.523800>
158. Ovsyannikova, N. I. Problem of optimal control of epidemic in view of latent period. / N. I. Ovsyannikova // *Civil Aviation High Technologies*. – 2017. – V. 20. № 2. – pp. 144-152.
159. Patterson, M. A. Exploiting sparsity in direct collocation pseudospectral methods for solving continuous-time optimal control problems. / M. A. Patterson, A. V. Rao // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 2012. – V. 49. № 2. – pp. 364–377. – <https://doi.org/10.2514/1.A32071>

160. Patterson, M. A. GPOPS-II: a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming. / M. A. Patterson, A. V. Rao. // ACM Trans Math Softw. – 2015. – V. 41. № 1. – pp. 1-37. – <https://doi.org/10.1145/2558904>
161. Pauwels, W. Optimal dynamic advertising policies in the presence of continuously distributed time lags. / W. Pauwels // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1977. – V. 22. № 1. – pp. 79-89.
162. Popkov, A. S. Optimal program control in the class of quadratic splines for linear systems / A. S. Popkov // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2020. – Т. 16. Вып. 4. – С. 462–470. – <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.411>
163. Poswiata, A. Optimal discrete processes, nonlinear in time intervals: theory and selected applications / A. Poswiata // Cybernetics and Physics. – 2012. – V. 1. № 2. – pp. 120–127.
164. Rao, A. V. A survey of numerical methods for optimal control / A. V. Rao // Advances in the Astronautical Sciences. – 2009. – V. 135. № 1. – pp. 497–528.
165. Rao A. V. Trajectory optimization: a survey / A. V. Rao // Optimization and optimal control in automotive systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Springer, Cham. – 2014. – vol 455. – pp. 3–21. – https://doi.org/10.1007/978-3-319-05371-4_1
166. Rodrigues H. S. Optimal Control and Numerical Software: An Overview / H. S. Rodrigues, M. T. T. Monteiro, D. F. M. Torres // Systems Theory: Perspectives, Applications and Developments – 2014. – pp. 93–110. – <https://doi.org/10.48550/arXiv.1401.7279>

167. Seasonal coronavirus protective immunity is short-lasting. / A. W. D. Edridge, J. Kaczorowska, A. C. R. Hoste [et al.] // *Nature Medicine*. – 2020. – 26. – pp. 1691-1693. – <https://doi.org/10.1038/s41591-020-1083-1>.
168. Sha, H. A discrete stochastic model of COVID-19 outbreak: forecast and control. / H. Sha, T. Sanyi, R. Libin // *Mathematical Biosciences and Engineering*. – 2020. – 17 (4). – pp. 2792-2804. – <https://doi.org/10.3934/mbe.2020153>.
169. Siettos, C. I. *Mathematical modeling of infectious disease dynamics* / C. I. Siettos, L. Russo // *Virulence*. Taylor and Francis Inc. – 2013. – V. 4, № 4. pp. 295–306.
170. Solow, R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth / R. M. Solow // *The Quarterly Journal of Economics*. – 1956. – V. 70. № 1. – pp. 65–94.
171. Solow, R. M. Technical Change and the Aggregate Production Function / R. M. Solow // *The Review of Economics and Statistics*. – 1957. – V. 39. № 3. – pp. 312–320.
172. Swan, T. W. Economic growth and capital accumulation / T. W. Swan // *The Economic Record*. – 1956. – V. 32. № 2. – pp. 334–361. – <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>.
173. Topputo, F. Survey of Direct Transcription for Low-Thrust Space Trajectory Optimization with Applications. / F. Topputo, C. Zhang // *Abstract and Applied Analysis*. – 2014. – V. 2014. Article ID 851720. – 15 p. – <https://doi.org/10.1155/2014/851720>
174. Varian, H. R. *Computational Economics and Finance Modeling and Analysis with Mathematica* / H. R. Varian – New-York : Springer, 1996. – 482 p.

