

на правах рукописи



**Лутошкин Игорь Викторович**

**Разработка, анализ и применение  
оптимизационных динамических моделей  
экономических систем с запаздыванием**

1.2.2. Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Ульяновск – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ульяновский государственный университет» на кафедре цифровой экономики

**Научный консультант:** **Горбунов Владимир Константинович,**  
доктор физико-математических наук, профессор

**Официальные оппоненты:** **Вельмисов Петр Александрович,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный  
технический университет»,  
кафедра «Высшая математика», профессор кафедры  
**Леонтьев Виктор Леонтьевич,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого», Передовая инженерная  
школа «Цифровой инжиниринг», Высшая школа  
передовых цифровых технологий, профессор  
**Сараев Леонид Александрович,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГАОУ ВО «Самарский национальный  
исследовательский университет имени  
академика С.П. Королева», кафедра математики и  
бизнес-информатики, профессор кафедры

**Ведущая организация:** **ФГБУН Институт динамики систем и теории  
управления имени В.М. Матросова СО РАН**

Защита состоится 28.05.2025 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.422.04, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ульяновский государственный университет» по адресу: 432017, г. Ульяновск, ул. Набережная реки Свияги, д. 106, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на официальном сайте вуза <https://ulsu.ru>, с авторефератом – на сайте Высшей аттестационной комиссии при Минобрнауки России <https://vak.minobrnauki.gov.ru>.

Отзывы на автореферат просим высылать по адресу: 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет», отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан «    »

2025 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Волков Максим Анатольевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Современные информационные системы развиваются в сторону решения интеллектуальных задач, традиционно решаемых человеком. Ядром таких систем могут стать математические модели, содержащие блок управления и позволяющие рационально выбирать управляющие воздействия на допустимом множестве. Таким образом, стимулируется разработка новых оптимизационных моделей и методов их применения. Для решения конечномерных оптимизационных задач существует широкий спектр эффективных методов. Однако, если в оптимизационной задаче присутствует фактор времени, то задача существенно усложняется, и требуются специализированные методы.

Основы современной теории ОУ заложены в основном классическими работами Р. Беллмана, Л.С. Понтрягина и их учеников, когда актуальные проблемы того времени (управление летательными аппаратами, автоматическое управление, космическая навигация и т.д.) стимулировали развитие нового аппарата моделирования. В 70-е годы 20-го века область приложения теории ОУ нашла применение в рамках экономических и социально-экологических проблем. Так на основе аппарата теории ОУ были построены динамические макроэкономические модели (однопродуктовая модель, двухсекторная модель): Р.М. Солоу, Л.В. Канторович, М. Интрилигатор, В.Ф. Кротов и др., а также микроэкономические модели (модели фирм, управление рекламными расходами, кредитная стратегия и т.д.): М. Нерлов, К. Дж. Эрроу, М. Л. Видаль, Х. Б. Вольф, М. Блок<sup>1</sup>, В. А. Дыхта<sup>2</sup>, О. Н. Самсонок, Х. Джян<sup>3</sup>, Л. Липин и др. При управлении экономическими процессами часто возникает ситуация, при которой реакция системы на внешнее воздействие, изменение свойств системы происходят с запаздыванием во времени: Р. Аллен, А.Г. Гранберг, В.П. Максимов<sup>4</sup>, П.М. Симонов<sup>5</sup>, Дж.-П. Обин, У. Брандт-Поллман<sup>6</sup> и др. Анализ таких про-

<sup>1</sup>Blok, M.W. J. *Dynamic Models of the Firm*. – Berlin : Springer, 1996. – 193 p.

<sup>2</sup>Дыхта В. А., Самсонок О. Н. *Оптимальное импульсное управление с приложениями*. – М. : Физматлит, 2000. – 256 с.

<sup>3</sup>Jian H., Mingming L., Liping L. *Recent Developments in Dynamic Advertising Research* // *European Journal of Operational Research*. – 2012. – V. 220. № 3. – pp. 591–609.

<sup>4</sup>Максимов, В. П. *Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики* // *Прикладная математика и вопросы управления*. – 2019. – № 4. – С. 124-135.

<sup>5</sup>Симонов, П. М. *Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики* // *Вестник Перм. ун-та. Сер. Экономика*. – 2014. – № 1. – С. 14–27.

<sup>6</sup>Brandt-Pollmann U., Winkler R., Sager S., Moslener U., Schloder J. *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Constant Control Delays* // *Comput. Economics*. – 2007. – V. 31. – pp. 181-206.

цессов возможен на основе математических моделей, учитывающих эффект запаздывания, с последующим применением соответствующих методов.

Несмотря на развитие математического аппарата моделирования экономических проблем, большая часть решения практических задач в экономике сводится к применению регрессионно-корреляционного анализа со всеми преимуществами и недостатками этого подхода. Трудности применения других подходов связаны со сложностью разработки математических моделей, где одним из объектов моделирования является поведение человека (социума), а также сложностью использования численных методов, соответствующих предметной области. Таким образом, потребность преодоления указанных сложностей, развитие интеллектуальных информационных систем в управлении экономическими процессами, стимулирует создание новых оптимизационных моделей и методов их анализа.

Актуальность темы подтверждается также тем, что результаты диссертации были получены при выполнении ряда научных проектов: разработка метода параметризации в грантах РФФИ: № 01-01-00731 «Вариационные методы регуляризации и решения вырожденных уравнений и неравенств» (2001-2003 гг.); № 07-01-90000 Вьет/а «Разработка качественной теории и методов приближенного решения дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)» (2007-2008 гг.); создание модели управления инвестициями, модели формализации принципов управления производственным предприятием, модели рекламных воздействий использовались в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ № 2.1816.2017/4.6 по теме «Исследование и разработка интегрированной автоматизированной системы управления производственно-технологическим планированием авиастроительного предприятия на базе цифровых технологий» (2017-2019 гг.); в рамках гранта РФФИ № 24-28-00542 «Разработка информационно-аналитического инструмента моделирования и оптимизации управления социально-экономическими системами в условиях массового заболевания» (2024-2025 гг.) используется модель управления социально-экономическими системами в условиях массового заболевания.

**Степень научной разработанности темы исследования.** Современное состояние проблемы численного решения задач ОУ характеризуется многообразием и сложностью подходов, часто ориентированных на достаточно узкий класс задач (А. В. Аргучинцев, В. А. Срочко<sup>7</sup>, Д. А. Бенсон,

---

<sup>7</sup>Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управ-

А. В. Рао<sup>8</sup>, Ж. Т. Хантингтон, Т. П. Торвальдсен, Ф. Бирал, Е. Бертолаци, П. Босетти<sup>9</sup>, Б. А. Конвэй<sup>10</sup> и др.).

Первым типом методов решения задач ОУ является метод конечно-разностных аппроксимаций (отражен в монографиях Э. Полака, Д. Табака и Б. Куо), когда дифференциальная система заменяется конечно-разностной. К полученной конечномерной задаче НП можно применять соответствующие численные методы. Недостатки подхода: метод приводит, как правило, к задачам большой размерности и сложной структуры; в нем плохо учитывается специфика задач ОУ; происходит резкое усложнение задачи с увеличением интервала, на котором решается задача ОУ; с уменьшением шага дискретизации растет накапливаемая ошибка, порождаемая соответствующей дискретной схемой.

Второй тип методов базируется на методах, основанных на условиях экстремума, главным образом принципа максимума Л. С. Понтрягина. Они сводят исходную экстремальную задачу к нелинейной краевой задаче относительно фазовых и сопряженных переменных с условием максимума, позволяющим выразить параметры управления через эти переменные. Здесь можно выделить методы: сведение задачи ОУ к задаче отыскания корней трансцендентной функции, методы переноса граничных условий, метод Крылова-Черноусько. Недостатки подхода: задача получения параметров управления через фазовые и сопряженные переменные в нетривиальных случаях сложна; полученное решение чаще всего является только претендентом на оптимальное; если на оптимальной траектории встречаются участки с особым управлением, то методы становятся неработоспособными в окрестности оптимального решения; для задач ОУ с промежуточными фазовыми ограничениями необходимые условия формулируются настолько сложно (А. Д. Иоффе, Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко), что применение методов данного класса становится практически невозможным.

Третий тип методов решения объединяет методы, в которых минимизация на основе конечномерной модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2022. – Т. 18. Вып. 1. – С. 179-187.

<sup>8</sup>Benson D. A., Huntington G. T., Thorvaldsen T. P., Rao A. V. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2006. – V. 29. № 6. – pp. 1435–1440.

<sup>9</sup>Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems // IEEEJ Journal of Industry Applications. – 2016. – V. 5. № 2. – pp. 154–166.

<sup>10</sup>Conway B. A. A Survey of Methods Available for the Numerical Optimization of Continuous Dynamic Systems. // J. Optim. Theory Appl. – 2012. – V. 152. – pp. 271–306.

ция функционала исходной задачи выполняется градиентными методами в некотором функциональном пространстве на основе вычисления соответствующих градиентов минимизируемого функционала и функционалов, определяющих ограничения задачи. Градиенты функционалов вычисляются с помощью сопряженных переменных, причем для каждого функционала решается своя сопряженная задача Коши. Этот класс прямых методов (не использующих на итерациях условий экстремума) представлен в монографиях Р. П. Федоренко и Ф. П. Васильева. Наиболее развитыми численными методами данного типа являются варианты метода проекции градиента (метод условного градиента, метод минимальной поправки, алгоритм восстановленного градиента и др.) и метод последовательной линеаризации. Недостаток метода проекции градиента: построение проекции фиксированного управления на ограничивающее множество зачастую является задачей по сложности равносильной исходной. Недостатки метода последовательной линеаризации: сложность построения области, которой должно принадлежать линейное приращение управления; сложность определения величины приращения. Также, трудность этих методов заключается в сложности достаточной точной аппроксимации функциональных производных при численной реализации.

Развиваются методы, в которых применяется параметризация функций, входящих в постановку задачи ОУ. Для линейных задач ОУ рассматривается параметризация управления и переход к специальным задачам линейного программирования<sup>11</sup> (Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Н. М. Дмитрук). Для билинейных задач ОУ предлагается параметризация управления кусочно-постоянными функциями<sup>7</sup>, таким образом, исходная задача ОУ сводится к конечномерной задаче квадратичного программирования. Кроме того, в ряде работ (Е. В. Аксеньюшкина, В. А. Срочко<sup>12</sup>, А. В. Чернов<sup>13</sup>, О. Н. Корсун, А. В. Стуловский<sup>14</sup>, А. Посвиата<sup>15</sup>) применяется парамет-

---

<sup>11</sup>Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М. Численные методы оптимизации нестационарных многомерных систем с полиэдральными ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45. № 4. – С. 617–636.

<sup>12</sup>Срочко В. А., Аксеньюшкина Е. В. Параметризация некоторых задач управления линейными системами // Известия Иркутского государственного университета. Сер. “Математика”. – 2019. – Т. 30. С. 83–98.

<sup>13</sup>Чернов, А. В. О применении функций Гаусса для численного решения задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 6. – С. 51–69.

<sup>14</sup>Korsun O. N., Stulovskii A. V. Direct method for forming the optimal open loop control of aerial vehicles // J. Comput. Syst. Sci. Int. – 2019. – V. 58. № 2. – pp. 229–243.

<sup>15</sup>Poswiata A. Optimal discrete processes, nonlinear in time intervals: theory and selected applications // Cybernetics and Physics. – 2012. – V. 1. № 2. – pp. 120–127.

ризация управляющего воздействия на основе линейной комбинации некоторого базиса функций с последующим анализом специфицированной задачи. Для выбранной параметризации и специфицированной задачи предлагаются прямые алгоритмы решения.