175. Vidale, M. L. An operations-research study of sales response to advertising / M. L. Vidale, H. B. Wolfe // *Operations Research*. – 1957. – V. 5. № 3. – pp. 370-381.
176. Volz, E. Susceptible-infected-recovered epidemics in dynamic contact networks. / E. Volz, L. A. Meyers // *Proc. R. Soc. B*. – 2007. – 274. – pp. 2925-2934. – <https://doi.org/10.1098/rspb.2007.1159>.
177. de Vrieze, J. More people are getting COVID-19 twice, suggesting immunity wanes quickly in some. / J. de Vrieze // *Science*. – 2020. – [Электронный ресурс]. URL: <https://www.science.org/content/article/more-people-are-getting-covid-19-twice-suggesting-immunity-wanes-quickly-some> (дата обращения: 09.02.2021).
178. Wang, Q. A duopolistic model of dynamic competitive advertising / Q. Wang, A. Wu // *European Journal of Operational Research*. – 2001. – V. 128. № 1. – pp. 213-226.
179. Wang, T. Bilinear differential game for competitive advertising with stochastic disturbance and abrupt impact / T. Wang, C-K. Zhang, L. Yang // *Expert Systems with Applications*. – 2023. – V. 229. Part A. – 120446. – <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.120446>.
180. Wang, T. Infinite-time partially observed nonzero-sum bilinear affine-quadratic stochastic differential game and its application to competitive advertising / T. Wang, C-K. Zhang, L. Yang // *Asian J Control*. – 2023. – V. 25. Iss. 6 – pp. 4350–4369. – <https://doi.org/10.1002/asjc.3190>.
181. Zaczekiewicz, Z. Observability of small solutions of linear differential-algebraic systems with delays. / Z. Zaczekiewicz and V. Marchenko // *Control and Cybernetics*. – 2006. – V. 35. №. 4. – pp. 997-1013.

Справочники, электронные ресурсы

182. Валовой внутренний продукт. Годовые данные. В текущих ценах // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: <https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/94cQBbmp/tab1.htm> (дата обращения: 29.05.2021).
183. Витрина статистических данных. Численность постоянного населения на 1 января // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: <https://showdata.gks.ru/report/278928/> (дата обращения: 29.05.2021).
184. ВРП с 1998 года // Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Ульяновской области. [Электронный ресурс]. URL: [https://uln.gks.ru/storage/mediabank/ВРП с 1998 года\(46\).xlsx](https://uln.gks.ru/storage/mediabank/ВРП с 1998 года(46).xlsx) (дата обращения: 29.11.2021).
185. Ежеквартальные отчеты ПАО «Мегафон». [Электронный ресурс]. URL: http://corp.megafon.ru/investoram/disclosure/quarterly_reports (дата обращения: 01.10.2013)
186. Здравоохранение в России – 2019 г. [Электронный ресурс]. URL: https://gks.ru/bgd/regl/b19_34/Main.htm (дата обращения: 29.05.2021).
187. Как снизить абсентеизм и презентеизм в коллективе и повысить производительность труда? // Новости Франко-Российской торгово-промышленной палаты. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ccifr.ru/news/kak-snizit-absenteizm-i-prezenteizm-v-kollektive-i-povysit-proizvoditelnost-truda> (дата обращения: 29.05.2021).
188. Ключевая ставка Банка России // Банк России. [Электронный ресурс]. URL: https://www.cbr.ru/hd_base/KeyRate/ (дата обращения: 19.03.2023).
189. Коронавирус: дашборд. [Электронный ресурс]. URL: <https://datalens.yandex/covid19> (дата обращения: 29.11.2021).

190. Лаборатория инноваций Сингапурского университета технологий и дизайна. – 2020. – [Electronic resource]. URL: <https://ddi.sutd.edu.sg/>.
191. Наличие основных фондов по полной учётной стоимости на конец отчётного года // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/kAFrrpbg/NAL_vs.xlsx (дата обращения: 29.05.2021).
192. Основные демографические показатели по Ульяновской области // Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Ульяновской области. [Электронный ресурс]. URL: https://uln.gks.ru/storage/mediabank/ОСНОВНЫЕ_ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ_ПОКАЗАТЕЛИ.docx (дата обращения: 29.11.2021).
193. Отчёт о результатах деятельности ФОМС за 2020 год. [Электронный ресурс]. URL: https://www.ffoms.gov.ru/system-oms/about-fund/fund-activities/1_ОТЧЕТ_о_результатах_деятельности_ФОМС_за_2020_год.pdf (дата обращения: 29.11.2021).
194. Официальный сайт ПАО “ОАК”. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.uacrussia.ru/en/corporation/> (Accessed 1 June 2018).
195. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2020: Стат. сб. // Федеральная служба государственной статистики. - М., 2020. – 1242 с.
196. Рождаемость, смертность и естественный прирост // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: <https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/demo21.xls> (дата обращения: 29.05.2021).