Активно разрабатывается класс прямых методов решения задач ОУ, основанных на сведении исходной проблемы к задаче НП за счет представления фазовых переменных в виде полиномиальных сплайнов, управляющих переменных в виде сеточной функции (Дж. Т., Беттс<sup>16</sup>, Д.А. Бенсон, А.В. Рао<sup>17</sup>, Ж.Т. Хантингтон, Т.П. Торвальдсен, Дж. Элнагар, М. Раззаджи<sup>18</sup>, П. Дж. Энрайт, Б. А. Конвэй<sup>10</sup>). В данном классе много работ посвящено прямым ортогональным коллокационным методам гауссовских квадратур (Д. Гарг, М. А. Паттерсон, В. В. Хагер<sup>19</sup>, Д. А. Бенсон, А. В. Рао<sup>17</sup>, Ж. Т. Хантингтон, Т. П. Торвальдсен, К. Гонг, И. М. Росс, В. Канг, Ф. Фахру<sup>20</sup>, С. Л. Дарбу<sup>21</sup>, Дж. Элнагар, М. Раззаджи<sup>18</sup>, М. Каземи, С. Камесваран, Л. Т. Биглер<sup>22</sup>). Во всех этих работах аппроксимирующие полиномы строятся в форме Лагранжа или Чебышёва. Различие определяется выбором точек квадратурной формулы, так можно выделить подходы Лежандра-Гаусса<sup>17</sup>, Лежандра-Гаусса-Радау<sup>17,21,22,23</sup>, Лежандра-Гаусса-Лобатто<sup>18,24</sup>.

На основе коллокационных методов реализованы программные моду-

---

<sup>16</sup>Betts J. T. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1998. – V. 21. № 2. – pp. 193–207.

<sup>17</sup>Benson D. A., Huntington G. T., Thorvaldsen T. P., Rao A. V. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2006. – V. 29. № 6. – pp. 1435–1440.

<sup>18</sup>Elnagar G., Razzaghi M. A collocation-type method for linear quadratic optimal control problems // Optimal Control Applications and Methods – 1998. – Vol. 18, № 3. – pp. 227–235.

<sup>19</sup>Garg, D. Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems. / D. Garg, W.W. Hager, A.V. Rao. // Automatica. – 2011. – V. 47. № 4 – pp. 829–837

<sup>20</sup>Gong Q., Ross I. M., Kang W., Fahroo F. Connections between the covector mapping theorem and convergence of pseudospectral methods // Computational Optimization and Applications. – 2008. – V. 41. № 3. – pp. 307–335.

<sup>21</sup>Darby, C. L. Costate estimation using multiple-interval pseudospectral methods. / C. L. Darby, D. Garg, A. V. Rao. // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2011. – V. 48. № 5. – pp. 856–866.

<sup>22</sup>Kameswaran S., Biegler L. T. Convergence rates for direct transcription of optimal control problems using collocation at Radau points // Computational Optimization and Applications. – 2008. – V. 41. № 1. – pp. 81–126.

<sup>23</sup>Liu F., Hager W.W., Rao A. V. Adaptive Mesh Refinement Method for Optimal Control Using Decay Rates of Legendre Polynomial Coefficients // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2018. – V. 26. № 4, – pp. 1475–1483.

<sup>24</sup>Herman, A. L. Direct optimization using collocation based on high-order Gauss-Lobatto quadrature rules/ A. L. Herman, B. A. Conway. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1996. – V. 19. № 3. – pp. 592–599.

ли (У. М. Агамави, А. В. Рао<sup>25</sup>), в которых для решения получаемых задач НП используются соответствующие методы первого и второго порядка. Вычисление соответствующих производных выполняется на основе конечной разности первого порядка, а полученная задача может иметь достаточно большую размерность (У. М. Агамави, А. В. Рао<sup>25</sup>, М. А. Паттерсон<sup>26</sup>, Ф. Топпуто, С. Джанг<sup>27</sup>). Последнее вынуждает применять алгоритмы, не требующие вычисления производных, например, генетические алгоритмы (Б. А. Конвэй<sup>10</sup>), метод Хука-Дживса (А. В. Чернов<sup>13</sup>). Можно сделать вывод, что при параметризации функций, входящих в исходную задачу ОУ, эффективное применение оптимизационных методов первого и второго порядка весьма затруднительно. Это объясняется тем, что получаемые задачи НП опосредованно задают зависимость целевой и ограничивающих функций от переменных (параметров), следовательно, вычисление производных становится сложным в нелинейных задачах ОУ.

В диссертации для численного анализа динамических экономических моделей используется и развивается относительно новый класс аналитико-численных методов ОУ, основанный на априорном представлении искомого управления в кусочно-аналитическом параметризованном виде на временных интервалах с переменными узлами и введении сопряжённых дифференциальных уравнений, упрощающих вычисления производных функционалов задачи. Идея данного класса методов параметризации была предложена и реализована в работах В. К. Горбунова (1978 г., 1979 г.). Достоинством подхода является разделение дискретизации задач Коши в исходной проблеме ОУ и решение задачи НП.

Повышение сложности математических моделей реальных объектов и процессов приводит к ряду проблем. Так при численном решении задач ОУ трудности вызывают задачи с особым управлением<sup>28</sup>, задачи с промежу-

---

<sup>25</sup>Agamawi, Y. M. CGPOPS: A C++ Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using Adaptive Gaussian Quadrature Collocation and Sparse Nonlinear Programming. / Y. M. Agamawi, A. V. Rao – ACM Trans Math Softw. – 2020. – V. 46. № 3. – pp. 1-38.

<sup>26</sup>Patterson, M. A. GPOPS-II: a MATLAB software for solving multiple phase optimal control problems using hp-adaptive gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming. / M. A. Patterson, A. V. Rao. // ACM Trans Math Softw. – 2015. – V. 41. № 1. – pp. 1-37.

<sup>27</sup>Topputo, F. Survey of Direct Transcription for Low-Thrust Space Trajectory Optimization with Applications. / F. Topputo, C. Zhang // Abstract and Applied Analysis. – 2014. – V. 2014. Article ID 851720. – 15 p.

<sup>28</sup>Антоник В. Г., Срочко В. А. Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 4. – С. 564-572.



точными фазовыми ограничениями<sup>29</sup>. Задачи с промежуточными фазовыми ограничениями возникают при моделировании процессов стабилизации, демпфирования<sup>29</sup>, экономических процессов<sup>1</sup>, задачи с особым управлением в ракетодинамике, космической навигации, электротехнике (Г. Келли, Р. Копп, Г. Мойер).

Тренд на развитие систем принятия решений в управлении экономическими системами влечет создание новых оптимизационных моделей, учитывающих динамику экономических факторов. Информатизация деятельности на предприятии вынужденно требует формализации самих принципов управления<sup>30 31</sup>, для этого разрабатываются экономико-математические модели на основе использования адекватного математического инструментария. Важной проблемой является учет инвестиционной политики в экономической системе. Здесь одной из первых моделей является модель Солоу-Свана: предполагается, что инвестиции свое влияние оказывают на выпуск в тот же временной такт, когда они были введены. Следующим шагом в развитии инвестиционных моделей стала модель двухсекторной экономики (М. Интрилигатор). Развитие инвестиционных моделей на основе модели Солоу-Свана получило в ряде работ<sup>32 33 34</sup>. Модели с запаздыванием в освоении инвестиций развивались авторами: Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов, А. В. Прасолов<sup>35</sup>, П. М. Симонов<sup>36</sup>, А. Б. Поманский, Г. Ю. Трофимов.<sup>37</sup>

---

<sup>29</sup>Костюкова О. И., Прищепова С. В. Конечный алгоритм решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями в дискретные моменты времени // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. № 2. – С. 189-206.

<sup>30</sup>Клочков, В. В. Проблема обеспечения производства авиационной техники "Точно в срок" и концепция "Быстро реагирующего производства" / В. В. Клочков, В. А. Вдовенков // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. № 1(5). – С. 1418-1425.

<sup>31</sup>Мультиагентная система "Smart Factory" для стратегического и оперативного управления машиностроительным производством "Точно в срок" и "Под заданную стоимость" / В. И. Баклашов, Д. Н. Казанская, П. О. Скобелев [и др.] // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. № 1(5). – С. 1292-1295.

<sup>32</sup>Красовский А. А. Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста // Автоматика и телемеханика – 2007. – № 10. – С. 38–52.

<sup>33</sup>Esfandiari M. Dynamic Optimization of Capital Stock: An Application of Maximum Principle // Ind. Eng. Manag. Syst. – 2020. – V. 19. № 3. – pp. 589–596.

<sup>34</sup>Fabbri, G. Dynamic programming, maximum principle and vintage capital / G. Fabbri, M. Iacopetta. – MPRA, 2007. – paper № 5115. – 54 p.

<sup>35</sup>Прасолов А. В. Математические методы экономической динамики. 2-е изд., испр. – СПб. : Изд-во Лань, 2015. – 352 с.

<sup>36</sup>Симонов П. М. Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики // Вестник Перм. ун-та. Сер. Экономика. – 2014. – № 1. – С. 14–27

<sup>37</sup>Поманский, А. Б. Математические модели в теории экономического цикла / А. Б. Поманский, Г. Ю. Трофимов // Экономика и математические методы. – 1989. – Т. 25. Вып. 5. – С. 825-840.

Моделирование рекламных воздействий с распределенным запаздыванием началось с дискретных статистических моделей (С. В. Дж. Гренжер). Эффект запаздывания в рекламе с непрерывно распределенным воздействием позднее был смоделирован в работе А. Бенсоуссана, А. Бультеза, П. Наерта<sup>3</sup>, данная модель была модифицирована У. Пауэлсом. Предполагается, что эффект от рекламного воздействия длится от момента его произведения до текущего момента времени. Однако, для товаров кратковременного пользования нет необходимости рассматривать длительные интервалы воздействия. Также в моделях А. Бенсоуссана, А. Бультеза, П. Наерта, У. Пауэлса не учитывается влияние на спрос факторов нерекламного характера. Также можно отметить модель рекламы М. Нерлова, К. Дж. Эрроу. В развитиях этой модели были выделены такие нерекламные факторы как цена товара (Ж. М. Эрикссон, Ж. И. Фрачтер, Л. Ламбертини), его качество (П. Д. Джованни), узнаваемость бренда (А. Буратто, Ж. Закур). Второй классической моделью, учитывающей рекламные воздействия, является модель М. Л. Видаля, Х. Б. Вольфа. В этой модели, а также ее расширениях<sup>3</sup> (К. Р. Дил, Р. Мукандан, В. Б. Элснер) учитывают долю охваченного рынка, делают предположение об ограниченности рынка. Ещё один подход в моделировании рекламы основывается на учете нескольких участников рынка: строятся кооперативные и антагонистические оптимизационные модели. Можно выделить ряд авторов<sup>3</sup> (Дж. Хан, С. П. Сети, С. С. Сью, С. С. П. Ям, Дж. Ванг, Ю. Ли, В. Джанг, С. Жанг, П. Е. Эзимаду, С. Ферштман, Т. Ванг, К. Ванг, А. Ву, Л. Янг и др.), развивающих модель Кимбелла.

Математическое моделирование развития массовых заболеваний привело к созданию моделей для прогнозирования развития эпидемий и пандемий. Первый тип моделей связан с использованием статистических методов (Д. Бенвенуто, М. Джованетти, Л. Вассало<sup>38</sup>, Ф. Броуер, С. Кастилло-Чавес<sup>39</sup>, Б. Хайес, С. И. Сиеттос, Л. Руссо<sup>40</sup>). Второй тип моделей характеризуется наличием «континуальных» связей в виде системы дифференциальных либо интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (модели класса SIS, SIR, SIIR, SEIR, SVIR разраба-

<sup>38</sup>Application of the ARIMA model on the COVID-2019 epidemic dataset / D. Benvenuto, M. Giovanetti, L. Vassallo [et al] // Data in Brief – 2020. – V. 29.