197. Среднегодовая численность занятых по видам экономической деятельности в 2000-2015 гг. // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: <https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/05-05.xls> (дата обращения: 29.05.2021).
198. Среднегодовая численность занятых по видам экономической деятельности (начиная с 2015 года) // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/05-05_2015.xls (дата обращения: 29.05.2021).
199. Среднегодовая численность занятых по видам экономической деятельности с 2017 года (ОКВЭД2) // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/d6ZKIh10/05-05_2017-2019.xls (дата обращения: 29.05.2021).
200. Субсидия 30320P4O000 // Госрасходы. [Электронный ресурс]. URL: https://spending.gov.ru/subsidies/subsidies_list/30320P4O000/ (дата обращения: 29.11.2021).
201. Численность населения // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: <https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/demo11.xls> (дата обращения: 29.05.2021).
202. COVID-19 Dashboard by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University (JHU). [Электронный ресурс]. URL: <https://gisanddata.maps.arcgis.com/apps/opsdashboard/index.html#/bda7594740fd40299423467b48e9ecf6> (дата обращения: 09.02.2021).

203. Ourworldindata.org [Electronic resource]. – 2020. – URL: <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>.
204. The impact of the COVID-19 pandemic on the euro area labour market // ECB Economic Bulletin, Issue 8/2020. [Электронный ресурс]. URL: https://www.ecb.europa.eu/pub/economic-bulletin/articles/2021/html/ecb.ebart202008_02bc749d90e7.en.html#toc3 (дата обращения: 29.05.2021).
- Работы автора по теме диссертации из списка ВАК, Scopus, Wos**
205. Горбунов, В. К. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 67-84. (ВАК - К1, RSCI, Scopus - Q3, WoS)
206. Лутошкин, И. В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации / И. В. Лутошкин // Известия Иркутского государственного университета. Сер. “Математика”. – 2011. – Т. 4. № 1. – С. 44-56. (ВАК - К1, RSCI)
207. Лутошкин, И. В. Применение метода параметризации для дифференциально-алгебраических систем с точечным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Девиен // Автоматизация процессов управления. – 2013. – Т. 4. № 1. – С. 21-25. (ВАК - К2)
208. Лутошкин, И. В. Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями / И. В. Лутошкин, И. Е. Дергунов // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 110-119. (ВАК - К2)
209. Лутошкин, И. В. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина

- // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. – 2023. – Т.23. вып. 2. – С.264-273. – <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>, EDN: VTQTSM (ВАК - К1, RSCI, Scopus - Q3, WoS)
210. Лутошкин, И.В. Оптимизация в модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2024. – Т. 49. – С. 16–31. – <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.16> (ВАК - К1, RSCI, Scopus - Q2, WoS)
211. Лутошкин, И. В. Метод параметризации для моделирования управляемых систем с точечным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Автоматизация процессов управления. – 2010. – № 4 (22). – С. 21-25. (ВАК - К2)
212. Лутошкин, И. В. Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса / И. В. Лутошкин, А. Г. Чекмарев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2024. – Т. 26, № 3. – С. 260–279. – <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.260-279> (ВАК - К2, Scopus - Q3)
213. Лутошкин, И. В. Принцип максимума в задаче управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Журнал Средневолжского математического общества – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 96-104. (ВАК - К2)
214. Лутошкин, И. В. Существование решения задачи управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием / И. В. Лутошкин,

- Н. Р. Ямалтдинова // Известия Иркутского государственного университета. Сер. "Математика". – 2016. – Т. 18. – С. 48-59. (ВАК - К1, RSCI)
215. Лутошкин, И. В. Математическая модель управления многоканальной рекламой с эффектом распределенной отдачи / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование" (Вестник ЮУрГУ ММП). – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 52–66. – <https://doi.org/10.14529/mmp190404> (ВАК - К1, Scopus - Q3, WoS)
216. Лутошкин, И. В. Модель межцехового планирования с учетом производственных ограничений на примере авиастроительного предприятия / И. В. Лутошкин, М. Н. Ярдаева // Известия Самарского научного центра РАН – 2016. – Т. 18. № 4-3. – С. 505-509. (ВАК - К1)
217. Полянсков, Ю. В. Автоматизация процесса прогнозирования трудоёмкости проектирования и изготовления станочных приспособлений для механообработки самолетных деталей / Ю. В. Полянсков, И. В. Лутошкин, А. А. Блюменштейн // Известия Самарского научного центра РАН – 2016. – Т. 18. № 4-3. – С. 525-528. (ВАК - К1)
218. An integrated model as a tool for implementing an enterprise management method / S. V. Lipatova, M. N. Yardeeva, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Polyanskov // Journal of Physics: Conference Series 1333 (2019) 072015 – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1333/7/072015> (ВАК - К3, Scopus - Q4, WoS)
219. Digital enterprise comprehensive evaluation / Yu. V. Polyanskov, M. N. Yardeeva, S. V. Lipatova, I. V. Lutoshkin // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 971 (2020) 032097 – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/971/3/032097> (ВАК - К3, Scopus, WoS)

220. Gorbunov, V. The parameterization method in singular differential-algebraic equations / V. Gorbunov, I. Lutoshkin // Computational Science (ICCS 2003) / eds. P. Slot [et al.]. – LNCS 2658. – Springer, 2003. – pp. 483-491. (BAK - K1, Scopus - Q2, WoS)
221. Gorbunov, V. The parameterization method in optimal control problems and differential-algebraic equations / V. Gorbunov, I. Lutoshkin // Journal of computational and applied mathematics. – Elsevier, 2006. – V. 185, Iss. 2. – pp. 377–390. (BAK - K1, Scopus - Q2, WoS)
222. Gorbunov, V. K. A parametrization method for the numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Y. V. Martynenko // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – № 59. – pp. 639–655. (BAK - K1, Scopus - Q2, WoS)
223. Lutoshkin, I. V. Model of control over cutting tool demand in a machining shop / I. Lutoshkin, A. Madanov, Y. Polyanskov // MATEC Web of Conferences / International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2018) – 2018. – V. 224. № 01083. – pp. 1-5. – <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822401083> (BAK - K3, Scopus, WoS)
224. Lutoshkin, I. V. The dynamic model of advertising costs with continuously distributed lags / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // CEUR-WS. – 2018 – V. 2018. – pp. 103-112. (BAK - K3, Scopus, WoS)
225. Lutoshkin, I. V. The dynamic model of advertising costs / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research. – 2018. – V. 52. № 1. – pp. 201-213. (BAK - K1, Scopus - Q3, WoS)
226. Lutoshkin, I. V. Dynamic model of real investment with lags. / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // Journal of Physics: Conference Series. 1353 012128, –

2019. – pp. 1-7. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012128> (BAK - K3, Scopus, WoS)
227. The Mathematical Model for Describing the Principles of Enterprise Management «Just in Time, Design to Cost, Risks Management» / I. Lutoshkin, S. Lipatova, Y. Polyanskov [et al] // Recent Research in Control Engineering and Decision Making. ICIT 2019. Studies in Systems, Decision and Control. – 2019. – V. 199. – Springer, Cham. – pp. 682–695. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_55 (BAK - K1, Scopus, WoS)
228. Model of production schedule modification assessment for digital production management systems / Y. Polyanskov, I. Lutoshkin, M. Yardaeva, S. Lipatova // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 497 (2019) 012082 IOP Publishing. – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/497/1/012082> (BAK - K3, Scopus, WoS)
229. Polyanskov Y. V. The model of choice of machine retaining devices for technological preparation of production / Y. V. Polyanskov, I. V. Lutoshkin, A. A. Blyumenshteyn / Journal of Physics: Conference Series. International Scientific Conference "Conference on Applied Physics, Information Technologies and Engineering - APITECH-2019". – 2019. – 33063. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/3/033063> (BAK - K3, Scopus, WoS)

Монографии

230. Лутошкин И. В. Система управления процессами цифрового производства высокотехнологичных изделий на базе комплексной модели оценки деятельности предприятия: монография / Ю. В. Полянский, И. В. Лутошкин, С. В. Липатова [и др.]. – Ульяновск : УлГУ, 2021. – 259 с. – ISBN 978-5-88866-848-1 – 30 п. л. (в т.ч. авт. – 4,29 п. л.)