<sup>39</sup>Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical models in population biology and epidemiology – V. 40. New York : Springer, 2012. – 508 p.

<sup>40</sup>Siettos C. I., Russo L. Mathematical modeling of infectious disease dynamics // Virulence. Taylor and Francis Inc. – 2013. – V. 4, № 4. pp. 295–306.

тывались рядом авторов (Ф. Броуер, С. Кастилло-Чавес<sup>39</sup>, Х. В. Хифкот<sup>41</sup>, В. М. Гетц, Р. Солтер, О. Мюллерклейн<sup>42</sup>, С. И. Сиеттос, Л. Руссо<sup>40</sup> и др.). Третий тип моделей предполагает наличие целевых показателей и способы их достижения (модели управления). В качестве целевых критериев могут выступать: минимизация числа заболевших; минимизация смертности, вызванной заболеванием; минимизация рецессии экономики; оценка готовности системы здравоохранения к решению проблем, вызванных пандемией; многофакторная оценка управленческих решений. Математическое моделирование детерминированных управляемых эпидемий рассматривалось рядом авторов (Е. А. Андреева<sup>43</sup>, Н. А. Семькина, И. Д. Колесин, Е. Житкова<sup>44</sup>, М. С. Гомес, Ф. А. Рубио, Е. И. Мондрагон<sup>45</sup>, Ж. Люббен, Ж. Гонсалес-Парра, Б. Сервантес<sup>46</sup>, С. Кастилло-Чавес<sup>47</sup>). Отметим, что данные модели являются медико-биологическими, в них слабо отражаются социальные показатели, которые существенно влияют на поведение населения в условиях пандемии.

**Объект и предмет диссертационного исследования.** Объектом исследования являются производственные и экономические процессы, формализуемые (моделируемые) обыкновенными дифференциальными, интегральными и разностными уравнениями, и численные методы решения задач оптимального управления процессами рассматриваемых классов. Предмет исследования – метод параметризации для решения задач ОУ с учетом точечного и распределенного запаздываний; динамические модели экономических систем; алгоритмы, программное обеспечение, позволяющие находить оптимальное управление в задачах инвестирования про-

---

<sup>41</sup>Hethcote, H.W. The Mathematics of Infectious Diseases. / H.W. Hethcote // SIAM Review. – 2000. – V. 42. № 4. – pp. 599–653.

<sup>42</sup>Modeling epidemics: A primer and Numerus Model Builder implementation / W. M. Getz, R. Salter, O. Muellerklein [et al.] // Epidemics. – 2018. – V. 25. – pp. 9–19.

<sup>43</sup>Андреева Е. А., Семькина Н. А. Оптимальное управление процессом распространения инфекционного заболевания с учетом латентного периода // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 7. – С. 1174–1180.

<sup>44</sup>Колесин И. Д., Житкова Е. Управление в социально-экономических, медикобиологических системах // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 6. – С. 109–120.

<sup>45</sup>Gomez M. C., Rubio F. A., Mondragon E. I. Qualitative analysis of generalized multistage epidemic model with immigration // Mathematical Biosciences and Engineering – 2023. – V. 20, Issue 9. – pp. 15765–15780.

<sup>46</sup>Luebben G., Gonzalez-Parra G., Cervantes B. Study of optimal vaccination strategies for early COVID-19 pandemic using an age-structured mathematical model: A case study of the USA // Mathematical Biosciences and Engineering – 2023. – V. 20, Issue 6. – pp. 10828–10865.

<sup>47</sup>Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: Models, Methods and Theory. – Edited by C. Castillo-Chavez with S. Blower, P. van den Driessche, D. Kirschner, and A. A. Yakubu. – New York : Springer, 2002. – 377 p.

изводства, построения рекламных стратегий, управления экономической системой в условиях массового заболевания, формализации принципов менеджмента.

**Цель и задачи диссертационного исследования.** Целью исследования является разработка эффективных алгоритмов и соответствующих программных реализаций, позволяющих на основе единого подхода решать задачи ОУ, содержащие дифференциальные, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения с точечным запаздыванием, и исследовать новые классы математических моделей экономических систем.

Исходя из поставленной цели, формулируются следующие задачи:

1. разработка метода параметризации для задач ОУ, содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием;
2. разработка метода параметризации для задач ОУ, содержащих интегро-дифференциальные связи;
3. обоснование сходимости метода параметризации по количеству параметров в параметризованной функции управления;
4. разработка модели, формализующей принципы менеджмента “точно в срок”, “под заданную себестоимость”, “с учетом рисков” в виде задачи ОУ;
5. разработка инвестиционной модели с точечным запаздыванием при освоении инвестиций;
6. разработка инвестиционной модели с распределенным запаздыванием при освоении инвестиций;
7. разработка моделей построения рекламных стратегий с учетом запаздывания отдачи от рекламных воздействий;
8. разработка модели управления экономической системой в условиях массового заболевания;
9. разработка концепции построения программных средств, реализующих метод параметризации;
10. проведение вычислительных экспериментов для определения эффективности метода параметризации;
11. проведение вычислительных экспериментов для верификации предлагаемых моделей.

**Методологическую основу диссертационного исследования** составили методология математического моделирования, теория оптимального управления, численные методы решения дифференциальных, интегро-дифференциальных, интегральных уравнений, динамических оптимизаци-

онных задач, методы конечномерного программирования, статистические методы, методы программирования.

**Научная новизна** исследования заключается в разработке нового численного метода решения задач оптимального управления, что позволяет на основе единого подхода решать различные задачи ОУ с запаздыванием, в которых динамика описывается дифференциальными уравнениями, интегро-дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с точечным запаздыванием. Разработан новый класс моделей, позволяющий учитывать запаздывание в оптимизационных моделях в управлении производственными, организационно-техническими, экономическими динамическими системами: управление инвестициями, построение рекламной стратегии, формализация принципов менеджмента, управление экономической системой в условиях массового заболевания. Предложена концепция построения программных средств для реализации нового численного метода решения задач ОУ.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Метод параметризации для решения задач ОУ, содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием.

2. Метод параметризации для решения задач ОУ, содержащих интегро-дифференциальные связи.

3. Обоснование сходимости метода параметризации по функционалу задачи ОУ, учитывающей запаздывание. Доказывается сходимость при сгущении узлов параметризованного управления.

4. Модели экономических систем, представленные в терминах задач ОУ с точечным запаздыванием: класс моделей управления организационно-техническими системами; двухсекторная модель управления производственными инвестициями в экономике с запаздыванием как в управлении, так и в фазовых переменных; класс моделей управления экономической системой в условиях массового заболевания с учетом социальных и экономических показателей.

5. Модели экономических систем, представленные в терминах задач ОУ с распределенным запаздыванием: инвестиционная модель производственной компании; обобщенная модель построения рекламных стратегий.

6. Концепция построения программных средств для реализации метода параметризации, ориентированного на решение задач оптимального управления, учитывающих запаздывание в дифференциальных уравнениях как

по фазовым переменным, так и по управляющим.

7. Проблемно-ориентированный комплекс, предназначенный для решения задач ОУ с точечным и распределенным запаздыванием как в фазовых, так и в управляющих переменных. Реализация комплекса на языке С++ позволяет эффективно включать вспомогательные вычислительные алгоритмы: методы решения задач нелинейного программирования, методы решения задач Коши, методы численного интегрирования и дифференцирования.

Положения 1-3 соответствуют п. 2 паспорта специальности 1.2.2, положения 4, 5 соответствуют п. 1 паспорта специальности 1.2.2, положения 6, 7 соответствуют п. 3 паспорта специальности 1.2.2.

**Теоретическая значимость** работы обусловлена разработкой нового численного метода, позволяющего на основании единого подхода решать эффективно задачи ОУ, содержащие: дифференциальные уравнения; интегро-дифференциальные уравнения; параметры, требующие оптимизации. Разработан новый класс моделей, позволяющих учитывать запаздывающий эффект в управлении производственными, организационно-техническими, экономическими динамическими системами: инвестиционные модели, модели построения рекламных стратегий, модели управления экономикой в условиях массового заболевания, модели формализации принципов менеджмента.

**Практическая значимость** исследования заключается в том, что разработанный метод параметризации может применяться для решения различных задач оптимального управления, возникающих при моделировании процессов, требующих оптимизации. Разработанные модели позволяют находить оптимальное управление для экономической системы в задачах инвестирования, построения рекламной стратегии, управлении экономикой в условиях массового заболевания. При разработке высокоинтеллектуальных систем управления предприятием (фирмой, организацией) предлагаемые модели могут стать ядром, обеспечивающим выработку решения для управляющего органа с учетом соответствующих принципов менеджмента.

Результаты диссертационного исследования относительно моделей управления организационно-техническими системами (обобщенная математическая модель управления предприятием с учетом принципов менеджмента «точно в срок, под заданную себестоимость, с учетом рисков», а также её частные случаи: модификация производственного плана,

управление потребностью в режущем материале, выбор оснастки, инвестиционная модель) внедрены в деятельность Управления перспективного развития филиала ПАО «Ил»-Авиастар.

Инвестиционная модель производственной компании и обобщенная модель построения рекламных стратегий внедрены в деятельность Ульяновской областной торгово-промышленной палаты.

Модель управления экономической системой в условиях массового заболевания внедрена в деятельность администрации Губернатора Ульяновской области, в научно-исследовательскую деятельность научно-исследовательского технологического института им. С. П. Капицы ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет».

Результаты исследования используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»: для программ бакалавриата в дисциплинах «Реклама на рынке ИКТ», «Математические модели рекламных воздействий», «Моделирование рекламных воздействий»; для программ магистратуры в дисциплинах «Динамические модели экономики», «Оптимальное управление в экономике»; для программ аспирантуры в дисциплине «Математические, статистические и инструментальные методы экономики».

**Степень достоверности полученных результатов.** Достоверность выводов и результатов исследования обеспечена научной методологией исследования, предполагающей доказательность теоретических выводов и их верификацию по наблюдениям/измерениям характеристик моделируемого объекта, корректным использованием численных методов, методов программирования, апробацией выводов диссертации.

**Апробация результатов исследования.** Апробация основных положений диссертационной работы проведена на Байкальском международном школе-семинаре “Методы оптимизации и их приложения” (Иркутск, 2001), Computational Science - ICCS 2003 (Санкт-Петербург, 2003), Numerical treatment of differential equations (Halle (Saale), Germany, 2006), 3d International Conference Computational methods in applied mathematics: CMAM-3 (Minsk, Belarus, 2007), 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (Zurich, Switzerland, 2007), Международной научной школе-семинаре “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ” (Саранск, 2009, 2016), Международной научной конференции “Математическое моделирование физических, экономиче-

ских, социальных систем и процессов” (Ульяновск, 2009), II Всероссийской научно-практической конференции “Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов” (Казань, 2011), Международной научно-практической конференции “Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании” (Тверь, 2015, 2016), Международном молодежном симпозиуме по управлению, экономике и финансам (Казань, 2016), VI Всероссийской научной конференции с международным участием “Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы” (Ульяновск, 2016), семинаре “Workshop on Computer Modelling in Decision Making” (Саратов, 2017, 2018, 2022), XVI научно-практической конференции с международным участием, “Цифровая экономика промышленности и сферы услуг: состояние и тенденции развития” (Санкт-Петербург, 2018), Международной конференции “Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении” (Севастополь, 2018, 2020), Международной научно-практической конференции ICIT-2019 “Информационно-коммуникационные технологии в науке и производстве” (Саратов, 2019), VII научно-практической конференции “Цифровые технологии в экономике и промышленности” (ЭКОПРОМ-2019) (Санкт-Петербург, 2019), VI научно-практической конференции с зарубежным участием “Цифровая экономика и Индустрия 4.0: форсайт Россия” (INDUSTRY-2020) (Санкт-Петербург, 2020), Всероссийском научно-практическом семинаре “Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях цифровизации экономики” (Нижний Новгород, 2022, 2023, 2024), Научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых “Научные исследования и разработки молодых ученых” (Ульяновск, 2023, 2024), VIII Международной школе-семинаре “Нелинейный анализ и экстремальные задачи” (Иркутск, 2024), XI Международной научной молодежной школе-семинаре “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ” имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 2024), семинаре по теории управления и динамике систем под руководством академика Ф.Л. Черноусько (ИПМех РАН, Москва, 2024).