231. Лутошкин И. В. Новая экономическая реальность: задачи и решения : монография / под редакцией Е. М. Белого. – Ульяновск : УлГУ, 2022. – 236 с. – ISBN 978-5-88866-909-9 – 14 п. л. (в т.ч. авт. – 0,69 п. л.)

232. Лутошкин И. В. Динамические модели экономических систем и методы их анализа : монография / И. В. Лутошкин. – Ульяновск : УлГУ, 2024. – 188 с.

Свидетельства о регистрации программ

233. Липатова С. В., Лутошкин И. В., Ярдаева М. Н. Программа формирования структуры комплексной модели для оценки деятельности предприятия. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662087. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619515 от 10.09.2018.

234. Липатова С. В., Лутошкин И. В., Ярдаева М. Н. Программа формирования структуры КРІ предприятия и ведения базы их значений. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662135. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619513 от 10.09.2018.

235. Липатова С. В., Мартыненко Ю. В., Ярдаева М. Н., Лутошкин И. В., Чувашлова М. В. Программа построения когнитивной карты взаимосвязей между внутренними факторами деятельности предприятия и факторами внешней среды. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019662689. Дата рег.: 01.10.2019. Заявка № 2019661505 от 18.09.2019.

236. Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г. Программа численного решения задач оптимального управления методом параметризации управления. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023681809. Дата рег.: 18.10.2023. Заявка № 2023680653 от 10.10.2023.

237. Ямалтдинова Н. Р., Лутошкин И. В. Численные методы решения задач оптимизации рекламных затрат в динамических моделях рекламных затрат

с распределенным запаздыванием. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662134. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619515 от 10.09.2018.

Публикации в журналах и сборниках конференций

238. Лутошкин, И. В. Моделирование отдачи от частоты рекламных воздействий / И. В. Лутошкин // Прикладная эконометрия. – 2010. – Т. 19, № 3. – С. 101–111. (ВАК - К1, RSCI, Scopus - Q3)
239. Лутошкин, И. В. Разработка инструментария оценки деятельности предприятия в условиях цифрового производства / И. В. Лутошкин, С. В. Липатова, М. Н. Ярдаева // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2018. – Т. 11, № 6. – С. 9–21. – <https://doi.org/10.18721/JE.11601> (ВАК - К1)
240. Лутошкин, И. В. Сравнение продаж продукции различных видов в зависимости от рекламных воздействий / И. В. Лутошкин, Е. В. Мартыненко // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством. – 2015. – Т. 3, № 25. – С. 113–121. (ВАК - К2)
241. Лутошкин, И. В. Анализ влияния цифровых технологий на развитие национальной экономики / И. В. Лутошкин, А. А. Парамонова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 20–31. – <https://doi.org/10.18721/JE.12402> (ВАК - К1)
242. Лутошкин, И. В. Моделирование управления экономикой региона в условиях массовых заболеваний / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Экономика региона. – 2023. – Т. 19, № 2. – С. 299–313. – <https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2023-2-1> (ВАК - К1, Scopus - Q2, WoS)

243. Лутошкин, И. В. Математическое моделирование функций сбыта / И. В. Лутошкин, А. Н. Чекмарева // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством. – 2016. – Т. 1, № 27. – С. 82-90. (ВАК - К2)
244. Бородастова, И. В. Метод параметризации в задачах с разрывными фазовыми траекториями / И. В. Бородастова, И. В. Лутошкин // Труды четвертой международной научно-технической конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2001. – С. 34–35.
245. Горбунов, В. К. Метод параметризации в вырожденных задачах оптимального управления / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Труды XII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 24 июня - 1 июля 2001 г. – Иркутск : Из-во ИСЭМ СО РАН. – 2001.
246. Горбунов, В. К. Решение дифференциально-конечных систем методом параметризации / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Сборник трудов Международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения” (26-31 мая 2002 г.) – Самара : СГАСА, 2002. – С. 86-92.
247. Горбунов, В. К. Метод параметризации для решения неявных дифференциальных уравнений / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин, Ю. В. Мартыненко // Обратные и некорректные задачи прикладной математики: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 2-8 июля 2005 года. Том. 3, Иркутск : Из-во ИСЭМ СО РАН. – 2005. – С. 100-105.