**Публикации.** По результатам диссертационного исследования опубликовано 67 научных работ, из них: 25 работ в журналах, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов докторских диссертаций, включая 17 в изданиях, входящих в международные реферативные базы



WOS и Scopus, 3 монографии, получены 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ. Полный список публикаций приводится в конце автореферата.

**Личный вклад.** Все основные результаты, представленные в диссертации, установлены автором самостоятельно. Разработан численный метод решения задач оптимального управления (метод параметризации) для задач содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием [7, 28] и распределенным запаздыванием [2, 28]. В совместной работе [7] автору принадлежит общая постановка задачи, вывод формул для вычисления производных по параметрам управляющих функций. Совместно с Горбуновым В.К. доказана теорема о сходимости метода параметризации в случае, когда динамика описывается ОДУ [1]. Обобщение теоремы о сходимости на случай запаздывания в дифференциальных связях сделано самостоятельно [28]. Предлагаемые оптимизационные модели экономической динамики разработаны автором либо полностью самостоятельно, либо под его руководством. Так обобщенная модель управления предприятием с учетом определенных принципов менеджмента [23, 26, 28, 63] была разработана автором самостоятельно, её частные случаи: модель модификации производственного плана совместно с Ярдаевой М.Н. [24, 26], модель управления потребностью в режущем материале самостоятельно [19], обобщенная модель выбора оснастки самостоятельно [27, 28], её частный случай для дискретного производства [25] совместно с Блюменштейном А.А. Модели управления инвестициями: постановка модели двухсекторной экономики с постоянным лагом запаздывания [7] предложена автором, модель оптимальной инвестиционной стратегии с распределенным лагом [22] разработана совместно с Ямалтдиновой Н.Р. Модель частоты рекламного воздействия [34] разработана самостоятельно. Обобщенная многоканальная динамическая модель управления рекламными затратами [28] разработана и обоснована автором самостоятельно, её частные случаи [9–11, 20, 21, 59–62] совместно с Ямалтдиновой Н.Р. Разработка модели управления экономической системой в условиях массового заболевания [5, 38, 52, 54] была проведена совместно с Рыбиной М.С. В свидетельствах о регистрации программ [29, 30] диссертант разрабатывал общую структуру комплексной модели совместно с соавторами, в [31, 51] диссертант разрабатывал набор показателей, внешних по отношению к предприятию, в свидетельствах [32, 33] диссертанту принадлежит разработка и реализация алгоритмов решения задач оптимально-

го управления методом параметризации. В работах [40–43, 46, 47, 55–57, 64–67] диссертант разрабатывал и реализовывал алгоритмы решения задач оптимального управления методом параметризации, а также проводил вычислительные эксперименты. В [39] автором предложена математическая модель производственных функций. В [53] автор предложил некоторые методы дезагрегирования статистических данных, необходимых для определения параметров в задаче управления экономической системой в условиях массового заболевания. В совместных работах с Чекмаревым А.Г. [8, 58] диссертант разрабатывал алгоритмы решения задач оптимального управления.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и пяти приложений. Общий объём диссертации 320 страниц, включая 21 рисунок и 34 таблицы. Основной текст диссертации составляет 279 страниц. Список литературы состоит из 271 наименования.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** раскрывается актуальность темы исследования, сформулированы объект и предмет исследования, поставлены цели и задачи, дана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, приведены сведения об апробации результатов и публикациях.

**Первая глава** посвящена методу параметризации. В параграфе 1.1 рассматривается задача ОУ со связями в виде ОДУ:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0; \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (2)$$

$$\begin{cases} g_l(x(T)) = 0, & l = 1, \dots, m_1; \\ g_l(x(T)) \leq 0, & l = m_1 + 1, \dots, m; \end{cases} \quad (3)$$

$$J = g_0(x(T)) \rightarrow \min. \quad (4)$$

Здесь  $x$  – вектор фазовых переменных ( $x \in R^n$ ),  $u$  – вектор управления ( $u \in R^r$ ). Функции  $f_i(x, u)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и  $g_l(z)$ ,  $1 \leq l \leq m$ ,  $z \in R^n$ , считаются дважды непрерывно дифференцируемыми по всем переменным. Правая часть системы дифференциальных уравнений (1) удовлетворяет условию сублинейного роста. Множество  $U$  – выпуклый компакт,  $U \subset R^r$ ; каждому допустимому управлению  $u(t)$  отвечает траектория  $x(t)$  системы (1), определенная на  $[t_0, T]$ ; задача (1)-(4) разрешима в классе кусочно-непрерывных функций  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ .

Введем разбиение промежутка  $[t_0, T]$ :

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \equiv T. \quad (5)$$

Закрепим структуру управления:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, r, \quad (6)$$

где  $v_\mu^k \in R^d$ . При подстановке управления (6) в (1) получается решение  $z(t)$ , зависящее от параметров управления  $w^k = (t_k, v^k)$ .

Введем функции от управляющих параметров  $\{w^k\} : \varphi_l(w^1, \dots, w^N) = g_l(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))$ ,  $l = 0, 1, \dots, m$ . В терминах этих функций задача (1)-(4) принимает форму задачи НП:

$$\begin{aligned} \varphi_0(w^1, \dots, w^N) &\rightarrow \min \quad \text{при ограничениях} \\ \varphi_l(w^1, \dots, w^N) &= 0, \quad 1 \leq l \leq m_1, \\ \varphi_l(w^1, \dots, w^N) &\leq 0, \quad m_1 + 1 \leq l \leq m, \\ W &= \{w^k : w_0^{k-1} \leq w_0^k, u^k(t; v^k) \in U, w_{0,0}^{k-1} \leq t \leq w_{0,0}^k, \\ &\quad k = 1, \dots, N; w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leq T^*\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В задаче (7) связь между переменными обусловлена условием (1). Определим функцию Понтрягина  $H(p, x, u) = \langle p, f(x, u) \rangle$ , введем сопряженную вектор-функцию  $p^l(t) = (p_1^l(t), \dots, p_n^l(t))$ :

$$\begin{cases} \dot{p}^l = - \frac{\partial H(p^l(t), x, u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x(t)}, & t_0 \leq t \leq T, \\ p^l(T) = \frac{\partial g_l(z)}{\partial z} \Big|_{z=x(T)}, & l = 0, 1, \dots, m. \end{cases}$$

**Теорема 1.** Пусть функции  $f, g_l, l = 0, 1, \dots, m$ , входящие в постановку задачи (1)-(4), непрерывно дифференцируемы по фазовым и управляющим переменным, функции  $u^k(t, v^k)$  непрерывно дифференцируемы по  $v^k, k = 1, 2, \dots, N$ , тогда для первых производных функций  $\varphi_l$  по параметрам управления верны формулы:

$$\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = H(p^l(t_k), x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}));$$

$$\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = H(p^l(T), x(T), u(T));$$

$$\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u^k(t; v^k))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} dt.$$

В теореме 2 диссертации приведены формулы вычисления производных второго порядка функций  $\varphi_l$ .

**В параграфе 1.2** рассматривается задача ОУ с точечным запаздыванием:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)); \quad (8)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (9)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0; \quad (10)$$

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min. \quad (11)$$

Здесь  $x$  – фазовая переменная ( $x \in R^n$ );  $u$  – вектор управления ( $u \in R^r$ );  $f : R^{1+2n+r} \rightarrow R^n$ ,  $g : R^n \rightarrow R$ ,  $\psi : R \rightarrow R^n$ . Рассматривается динамика  $x$ ,  $u$  при  $t_0 \leq t \leq T$ . Функция  $\psi(t)$  описывает поведение  $x$  до момента  $t_0$ . Скалярная величина  $h > 0$  определяет точечное запаздывание системы. Решение задачи (8)-(11) может быть найдено в классе кусочно-непрерывных управляющих функций.

Пусть управление (9) параметризовано в виде (5), (6), тогда решение  $z(t)$  задачи (8), (10) принимает зависимость от  $w^k = (t_k, v^k)$ . Введем функцию  $\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))$ . Исходная задача (8)-(11) редуцируется к задаче НП:

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min_W. \quad (12)$$

Множество  $W$  определено в (7), а формальная функция  $\varphi(\cdot)$  определена посредством решения системы дифференциальных уравнений (8), (10).

Введем функцию Понтрягина  $H(t, p, x, \xi, u) = \langle p, f(t, x, \xi, u) \rangle$  и сопряженную систему на  $t_0 \leq t \leq T$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H(p(t), x, \xi, u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x(t), \xi=x(t-h)} \\ - \frac{\partial H(p(t+h), x, \xi, u(t+h))}{\partial \xi} I(t \in [t_0; T-h]) \Big|_{x=x(t+h), \xi=x(t)} \end{array} \right.$$

с конечным условием  $p(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x(T)}$ .

**Теорема 4.** Пусть функции  $f, g$ , входящие в постановку задачи (8)-(11), непрерывно дифференцируемы по всем переменным, функции в параметризованном управлении (6) непрерывно дифференцируемы по параметрам  $v^k, k = 1, \dots, N$ . Тогда для вычисления первых производных целевого функционала задачи (12) по параметрам верны формулы:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = H(T, p(T), x(T), x(T - h), u^N(T, v^N));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, p(\tau), x(\tau), x(\tau - h), u(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau.$$

В параграфе 1.3 рассматривается задача ОУ с распределенным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = \psi \left( t, x(t), u(t), \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds \right), \quad x(t_0) = x^0; \quad (13)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (14)$$

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min. \quad (15)$$

Предполагается, что фазовая переменная  $x \in R^n$ , управление  $u \in R^r$ , множество  $U$  замкнуто в  $R^r$ . Функции  $\psi : R^{1+n+r+m} \rightarrow R^n$ ,  $f : R^{2+n+r} \rightarrow R^m$  и  $g : R^n \rightarrow R$  непрерывны и непрерывно-дифференцируемы по всем переменным в некоторых областях соответствующих пространств. Предполагается, что задача (13)-(15) разрешима в классе кусочно непрерывных функций  $u(t)$ .

При подстановке управления (5), (6) в (13) получается траектория  $z(t)$ , зависящая от параметров управления  $w^k = (t_k, v^k)$ . Введем функцию  $\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))$ . В этом случае задача (13)-(15) формально принимает форму задачи НП:

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min_W. \quad (16)$$

Множество  $W$  определено как в (7). Функция  $\varphi(\cdot)$  определяется через систему интегро-дифференциальных уравнений (13).

Обозначим  $q(t) = \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds$ ,  $h(t, s, x, u) = \frac{\partial f(t, s, x, u)}{\partial t}$ . Введем функцию Понтрягина

$$H(t, x, q, u, p_x, p_q) = \langle p_x(t), \psi(t, x, u, q) \rangle + \langle p_q(t), f(t, t, x, u) \rangle + \int_t^T \langle p_q(s), h(s, t, x, u) \rangle ds$$

и сопряжённую систему:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(t) &= - \left[ \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} \right]^T p_x(t) - \\ &\left[ \frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(t) - \int_t^T \left[ \frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(s) ds; \\ \dot{p}_q(t) &= - \left[ \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \right]^T p_x(t) \end{aligned}$$

с конечным условием  $p_x(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}$ ,  $p_q(T) = 0$ .

**Теорема 5.** Пусть функции  $f$ ,  $g$ ,  $\psi$ , входящие в постановку задачи (15)-(13), непрерывно дифференцируемы по всем переменным, функции в параметризованном управлении (6) непрерывно дифференцируемы по параметрам  $v^k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Тогда для вычисления первых производных целевого функционала задачи (16) верны формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k - 0), p_x(t_k), p_q(t_k)) - \\ &H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k + 0), p_x(t_k), p_q(t_k)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} &= H(T, x(T), q(T), u(T), p_x(T), p_q(T)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), q(\tau), u(\tau), p_x(\tau), p_q(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau. \end{aligned}$$

В параграфе 1.4 исследуется сходимость метода параметризации, доказывается теорема о сходимости по функционалу от количества параметров в параметризованной функции управления.

**Вторая глава** исследования содержит оригинальные модели, посвященные описанию некоторых проблем экономической динамики. В **параграфе 2.1** предложена математическая модель формализации управления предприятием с учетом принципов “точно в срок”, “под заданную себестоимость”, “с учетом рисков” и их интеграция.

В рамках модели процесс производства продукта разбивается на конечное число этапов; результат каждого этапа количественно измерим и достигается за фиксированный временной интервал. Значение результата определяется количественным набором ресурсов и производственных факторов и описывается соответствующей производственной функцией. Делается предположение о зависимости от времени результата этапов, наборов ресурсов и производственных факторов. Устанавливая горизонт планирования и другие дополнительные условия, в модели можно описать определенные принципы управления предприятием. С точки зрения математических условий, модель представляет собой задачу ОУ.

Так принцип управления “точно в срок” сводится к решению динамической системы с точечным запаздыванием, в рамках которой требуется формирование расписания задействования ресурсов и факторов для каждого этапа. Целью информационной системы (ИС) предприятия является автоматизированное обеспечение, ресурсов оптимальным образом. В случае внеплановых изменений, вызванных внешним воздействием, в ИС происходит уточнение решения в задаче ОУ.

Принцип “под заданную себестоимость” описывается за счет введения кумулятивных издержек на производство продукции за период планирования, формулируется требование обеспечения себестоимости продукции не выше заданной. Ставится задача поиска необходимых ресурсов и факторов с условием выполнения плановых показателей и обеспечения заданной себестоимости. Получаемая задача ОУ позволяет строить оптимальное плановое распределение ресурсов и факторов.

Для описания принципа “с учетом рисков” вводятся случайные величины, оказывающие негативные влияния на получение результата на этапах: потери ресурсов; потери факторов; организационно-технологические потери. Вводится зависимость случайных величин от значений факторов, ресурсов, а также времени. Для оценки рисков определяется функция потерь (функция штрафов), которая вычисляет суммарные потери компании при выходе за фиксированные допустимые нормы. Поиск оптимального набо-

ра ресурсов и факторов, обеспечивающих плановые показатели с учетом порогового значения функции потерь, представляет собой задачу ОУ с запаздыванием.

Обеспечение интегрального принципа управления “точно в срок, под заданную себестоимость, с учётом рисков” представляет собой объединение трех рассматриваемых моделей в одну: при заданном периоде планирования, заданной себестоимости, фиксированном итоговом выпуске и заданных нормах потерь найти набор ресурсов и факторов, удовлетворяющих всем введенным ограничениям. Если такие наборы ресурсов и факторов неединственны, то любой такой набор рассматривается в качестве решения интегрального принципа. Выбор оптимального набора интегрального принципа обеспечивается за счет введения дополнительного критерия.

В подразделах 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 приведены частные случаи модели управления некоторыми процессами на производственном предприятии с учетом принципов управления. Так в 2.1.2 предлагается модель модификации производственного плана, в рамках модели описаны принципы “точно в срок”, “с учётом рисков”. В 2.1.3 предлагается модель управления потребностью в режущем инструменте, в рамках модели описаны принципы “точно в срок”, “под заданную себестоимость”. В 2.1.4 дана обобщенная модель выбора оснастки, приведена формализация принципов “точно в срок”, “с учётом рисков”, “под заданную себестоимость”.

**В параграфе 2.2** описаны модели управления инвестициями. **В подразделе 2.2.2** представлена модифицированная модель двухсекторной экономики: отдача от инвестиций в производственные фонды и соответствующее управленческое решение происходят с постоянной задержкой. Динамика фондов представляется:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha u(t - \tau_1)x_1(t - \tau_1) - \mu_1 x_1(t), \\ \dot{x}_2 = \alpha(1 - u(t - \tau_2))x_1(t - \tau_2) - \mu_2 x_2(t). \end{cases} \quad (17)$$

Различие в лагах запаздывания  $\tau_1, \tau_2$  объясняется различной организационной технологией в секторах. Начальное состояние задается известными функциями  $x_1^0(t), x_2^0(t), u^0(t)$  при  $t \leq t_0$ . Управление  $u$  обозначает долю фондов первого сектора, направляемую на воспроизводство:

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (18)$$

Критерием качества является максимизация суммарного потребления



благ на интервале планирования  $[t_0; T]$ :

$$\int_{t_0}^T x_2(t) dt \rightarrow \max. \quad (19)$$

Формулируется задача оптимального распределения выпускающих фондов для достижения максимального суммарного выпуска потребительских благ в виде задачи ОУ с точечным запаздыванием: максимизация (19) при условиях (17), (18),  $x_1(t) = x_1^0(t)$ ,  $x_2(t) = x_2^0(t)$ ,  $u(t) = u^0(t)$  при  $t \leq t_0$ .

**В подразделе 2.2.3** представлена инвестиционная модель производственной компании. Пусть  $y(t)$  – доход фирмы в момент времени  $t$ ;  $I(t)$  – реальные инвестиции в  $t$ ;  $v(t)$  – кумулятивный инвестиционный эффект к моменту  $t$ ;  $w(t)$  – совокупный эффект от факторов, отличных от реальных инвестиций в  $t$ .

Для оценки неинвестиционных факторов используются значения дохода в прошлые моменты времени:

$$v(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(\tau) I(t - \tau) d\tau; \quad w(t) = g(y(t - \tau_3)); \quad y(t) = f(v(t), w(t)). \quad (20)$$

Функция  $G(\tau)$  определяет распределенный характер временной отдачи от инвестиций в стационарных условиях развития фирмы. Кумулятивный эффект от инвестиций наблюдается на множестве  $[\tau_1; \tau_2]$  (теоретически  $\tau_2$  может быть равно  $+\infty$ , но на практике это значение ограничено). К функции  $G(\tau)$  выдвигаются требования:  $G(\tau) \geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty)$ ;  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G(\tau) = 0$ ;  $\exists \tau^* : G(\tau)$  возрастает при  $\tau \in [0; \tau^*)$ ,  $G(\tau)$  убывает при  $\tau \in (\tau^*; +\infty)$ .

Функция  $f(v, w)$ , является аналогом производственной функции, следовательно: функция  $f(v, w) \geq 0, \forall v, w$ ; функция  $f(v, w)$  возрастает по переменной  $v$ ; если инвестиции идут на восполнение или расширение фондов без изменения технологии, то функция  $f(v, w)$  вогнута по  $v$ .

Функция  $g(y)$  представляет собой оценку влияния факторов, отличных от реальных инвестиций. Параметр  $\tau_3$  является постоянным лагом.

Ограничения на функцию инвестиций записываются в виде:

$$0 \leq I(t) \leq \hat{I}(t), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (21)$$

Здесь  $\hat{I}(t)$  – детерминированная функция, описывающая стратегию по формированию инвестиционного бюджета.

Совокупная прибыль на плановом периоде определяется функционалом:

$$J(I(\cdot)) \equiv \Pi(T) = \int_{t_0}^T (y(t) - I(t) - c(y(t), t)) dt. \quad (22)$$

Формулируется задача ОУ с эффектом последействия: максимизировать функционал (22) со связями на фазовые переменные (20) и ограничениями на управление (21). Также в подразделе 2.2.3 формулируется другой вид ограничений на инвестиции и приводятся условия, позволяющие поставить задачу определения инвестиционной стратегии с учетом принципов управления “точно в срок” и “под заданную себестоимость”.

**В параграфе 2.3** представлены модели управления рекламными затратами. В подразделе 2.3.1 приведена модель управления одноканальной рекламой, в подразделе 2.3.2 – многоканальной рекламой.

Пусть  $y(t)$  – доход фирмы в момент времени  $t \in [t_0; T]$ ;  $r$  – количество медиаканалов, услугами которых фирма может воспользоваться. Обозначим  $u_i(t)$  как величину рекламных вложений в  $i$ -й медиаканал,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Набор величин  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)) \in R_+^r$  представляет собой управленческое решение фирмы.

Введем функцию кумулятивного рекламного воздействия  $v(t)$  и функцию кумулятивного воздействия предыдущих продаж  $w(t)$ , которые определены  $t \in [t_0; T]$ . Определены соотношения:

$$w(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_y(\tau) y(t - \tau) d\tau. \quad (23)$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} \int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}} G_1(\tau) g_1(u_1(t - \tau), u_2(t - \tau), \dots, u_r(t - \tau)) d\tau \\ \int_{\tau_{21}}^{\tau_{22}} G_2(\tau) g_2(u_1(t - \tau), u_2(t - \tau), \dots, u_r(t - \tau)) d\tau \\ \dots \\ \int_{\tau_{r1}}^{\tau_{r2}} G_r(\tau) g_r(u_1(t - \tau), u_2(t - \tau), \dots, u_r(t - \tau)) d\tau \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Здесь  $G_1(\tau), G_2(\tau), \dots, G_r(\tau), G_y(\tau)$  – функции, определяющие весовой характер воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж, соответственно;  $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r)$  – функция, отображающая совокупный эффект на аудиторию  $i$ -го медиаканала от вложений в рекламу,

$i = 1, 2, \dots, r$ ;  $\tau$  – лаг запаздывания реакции потребителей на рекламные и нерекламные воздействия;  $[\tau_{i1}; \tau_{i2}]$  – интервал лагов запаздывания, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие от использования  $i$ -го медиаканала,  $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $[\tau_1; \tau_2]$  – интервал лагов запаздывания, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж.

Предполагается, что известны начальные условия по рекламе  $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_r(t))$  и выручке  $\tilde{y}(t)$  до начала планируемого периода:  $\tilde{u}_i(t)$  – кусочно непрерывная функция,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $\tilde{y}(t)$  – непрерывная при  $t < 0$ , и  $u_i(t) = \tilde{u}_i(t)$ ,  $y(t) = \tilde{y}(t)$  при  $t < 0$ .

Значение выручки в момент времени  $t$  определяется соотношением:

$$y(t) = f(v(t), w(t)). \quad (25)$$

Свойства функций модели:

1) Функция  $f(v, w)$  выручки монотонно возрастает и вогнута по  $v$  и  $w$ .

2) Функции  $G_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ :  $G_i(\tau) \geq 0, \tau \in [0; +\infty)$ ;  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_i(\tau) = 0$ ;  $G'_i(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau_{u_i}^*)$ ;  $G'_i(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_{u_i}^*; +\infty)$ .  
Здесь  $\tau_{u_i}^*$  – точка максимальной отдачи на медиаканале  $i$ .

3) Функция  $G_y(\tau)$ :  $G_y(\tau) \geq 0, \tau \in [0; +\infty)$ ;  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_y(\tau) = 0$ ;  $G'_y(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau^*)$ ;  $G'_y(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau^*; +\infty)$ . Здесь  $\tau^*$  – точка максимальной отдачи от эффекта бренда.

4) Функции  $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r)$  непрерывны по всем аргументам и  $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r) \geq 0$  для любых  $u_1, u_2, \dots, u_r$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). В некоторой окрестности нулевых рекламных затрат  $O_{\varepsilon_1} = \{u \in R_+^r : \|u\| < \varepsilon_1\}$  отдача от рекламы не дает эффекта:  $g_i(u) = 0, u \in O_{\varepsilon_1}$ . Существует  $O_{\varepsilon_2} = \{u \in R_+^r : \|u\| < \varepsilon_2\}$ , что для любых  $u^1, u^2 \in O_{\varepsilon_2}$ :  $u^1 < u^2$  следует  $g_i(u^1) \leq g_i(u^2)$ . При дальнейшем увеличении рекламы может произойти уменьшение отдачи.

Пусть суммарный поток рекламного бюджета ограничен функцией  $B(t)$ , тогда множество рекламных программ  $U$ :

$$U_B(t) = \left\{ u(t) \in R^r : \sum_{i=1}^r u_i(t) \leq B(t), u_i(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, r \right\},$$

$$U = \{u(\cdot) : u(t) \in U_B(t), t \in [0; T]\}. \quad (26)$$

Прибыль  $\Pi$  за период  $[0; T]$  определяется:

$$J(u(\cdot)) \equiv \Pi(T) = \int_0^T \left( y(t) - c(y(t), t) - \sum_{i=1}^r u_i(t) \right) dt. \quad (27)$$

Максимизация (27) при условиях (24), (23), (25), (26) – задача ОУ.

**В параграфе 2.4** дана постановка модели управления экономической системой в условиях массового заболевания. Введём разбиение населения ( $N$ , чел.) на компартменты:  $P$  – число соблюдающих ограничительные меры;  $S$  – число не соблюдающих ограничительные меры;  $E$  – число заразившихся;  $I$  – число заболевших;  $Q$  – число госпитализированных;  $R$  – число выздоровевших. Также введем  $D$  – число умерших.

Социально-экономические показатели:  $Y$  – валовый выпуск (руб.);  $\Pi$  – прибыль экономического субъекта (руб.);  $K$  – стоимость основных фондов экономического субъекта (руб.);  $L$  – объём результативного труда (чел.);  $Z$  – количество койко-мест для размещения заболевших (ед.).

Управляющие воздействия органов власти:  $u_1$  – вложения в переоборудование существующих койко-мест (руб.);  $u_2$  – вложения в строительство новых больниц (руб.);  $u_3$  – вложения в информационную кампанию по борьбе с заболеванием (руб.). Ограничения по управлению ( $1 \leq i \leq 3$ ):

$$u_i(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^T u_i(t) dt \leq B_i; \quad u_i(t) \text{ – кусочно-непрерывные функции.}$$

Моменты принятия решений:  $\tau_1$  – момент времени введения ограничительных мер;  $\tau_2$  – момент времени снятия ограничений. Эффект от введения/снятия ограничительных мер приводит к разрыву фазовых траекторий:  $S(\tau_1+) = (1 - a)S(\tau_1-)$ ,  $P(\tau_1+) = P(\tau_1-) + aS(\tau_1-)$ ;  $S(\tau_2+) = S(\tau_2-) + bP(\tau_2-)$ ,  $P(\tau_2+) = (1 - b)P(\tau_2-)$ .

Динамика фазовых переменных:

$$\frac{dS}{dt} = k_{PS}P(t) + k_{RS}R(t - \tau) - \left( k_{SE} \left( \frac{I(t)}{N(t)} \right) + k_{SP}(U_3(t)) - \rho \right) S(t), \quad (28)$$

$$\frac{dP}{dt} = k_{SP}(U_3(t))S(t) - k_{PS}P(t), \quad (29)$$

$$\frac{dE}{dt} = k_{SE} \left( \frac{I(t)}{N(t)} \right) S(t) - k_{EI}E(t), \quad (30)$$

$$\frac{dI}{dt} = k_{EI}E(t) - (k_{IQ} + k_{IR} + k_{ID})I(t), \quad (31)$$

$$\frac{dQ}{dt} = k_{IQ}I(t) - (k_{QD} + k_{QR})Q(t), \quad (32)$$

$$\frac{dR}{dt} = k_{IR}I(t) + k_{QR}Q(t) - k_{RS}R(t - \tau), \quad (33)$$

$$\frac{dD}{dt} = k_{QD}Q(t) + k_{ID}I(t), \quad (34)$$

$$\frac{dZ}{dt} = g(u_2(t - \tilde{\tau})) - \mu Z(t) + ku_1(t), \quad (35)$$

где  $\rho$  – естественный прирост населения в долях от общей численности населения;  $\tau$  – время, в течение которого сохраняется иммунитет у выздоровевших;  $k_{SP}, k_{SE}, k_{RS}, k_{PS}, k_{SE}, k_{SP}, k_{SI}, k_{IQ}, k_{IR}, k_{ID}, k_{QD}, k_{QR}$  – интенсивности перехода лиц между компартментами;  $g(u_2)$  – функция преобразования инвестиций в строительство больниц (новых койко-мест);  $\tilde{\tau}$  – лаг запаздывания в освоении инвестиций;  $\mu$  – амортизация больничных фондов;  $k$  – параметр переоборудования существующих койко-мест.

Алгебраические связи ( $t_0 \leq t \leq T$ ):  $N(t) = P(t) + S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$  – сумма компартментов;  $L(t) = s_1P(t) + s_2S(t) + s_3E(t) + s_4R(t)$  – результативный труд,  $s_1, s_2, s_3, s_4$  – коэффициенты результативности труда компартментов;  $Y(t) = F(K(t), L(t))$ ,  $F$  – производственная функция;  $Q(t) \leq Z(t)$  – обеспеченность койко-местами.

Рассматривается социальный критерий качества  $\int_{t_0}^T E(t)dt$  и экономический  $\int_{t_0}^T (Y(t) - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)) dt$ . Управляющий орган социально-экономической системы, выбирая критерий (максимизируя экономический или минимизируя социальный), инициирует решение соответствующей задачи ОУ.

**Третья глава** посвящена качественному анализу некоторых моделей, представленных во второй главе диссертации. В **параграфе 3.1** анализируются модели управления инвестициями. Подраздел 3.1.1 посвящен выявлению структуры оптимального управления в модели (17), (18), (19) при  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  и фиксированных начальных условиях. В 3.1.2 анализируется структура оптимального управления и обосновывается существование решения в модели максимизации (22) при условиях (21), (20).

**Теорема 9.** Пусть  $f(v, w)$  непрерывна по переменным  $v, w$  и монотонно не убывает по переменной  $v$ ,  $g(y)$  непрерывна по переменной  $y$ . Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

1. Существует  $\{I^*(t), t_0 \leq t \leq T\}$  : (21), решение уравнений (20)  $\{v^*(t), w^*(t), \Pi^*(t), t_0 \leq t \leq T\}$  :  $J(I^*(\cdot)) \geq J(I(\cdot))$  для любой  $I(\cdot)$  : (21).

2. Существует последовательность инвестиционных функций  $\{I^s(t), t_0 \leq t \leq T\}$  : (21) и значение  $\bar{J} : J(I^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}, s \rightarrow \infty, J(I(\cdot)) \leq \bar{J}$

для любой  $I(\cdot) : (21)$ .

**Теорема 10.** Пусть  $\{I^*(t), v^*(t), w^*(t), \Pi^*(t)\}$  является оптимальным процессом в задаче максимизации (22) при условиях (21), (20), тогда существуют функции  $H_I(t), p_1(t), p_2(t)$  :

$$H_I = p_1(s)\bar{G}(0) - 1 + \int_s^T p_1(t) \frac{\partial \bar{G}(t-s)}{\partial t} dt, \quad \bar{G}(\tau) = \begin{cases} G(\tau), & \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(t) = p_2(t + \tau_3) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t+\tau_3), w=w(t+\tau_3)} \theta(T - t - \tau_3) \\ \quad - \int_t^T \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left( \frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} ds; \\ p_2(t) = p_2(t + \tau_3) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial w} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t+\tau_3), w=w(t+\tau_3)} \theta(T - t - \tau_3) \\ \quad - \int_t^T \frac{\partial f(v, w)}{\partial w} \left( \frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} ds; \end{array} \right.$$

и структура оптимального управления реальными инвестицией имеет следующую форму:

$$I^*(t) = \begin{cases} \hat{I}(t), & H_I(t) > 0, \\ 0, & H_I(t) < 0, \\ \bar{I}, & H_I(t) = 0, \quad 0 \leq \bar{I} \leq \hat{I}(t). \end{cases}$$

**В параграфе 3.2** обосновывается существование решения и структура оптимального управления в модели управления рекламными расходами: максимизация (27) при условиях (24), (23), (25), (26).

**Теорема 12.** Пусть функция  $G_y(\tau) \in C([\tau_1; \tau_2])$ ; функция  $f(v, w)$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной  $w$  для всех  $w$ ;  $v \equiv (v_1, v_2, \dots, v_r)$ ,  $f(v, w)$  монотонно не убывает по всем  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Тогда имеет место одна из следующих альтернатив:

1. Существует допустимая вектор-функция  $u^*(\cdot) \in U$ , соответствующие данному управлению функции  $v(t), w(t) : (24), (23)$  и значение функционала  $J(u^*(\cdot)) : J(u^*(\cdot)) \geq J(u(\cdot))$  для любой  $u(\cdot) \in U$ .

2. Существует последовательность допустимых вектор-функций  $u^s(\cdot) \in U$  и такое число  $\bar{J} : J(u^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}$  при  $s \rightarrow \infty$ , что  $J(u(\cdot)) \leq \bar{J}$  для любого  $u(\cdot) \in U$ .

Введем  $\bar{G}_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $\bar{G}_y(\tau)$  :

$$\bar{G}_i(\tau) = \begin{cases} G_i(\tau), & \tau_{i1} \leq \tau \leq \tau_{i2}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \bar{G}_y(\tau) = \begin{cases} G_y(\tau), & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Теорема 13.** Пусть  $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$  – оптимальный процесс в задаче (27) при условиях (24), (23), (25), (26), тогда найдутся такие функции  $h_i(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $p_j(s)$  ( $j = 1, 2, \dots, r + 1$ ):

$$h_i(s) = p_i(s)\bar{G}_i(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} dt,$$

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial f(v^*(s), w^*(s))}{\partial v_i} \left( p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T p_{r+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} dt \right),$$

$$\frac{dp_{r+1}}{ds} = -\frac{\partial f(v^*(s), w^*(s))}{\partial w} \left( p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T p_{r+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} dt \right)$$

с конечными условиями  $p_i(T) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r + 1$ , что оптимальное распределение рекламных расходов при всех  $s \in [0; T]$  будет являться решением задачи:

$$u^*(s) = \arg \max_{u \in U_B} \sum_{i=1}^r (g_i(u)h_i(s) - u_i).$$

**В параграфе 3.3** анализируется выбор критерия качества в модели управления экономической системой в условиях массового заболевания. Рассматривается вывод VSL-критерия, в котором учитывается одновременно как социальный критерий, так и экономический. Это происходит на основании понятия «ценность статистической жизни». Другим вариантом одновременного учета социального и экономического критериев рассматривается свертка соответствующих критериев.

**Четвертая глава** посвящена разработанному программному комплексу, реализующему метод параметризации.

**В параграфе 4.1** описан программный комплекс. В подразделе 4.1.1 даны характеристики программного комплекса: выделение роли разработчика модели и роли пользователя модели; независимость модуля для решения задачи НП и модуля решения задач Коши; единый модуль параметрического представления управления; единый концептуальный подход к решению задач ОУ достаточно разного вида. В подразделе 4.1.2 описаны функции пользователя программного комплекса: идентификация задачи

ОУ (ввод параметров модели, ввод уравнений модели); настройка алгоритма оптимизации (параметризация управляющих воздействий, формирование сценария решения задачи НП); настройка параметров численного решения задач Коши, вызванных методом параметризации; настройка формата отчета о ходе решения задачи методом параметризации. В подразделе 4.1.3 описаны параметры используемые в программном комплексе: параметры математической модели; параметры сценария решения задачи НП, порожденной методом параметризации; параметры численного решения Коши. В подразделе 4.1.4 дано описание общей архитектуры программного комплекса: приведена структура модулей комплекса; представлены функции, входящие в модули.

**В параграфе 4.2** приведено описание вычислительных алгоритмов решения задачи НП, порождаемой методом параметризации. В рамках комплекса реализованы: метод проекции градиента на множество специальной структуры; модифицированный метод штрафных функций; методы решения задач на безусловный экстремум. В подразделе 4.2.2 описана общая схема идентификации параметров модели, которые определяются на основе известного решения соответствующей динамической системы. Предложенная схема эквивалентна решению задачи ОУ с параметрами, требующими оптимизации. Приведен пример идентификации некоторых параметров модели управления экономической системой в условиях массового заболевания.

**В пятой главе** с помощью метода параметризации проведен численный анализ ряда моделей: двухсекторной экономики, инвестиционной стратегии фирмы, управления рекламными затратами, управления экономической системой в условиях массового заболевания, управления движения самолетом. **В параграфе 5.1** для модели двухсекторной экономики (17), (18), (19) рассмотрены дополнительные условия: ограничения по уровню фондов, ограничения по монотонности развития фондов. Также рассматривается модификация модели двухсекторной экономики: точечное запаздывание в инвестициях, динамике развития фондов. С учетом вводимых условий проводится численный анализ оптимального управления инвестициями. Оценка параметров модели (коэффициент фондотдачи  $\alpha$  и коэффициенты амортизации  $\mu_1, \mu_2$ ) проводилась на основе статистических данных по макроэкономическим показателям РФ, представленных на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики. Вычисли-



тельный эксперимент проводился методом параметризации при различных значениях параметров модели, сделаны выводы об оптимальном управлении.

**В параграфе 5.2** рассматривается модель оптимальной инвестиционной стратегии фирмы (20), (21), (22). Оценка параметров модели проведена на основе данных ПАО “ОАК”, представленных на официальном сайте компании. Производственная функция  $f(v, w)$ , введенная в (20), рассматривается в линейном виде. Функция распределения влияние инвестиций в виде  $G(\tau) = \exp(a\tau^2 + b\tau + c)$ . Для полученной модели приведены результаты вычислительных экспериментов, выполненные применением принципа максимума Понтрягина для задачи ОУ с интегро-дифференциальными связями. Полученное оптимальное решение определяет релейное управление инвестициями в рамках выделенного инвестиционного бюджета.

**В параграфе 5.3** приведены вычислительные эксперименты с моделью управления рекламными затратами (23), (24), (25), (26), (27). В подразделе 5.3.1 рассматривается модель управления рекламой в компании по предоставлению услуг связи. На основе ежеквартальных статистических данных о рекламных затратах и продажах компании ОАО “Мегафон” были оценены параметры модели (23), (24), (25), (26), (27) для случая одноканальной рекламы. Функция выручки  $f(v, w)$  (25) рассматривалась в линейном виде. Соответственно, функции  $G_u, G_y$  в виде:  $G_u(\tau) = g_u \exp(b_u\tau)$ ,  $G_y(\tau) = g_y \exp(b_y\tau)$ . Поиск оптимального решения выполнялся с помощью принципа максимума Понтрягина для задачи ОУ с интегро-дифференциальными связями.

В подразделе 5.3.2 рассматривается модель управления рекламой в компании по производству и продаже одежды. Для оценки параметров модели (23), (24), (25), (26), (27) использовались ежемесячные статистические данные некоторой компании, занимающейся производством классической одежды. Функция выручки  $f(v, w)$  рассматривается в двух видах: линейный и мультипликативный. Для линейного вида  $G_u(\tau) = \exp(a_u\tau^2 + b_u\tau)$ ,  $G_y(\tau) = \exp(a_y\tau^2 + b_y\tau)$ ; для мультипликативного  $G_u(\tau) = \exp(a_u\tau^2 + b_u\tau + c_u)$ ,  $G_y(\tau) = \exp(b_y\tau + c_y)$ . Полученные задачи ОУ решались модифицированным методом локальных вариаций и методом параметризации.

**В параграфе 5.4** На основе модели управления экономической системой (28)-(35) в условиях массового заболевания приведены результаты экспериментов для двух субъектов макроэкономики: экономика РФ, экономи-

ка Ульяновской области. В подразделе 5.4.1 описана методология оценки параметров модели (28)-(35) и сделаны оценки этих параметров для РФ и Ульяновской области на основе статистических данных, относящихся к пандемии COVID-19. Все данные были взяты из открытых источников в сети Интернет. В подразделе 5.4.2 на основе полученной динамической модели дана оценка управленческим решениям, реализованным в период пандемии в РФ и Ульяновской области в 2020 г. В подразделе 5.4.3 при различных значениях параметров представлены оптимальные решения для задачи управления системой (28)-(35) с социальным  $\int_{t_0}^T E(t)dt$  и экономическим  $\int_{t_0}^T (Y(t) - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)) dt$  критериями. В подразделе 5.4.4 рассмотрены варианты одновременного учета социального и экономического критериев. Вводя некоторые предположения о поведении экономической системы рассматривается VSL-критерий  $J_{VSL}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2)$ , который включает в себя оценку “ценности статистической жизни”, что позволяет выразить социальную компоненту в денежном эквиваленте. При таком критерии экономический и социальный аспект измеряются естественным образом в сопоставимой форме. Второй подход основан на свертке социального и экономического критериев путем сведения подинтегральных величин к безразмерным с последующим введением веса каждой компоненты. В рамках подраздела 5.4.4 проведен анализ оптимальных решений, полученных методом параметризации при различных весах в критерии свертки  $J_{CONV}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2)$ . Сопоставлены оптимальные решения при VSL-критерии и критерии свертки.

**В Заключение** сформулированы основные выводы по результатам исследования в соответствии с поставленной целью и задачами по ее достижению.

Основные положения диссертации отражены в опубликованных работах автора:

### **Публикации в журналах ВАК РФ, Scopus, Web of Science**

1. Горбунов, В. К. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 67-84. (ВАК, RSCI, Scopus - Q3, WoS)
2. Лутошкин, И. В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-

- дифференциальными связями методом параметризации / И. В. Лутошкин // Известия Иркутского государственного университета. Сер. “Математика”. – 2011. – Т. 4. № 1. – С. 44-56. (ВАК, RSCI)
3. *Лутошкин, И. В.* Применение метода параметризации для дифференциально-алгебраических систем с точечным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Девиен // Автоматизация процессов управления. – 2013. – Т. 4. № 1. – С. 21-25. (ВАК)
  4. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями / И. В. Лутошкин, И. Е. Дергунов // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 110-119. (ВАК)
  5. *Лутошкин, И. В.* Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. – 2023. – Т. 23. вып. 2. – С. 264-273. – <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>, EDN: VTQTSM (ВАК, RSCI, Scopus - Q3, WoS)
  6. *Лутошкин, И. В.* Оптимизация в модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2024. – Т. 49. – С. 16–31. – <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.16> (ВАК - K1, RSCI, Scopus - Q2, WoS)
  7. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации для моделирования управляемых систем с точечным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Автоматизация процессов управления. – 2010. – № 4 (22). – С. 21-25. (ВАК)
  8. *Лутошкин, И. В.* Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса / И. В. Лутошкин, А. Г. Чекмарев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2024. – Т. 26, № 3. – С. 260–279. – <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.260-279> (ВАК - K2, Scopus - Q3)
  9. *Лутошкин, И. В.* Принцип максимума в задаче управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Журнал Средневолжского математического общества – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 96-104. (ВАК)
  10. *Лутошкин, И. В.* Существование решения задачи управления реклам-

- ными расходами с распределенным запаздыванием / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Известия Иркутского государственного университета. Сер. "Математика". – 2016. – Т. 18. – С. 48-59. (ВАК, RSCI)
11. *Лутошкин, И. В.* Математическая модель управления многоканальной рекламой с эффектом распределенной отдачи / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование" (Вестник ЮУрГУ ММП). – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 52–66. – <https://doi.org/10.14529/mmp190404> (ВАК, Scopus - Q3, WoS)
12. *Лутошкин, И. В.* Модель межцехового планирования с учетом производственных ограничений на примере авиастроительного предприятия / И. В. Лутошкин, М. Н. Ярдаева // Известия Самарского научного центра РАН – 2016. – Т. 18. № 4-3. – С. 505-509. (ВАК)
13. *Полянсков, Ю. В.* Автоматизация процесса прогнозирования трудоёмкости проектирования и изготовления станочных приспособлений для механообработки самолетных деталей / Ю. В. Полянсков, И. В. Лутошкин, А. А. Блюменштейн // Известия Самарского научного центра РАН – 2016. – Т. 18. № 4-3. – С. 525-528. (ВАК)
14. An integrated model as a tool for implementing an enterprise management method / S. V. Lipatova, M. N. Yardaeva, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Polyanskov // Journal of Physics: Conference Series 1333 (2019) 072015 – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1333/7/072015> (Scopus, WoS)
15. Digital enterprise comprehensive evaluation / Yu. V. Polyanskov, M. N. Yardaeva, S. V. Lipatova, I. V. Lutoshkin // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 971 (2020) 032097 – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/971/3/032097> (Scopus, WoS)
16. *Gorbunov, V.* The parameterization method in singular differential-algebraic equations / V. Gorbunov, I. Lutoshkin // Computational Science (ICCS 2003) / eds. P. Slot [et al.]. – LNCS 2658. – Springer, 2003. – pp. 483-491. (ВАК, Scopus - Q2, WoS)
17. *Gorbunov, V.* The parameterization method in optimal control problems and differential-algebraic equations / V. Gorbunov, I. Lutoshkin // Journal of computational and applied mathematics. – Elsevier, 2006. – V. 185, Iss. 2. – pp. 377–390. (ВАК, Scopus - Q2, WoS)
18. *Gorbunov, V. K.* A parametrization method for the numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Y. V. Martynenko // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – № 59. –

pp. 639–655. (BAK, Scopus - Q2, WoS)

19. *Lutoshkin, I. V.* Model of control over cutting tool demand in a machining shop / I. Lutoshkin, A. Madanov, Y. Polyanskov // MATEC Web of Conferences / International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2018) – 2018. – V. 224. № 01083. – pp. 1-5. – <https://doi.org/10.1051/matecconf/201822401083> (BAK, Scopus, WoS)

20. *Lutoshkin, I. V.* The dynamic model of advertising costs with continuously distributed lags / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // CEUR-WS. – 2018 – V. 2018. – pp. 103-112. (BAK, Scopus, WoS)

21. *Lutoshkin, I. V.* The dynamic model of advertising costs / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research. – 2018. – V. 52. № 1. – pp. 201-213. (Scopus, WoS)

22. *Lutoshkin, I. V.* Dynamic model of real investment with lags. / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // Journal of Physics: Conference Series. 1353 012128, – 2019. – pp. 1-7. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012128> (Scopus, WoS)

23. The Mathematical Model for Describing the Principles of Enterprise Management «Just in Time, Design to Cost, Risks Management» / I. Lutoshkin, S. Lipatova, Y. Polyanskov [et al] // Recent Research in Control Engineering and Decision Making. ICIT 2019. Studies in Systems, Decision and Control. – 2019. – V. 199. – Springer, Cham. – pp. 682–695. – [https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6\\_55](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_55) (Scopus, WoS)

24. Model of production schedule modification assessment for digital production management systems / Y. Polyanskov, I. Lutoshkin, M. Yardaeva, S. Lipatova // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 497 (2019) 012082 IOP Publishing. – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/497/1/012082> (Scopus, WoS)

25. *Polyanskov Y. V.* The model of choice of machine retaining devices for technological preparation of production / Y. V. Polyanskov, I. V. Lutoshkin, A. A. Blyumenshteyn / Journal of Physics: Conference Series. International Scientific Conference "Conference on Applied Physics, Information Technologies and Engineering - APITECH-2019". – 2019. – 33063. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/3/033063> (Scopus, WoS)

## **Монографии**

26. *Лутощкин И. В.* Система управления процессами цифрового производства высокотехнологичных изделий на базе комплексной модели оценки де-

тельности предприятия: монография / Ю. В. Полянский, И. В. Лутошкин, С. В. Липатова [и др.]. – Ульяновск : УлГУ, 2021. – 259 с. – ISBN 978-5-88866-848-1 – 30 п. л. (в т.ч. авт. – 4,29 п. л.)

27. *Лутошкин И. В.* Новая экономическая реальность: задачи и решения : монография / под редакцией Е. М. Белого. – Ульяновск : УлГУ, 2022. – 236 с. – ISBN 978-5-88866-909-9 – 14 п. л. (в т.ч. авт. – 0,69 п. л.)

28. *Лутошкин И. В.* Динамические модели экономических систем и методы их анализа : монография / И. В. Лутошкин. – Ульяновск : УлГУ, 2024. – 188 с.

### **Свидетельства о регистрации программ**

29. Липатова С. В., Лутошкин И. В., Ярдаева М. Н. Программа формирования структуры комплексной модели для оценки деятельности предприятия. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662087. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619515 от 10.09.2018.

30. Липатова С. В., Лутошкин И. В., Ярдаева М. Н. Программа формирования структуры КРІ предприятия и ведения базы их значений. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662135. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619513 от 10.09.2018.

31. Липатова С. В., Мартыненко Ю. В., Ярдаева М. Н., Лутошкин И. В., Чувашлова М. В. Программа построения когнитивной карты взаимосвязей между внутренними факторами деятельности предприятия и факторами внешней среды. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019662689. Дата рег.: 01.10.2019. Заявка № 2019661505 от 18.09.2019.

32. Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г. Программа численного решения задач оптимального управления методом параметризации управления. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023681809. Дата рег.: 18.10.2023. Заявка № 2023680653 от 10.10.2023.

33. Ямалтдинова Н. Р., Лутошкин И. В. Численные методы решения задач оптимизации рекламных затрат в динамических моделях рекламных затрат с распределенным запаздыванием. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662134. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619515 от 10.09.2018.

### **Публикации в журналах и сборниках конференций**

34. *Лутошкин, И. В.* Моделирование отдачи от частоты рекламных воздействий / И. В. Лутошкин // Прикладная эконометрика. – 2010. – Т. 19, № 3. – С. 101–111. (ВАК, RSCI, Scopus - Q3)

35. *Лутошкин, И. В.* Разработка инструментария оценки деятельности предприятия в условиях цифрового производства / И. В. Лутошкин, С. В. Липатова, М. Н. Ярдаева // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2018. – Т. 11, № 6. – С. 9–21. – <https://doi.org/10.18721/JE.11601> (ВАК)
36. *Лутошкин, И. В.* Сравнение продаж продукции различных видов в зависимости от рекламных воздействий / И. В. Лутошкин, Е. В. Мартыненко // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством. – 2015. – Т. 3, № 25. – С. 113-121. (ВАК)
37. *Лутошкин, И. В.* Анализ влияния цифровых технологий на развитие национальной экономики / И. В. Лутошкин, А. А. Парамонова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 20–31. – <https://doi.org/10.18721/JE.12402> (ВАК)
38. *Лутошкин, И. В.* Моделирование управления экономикой региона в условиях массовых заболеваний / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Экономика региона. – 2023. – Т. 19, № 2. – С. 299-313. – <https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2023-2-1> (ВАК, Scopus - Q2, WoS)
39. *Лутошкин, И. В.* Математическое моделирование функций сбыта / И. В. Лутошкин, А. Н. Чекмарева // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством. – 2016. – Т. 1, № 27. – С. 82-90. (ВАК)
40. *Бородастова, И. В.* Метод параметризации в задачах с разрывными фазовыми траекториями / И. В. Бородастова, И. В. Лутошкин // Труды четвертой международной научно-технической конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2001. – С. 34–35.
41. *Горбунов, В. К.* Метод параметризации в вырожденных задачах оптимального управления / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Труды XII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 24 июня - 1 июля 2001 г. – Иркутск: Из-во ИСЭМ СО РАН. – 2001.
42. *Горбунов, В. К.* Решение дифференциально-конечных систем методом параметризации / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Сборник трудов Международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения” (26-31 мая 2002 г.) – Самара: СГАСА, 2002. – С. 86-92.

43. *Горбунов, В. К.* Метод параметризации для решения неявных дифференциальных уравнений / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин, Ю. В. Мартыненко // Обратные и некорректные задачи прикладной математики: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 2-8 июля 2005 года. Том. 3, Иркутск: Из-во ИСЭМ СО РАН. – 2005. – С. 100-105.
44. *Лутошкин, И. В.* Применение метода параметризации в вырожденных вариационных задачах / И. В. Лутошкин // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т.8. Вып. 2. – С. 636.
45. *Лутошкин, И. В.* Построение производственных функций с использованием рекламы / И. В. Лутошкин // Труды 4-й всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования». – Ульяновск. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2013. – С. 160-162.
46. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации для оптимизационных задач с переменным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Девиен // Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов. Материалы докладов II Всероссийской научно-практической конференции Казань, 21-22 апреля 2011 г. – Казань: КГФЭИ, 2011. – С. 209–212.
47. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации в моделях с интегродифференциальными связями / И. В. Лутошкин, И. Е. Дергунов // Труды седьмой международной научной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2009. – С. 168–169.
48. *Лутошкин, И. В.* Формализация некоторых подходов в управлении бюджетной организацией / И. В. Лутошкин, И. Н. Ковалев // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. Материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова]. 2023. – С. 412-417.
49. *Лутошкин, И. В.* Запаздывание рекламных воздействий в торговых компаниях / И. В. Лутошкин, Е. В. Мартыненко, О. А. Мкртычян // Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов. Материалы докладов II Всероссийской научно-практической



конференции Казань, 21-22 апреля 2011 г. – Казань: КГФЭИ, 2011. – С. 212–216.

50. *Лутошкин, И. В.* Анализ влияния информационно-коммуникационных технологий на макроэкономические показатели России / И. В. Лутошкин, А. А. Парамонова, // ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА И ИНДУСТРИЯ 4.0: ТЕНДЕНЦИИ 2025. Сборник трудов научно-практической конференции с международным участием. Под редакцией А. В. Бабкина. 2019 (INDUSTRY-2019, Санкт-Петербург, 03–05 апреля 2019 г.) – Издательство: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого" (Санкт-Петербург). – 2019. – С. 115-120. – <https://doi.org/10.18720/IEP/2019.1/14>

51. *Лутошкин, И. В.* Анализ влияния внешних факторов на деятельность АО "АВИАСТАР-СП" / Лутошкин И. В., Пирогова А. С. // В сборнике: Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования. Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2017. – С. 19-20.

52. *Лутошкин, И. В.* Проблема оценки параметров математической модели влияния пандемии на экономику. / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Сборник тезисов докладов конгресса молодых ученых. Электронное издание. – СПб: Университет ИТМО, 2021 – URL: <https://kmu.itmo.ru/digests/article/7045>

53. *Лутошкин, И. В.* Временное дезагрегирование статистических значений экономических показателей / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // В сборнике: Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях цифровизации экономики. Сборник научных статей по итогам II Всероссийского научно-практического семинара. Нижний Новгород. – 2022. – С. 103-109.

54. *Лутошкин, И. В.* Многокритериальная оптимизация в задаче оптимального управления экономическим субъектом в условиях массового заболевания / М. С. Рыбина, И. В. Лутошкин // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. Материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова]. 2023. – С. 468-474.

55. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации для анализа моделей экономической динамики с запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. – Вып. 5. – С. 106–112.
56. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации в моделях с постоянным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Труды седьмой международной научной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2009. – С. 170–171.
57. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации в задачах управления с интегро-дифференциальными связями / И. В. Лутошкин, А. Х. Хасанова // Труды пятой международной научно-практической конференции с международным участием «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». (16-18 июня 2003 г., г. Ульяновск). – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2003. – С. 119-121.
58. *Лутошкин, И. В.* Разработка инструмента моделирования для задач экономической динамики / А. Г. Чекмарев, И. В. Лутошкин // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. Материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова], 2023. – С. 482-486.
59. *Лутошкин, И. В.* Модель оптимизации рекламных расходов с учетом распределенного запаздывания / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании. Математика и статика: сб. тр. IV Междунар. науч.-практ. конф. (2 июня 2015, г. Тверь). – Тверь: Тверс. государственный университет, 2015. – С. 84-89.
60. *Лутошкин, И. В.* Динамическая модель распределения рекламного бюджета между несколькими медиаканалами / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы: сб. трудов шестой всерос. науч. конф. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2016. – С. 38-40.
61. *Лутошкин, И. В.* Численный анализ динамической модели рекламных расходов / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Математическое модели-

рование, численные методы и комплексы программ: материалы VII всерос. науч. конф. имени Е.В. Воскресенского (12-15 июля 2016, г. Саранск). – Саранск: СВМО, 2016. – С. 61-62.

62. *Лутошкин, И. В.* Инновационные инструменты управления рекламной кампанией фирмы / Лутошкин И. В., Ямалтдинова Н. Р. // В сборнике: Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования. Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2017. – С. 20-21.

63. *Лутошкин, И. В.* Модель управления деятельностью промышленного предприятия в условиях цифрового производства / Лутошкин И. В., Ярдаева М. Н., Липатова С. В. // В сборнике: Цифровая экономика промышленности и сферы услуг: состояние и тенденции развития. Труды XVI научно-практической конференции с международным участием (ЭКОПРОМ-2018). Под редакцией А. В. Бабкина. – Спб: ФГАОУ ВО "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого 2018. – С. 190-194. – <https://doi.org/10.18720/IEP/2018.5/19>

64. *Gorbunov, V. K.* The parameterization method for numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // International Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics Moscow, June 19-25, 2006. – Sect. №4 – pp. 64-65.

65. *Gorbunov, V. K.* The variational spline method for singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // 3-d International Conference Computational methods in applied mathematics: CMAM-3, June 25 - 30, 2007, Minsk, Belarus.

66. *Gorbunov, V. K.* Variational splines for numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // 6-th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 16-20 July 2007, Zurich, Switzerland, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.

67. *Lutoshkin, I. V.* The parameterization method for numerical solution of singular differential equations / I. V. Lutoshkin, V. K. Gorbunov // The seminar NUMDIFF-11 "Numerical treatment of differential equations". Halle (Saale), Germany, Martin-Luther-University Halle-Wittenberg, September 4-8, 2006. – pp. 42.