248. Лутошкин, И. В. Применение метода параметризации в вырожденных вариационных задачах / И. В. Лутошкин // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т.8. Вып. 2. – С. 636.
249. Лутошкин, И. В. Построение производственных функций с использованием рекламы / И. В. Лутошкин // Труды 4-й всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования». – Ульяновск. – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2013. – С. 160-162.
250. Лутошкин, И. В. Метод параметризации для оптимизационных задач с переменным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Девиен // Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов. Материалы докладов II Всероссийской научно-практической конференции Казань, 21-22 апреля 2011 г. – Казань : КГФЭИ, 2011. – С. 209–212.
251. Лутошкин, И. В. Метод параметризации в моделях с интегродифференциальными связями / И. В. Лутошкин, И. Е. Дергунов // Труды седьмой международной научной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2009. – С. 168–169.
252. Лутошкин, И. В. Формализация некоторых подходов в управлении бюджетной организацией / И. В. Лутошкин, И. Н. Ковалев // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова]. 2023. – С. 412-417.

253. Лутошкин, И. В. Запаздывание рекламных воздействий в торговых компаниях / И. В. Лутошкин, Е. В. Мартыненко, О. А. Мкртычян // Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов. Материалы докладов II Всероссийской научно-практической конференции Казань, 21-22 апреля 2011 г. – Казань : КГФЭИ, 2011. – С. 212–216.
254. Лутошкин, И. В. Анализ влияния информационно-коммуникационных технологий на макроэкономические показатели России / И. В. Лутошкин, А. А. Парамонова, // ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА И ИНДУСТРИЯ 4.0: ТЕНДЕНЦИИ 2025. Сборник трудов научно-практической конференции с международным участием. Под редакцией А. В. Бабкина. 2019 (INDUSTRY-2019, Санкт-Петербург, 03–05 апреля 2019 г.) – Издательство: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого"(Санкт-Петербург). – 2019. – С.115-120. – <https://doi.org/10.18720/IEP/2019.1/14>
255. Лутошкин, И. В. Анализ влияния внешних факторов на деятельность АО "АВИАСТАР-СП" / Лутошкин И. В., Пирогова А. С. // В сборнике: Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования. Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2017. – С. 19-20.
256. Лутошкин, И. В. Проблема оценки параметров математической модели влияния пандемии на экономику. / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Сборник тезисов докладов конгресса молодых ученых. Электронное издание. – СПб : Университет ИТМО, 2021 – URL: <https://kmu.itmo.ru/digests/article/7045>

257. Лутошкин, И. В. Временное дезагрегирование статистических значений экономических показателей / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // В сборнике: Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях цифровизации экономики. Сборник научных статей по итогам II Всероссийского научно-практического семинара. Нижний Новгород. – 2022. – С. 103-109.
258. Лутошкин, И. В. Многокритериальная оптимизация в задаче оптимального управления экономическим субъектом в условиях массового заболевания / М. С. Рыбина, И. В. Лутошкин // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова]. 2023. – С. 468-474.
259. Лутошкин, И. В. Метод параметризации для анализа моделей экономической динамики с запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. – Вып. 5. – С. 106–112.
260. Лутошкин, И. В. Метод параметризации в моделях с постоянным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Труды седьмой международной научной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2009. – С. 170–171.
261. Лутошкин, И. В. Метод параметризации в задачах управления с интегро-дифференциальными связями / И. В. Лутошкин, А. Х. Хасанова // Труды пятой международной научно-практической конференции с международным участием «Математическое моделирование физических, экономиче-

- ских, социальных систем и процессов». (16-18 июня 2003 г., г. Ульяновск). – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2003. – С. 119-121.
262. Лутошкин, И. В. Разработка инструмента моделирования для задач экономической динамики / А. Г. Чекмарев, И. В. Лутошкин // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова], 2023. – С. 482-486.
263. Лутошкин, И. В. Модель оптимизации рекламных расходов с учетом распределенного запаздывания / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании. Математика и статистика: сб. тр. IV Междунар. науч.-практ. конф. (2 июня 2015, г. Тверь). – Тверь : Тверс. государственный университет, 2015. – С. 84-89.
264. Лутошкин, И. В. Динамическая модель распределения рекламного бюджета между несколькими медиаканалами / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы: сб. трудов шестой всерос. науч. конф. – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2016. – С. 38-40.
265. Лутошкин, И. В. Численный анализ динамической модели рекламных расходов / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: материалы VII всерос. науч. конф. имени Е.В. Воскресенского (12-15 июля 2016, г. Саранск). – Саранск : СВМО, 2016. – С. 61-62.

266. Лутошкин, И. В. Инновационные инструменты управления рекламной кампанией фирмы / Лутошкин И. В., Ямалтдинова Н. Р. // В сборнике: Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования. Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2017. – С. 20-21.
267. Лутошкин, И. В. Модель управления деятельностью промышленного предприятия в условиях цифрового производства / Лутошкин И. В., Ярдаева М. Н., Липатова С. В. // В сборнике: Цифровая экономика промышленности и сферы услуг: состояние и тенденции развития. Труды XVI научно-практической конференции с международным участием (ЭКОПРОМ-2018). Под редакцией А. В. Бабкина. – СПб: ФГАОУ ВО "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого 2018. – С. 190-194. – <https://doi.org/10.18720/IEP/2018.5/19>
268. Gorbunov, V. K. The parameterization method for numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // International Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics Moscow, June 19-25, 2006. – Sect. №4 – pp. 64-65.
269. Gorbunov, V. K. The variational spline method for singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // 3-d International Conference Computational methods in applied mathematics: СМАМ-3, June 25 - 30, 2007, Minsk, Belarus.
270. Gorbunov, V. K. Variational splines for numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // 6-th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 16-20 July 2007, Zurich, Switzerland, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.

271. Lutoshkin, I. V. The parameterization method for numerical solution of singular differential equations / I. V. Lutoshkin, V. K. Gorbunov // The seminar NUMDIFF-11 “Numerical treatment of differential equations”. Halle (Saale), Germany, Martin-Luther-University Halle-Wittenberg, September 4-8, 2006. – pp. 42.

Приложение 1.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018662087

**Программа формирования структуры комплексной модели
для оценки деятельности предприятия**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский
государственный университет» (RU)*

Авторы: *Липатова Светлана Валерьевна (RU), Лутошкин Игорь
Викторович (RU), Ярдаева Маргарита Николаевна (RU)*

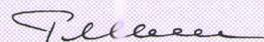
Заявка № **2018610516**

Дата поступления **10 сентября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **27 сентября 2018 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 **Г.П. Ивлиев**



Приложение 2.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018662135

**Программа формирования структуры КРІ предприятия и
ведения базы их значений**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский
государственный университет» (RU)*

Авторы: *Липатова Светлана Валерьевна (RU), Лутошкин Игорь
Викторович (RU), Яраева Маргарита Николаевна (RU)*

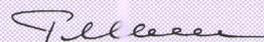
Заявка № **2018619513**

Дата поступления **10 сентября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **27 сентября 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Изrael**



Приложение 3.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018662134

Численные методы решения задач оптимизации рекламных затрат в динамических моделях рекламных затрат с распределенным запаздыванием

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный университет» (RU)*

Авторы: *Ямалтдинова Наля Ринатовна (RU),
Лутошкин Игорь Викторович (RU)*

Заявка № **2018619515**

Дата поступления **10 сентября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **27 сентября 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Ислюев**



Приложение 4.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019662689

**Программа построения когнитивной карты взаимосвязей
между внутренними факторами деятельности предприятия
и факторами внешней среды**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский
государственный университет» (RU)*

Авторы: *Липатова Светлана Валерьевна (RU), Мартыненко Юлия
Вячеславовна (RU), Ярдаева Маргарита Николаевна (RU),
Лутошкин Игорь Викторович (RU), Чуваилова Марина
Владимировна (RU)*

Заявка № 2019661505

Дата поступления 18 сентября 2019 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 01 октября 2019 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 Г.П. Ивлиев



Приложение 5.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023681809

**Программа численного решения задач оптимального
управления методом параметризации управления**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Ульяновский государственный университет" (RU)*

Авторы: *Лутошкин Игорь Викторович (RU), Чекмарев
Артем Геннадьевич (RU)*

Заявка № 2023680653

Дата поступления 10 октября 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 18 октября 2023 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов