

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Инженерно-физический факультет высоких технологий
Кафедра физических методов в прикладных исследованиях

Ю. Ф. Наседкина
А. А. Соловьев
Б. М. Костишко

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебно-методическое пособие
к лабораторным работам

Ульяновск
2019

УДК 537
ББК 22.33 я73
НЗ1

*Печатается по решению Ученого совета
инженерно-физического факультета высоких технологий
Ульяновского государственного университета
(протокол № 11 от 21.06.2019)*

Рецензент –
Семенцов Д. И., профессор кафедры РЭ УлГУ

Наседкина Ю. Ф.
НЗ1 **Электричество и магнетизм : учебно-методическое пособие к лабораторным работам / Ю. Ф. Наседкина, А. А. Соловьев, Б. М. Костишко. – Ульяновск : УлГУ, 2019. – 164 с.**

Учебно-методическое пособие содержит описание 16 лабораторных работ. Количество материала и его тематика являются достаточными для методического обеспечения лабораторных занятий студентов факультетов ИФФВТ и ФМИАТ по дисциплинам «Электродинамика», «Специальные разделы физики», «Физика», «Электромагнитные явления».

УДК 537
ББК 22.33 я73

© *Наседкина Ю. Ф., Соловьев А. А., Костишко Б. М., 2019*
© *Ульяновский государственный университет, 2019*

Содержание

Лабораторная работа ФПЭ – 01	4
ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛОГРАФА	
Лабораторная работа ФПЭ – 02	13
ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ	
Лабораторная работа ФПЭ – 03	24
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОНА К ЕГО МАССЕ МЕТОДОМ МАГНЕТРОНА	
Лабораторная работа ФПЭ – 04	31
ИЗУЧЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛЕНОИДА С ПОМОЩЬЮ ДАТЧИКА ХОЛЛА	
Лабораторная работа ФПЭ – 05	39
ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ	
Лабораторная работа ФПЭ – 06	44
ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТЫ ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ МЕТАЛЛА	
Лабораторная работа ФПЭ – 07	51
ИЗУЧЕНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ	
Лабораторная работа ФПЭ – 08	61
ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАРЯДКИ И РАЗРЯДКИ КОНДЕНСАТОРА	
Лабораторная работа ФПЭ – 09	70
ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ПРИ ДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ	
Лабораторная работа ФПЭ – 10	84
ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ	
Лабораторная работа ФПЭ – 11	96
ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ	
Лабораторная работа ФПЭ – 12	108
ИЗУЧЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ	
Лабораторная работа ФПЭ-13.....	117
ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ	
Лабораторная работа ФПЭ – 14	126
ИНДУКТИВНОСТЬ	
Лабораторная работа ФПЭ – 15	133
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ	
Лабораторная работа ФПЭ – 16	144
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ	
Приложение	151

Лабораторная работа ФПЭ – 01

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛОГРАФА

Цель работы: ознакомление с устройством и работой электронного осциллографа.

ВВЕДЕНИЕ

Электронный осциллограф – прибор, используемый для исследования процессов, протекающих в электрических цепях.

Основными элементами осциллографа являются: электронно-лучевая трубка; генератор развертки; усилители отклоняющих пластин; блок питания.

Электронно-лучевая трубка

Электростатическая трубка представляет собой стеклянную колбу, откаченную до высокого вакуума (рис. 1.1). Внутри нее расположены электронная пушка 1, две пары отклоняющих пластин 2 и флуоресцирующий экран 3.

Электронная пушка предназначена для создания сфокусированного электронного пучка и состоит из следующих элементов: **а)** катода косвенного накала, испускающего при нагревании электроны; **б)** управляющего электрода, имеющего отрицательный потенциал относительно катода; изменяя потенциал управляющего электрода, можно регулировать количество вылетающих из электронной пушки электронов, т.е. яркость пятна на экране трубки; **в)** первого фокусирующего и второго ускоряющего анодов. Потенциал первого анода в несколько раз меньше потенциала второго анода. Аноды имеют форму цилиндров с перегородками, в центре которых сделаны отверстия. Перегородки служат для улавливания электронов, не удовлетворяющих условиям фокусировки.

Рассмотрим фокусирующее действие электрических полей на примере поля между первым и вторым анодами. Характер его показан эквипотенциальными кривыми на рис. 1.2. Поле сосредоточено в основном у щели между цилиндрами. Предположим, что электрон влетает в поле слева направо под углом к оси цилиндров. Пока он пролетает зазор между цилиндрами, поле сообщает ему ускорение вдоль оси (тангенциальные составляющие силы $F_{\text{в}}$, показанные на рис. 1.2, имеют все время одно направление) и в то же время отклоняет его сначала вниз, а потом вверх. Следовательно, в полях, обращенных выпуклостями эквипотенциальных

поверхностей к катоду, электроны при своем движении будут собираться к горизонтальной оси (действие таких полей похоже на действие собирающих линз). В полях, выпуклость эквипотенциальных поверхностей которых имеет противоположное направление, электроны будут расходиться от горизонтальной оси (действие таких полей похоже на действие рассеивающих линз).

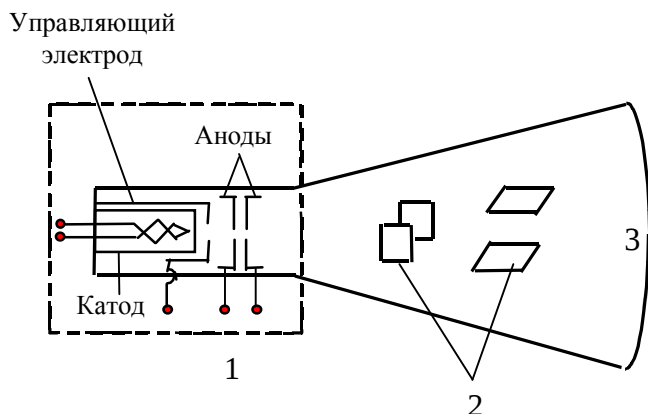


Рис. 1.1

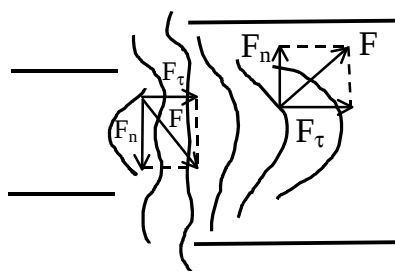


Рис. 1.2

Отклоняющие пластины. На пути к экрану электронный пучок проходит между двумя парами отклоняющих пластин. Напряжения, приложенные к пластинам, создают между ними электрические поля, которые отклоняют электронный луч, и перемещают светящееся пятно по экрану. Горизонтально расположенные пластины отклоняют луч по вертикали (вдоль оси Y), а вертикально расположенные – по горизонтали (вдоль оси X).

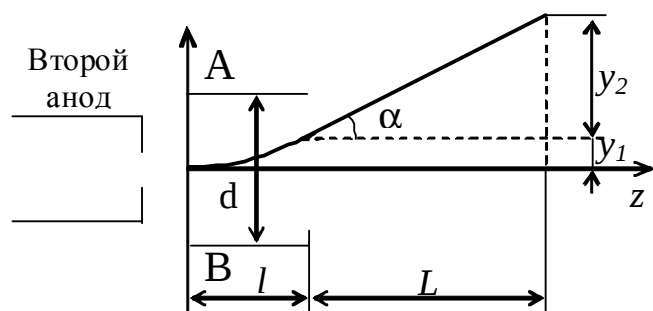


Рис. 1.3

Пренебрегая краевыми эффектами, установим связь между напряжением на пластинах A и B и величиной смещения пятна на экране (рис. 1.3).

Электрон влетает в однородное электрическое поле со скоростью $v_0 = v_z$. Вдоль оси Z

на электрон не действуют никакие силы, поэтому в этом направлении он движется равномерно: $z = v_0 \cdot t$.

Вдоль оси Y на электрон действует постоянная сила $F = e \cdot E$, где $E = U/d$ – напряженность поля между пластинами. Следовательно, движе-

ние электрона вдоль оси Y является равноускоренным и для него справедливы уравнения: $v_y = at$; $y = at^2/2$. Ускорение a найдем из второго закона Ньютона:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}; \quad a = \frac{eU}{dm}.$$

Тогда $y = \frac{eU}{2dm} t^2$.

Учитывая, что $t = \frac{z}{v_0}$, получаем $y = \frac{eU z^2}{2dmv_0^2}$.

Из последней формулы следует, что траектория электрона между пластинами представляет собой параболу. При выходе из пространства между пластинами электрон отклонится от своего первоначального направления движения на угол α и сместится по оси Y на величину y_1 :

$$y_1 = \frac{eUl^2}{2dmv_0^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{at}{v_0}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{eU}{dmv_0^2} l.$$

Теперь найдем смещение светящегося пятна на экране:

$$y = y_1 + L \operatorname{tg} \alpha = \frac{eUl}{dmv_0^2} \left(\frac{l}{2} + L \right) \cong \frac{eUlL}{dmv_0^2}.$$

Итак, смещение луча на экране пропорционально напряжению на отклоняющих пластинах.

Отклонение пятна на экране (в миллиметрах), вызванное напряжением в 1 В на отклоняющих пластинах, называется чувствительностью трубки:

$$\sigma = \frac{y}{U} \text{ или } \sigma = \frac{elL}{dmv_0^2}.$$

Если U_0 – потенциал второго анода относительно катода, то

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0, \quad \text{откуда } v_0^2 = \frac{2eU_0}{m}.$$

Тогда чувствительность $\sigma = \frac{lL}{2dU_0}$ зависит от расстояния между пластинами и экраном и от потенциала на втором аноде.

Генератор развертки

Для того чтобы на экране осциллографа можно было увидеть, как в некотором физическом процессе величина y меняется в зависимости от изменения другой физической величины x , т.е. $y = f(x)$, необходимо на

горизонтально отклоняющие пластины подать напряжение U_x , пропорциональное x , а на вертикально отклоняющие пластины одновременно подать напряжение U_y , пропорциональное y . Тогда электронный луч начертит на экране линию, соответствующую зависимости $y = f(x)$. Если теперь заставить луч неоднократно повторить тот же путь по экрану, то вследствие инерционности глаза наблюдатель увидит неподвижный график зависимости $y = f(x)$.

На практике часто приходится наблюдать изменение различных физических величин в зависимости от времени, т.е. $y = f(t)$. При этом на вертикально отклоняющие пластины необходимо подать напряжение, пропорциональное исследуемой величине y , а на горизонтально отклоняющие пластины – напряжение, изменяющееся пропорционально времени.

Для создания напряжения, величина которого меняется пропорционально времени, в осциллографе существует генератор развертки. Под действием этого напряжения луч смещается по экрану слева направо, причем в любой момент времени это смещение будет пропорционально времени, отсчитанному от начала движения луча. Одновременно поданное на вертикально отклоняющие пластины напряжение, пропорциональное исследуемой физической величине y , будет смещать луч по вертикали в соответствии с изменением y . Однако, когда луч дойдет по горизонтали до крайнего правого положения, его нужно мгновенно перевести в исходное положение, а физический процесс повторить сначала. Следовательно, напряжение генератора развертки скачком должно измениться до первоначального значения, а потом снова начать расти по тому же закону. Поэтому зависимость напряжения генератора развертки от времени должна иметь вид, показанный на рис. 1.4. Такое напряжение называется пилообразным.

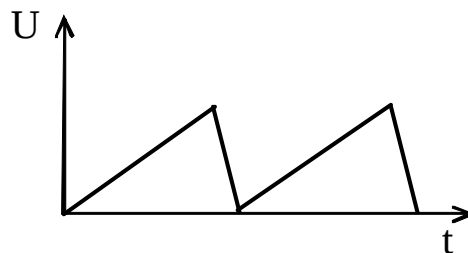


Рис. 1.4.

Для того чтобы картина на экране осциллографа получалась устойчивой, необходимо, чтобы частота пилообразного напряжения совпадала с частотой повторения изучаемого физического процесса или была меньше ее в целое число раз. Поэтому частота напряжения, даваемого генератором развертки, может меняться в широком диапазоне, и с помощью специальной схемы генератор развертки синхронизируется с исследуемым напряжением, подаваемым на вертикально отклоняющие пластины.

Усилители отклоняющих пластин

Чувствительность электронно-лучевой трубки, как правило, невелика, поэтому на отклоняющие пластины обычно подают напряжения через усилители. Характеристики усилителей отклоняющих пластин (линейность и диапазон пропускаемых частот) во многом определяют качество осциллографа. Величина, равная напряжению, вызывающему отклонение электронного луча на экране на одно деление в вертикальном или горизонтальном направлении, называется коэффициентом усиления соответствующего канала осциллографа.

ПРИБОРЫ И ОБОРУДОВАНИЕ

1. РО – электронный осциллограф.
2. PQ – звуковой генератор.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Назначение органов управления, подключения и индикации, расположенных на передней панели осциллографа (рис. 1.5), указаны в таблице 1.1.

Таблица 1.1

№ п/п	Маркировка	Назначение
1.		Ручка перемещения изображения по горизонтали
2.	«X ₁ - X ₅ »	Кнопка включения растяжки
3.	«+/- »	Кнопка переключения полярности синхронизации
4.	« μ s / ms»	Кнопка выбора диапазона коэффициентов развертки: « μ s» – мкс, «ms» – мс
5.	«ВРЕМЯ/ДЕЛ»	Переключатель коэффициентов развертки
6.	«АВТ/ЖДУЩ»	Кнопка выбора режима работы развертки
7.	«ВНУТР/ВНЕШ»	Кнопка выбора режима синхронизации
8.	«X-Y»	Кнопка включения режима «Фигуры Лиссажу»
9.	«УРОВЕНЬ»	Ручка выбора уровня синхронизации
10.		Ручка перемещения изображения по вертикали
11.	«IM Ω 25pF»	Гнездо подачи исследуемого сигнала
12.		Кнопка переключения открытого и закрытого входа осциллографа
13.	ВОЛЬТ-ДЕЛ	Переключатель коэффициентов отклонения
14.		Гнездо измерительного заземления
15.	«ВХОД X ВНЕШН»	Гнездо подключения сигнала в режиме «Фигуры Лиссажу» к внешней синхронизации

№ п/п	Маркировка	Назначение
16.	«0.6 V - 1kHz»	Гнездо выхода сигнала калибратора
17.	«ФОКУС»	Ручка фокусировки
18.	«ЯРКОСТЬ»	Ручка регулирования яркости
19.	«СЕТЬ»	Светодиод индикации включения сети
20.	«СЕТЬ»	Кнопка включения сети

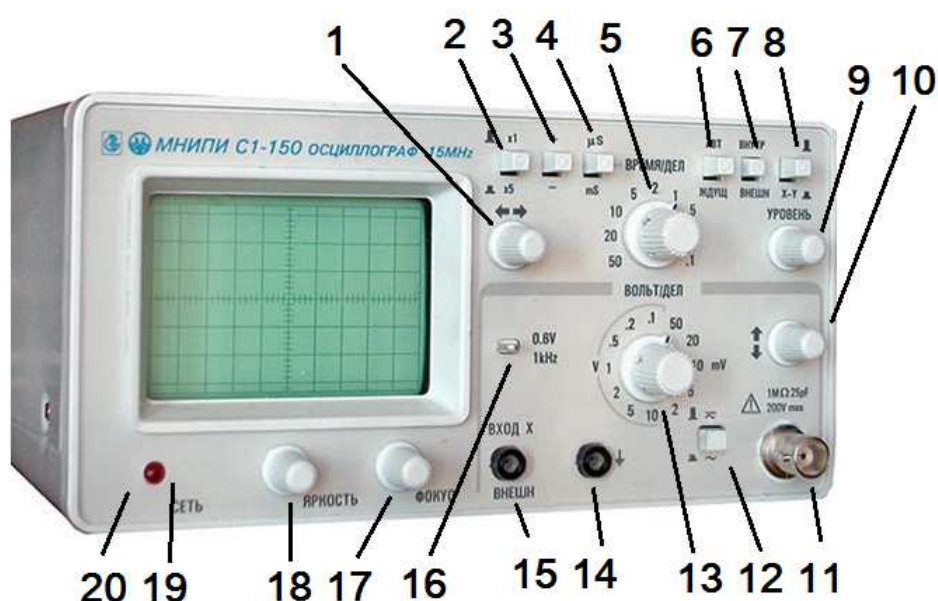


Рис. 1.5

Для изучения электронного осциллографа РО используется звуковой генератор PQ.

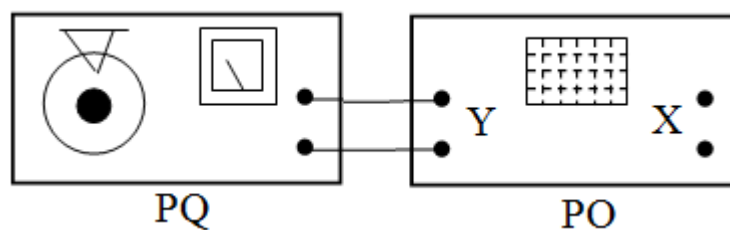


Рис. 1.6

Для получения прямоугольных импульсов на выходе PQ следует нажать кнопку $\square$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Исследование синусоидального сигнала звукового генератора

1. Ознакомиться с описанием используемых приборов. Собрать схему, показанную на рис. 1.6.
2. Включить осциллограф в сеть и настроить его.
3. Подать напряжение от звукового генератора на вход Y осциллографа и получить на экране устойчивое изображение нескольких периодов сигнала.
4. При любой частоте сигнала звукового генератора установить его наибольший вертикальный размер в пределах рабочей части экрана.
5. Измерить период сигнала и рассчитать его частоту.
6. Измерить амплитуду сигнала.
7. Результаты измерений и вычислений занести в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№ п/п	Период сигнала, в делениях	Период сигнала, с	Частота сигнала	Показания PQ	Амплитуда сигнала, в делениях	Амплитуда сигнала, В или мВ

8. Повторить измерение частоты сигнала звукового генератора на трех–четырёх различных частотах.

Задание 2. Исследование импульсного сигнала

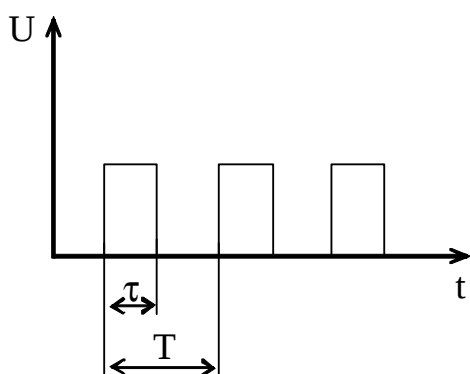


Рис. 1.7

1. Собрать схему, изображенную на рис. 1.6.
2. Подобрать достаточное усиление и частоту развертки на осциллографе, получить устойчивую картину прямоугольных импульсов на экране и зарисовать ее.
3. Измерить период T и длительность τ прямоугольного импульса и определить скважность импульса $Q = \frac{T}{\tau}$ (рис. 1.7).

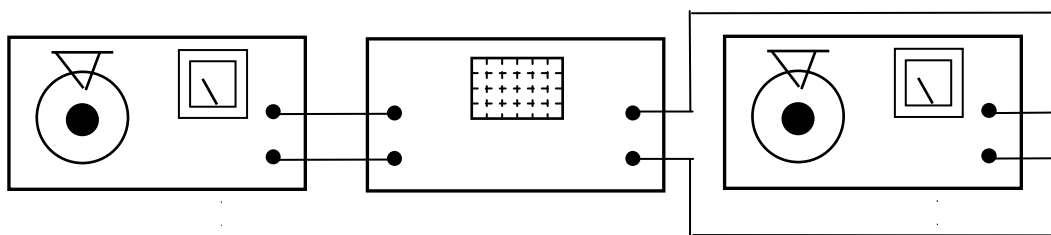


Рис. 1.8

4. Результаты занести в табл. 1.3.

Таблица 1.3

№ п/п	T	τ	Q	Частота ν , Гц

5. Повторить измерение периода импульса, его длительности и скважности при других частотах звукового генератора.

Задание 3. Наблюдение фигур Лиссажу при сложении колебаний, происходящих в двух взаимно перпендикулярных направлениях

1. При подаче синусоидальных напряжений одновременно на горизонтальные и вертикальные пластины трубки осциллографа луч будет находиться под действием двух взаимно перпендикулярных отклоняющих сил. В зависимости от амплитуды, частоты и фазы подаваемых напряжений на экране осциллографа будут получаться различные фигуры, называемые фигурами Лиссажу.
2. Собрать схему, изображенную на рис. 1.8.
3. Изменяя частоту сигнала звукового генератора, получить и зарисовать фигуры Лиссажу при соотношении частот 1:1, 1:2, 1:3, 2:3.
4. Соотношение частот можно определить как по шкале генератора, так и по виду фигуры. Отношение частот колебаний равно отношению числа касаний фигуры с прямой параллельной оси X и с прямой, параллельной оси Y.
5. Результаты измерений и рисунки поместить в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Частота	Соотношение частот, определенное по виду фигуры	Вид фигуры

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Опишите принцип действия электронно-лучевой трубки.
2. Как зависит чувствительность трубки осциллографа от ускоряющего напряжения и расстояния между пластинами?
3. Каково назначение и принцип действия генератора развертки?
4. Как определить с помощью осциллографа: **а)** период исследуемого сигнала; **б)** напряжение исследуемого сигнала?

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. – М. : Наука, 1982.
2. Безус В.А., Гэфан Ю.Л. Лабораторный практикум «Изучение электроизмерительных приборов. Исследование периодических сигналов с помощью осциллографа». – М. : МИФИ, 1979.

Лабораторная работа ФПЭ – 02

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

Цель работы: Изучение поляризации сегнетоэлектриков в зависимости от напряженности электрического поля E , получение кривой $\varepsilon=f(E)$, изучение диэлектрического гистерезиса, определение диэлектрических потерь в сегнетоэлектриках.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Диэлектриками называются вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток. В отличие от проводников они не содержат свободных зарядов. К ним относятся газы, некоторые жидкости (дистиллированная вода) и твердые тела (стекло, фарфор, слюда). Электрически нейтральные молекулы диэлектрика можно рассматривать как электрический диполь с дипольным моментом

$$\vec{p}_e = q\vec{l}, \quad (2.1)$$

где q – суммарный заряд всех атомных ядер в молекуле, а $\vec{l}$ – вектор, проведенный из «центра тяжести» электронов в молекуле в центр тяжести положительных зарядов атомных ядер. Диэлектрик называется неполярным, если в отсутствии внешнего электрического поля $\vec{l} = 0$ (H_2 , O_2).

Во внешнем электрическом поле происходит деформация электронных оболочек и, как следствие, у молекул появляется индуцированный дипольный момент $\vec{p}_e$. У молекул полярных диэлектриков $\vec{p}_e \neq 0$ даже в отсутствии внешнего электрического поля.

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле происходит поляризация диэлектрика, количественной характеристикой чего является вектор $\vec{P}$, называемый поляризованностью (вектором поляризации)

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_{ei}, \quad (2.2)$$

где $\vec{p}_{ei}$ – электрический момент молекулы; ΔV – объем диэлектрика с « n » молекулами.

Размерность этой величины $[\vec{P}] = \text{Кл/м}^2$.

У изотропных диэлектриков поляризованность $\vec{P}$ связана с напряженностью электрического поля $\vec{E}$ в той же точке соотношением

$$\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.3)$$

где ϵ – коэффициент, не зависящий в первом приближении от E и называемый диэлектрической восприимчивостью вещества; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Для описания электрического поля в диэлектриках, кроме напряженности $\vec{E}$ и поляризованности $\vec{P}$, используют вектор электрического смещения $\vec{D}$, определяемый равенством

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.4)$$

С учетом (2.3) вектор смещения можно представить в виде

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.5)$$

где $\epsilon = 1 + \epsilon$ – безразмерная величина, называемая диэлектрической проницаемостью среды. Для всех диэлектриков $\epsilon > 0$, а $\epsilon > 1$.

Существует группа диэлектриков называемых сегнетоэлектриками (по названию сегнетовой соли $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$), обладающих рядом интересных свойств:

Большой относительной диэлектрической проницаемостью ϵ (у сегнетовой соли ~ 10000 , у титана N несколько десятков тысяч).

Зависимостью диэлектрической проницаемости от температуры.

Зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности представлена на рис. 2.1.

Явлением электрического гистерезиса (запаздывания), состоящего в различии значений поляризованности сегнетоэлектрика (вектора смещения) при одной и той же напряженности электрического поля в зависимости от значения предварительной поляризованности сегнетоэлектрика.

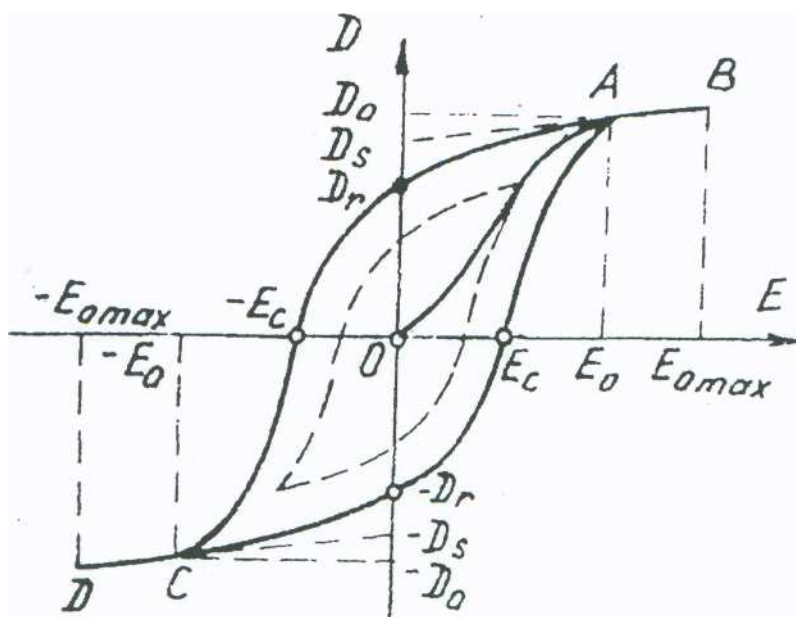


Рис. 2.1

Все характерные свойства сегнетоэлектриков связаны с существованием у них спонтанной (самопроизвольной) поляризации. Сущность ее состоит в том, что весь кристалл разделен на зоны (области) размером порядка 10^{-3} мм³, называемые доменами, которые спонтанно поляризованы.

Под действием электрического поля в сегнетоэлектрике происходит переориентация доменов, что приводит к росту суммарной поляризуемости кристалла (рис. 2.2).

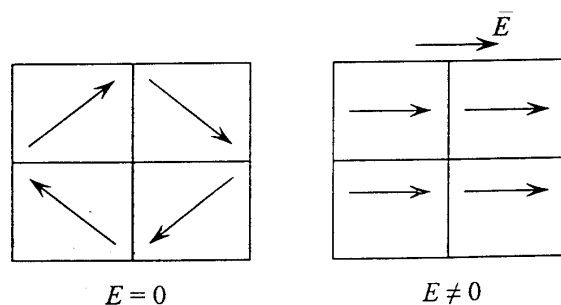


Рис. 2.2.

На рис. 2.1 представлена петля гистерезиса в координатах D , E . С увеличением поля E смещение D в образце, который первоначально не был поляризован, изменяется по кривой OAB . Эта кривая называется **начальной** или **основной кривой поляризации**.

С уменьшением поля сегнетоэлектрик ведет себя сначала как обычный диэлектрик (на участке BA гистерезис отсутствует), а затем (от точки A) изменение смещения отстает от изменения напряженности. Когда напряженность поля $E = 0$, сегнетоэлектрик остается поляризованным и величина электрического смещения, равная D_r , называется остаточным смещением.

Для снятия остаточного смещения к сегнетоэлектрику необходимо приложить электрическое поле противоположного направления с напряженностью $-E_c$. Величину E_c принято называть **коэрцитивным полем**. Если максимальное значение напряженности поля таково, что спонтанная поляризация достигает насыщения, то получается петля гистерезиса, называемая петлей предельного цикла (сплошная кривая на рис. 2.1).

Если же при максимальной напряженности поля насыщение не достигается, то получается так называемая петля частного цикла, лежащая внутри предельного цикла (пунктирная кривая на рис. 2.1). Частных циклов переполяризации может существовать бесконечное множество, но при этом максимальные значения смещения D частных циклов всегда лежат на основной кривой поляризации OA .

В сегнетоэлектриках, находящихся в переменном электрическом поле, наблюдаются потери энергии. Это связано с явлением диэлектрическо-

го гистерезиса, отставанием во времени поляризованности $\bar{P}$ от напряженности $\bar{E}$.

Диэлектрические потери приводят к тому, что на участке цепи переменного тока, содержащем конденсатор, сдвиг по фазе между колебаниями тока и напряжения никогда не бывает точно равным $\pi/2$, а всегда оказывается меньше, чем $\pi/2$, некоторый угол δ , называемый **углом потерь**

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W}, \quad (2.3)$$

где ΔW – потери энергии за период колебаний (в элементе цепи или во всей цепи); W – энергия колебаний (максимальная для элемента цепи и полная для всей цепи). Перепишем соотношение (2.3) в виде

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_r}{\omega_0}, \quad (2.4)$$

где w_r – потери энергии переменного электрического поля на диэлектрический гистерезис в единице объема сегнетоэлектрика за время одного периода; w_0 – максимальная плотность энергии электрического поля в кристалле сегнетоэлектрика.

Так как объемная плотность энергии электрического поля

$$\omega = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2, \quad (2.5)$$

то при увеличении напряженности поля на dE объемная плотность энергии соответственно изменяется на

$$d\omega = E d(\varepsilon \varepsilon_0 E) = E dD.$$

Эта энергия затрачивается на переполяризацию единицы объема сегнетоэлектрика и идет на увеличение его внутренней энергии, т.е. на его нагрев. Очевидно, что за один полный период величина диэлектрических потерь в единице объема сегнетоэлектрика определяется формулой

$$\omega_r = \oint E dD \quad (2.6)$$

и численно равна площади петли гистерезиса в координатах D, E . Максимальная плотность энергии электрического поля в кристалле составляет

$$w_0 = \frac{E_0 D_0}{2}, \quad (2.7)$$

где E_0 и D_0 – амплитуды напряженности и смещения электрического поля.

Подставляя (2.6) и (2.7) в формулу (2.4), получим следующее выражение для тангенса угла диэлектрических потерь в сегнетоэлектриках:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\pi} \frac{\oint E dD}{E_0 D_0}. \quad (2.8)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

1. ФПЭ-02 – кассета.
2. ИП – источник питания.
3. PV – цифровой вольтметр.
4. РО – осциллограф.

На рис. 2.3 приведена структурная схема, а на рис. 2.4 – принципиальная электрическая схема, с помощью которой изучаются свойства сегнетоэлектриков.

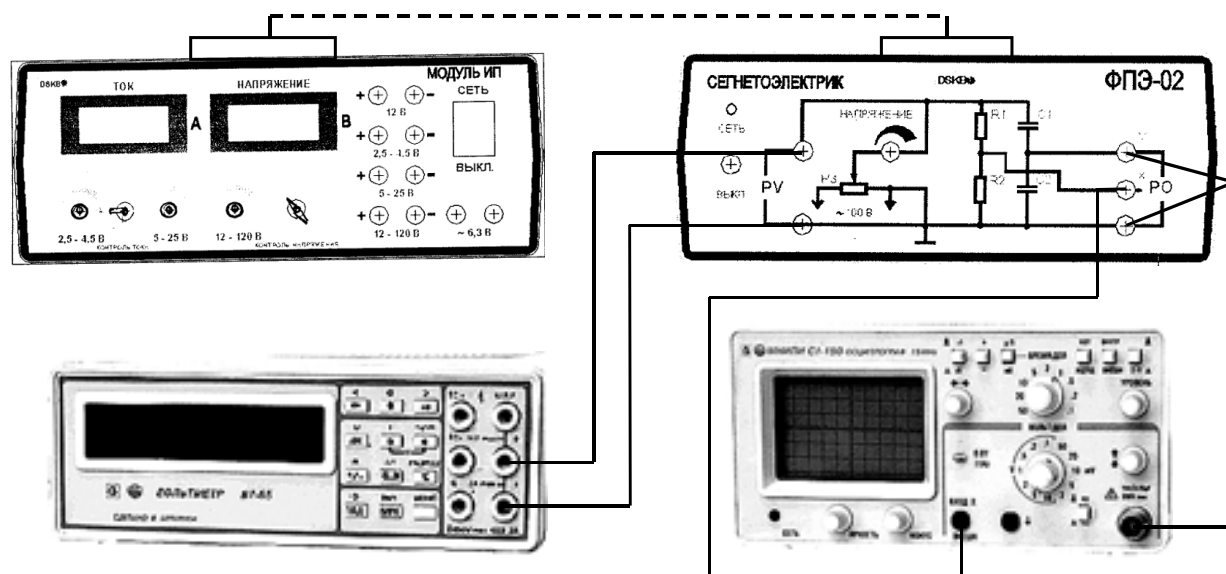


Рис. 2.3

Схема, изображенная на рис. 2.4, собрана в кассете ФПЭ-02. На передней панели кассеты имеются: 1) разъем для подключения источника питания ИП; 2) ручка «Рег U» потенциометра R_3 ; 3) гнезда «PV» – для подключения вольтметра; 4) гнезда «РО» («У», «Х», « $\perp$ ») для подключения осциллографа.

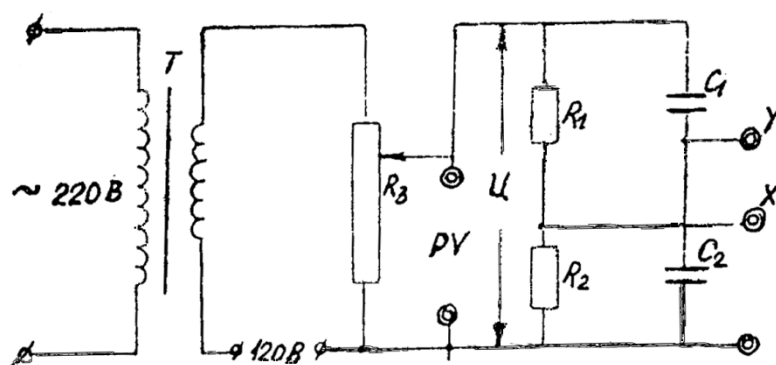


Рис. 2.4.

От источника питания на схему поступают напряжение сети ~ 220 В, 50 Гц и напряжение постоянного тока 120 В.

Напряжение снимаемое со второй цепи понижающего трансформатора T (220/100), через потенциометр R_3 подается на делитель напряжения, состоящий из сопротивлений R_1 и R_2 . Параллельно делителю R_1 и R_2 включены последовательно два конденсатора, образующие емкостной делитель: исследуемый керамический сегнетоэлектрический конденсатор C_1 и эталонный конденсатор C_2 . Вольтметр PV обеспечивает измерение величины напряжения, подаваемого на делители R_1, R_2 и C_1, C_2 .

Осциллограф PO служит для наблюдения и изучения поляризации сегнетоэлектрического конденсатора C_1 при подаче на него переменного гармонического напряжения.

Для получения симметричной петли гистерезиса в исследуемую электрическую цепь подается постоянная составляющая напряжения, величину которой можно изменять с помощью ручки плавной регулировки напряжения «12 В – 120 В», расположенной на передней панели источника питания $ИП$.

На вертикально отклоняющие пластины осциллографа подается напряжение U_y с эталонного конденсатора

$$U_y = \frac{q}{C_2}. \quad (2.9)$$

Так как C_1 и C_2 соединены последовательно, то они имеют одинаковый заряд q на обкладках. Величина этого заряда может быть выражена через электрическое смещение D поля в исследуемом конденсаторе C_1 :

$$D = \sigma = \frac{q}{S},$$

откуда

$$q = DS, \quad (2.10)$$

где σ – поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора C_1 ;

$S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь, d – диаметр обкладок конденсатора C_1 .

С учетом (2.10) напряжение

$$U_y = \frac{S}{C_2} D. \quad (2.11)$$

На горизонтально отклоняющие пластины подается напряжение U_x , снимаемое с сопротивления R_2 :

$$U_x = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U. \quad (2.12)$$

Это напряжение, как видим, составляет часть полного напряжения U , подаваемого на делитель напряжения R_1, R_2 , а значит, и на емкостный делитель C_1 и C_2 . Емкости C_1 и C_2 подобраны таким образом, что $C_1 \ll C_2$. Поэтому с достаточной степенью точности ($\sim C_1/C_2$) можно считать, что практически все напряжение U , снимаемое с потенциометра R_3 , на емкостном делителе приложено к сегнетоэлектрическому конденсатору C_1 . Действительно, так как $\frac{U_{C1}}{U_{C2}} = \frac{C_2}{C_1} \gg 1$, то $U = U_{C1} + U_{C2} \approx U_{C1}$. Тогда, полагая электрическое поле внутри конденсатора C_1 однородным, имеем

$$U = E h, \quad (2.13)$$

где E – напряженность электрического поля в пластине сегнетоэлектрика; h – толщина пластины сегнетоэлектрика.

С учетом (2.13) напряжение U_x можно представить в виде

$$U_x = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E h. \quad (2.14)$$

Таким образом, в данной электрической схеме на вертикально и горизонтально отклоняющие пластины осциллографа одновременно подаются периодически изменяющиеся напряжения, пропорциональные, соответственно, электрическому смещению D и напряженности поля E в исследуемом сегнетоэлектрике, в результате чего на экране осциллографа получается петля гистерезиса (см. рис. 2.1).

Выражение (2.11), (2.13) и (2.14) позволяют найти смещение D и напряженность E электрического поля в сегнетоэлектрике, если предварительно определены величины U_y, U_x и U . Напряжение U определяется по показанию вольтметра PV . Напряжения U_y и U_x измеряется с помощью осциллографа, и рассчитываются по формулам:

$$U_y = k_y y, \quad (2.15)$$

$$U_x = k_x x, \quad (2.16)$$

где y, x – отклонение электронного луча на экране осциллографа по осям Y и X соответственно; k_y, k_x – коэффициенты отклонения каналов Y и X осциллографа.

Учитывая (2.15) и (2.16), из выражений (2.11) и (2.14) получим:

$$D = \frac{C_2 k_y}{S} y, \quad (2.17)$$

$$E = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{k_x}{h} x. \quad (2.18)$$

Кроме того, из выражения (2.13) следует

$$E_0 = \frac{U_0}{h} = \frac{\sqrt{2}}{h} U. \quad (2.19)$$

где U – эффективное значение напряжения, измеряемое вольтметром PV .

Для напряженности поля получили две формулы. Формула (2.18) используется для определения текущего, а формула (2.19) для определения амплитудного значения напряженности поля в сегнетоэлектрике.

Применим полученные соотношения для нахождения тангенса угла диэлектрических потерь в сегнетоэлектрике и исследования зависимости $\varepsilon = f(E)$.

Подставляя в (2.18) выражения (2.17) и (2.18), имеем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\pi} \frac{\oint E dD}{E_0 D_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\oint x dy}{x_0 y_0} = \frac{1}{\pi} \frac{S_n}{x_0 y_0}, \quad (2.20)$$

где S_n – площадь петли гистерезиса в координатах x, y ; x_0, y_0 – координаты вершины петли гистерезиса.

Для измерения диэлектрической проницаемости сегнетоэлектрика ε используем тот факт, что основная кривая поляризации (кривая OAB на рис. 2.1) является геометрическим местом точек вершин циклов переполяризации, полученных при различных максимальных значениях E_0 напряженности поля в образце. Для каждой ее точки можем записать соотношение $D_0 = \varepsilon \varepsilon_0 E_0$, где D_0, E_0 – координаты вершин циклов переполяризации. Тогда, определив с помощью формул (2.17) и (2.19) значения D_0 и E_0 вершин нескольких циклов, можно из D_0 найти значения ε при различных значениях E_0 согласно выражению

$$\varepsilon = \frac{D_0}{\varepsilon_0 E_0} = \frac{C_2 h}{\sqrt{2} \varepsilon_0 S} \frac{k_y y}{U} \quad (2.21)$$

и изучить зависимость $\varepsilon = f(E)$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с описанием приборов, используемых в данной установке.

Параметры установки:

$$R_1 = 470 \pm 5 \% \text{ кОм};$$

$$R_2 = 20 \pm 5 \% \text{ кОм};$$

$$C_1 = 0,047 \pm 10 \% \text{ мкФ};$$

$$d = 85 \text{ мм};$$

$$h = 0,8 \text{ мм}.$$

1. Установить ручку «Per U» на панели кассеты ФПЭ – 02 в среднее положение.
2. Установить органы управления на панелях осциллографа РО в положение, обеспечивающее наблюдение фигур Лиссажу, измерение величины переменного напряжения и исследование зависимости между двумя внешними сигналами.
3. Подготовить к работе источник питания ИП и вольтметр РV.
4. Собрать схему согласно рис. 2.3.
5. После проверки схемы преподавателем или лаборантом присоединить все приборы к сети $\sim 220 \text{ В}$, 50 Гц и включить тумблеры «Сеть» на панелях всех приборов. На экране осциллографа должна появиться петля гистерезиса.
6. Установить петлю гистерезиса в центральную часть экрана осциллографа. С помощью ручки «12 В – 120 В» на панели источника питания подобрать такую величину постоянной составляющей напряжения, при которой изображение петли гистерезиса на экране является симметричным.

Задание 1. Определение тангенса угла диэлектрических потерь

1. Получить петлю гистерезиса предельного цикла. Для этого повернуть в крайнее правое положение ручку «Per U» на панели кассеты и подобрать, если это необходимо, такой коэффициент отклонения k_y осциллографа, чтобы кривая гистерезиса предельного цикла целиком размещалась в пределах экрана, занимая не меньше половины экрана (по вертикали).
2. Измерить координаты x_0 и y_0 вершины петли гистерезиса. Для этого, подводя каждую из вершин петли (точки А и С на рис. 2.1) сначала к оси Х, а затем к оси Y (центральный, градуированным линиям сетки экрана), определить их координаты $+x_0$ и $-x_0$, $+y_0$ и $-y_0$ и взять среднее арифметическое из модулей полученных значений. Записать значение коэффициента отклонения k_y при изменении y_0 .
3. Установить кривую гистерезиса симметрично относительно осей Y и X и перерисовать ее с экрана осциллографа на миллиметровую бумагу по точкам, снятым с помощью сетки экрана.

4. Определить площадь петли гистерезиса, используя рисунок, выполненный на миллиметровой бумаге.
5. Вычислить $\operatorname{tg} \delta$ по формуле (2.20).

Задание 2. Определение остаточного смещения D_r , коэрцитивного поля E_c и спонтанной поляризации насыщения P_{smax}

1. Установить петлю гистерезиса предельного цикла, полученную в задании 1, п. 1, симметрично относительно оси Y . Измерить значение y_r как половину ширины петли при $x = 0$. Записать значение k_y , соответствующее этому измерению.
2. Установить петлю гистерезиса симметрично относительно оси X . Измерить значение x_c как половину ширины петли при $y = 0$.
3. Продолжить линейные участки петли предельного цикла (AB и CD на рис. 2.1) до пересечения с осью Y , используя рисунок петли, выполненный в задании 1. п. 3. Измерить значение y_s как половину расстояния между точками пересечения экстраполированных участков с осью Y .
4. По формулам (2.17) и (2.18) рассчитать значения D_r ; $P_{smax} \approx D_s$ и E_c .
5. Оценить погрешности измерения остаточного смещения D_r и коэрцитивного поля E_c .

Задание 3. Получение основной кривой поляризации и изучение зависимости $\varepsilon = f(E)$

1. Для кривой гистерезиса предельного цикла, полученной в задании 1, измерить значения координат x_{0max} и y_{0max} вершины цикла (точки B на рис. 2.1) по методике, описанной в том же задании 1, п. 2. Записать значение коэффициента k_y при изменении y_{0max} . Определить по показанию вольтметра PV напряжение U .
2. Уменьшить напряжение U с помощью ручки «Per U » на панели кас-сеты и получить петлю предельного цикла, соответствующую такому амплитудному значению E_0 напряженности поля, ниже которого предельный цикл исчезает (т.е. начинают изменяться площадь петли и координаты ее вершин). Для этой петли: а) определить по показанию вольтметра PV напряжение U ; б) взять из задания 1, п. 2 значения x_0 , y_0 и k_y .
3. Получить несколько частных циклов, уменьшая напряжение U ручкой «Per U » и изменяя коэффициент k_y осциллографа таким образом, чтобы каждая петля гистерезиса занимала не менее половины экрана

(по вертикали). Число частных циклов должно быть не менее пяти при различных значениях коэффициента k_y .

4. Результаты всех измерений по п. 1-3 занести в табл. 2.1.
5. Построить основную кривую поляризации в координатах x, y .
6. По формулам (2.19) и (2.21) рассчитать значения E_0 и ε для всех исследованных циклов переполаризации.
7. Оценить погрешности измерения ε .
8. Занести в табл. 2.1 результаты всех вычислений.
9. Построить график зависимости $\varepsilon = f(E)$.

Таблица 2.1

U, В	x_0 , дел	y_0 , дел	k_y , В/дел	$\frac{k_y y_0}{U}$	E_0 , 10^4 В/м	$\varepsilon, 10^3$	$\Delta\varepsilon, 10^3$	$(\varepsilon \pm \Delta\varepsilon),$ 10^3

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается поляризация диэлектриков? Какая величина является количественной характеристикой поляризации? Как эта величина связана с напряженностью электрического поля в диэлектрике?
2. Опишите основные свойства сегнетоэлектриков.
3. Нарисуйте принципиальную электрическую схему для получения петли гистерезиса и объясните ее работу.
4. Получите формулу, по которой в работе определяется диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс физики. – М. : Наука. – Т. 2.
2. Калашников С.Г. Электричество. – М. : Наука, 1985.

Лабораторная работа ФПЭ – 03

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОНА К ЕГО МАССЕ МЕТОДОМ МАГНЕТРОНА

Цель работы: измерение удельного заряда ($|e|/m$) электрона методом магнетрона.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила, которую называют магнитной:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \vec{B}],$$

где q – заряд частицы, $\vec{v}$ – ее скорость, $\vec{B}$ – индукция магнитного поля.

Направлена эта сила перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Модуль магнитной силы:

$$F = qvB \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Траектория движения заряженной частицы в магнитном поле определяется конфигурацией магнитного поля, ориентацией вектора скорости и отношением заряда частицы к ее массе.

Если имеются одновременно электрическое и магнитное поля, то сила, действующая на заряженную частицу, называется силой Лоренца и определяется как

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]),$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Существуют различные методы определения удельного заряда электрона – отношения $|e|/m$, где m – масса электрона, в основе которых лежат результаты исследования движения электрона в электрическом и магнитном полях. Один из них – метод магнетрона. Называется он так по тому, что конфигурация полей в нем напоминает конфигурацию полей в магнетронах – генераторах электромагнитных колебаний.

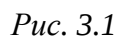
Сущность метода состоит в следующем: специальная двухэлектродная электронная лампа, электроды которой представляют собой коаксиальные цилиндры, помещается внутри соленоида так, что ось лампы совпадает с осью соленоида. Электроны, вылетающие из катода лампы, при

$$\overline{F} = e[\overline{v} \cdot \overline{B}], \quad (3.1)$$

где e – заряд электрона, $\overline{v}$ – скорость электрона, $\overline{B}$ – индукция магнитного поля.

где e – заряд электрона, $\bar{v}$ – скорость электрона, $\bar{B}$ – индукция магнитного поля.

Рассмотрим подобное движение электронов в лампе при наличии магнитного поля. Для описания этого движения воспользуемся цилиндрической системой координат (рис. 3.1), в которой положение электрона определяется расстоянием его от оси лампы r , полярным углом φ и смещением вдоль оси Z .



25

Момент импульса L_z электрона относительно оси Z

$$L_z = mv_\varphi r, \quad (3.2)$$

где $v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}$ – азимутальная составляющая скорости, перпендикулярная радиусу-вектору $\vec{r}$.

Момент M сил, действующих на электрон относительно оси Z определяется только составляющей магнитной силы, перпендикулярной $\vec{r}$. Электрическая сила и составляющая магнитной силы, направленные вдоль радиуса r , момента относительно оси Z не создают. Таким образом,

$$\vec{M} = -e[\vec{r}[\vec{v} \times \vec{B}]] = -e\{v(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{v})\} = -e\{0 - \vec{B}(r \cdot v \cdot \cos \varphi)\},$$

или
$$M_z = rF_\varphi = r|e|v_r B, \quad (3.3)$$

где $v_r = dr/dt$ – радиальная составляющая скорости электрона.

Согласно уравнению моментов,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (3.4)$$

Проектируя на ось Z, получим

$$\frac{d(mv_\varphi r)}{dt} = |e|rv_r B = |e|r \frac{dr}{dt} B$$

или

$$\frac{d(mv_\varphi r)}{dt} = \frac{1}{2}|e|B \frac{d(r^2)}{dt}. \quad (3.5)$$

Интегрируем уравнение (3.5):

$$mv_\varphi r = \frac{1}{2}|e|Br^2 + const.$$

Константу найдем из начальных условий: при $t=0$ и $r = r_k$ (где r_k – радиус катода) $v_\varphi = 0$. Тогда:

$$const = -\frac{1}{2}|e|Br_k^2$$

и

$$v_\varphi = \frac{|e|B}{2mr} (r^2 - r_k^2). \quad (3.6)$$

Приобретаемая электроном кинетическая энергия равна работе сил электрического поля:

$$\frac{m(v_\varphi^2 - v_r^2)}{2} = |e|U, \quad (3.7)$$

где u – потенциал относительно катода точки поля, в которой находится электрон.

Подставляя в (3.7) значение v_ϕ из (3.6), получаем

$$|e|U = \frac{m}{2} \left[v_r^2 + \frac{e^2 B^2}{4m^2 r^2} (r^2 - r_k^2) \right]. \quad (3.8)$$

При некотором значении индукции магнитного поля $B_{кр}$, которое называют критическим, скорость электрона вблизи анода станет перпендикулярной радиусу r , т.е. при $r = r_a$, $v_r = 0$. Тогда уравнение (3.8) примет вид

$$|e|u_a = \frac{e^2 B_{кр}^2}{8mr_a^2} (r_a^2 - r_k^2)^2,$$

где u_a – потенциал анода относительно катода (анодное напряжение); r_a – радиус анода.

Отсюда находим выражение для удельного заряда электрона

$$\frac{|e|}{m} = \frac{8u_a}{B_{кр}^2 r_a^2 (1 - r_k^2 / r_a^2)}. \quad (3.10)$$

Индукция магнитного поля соленоида, длина L которого соизмерима с диаметром D , находится по формуле

$$B_{кр} = \frac{\mu_0 N i_{кр}}{\sqrt{L^2 + D^2}}, \quad (3.11)$$

где N – число витков соленоида, $i_{кр}$ – ток в соленоиде, L – длина соленоида, D – диаметр его витков.

Таким образом, экспериментально определив $B_{кр}$, можно вычислить величину e/m . Для нахождения $B_{кр}$ в лампе следует установить разность потенциалов между анодом и катодом и, включив ток в соленоиде, постепенно наращивать его, что увеличивает магнитное поле в лампе.

Если бы все электроны покидали катод со скоростью, равной нулю, то зависимость величины анодного тока от величины индукции магнитного поля имела бы вид, показанный на рис. 3.2 (пунктирная линия). В этом случае при $B < B_{кр}$ все электроны, испускаемые катодом, достигали бы анода, а при $B > B_{кр}$ ни один электрон не попадал бы на анод.

Однако некоторая некоаксиальность катода и анода, наличие остаточного газа в лампе, падение напряжения вдоль катода и

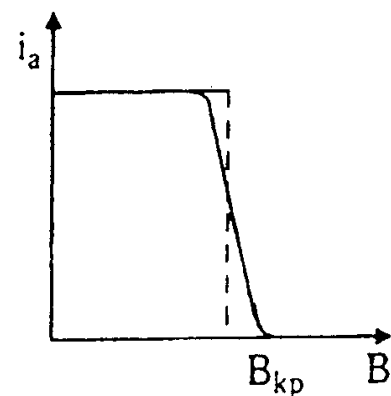


Рис. 3.2.

т.д. приводят к тому, что критические условия достигаются для разных электронов при различных значениях B . Все же перелом кривой останется достаточно резким и может быть использован для определения $B_{кр}$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Для определения удельного заряда электрона предназначена кассета ФПЭ – 03, к которой подключается источник питания ИП и измерительный прибор В7-35, как это показано на рис. 3.3.

Геометрические размеры соленоида:

1. Длина $L = 0,167$ м;
2. Число витков $N = 2700$;
3. Диаметр $D = 0,085 \pm 0,5 \%$ м;
4. Радиус анода $r_a \approx 3,6$ мм;
5. Индуктивность $L = 170 \pm 10 \%$ мГн
6. Радиус катода считать малым $r_k \ll r_a$, т.е. $r_k \rightarrow 0$.

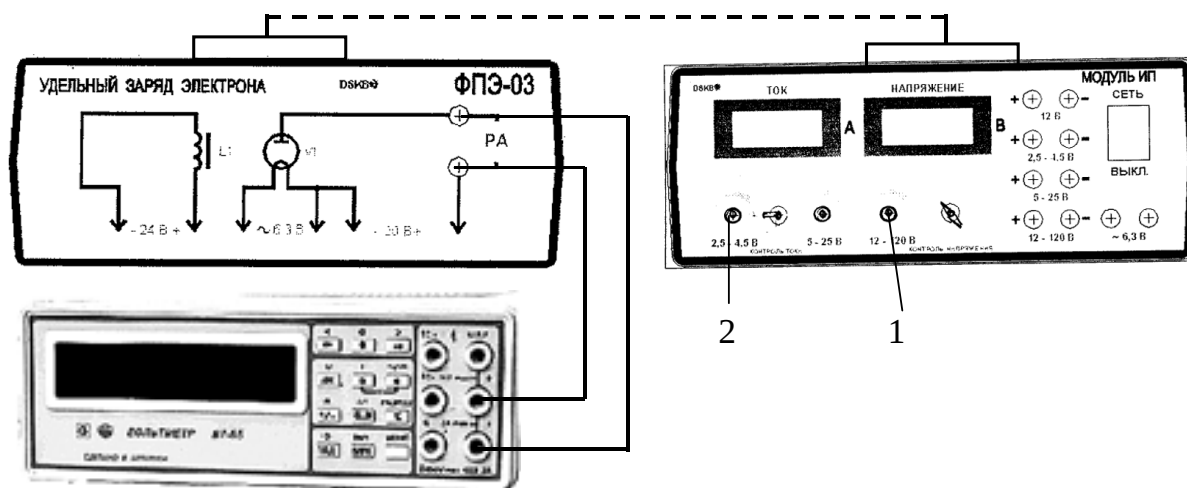


Рис. 3.3

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Собрать электрическую схему установки (рис. 3.3). Для этого подсоединить два гнезда на лицевой панели кассеты ФПЭ – 03 с соответствующими гнездами измерительного прибора В7-35. Будьте внимательны! Переключение диапазонов измерения тока с мА на μ А происходит автоматически.
2. Установить ручкой 1 напряжение $U_a = 50$ В по вольтметру ИП.
3. Ручкой 2 изменять ток в соленоиде от минимального 0.3 А через 0.1 А при постоянном анодном напряжении. При этом внимательно следите за поведением анодного тока. Как только i_a начнёт падать,

шаг измерения нужно уменьшить до 0.03-0.05 А. Снять сбросовую характеристику, т.е. зависимость анодного тока i_a от тока в соленоиде i_c . Значения анодного тока i_a , определяемые по прибору В7-35, и значения тока в соленоиде, определяемые по показаниям амперметра ИП, занести в табл. 3.1.

Таблица 3.1

$u_a=50\text{ В}$		$u_a=\dots\text{В}$		$u_a=\dots\text{В}$	
i_c	i_a	i_c	i_a	i_c	i_a
А	мкА	А	мкА	А	мкА

- Повторить п. 2 и 3 при двух других значениях анодного напряжения (больших 50 В). Результаты измерений занести в табл. 3.1.
- Для каждого значения анодного напряжения построить на листе формата А4 сбросовую характеристику, откладывая по оси ординат значения анодного тока i_a , а по оси абсцисс – значения тока в соленоиде i_c . Для нахождения критического значения тока в соленоиде $i_{кр}$ провести до взаимного пересечения касательную к точке перегиба сбросовой характеристики (на участке ее спада) и прямую, соответствующую изменению минимальных значений анодного тока (как показано на рис. 3.4).

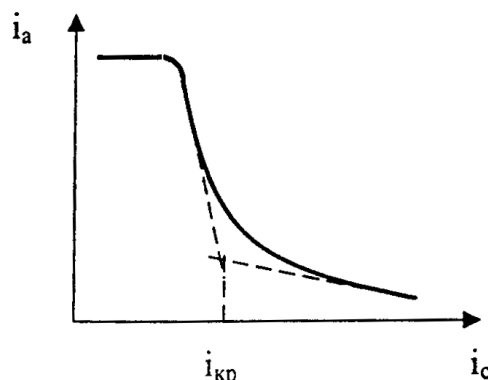


Рис. 3.4.

Погрешность графических измерений зависит от правильного выбора масштаба!

Занести полученные значения $i_{кр}$ в табл. 3.2.

Таблица 3.2

$u_a, \text{В}$	$i_{кр}, \text{А}$	$B_{кр}, \text{Тл}$	$ e /m, \text{Кл/кг}$

- Для каждого критического значения тока в соленоиде $i_{кр}$ по формуле (3.11) рассчитать индукцию магнитного поля $B_{кр}$.
- Вычислить $|e|/m$ по формуле (3.10) для каждого значения $B_{кр}$ и определить среднее значение $\overline{|e|/m}$.

8. Оценить среднее квадратичное отклонение и вычислить погрешность полученной величины $\overline{|e|/m}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем суть метода магнетрона для определения отношения $|e|/m$?
2. Будет ли влиять на величину $B_{кр}$ изменение направления тока соленоида на противоположное?
3. Зависит ли величина $|e|/m$ от величины анодного напряжения?

Лабораторная работа ФПЭ – 04

ИЗУЧЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛЕНОИДА С ПОМОЩЬЮ ДАТЧИКА ХОЛЛА

Цель работы: исследование магнитного поля на оси соленоида с использованием датчика Холла.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В пространстве, окружающем проводники с током или движущиеся заряды, возникает магнитное поле, которое можно обнаружить по воздействию его на другой проводник с током или магнитную стрелку.

Магнитное поле в каждой точке пространства количественно может быть описано с помощью вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ или с помощью вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$. В вакууме векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (4.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Для вычисления напряженности и индукции магнитного поля используют закон Био-Савара-Лапласа, согласно которому, элементарная напряженность магнитного поля $d\vec{H}$, создаваемая элементом линейного проводника с током $i d\vec{L}$ в некоторой точке пространства на расстоянии $\vec{r}$, определяется выражением

$$d\vec{H} = \frac{[i \cdot d\vec{L}, \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (4.2)$$

Для нахождения результирующей напряженности, создаваемой проводником конечных размеров, надо воспользоваться принципом суперпозиции магнитных полей и найти векторную сумму элементарных напряженностей $d\vec{H}$:

$$\vec{H} = \sum_k d\vec{H}_k = \sum_k \frac{[i \cdot d\vec{L}, \vec{r}]_k}{4\pi r_k^3}. \quad (4.3)$$

В пределе сумма записывается в виде интеграла по контуру проводника с током. Применим формулу (4.3) для вычисления напряженности магнитного поля на оси соленоида. Каждый виток соленоида – это круговой ток, поэтому первоначально вычислим индукцию $\vec{B}$ магнитного поля на оси кругового витка с током (рис. 4.1).

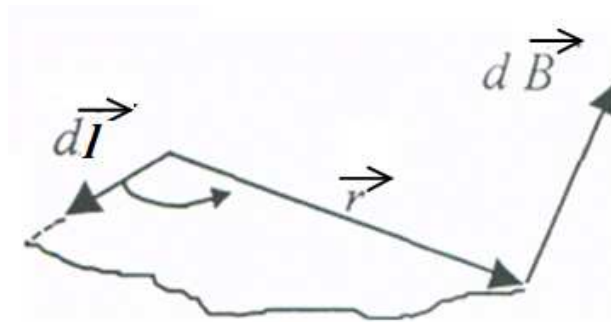
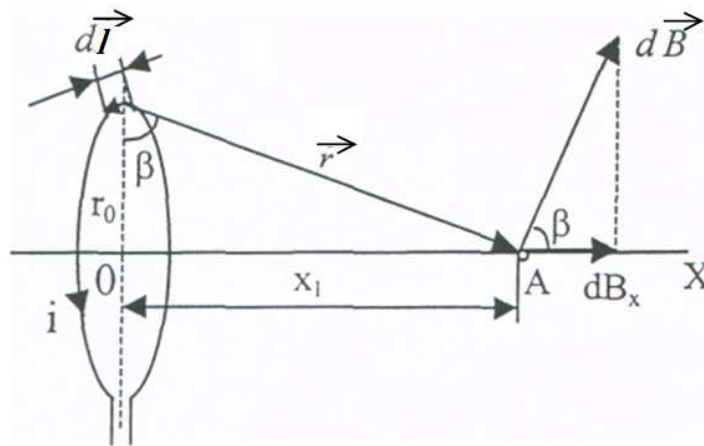


Рис. 4.1

Из закона Био-Савара-Лапласа индукция магнитного поля от элемента кругового тока $d\vec{L}$ в точке A равна

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i [d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3}$$

или, в скалярной форме

$$dB = \frac{\mu_0 i \cdot dl}{4\pi r^2}, \quad (4.4)$$

так как угол между векторами $d\vec{L}$ и $\vec{r}$ равен $\pi/2$.

Осевая составляющая индукции магнитного поля от элемента тока

$$dB_x = dB \cos \beta = dB \frac{r_0}{r} = \frac{\mu_0 i r_0}{4\pi r^3} dl. \quad (4.5)$$

Индукция $\vec{B}$ от кругового витка с током направлена вдоль оси витка OX и согласно (4.4) запишется

$$B = \int_0^B dB_x = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i r_0}{4\pi r^3} dl = \frac{\mu_0 i r_0}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} dl = \frac{\mu_0 i r^2}{2r^3}. \quad (4.6)$$

Учитывая, что

$$r = \sqrt{r_0^2 + x_1^2}, \quad (4.7)$$

получаем

$$B = \frac{\mu_0 i r_0^2}{2(r_0^2 + x_1^2)^{3/2}}, \quad (4.8)$$

где x_1 – расстояние от центра витка до рассматриваемой точки А.

Теперь рассмотрим соленоид, как систему круговых токов, соединенных последовательно. Определим индукцию магнитного поля в произвольной точке O на оси соленоида (рис. 4.2).

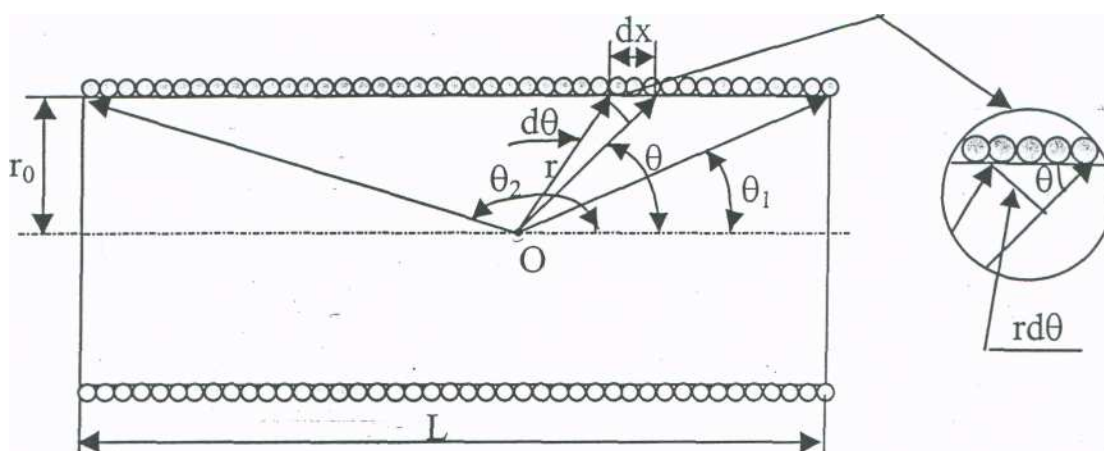


Рис. 4.2

Пусть на единицу длины соленоида приходится n витков. Тогда на участке dx будет $(n dx)$ витков, которые в точке O создадут магнитное поле с индукцией

$$dB_x = \frac{\mu_0 i r_0^2 n dx}{2r^3}. \quad (4.9)$$

Из геометрических построений, показанных на рис. 4.2. следует

$$r = \frac{r_0}{\sin \theta}; dx = \frac{r d\theta}{\sin \theta}. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в (4.9), имеем

$$dB_x = \frac{1}{2} \mu_0 i n \sin \theta d\theta. \quad (4.11)$$

Интегрируя (4.11), получаем выражение для расчета индукции магнитного поля на оси соленоида

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 i n \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 i n}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2), \quad (4.12)$$

где θ_1 и θ_2 – углы между радиусами-векторами, проведенными из точки O к крайним виткам, и осью соленоида.

Приблизительный вид изменения индукции магнитного поля вдоль оси соленоида показан на рис. 4.3. Значение $x = 0$ соответствует средней точке на оси соленоида.

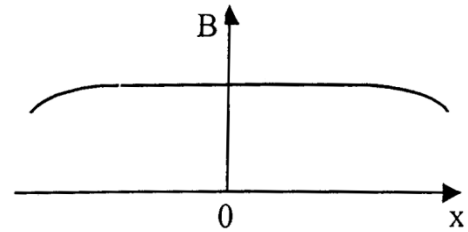


Рис. 4.3

Получим формулу для расчета индукции B_0 магнитного поля в средней точке на оси соленоида длиной L и диаметром D . В этом случае

$$\cos\theta_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + D^2}}; \cos\theta_2 = -\frac{L}{\sqrt{L^2 + D^2}}.$$

Учитывая, что $n = N/L$ (где N – число витков в соленоиде), из (4.12) для средней точки на оси соленоида имеем

$$B_0 = \frac{\mu_0 i N}{\sqrt{L^2 + D^2}}. \quad (4.13)$$

В случае бесконечно длинного соленоида $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \pi$, тогда из (4.12) получаем

$$B_\infty = \mu_0 i n. \quad (4.14)$$

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

В работе для изучения индукции магнитного поля на оси соленоида используется метод, основанный на явлении (эффекте) Холла. Это возникновение в твердом проводнике (или полупроводнике) с током плотностью $\vec{j}$, помещенном в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, электрического поля напряженностью $\vec{E}$. Как следствие, между электродами, касающимися боковых граней образца, возникнет разность потенциалов $\Delta\phi_x$ (см. рис. 4.4).

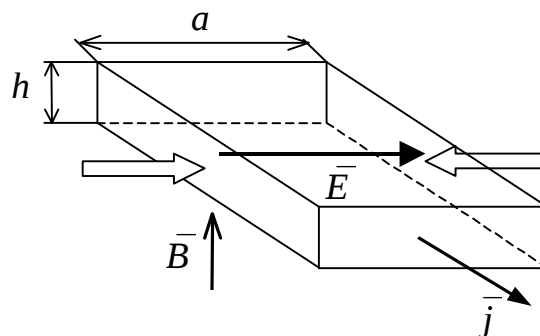


Рис. 4.4

ЭДС Холла может быть записана в виде

$$\Delta\phi_x = R_x j B a, \quad (4.15)$$

где R_x – постоянная Холла; a – ширина проводника.

Плотность тока определяется формулой

$$j = \frac{i_D}{ah}, \quad (4.16)$$

где i_D – управляющий ток через датчик Холла.

Подставляя (4.16) в (4.15), получаем

$$\Delta\phi_x = R_x \frac{i_D B}{h}. \quad (4.17)$$

Обычно значение постоянной Холла для полупроводников значительно больше, чем для проводников.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

В работе используется полупроводниковый датчик Холла (Х501), конструкция которого показана на рис. 4.5.

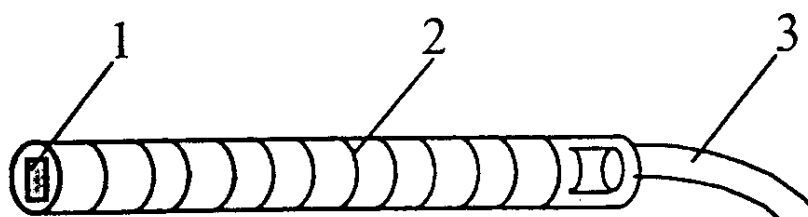


Рис. 4.5

Датчик Холла 1 располагается на торце специального штока (зонда), который перемещается по оси соленоида. Для определения положения штока внутри соленоида на его боковой грани нанесена сантиметровая шкала 2. К штоку подсоединен жгут 3 для подключения электродов.

В отсутствии магнитного поля ($B = 0$) $\Delta\phi_x$ должна быть равна нулю, но вследствие ряда факторов это не выполняется. Погрешность измерения ЭДС Холла $\delta\phi_x = 1 \text{ мВ}$.

Электрическая схема установки показана на рис. 4.6. Соленоид (ФПЭ-04) посредством кабеля 2 подключается к источнику питания (ИП). Ток через соленоид фиксируется амперметром 3. Перемещая шток 1 датчика Холла вдоль оси соленоида, измеряют ЭДС Холла с помощью цифрового вольтметра В7-27А/1.

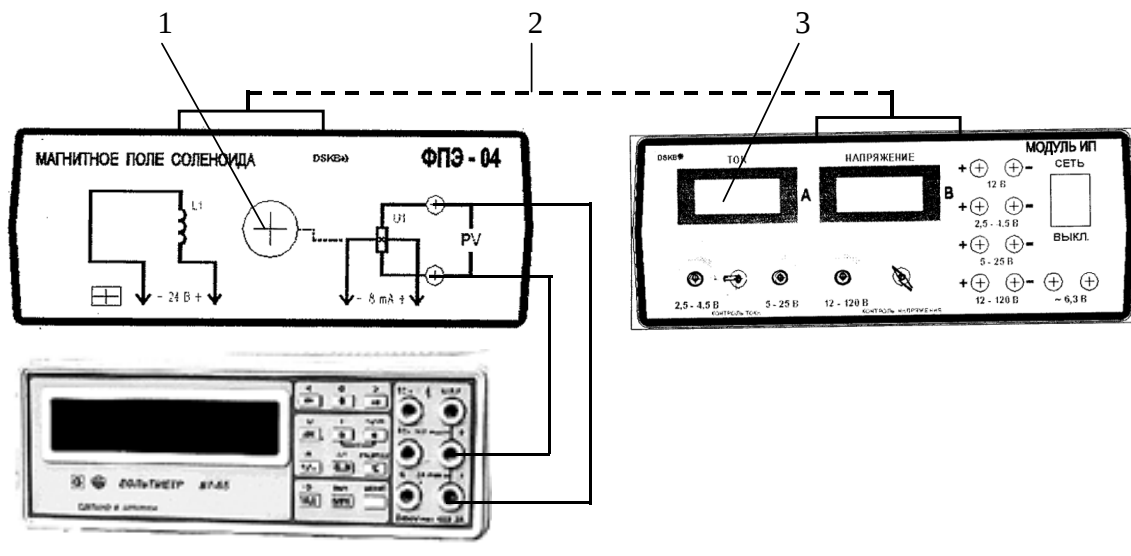


Рис. 4.6

Параметры установки:

- толщина датчика Холла в направлении магнитного поля $h = 0,4 \text{ мм}$;
- ширина датчика Холла $10,5 \text{ мм}$;
- длина датчика Холла 7 мм ;
- управляющий ток датчика Холла $i_D = 15 \text{ мА}$;
- число витков соленоида $N = 2700$;
- длина соленоида $L = 0,167 \text{ м}$;
- диаметр соленоида $D = 0,085 \pm 5 \% \text{ м}$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Определение зависимости магнитной индукции в средней точке на оси соленоида и тарировка датчика Холла

1. Собрать схему, изображенную на рис. 4.6. Для этого гнезда на лицевой панели кассеты ФПЭ – 04 соединить с соответствующими гнездами цифрового вольтметра. Поставить штوك с датчиком Холла в среднее положение на оси соленоида («0» по шкале штюка).
2. Включить источник питания и цифровой вольтметр в сеть (220 В). Измерить ЭДС Холла $\Delta\phi'_x$ в средней точке соленоида для токов 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,2 А. Полученные результаты занести в табл. 4.1.
3. Учесть погрешность измерения ЭДС Холла, вычитая поправку: $\Delta\phi_x = \Delta\phi'_x - \delta\phi_x$.

Таблица 4.1

№ п/п	I, А	$\Delta\varphi_x$, В	$\Delta\varphi'_x$, В	B ₀ , Тл	R _x , Ом · м/Тл	$\bar{R}_x$, Ом · м/Тл
1	0,3					
2	0,5					
3	0,7					
4	0,9					
5	1,2					

4. Вычислить индукцию B_0 магнитного поля в центре соленоида по формуле (4.13).
5. Для каждого измерения определить значение постоянной Холла из формулы (4.17):

$$R_x = \frac{\Delta\varphi_x h}{i_d B_0}.$$

Значения управляющего тока через датчик i_d и ширины датчика h приведены в описании экспериментальной установки.

6. Найти среднее арифметическое значение постоянной Холла $\bar{R}_x$.
7. Построить графики зависимостей индукции магнитного поля и ЭДС Холла от тока в соленоиде: $B_0 = f(i)$ и $\Delta\varphi_x = f(i)$.

Задание 2. Исследование изменения индукции магнитного поля вдоль оси соленоида

1. Установить величину тока в соленоиде $i = 1 \text{ А}$.
2. Перемещая шток с датчиком Холла вдоль оси соленоида с интервалом $\Delta x = 2 \text{ см}$, измерять ЭДС Холла. Результаты измерений занести в табл. 4.2.

Таблица 4.2

x, см	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10
$\Delta\varphi_x$, В											
B, Тл											

3. Вычислить значение индукции магнитного поля в соленоиде для каждого положения датчика Холла из формулы (4.17)

$$B = \frac{h \Delta\varphi_x}{i_d \bar{R}_x}.$$

4. Построить график зависимости индукции магнитного поля от координаты вдоль оси соленоида $B = f(x)$. Вид графика показан на рис. 4.3.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Расчет индукции магнитного поля на оси кругового витка с током.
2. Расчет индукции магнитного поля на оси соленоида.
3. В чем заключается эффект Холла?
4. Объяснить полученные в работе экспериментальные зависимости.

Лабораторная работа ФПЭ – 05

ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

Цель работы: исследование явления взаимной индукции двух коаксиально расположенных (соосных катушек).

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим два контура 1 и 2, расположенные на некотором расстоянии друг от друга (рис. 5.1). Если по контуру 1 пропустить ток I_1 , то он создает поток магнитной индукции через контур 2, который будет пропорционален току I_1 :

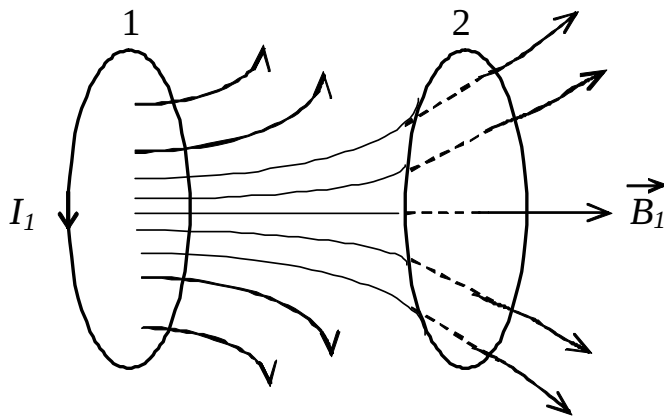


Рис. 5.1.

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1. \quad (5.1)$$

Коэффициент пропорциональности M_{21} называется коэффициентом взаимной индукции контуров или взаимной индуктивностью контуров. Он зависит от формы и взаимного расположения контуров 1 и 2, а также от магнитных свойств окружающей среды. При изменении тока в первом контуре

магнитный поток через второй контур изменяется, следовательно, в нем наводится ЭДС взаимной индукции:

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) справедлива в отсутствие ферромагнетиков.

Если поменять местами контуры 1 и 2 и провести все предыдущие рассуждения, то получим

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (5.3)$$

Можно показать, что коэффициенты взаимной индукции

$$M_{21} = M_{12}. \quad (5.4)$$

ПРИБОРЫ И ОБОРУДОВАНИЕ

1. РО – электронный осциллограф.
2. РQ – звуковой генератор.
3. Модуль ФПЭ – 05.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

В данной работе изучается коэффициент взаимной индукции между длинной катушкой 1 (L_1) и короткой катушкой 2 (L_2), которая надевается на катушку 1 и может перемещаться вдоль ее оси (рис. 5.2). Питание одной из катушек, например 1, осуществляется от генератора звуковой частоты РQ, напряжение с которого

$$u = u_0 \cos \omega t \quad (5.5)$$

подается через сопротивление R . Величина R выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$R \gg \sqrt{R_1^2 + L_1^2 \omega^2}, \quad (5.6)$$

где L_1 – индуктивность катушки 1, R_1 – ее активное сопротивление. В этом случае ток, протекающий через катушку 1, можно определить по формуле

$$i_1 = \frac{u}{R} = \frac{u_0}{R} \cos \omega t = i_{01} \cos \omega t. \quad (5.7)$$

Переменный ток в катушке 1 создает переменную ЭДС взаимной индукции в катушке 2

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{u_0}{R} \omega \sin \omega t. \quad (5.8)$$

Для измерения ε_2 используется осциллограф. Амплитуда ЭДС взаимной индукции

$$\varepsilon_{02} = M_{21} \frac{u_0}{R} \omega = M_{21} \frac{u_0}{R} 2\pi f, \quad (5.9)$$

где f – частота звукового генератора. Из формулы (5.9) имеем

$$M_{21} = \frac{\varepsilon_{02} R}{2\pi f u_0}. \quad (5.10)$$

Если поменять местами катушки 1 и 2, то можно аналогично измерить

$$M_{12} = \frac{\varepsilon_{01} R}{2\pi f u_0}. \quad (5.11)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Для изучения явления взаимной индукции предназначена кассета ФПЭ – 05 «Взаимоиндукция», в которой расположены две катушки индуктивности 1 (L_1) и 2 (L_2) на одной оси и шток со шкалой (Ш), показывающий взаимное расположение катушек 1 и 2. Принципиальная схема установки показана на рис. 5.2. Для перестановки катушек необходимо переключатели Π_1 и Π_2 перебросить в противоположное положение.

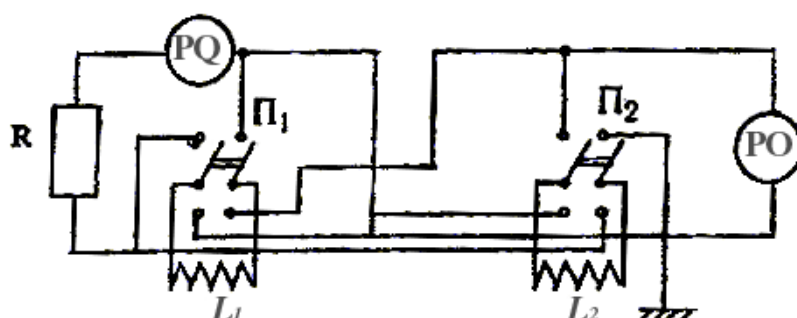


Рис. 5.2.

Электрическая схема подключения показана на рис. 5.3.

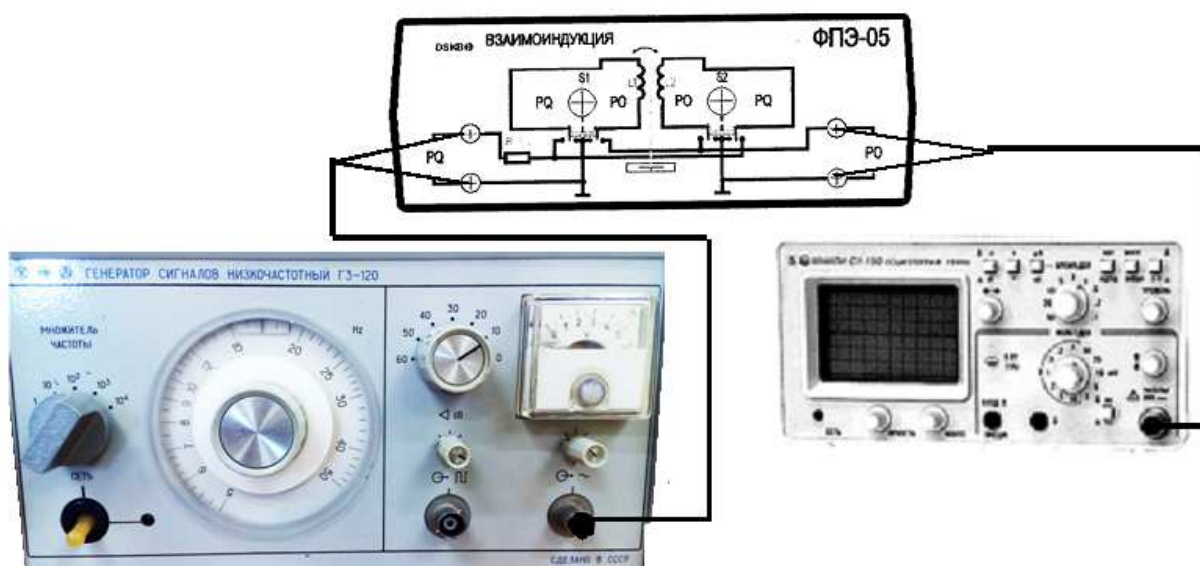


Рис. 5.3.

Кассета подключается к звуковому генератору PQ. Вольтметр, расположенный на панели PQ, измеряет действующие (эффективные) значения напряжения

$$u_{эфф} = \frac{u_0}{\sqrt{2}}. \quad (5.12)$$

Для измерения амплитуды ЭДС взаимной индукции используется электронный осциллограф (РО).

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Измерение коэффициентов взаимной индукции M_{21} и M_{12} и исследование их зависимости от взаимного расположения катушек

1. Собрать схему, изображенную на рис. 5.3.
2. Задать напряжение $u_{эфф} = 2$ В и частоту f сигнала генератора (по указанию преподавателя), подать напряжение на катушку 1 (с помощью переключателя Π_1), а ЭДС катушки 2 подать на осциллограф (с помощью переключателя Π_2). Положение переключателя «V/дел» на передней панели осциллографа РО установить 0,02–0,05 В/дел (здесь указывается цена большого деления на экране РО).
3. Установить подвижную катушку 1 в крайнее переднее положение. Перемещая ее в противоположное крайнее положение, через 1 см записывать значение координаты Z (расстояние между центрами катушек) и ЭДС взаимной индукции в цепи катушки 2 $\mathcal{E}_{02}$ в табл. 5.1.

Таблица 5.1.

$u_{эфф} = \dots$ $f = \dots$						
$Z,$ см	$\mathcal{E}_{02}$		$M_{21},$ Гн	$\mathcal{E}_{01}$		$M_{12},$ Гн
	дел.	В		дел.	В	

4. По формуле (5.10) рассчитать значение M_{21} . Полученные данные занести в табл. 5.1.
5. Поменяв местами катушки L_1 и L_2 (с помощью переключателей Π_1 и Π_2), повторить измерения по п. 2, 3 и рассчитать M_{12} .
6. Построить графики зависимости M_{21} и M_{12} как функции координаты Z (расстояние между центрами катушек).

Задание 2. Измерение M_{21} при различных значениях питающего напряжения

1. Поставить катушку 1 в среднее положение относительно катушки 2.
2. Задать частоту звукового генератора PQ по указанию преподавателя (например, 10^4 Гц).

- Измерить амплитуду ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_{02}$ при различных значениях напряжения $u_{эфф}$ в цепи катушки 1 в интервале 0-5 В через 0,5 В.
- По формуле (5.10) рассчитать M_{21} . Полученные данные занести в табл. 5.2.
- Построить график зависимости $M_{21}(u_{эфф})$.

Таблица 5.2

$f = \dots$		$R = 10^4 \text{ Ом}$
$u_{эфф}, \text{ В}$	$\mathcal{E}_{02}, \text{ В}$	$M_{21}, \text{ Гн}$

Задание 3. Измерение M_{21} при различных частотах питающего напряжения

- Поставить катушку 1 в среднее положение относительно катушки 2.
- Задать напряжение генератора по указанию преподавателя (например, 2 В).
- Измерить амплитуду ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_{02}$ при различных частотах звукового генератора от 5 до 20 кГц (не менее 10 значений).
- По формуле (5.10) рассчитать M_{21} . Полученные данные занести в табл. 5.3.

Таблица 5.3.

$u_{эфф} = \dots$	$R = 10^4 \text{ Ом}$	
$f, \text{ Гц}$	$\mathcal{E}_{02}, \text{ В}$	$M_{21}, \text{ Гн}$

- Для одного из полученных значений M_{21} рассчитать абсолютную и относительную погрешности.
- Постройте график зависимости $M_{21}(f)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Чему равна ЭДС индукции двух контуров?
- От чего зависит коэффициент взаимной индукции?
- Объяснить график зависимости $M_{21}=f(Z)$, полученный в данной работе.

Лабораторная работа ФПЭ – 06

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТЫ ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ МЕТАЛЛА

Цель работы: построение и изучение вольт-амперной характеристики двухэлектродной лампы (диода); исследование зависимости плотности тока насыщения термоэлектронной эмиссии от температуры катода и определение работы выхода электрона из вольфрама методом прямых Ричардсона.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Электрические и тепловые свойства металлов в значительной степени определяются состоянием валентных электронов, т.е. электронов проводимости, способных перемещаться в металле. Распределение энергии электронов изображено на энергетической диаграмме (рис. 6.1).

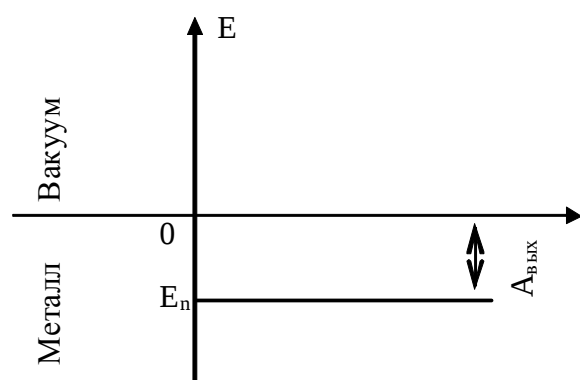


Рис. 6.1.

Если принять, что вне металла потенциальная энергия электрона равна 0, то внутри металла она отрицательна $E_n = -e\phi$. Это потенциальная яма с плоским дном, что свидетельствует об эквипотенциальности объема металла. Минимальная энергия, которую необходимо сообщить электрону для удаления из металла:

$$A_{\text{вых}} = |e|\Delta\phi \quad (6.1)$$

называется работой выхода.

Рассмотрим природу сил, препятствующих выходу электронов из металла и определяющих работу выхода $A_{\text{вых}}$. Отдельные электроны проводимости, двигаясь внутри металла с большими скоростями, могут пересекать поверхность металла. Вылетевший из металла электрон удаляется от поверхности до тех пор, пока кулоновское взаимодействие с избыточным положительным зарядом, возникшим на месте, который покинул электрон, не заставит его вернуться обратно.

Постоянно одни электроны «испаряются» с поверхности металла, другие возвращаются обратно. Поэтому металл оказывается окутанным облаком электронов, образующих совместно с наружным слоем положительных ионов двойной электрический слой, подобно плоскому конденсатору. Поле двойного слоя $\vec{E}$ препятствует выходу электронов из металла.

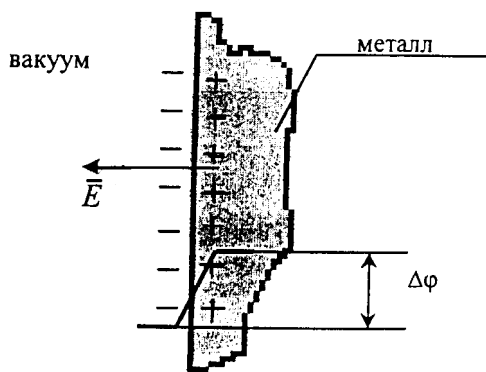


Рис. 6.2.

При комнатной температуре тически все свободные электроны заперты в пределах проводника, имеется лишь небольшое количество электронов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер и выйти из металла. Однако электронам можно различными способами сообщить дополнительную энергию. Если электроны получают энергию за счет тепловой энергии тела при повышении его темпе-

ратуры, можно говорить о термоэлектронной эмиссии.

Для наблюдения термоэлектронной эмиссии можно использовать лампу, содержащую два электрода: накаливаемый током катод и холодный

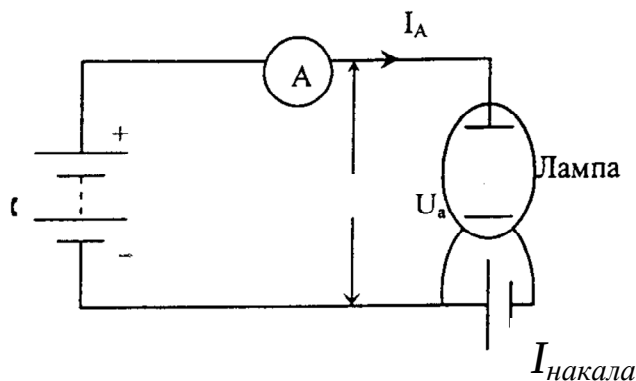


Рис. 6.3

электрод, собирающий термоэлектроны, — анод. На рисунке 6.3 изображена схема включения такого диода. Ток в этой цепи появляется только в том случае, если положительный полюс батареи соединен с анодом, а отрицательный — с катодом. Это подтверждает, что катод испускает отрицательные частицы, электроны. Сила термоэлектронного тока в диоде зависит от величины потенциала анода относительно катода.

Кривая, изображающая зависимость силы тока в диоде от анодного напряжения, называется вольт-амперной характеристикой.

На рис. 6.4 показаны вольт-амперные характеристики диода при разных температурах катода. Когда потенциал анода равен нулю, сила тока мала, она определяется лишь самыми быстрыми термоэлектронами, спо-

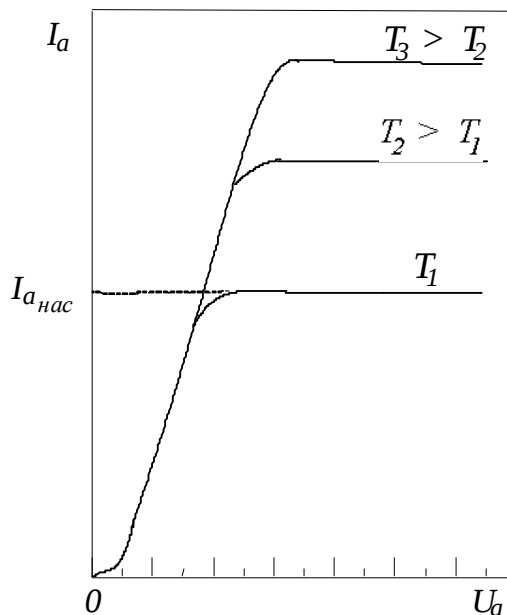


Рис. 6.4

собными достигнуть анода. При увеличении положительного потенциала анода сила тока возрастает и затем достигает насыщения, т.е. почти перестает зависеть от анодного напряжения.

При увеличении температуры катода увеличивается и значение тока, при котором достигает насыщение. Одновременно увеличивается и то анодное напряжение, при котором устанавливается ток насыщения.

Таким образом, вольт-амперная характеристика диода оказывается не линейной, т.е. не выполняется закон Ома. Это объясняется тем, что при термоэлектронной эмиссии у поверхности катода создается довольно большая плотность электронов. Они создают общий отрицательный заряд, и электроны, вылетающие с малой скоростью, не могут его проскочить. С увеличением анодного напряжения концентрация электронов в облаке пространственного заряда уменьшается. Поэтому и тормозящее действие пространственного заряда делается меньше, а анодный ток растет быстрее, чем в прямой зависимости от анодного напряжения.

Теоретически зависимость анодного тока от анодного напряжения на участке 1-2 была получена Ленгмюром и Богуславским. Она называется еще «законом трех вторых».

$$I_a = \epsilon U_a^{3/2}. \quad (6.2)$$

По мере роста анодного напряжения U_a все больше электронов, вылетевших из катода, достигает анода. Дальнейший рост анодного напряжения не может увеличить силу анодного тока, поскольку достигается насыщение. Максимальный ток, возможный при данной температуре катода, называется **током насыщения**.

При повышении температуры увеличивается скорость хаотического движения электронов в металле. При этом число электронов, способных покинуть металл, резко возрастает. Плотность тока насыщения, т.е. сила тока насыщения на каждую единицу поверхности катода S , вычисляется по формуле Ричардсона-Дешмена:

$$j_{нас} = BT^2 e^{-A_{вых}/kT}, \quad (6.3)$$

где B – эмиссионная постоянная; постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность катода, которая зависит от природы катода и его температуры.

Измеряя на опыте зависимость тока насыщения от температуры, можно определить работу выхода для данного металла.

Прологарифмируем уравнение (6.3):

$$\ln \frac{j_{нас}}{T^2} = \ln B - \frac{A_{вых}}{k} \cdot \frac{1}{T}. \quad (6.4)$$

Переходя к десятичным логарифмам, находим

$$\lg \frac{j_{нас}}{T^2} = \lg B - \frac{A_{вых}}{k} \cdot \lg e \cdot \frac{1}{T}. \quad (6.5)$$

Подставляя $\lg(e) = 0,43$, имеем

$$\lg \frac{j_{нас}}{T^2} = \lg B - \frac{0,43}{k} \cdot A_{вых} \cdot \frac{1}{T}. \quad (6.6)$$

Такой вид уравнения удобен для его экспериментальной проверки.

График зависимости $\lg \frac{j_{нас}}{T^2}$ от $\frac{1}{T}$ является прямой линией с угловым коэффициентом $0,43A_{вых}/k$.

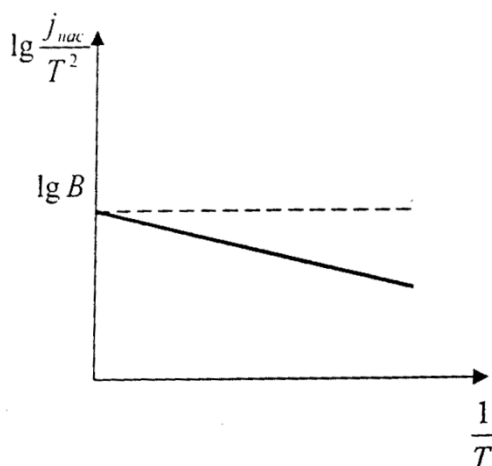


Рис. 6.5.

Определив тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс, рассчитаем работу выхода:

$$A_{вых} = \frac{k \operatorname{tg} \alpha}{0,43}. \quad (6.7)$$

Для построения графика необходимо знать плотность анодного тока насыщения $j_{нас}$ и температуру катода. Температуру рассчитаем следующим образом.

Подводимая к катоду мощность расходуется в вакуумной лампе в основном на тепловое излучение. Для вольфрама была экспериментально определена зависимость температуры катода от расходуемой на его нагрев джоулевой мощности, приходящейся на единицу площади поверхности катода. На графике (рис. 6.8), который прилагается к работе, приведены результаты этих измерений. По этому графику, зная мощность, подводимую к катоду, можно определить его температуру.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

1. ИП – источник питания.
2. Кассета ФПЭ – 06.
3. РВ – вольтметр.
4. РА – амперметр.

Электрическая схема для поведения опыта представлена на рис. 6.6 и 6.7. В качестве диода в работе используется радиолампа с вольфрамовым катодом прямого накала.

Амперметр и вольтметр в цепи накала служат для определения мощности, расходуемой на нагрев катода, что необходимо для определения температуры.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Подключить кассету ФПЭ – 06 соединительным кабелем к источнику питания (ИП на рис. 6.6). Амперметр на панели источника питания служит для контроля тока накала i_n , максимальное значение которого не должно превышать 2,2 А. Плавная регулировка напряжения накала осуществляется ручкой, расположенной под амперметром.

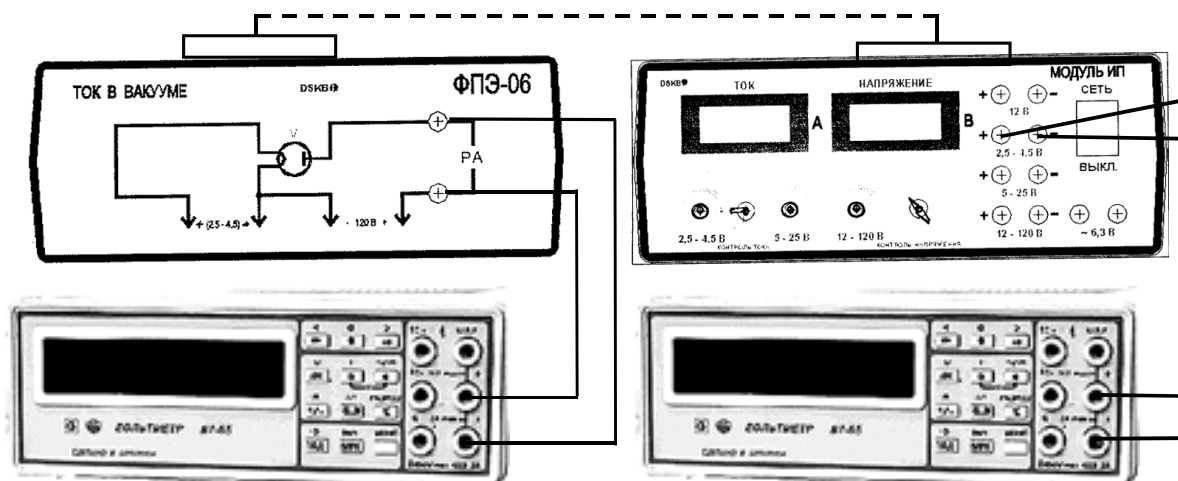


Рис. 6.6.

Напряжение накала U_n измеряется вольтметром (PV), который подключается к тем клеммам на источнике питания, где указано напряжение 2,5-4,5 В.

Вольтметр на панели источника питания измеряет анодное напряжение U_a , регулировка которого осуществляется ручкой на панели источника питания, расположенной непосредственной под вольтметром.

Для измерения анодного тока I_a используется амперметр (РА на рис. 6.6), который подключается к кассете ФПЭ – 06 к клеммам РА. Он должен работать в режиме миллиамперметра, измеряя ток до 20 мА.

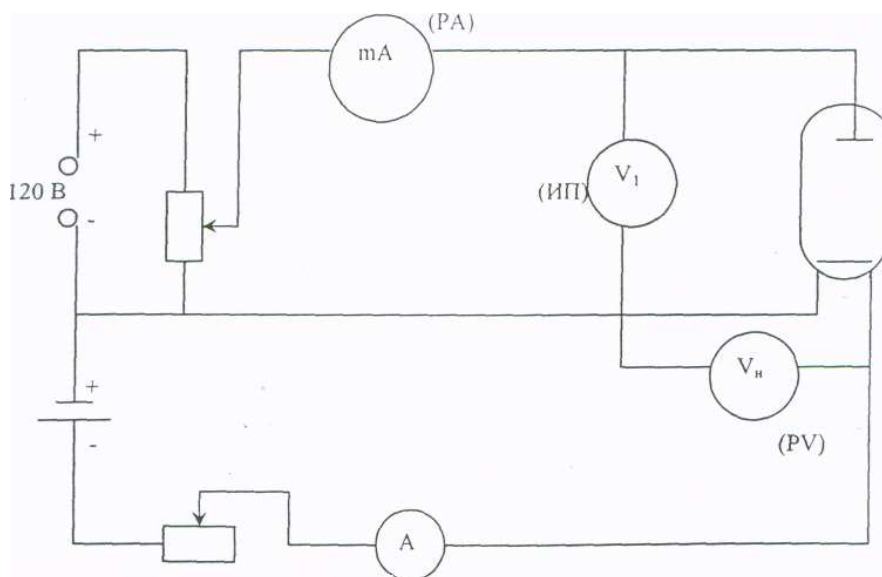


Рис. 6.7.

- Установить напряжение накала 3,7 В и, увеличивая анодное напряжение от 10 до 100 В через каждые 10 В, записать значения анодного тока в табл. 6.1.

Таблица 6.1

$U_n = \dots$	$U_a, \text{ В}$	$I_a, \text{ мА}$
$I_n = \dots$		

- Проверить измерения (пункт 2) для 4-5 любых значений напряжения накала в интервале от 3,7 до 4,3 В.
- Для каждого значения тока накала построить вольт-амперную характеристику и точку перегиба полученной кривой считать точкой насыщения.
- Для всех значений напряжения накала рассчитать мощность, выделяемую на катоде, по формуле $P = I_n U_n$, а также мощность, приходящуюся на единицу площади поверхности катода. Для данной лампы площадь поверхности катода принять $S_n = 3,52 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$.
- По графику (рис. 6.8) зависимости температуры катода от P/S_n определить температуру катода для каждого значения мощности нагрева.
- Рассчитать плотность анодного тока насыщения (рис. 6.4) по формуле $j_{нас} = \frac{I_{нас}}{S}$ принять $S = 11 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$.
- Все полученные данные занести в табл. 6.2.

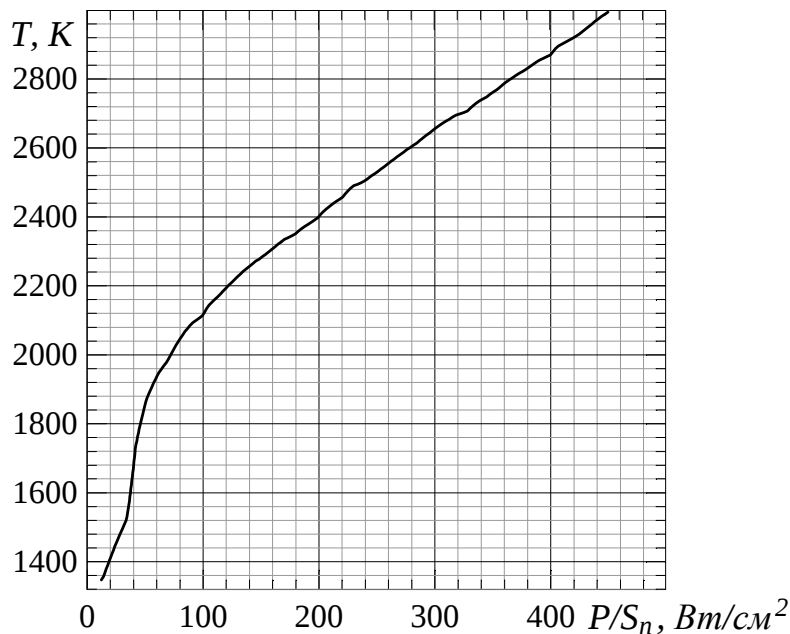


Рис. 6.8

Таблица 6.2

№ п/п	$I_{нас},$ мА	$I_{н},$ мА	$U_{н},$ В	$P/S_{н},$ Вт/см ²	$T,$ К	$1/T,$ К ⁻¹	$j_{нас},$ мА/м ²	$j_{нас}/T^2,$ мА/м ² К ²	$\lg(j_{нас}/T^2)$

9. Построить график зависимости $\lg(j_{нас}/T^2)$ от $1/T$, откладывая по оси абсцисс $1/T$, а по оси ординат $-\lg(j_{нас}/T^2)$.
10. Определить тангенс угла наклона полученной прямой к оси абсцисс и рассчитать работу выхода по формуле (6.6).
11. Рассчитать погрешность измерений по правилу графической обработки результатов измерений.
12. Сравнить полученное значение работы выхода с табличным значением для вольфрама.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется работой выхода электрона?
2. Какова природа сил, удерживающих электрон в металле?
3. Нарисуйте и объясните вольт-амперные характеристики вакуумного диода.
4. Что такое ток насыщения и как он зависит от температуры?
5. Объясните физическую природу закона трех вторых.

ИЗУЧЕНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Цель работы: изучение гистерезиса ферромагнитных материалов, расчет и построение основной кривой намагничивания, расчет работы перемещения и коэрцитивной силы.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Все вещества обладают магнитными свойствами, т.е. являются магнетиками. Магнитные свойства веществ определяются величиной и ориентацией магнитных моментов молекул, ионов или атомов. Магнитный момент $\vec{p}$ плоского контура площадью S , по которому течет ток I , определяется по формуле

$$\vec{p} = IS\vec{n}, \quad (7.1)$$

где $\vec{n}$ – единичная нормаль, направление которой определяется по правилу правого винта (рис. 7.1). В магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ на замкнутый контур с током действует механический момент:

$$|\vec{M}| = |\vec{p} \times \vec{B}| = pB \sin(\angle \vec{p}, \vec{B}), \quad (7.2)$$

который стремится повернуть контур так, чтобы направления $\vec{p}$ и $\vec{B}$ совпадали. Контур с током создает также собственное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_l$, совпадающее по направлению с магнитным моментом $\vec{p}$ контура. В устойчивом состоянии контура, когда $\vec{M} = 0$, вектор индукции $\vec{B}' = \vec{B} + \vec{B}_l$ в любой точке плоскости внутри контура всегда больше вектора индукции $\vec{B}$ внешнего магнитного поля. Увеличение индукции $\vec{B}$ внутри контура с током в магнитном поле качественно объясняет увеличение индукции в ферромагнетике, помещенном во внешнее магнитное поле.

Намагничивание вещества объясняется наличием у составляющих его атомов, молекул, ионов микроскопических магнитных моментов: электронного орбитального $\vec{p}_l$ и электронного собственного (спинового) $\vec{p}_s$. Электронным орбитальным магнитным моментом обладает электрон, движущийся вокруг ядра атома (рис. 7.1). Такой электрон подобен плоской круговой рамке с током $I = e/T = ev$, имеющей магнитный момент $\vec{p}_l = IS\vec{n} = ev\pi r^2 \vec{n}$, где e – заряд электрона, T – период, v – частота вращения, r – радиус круговой орбиты. Направление магнитного момента $\vec{p}_e$ противоположно направлению механического момента $\vec{L} = [\vec{r}, m_e \vec{V}]$ коли-

чества движения (рис. 7.1), где $\vec{V}$ – скорость электрона на орбите. Величины $\vec{p}_l$ и $\vec{L}$ связаны соотношением

$$\vec{p}_l = \frac{-e}{2m_e} \vec{L}, \text{ где } m_e - \text{масса электрона.}$$

Спиновой магнитный момент $\vec{p}_s$ (см. рис. 7.1) является неотъемлемым свойством электрона. Единицей магнитного момента является магнетон Бора:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24}, \text{ А} \cdot \text{м}^2,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка.

При отсутствии поля приближенно можно считать, что магнитный момент атома

$$\vec{p}_{am} = -\sum \vec{p}_{el} + \sum \vec{p}_{sl}, \quad (7.3)$$

где Z – число электронов в атоме.

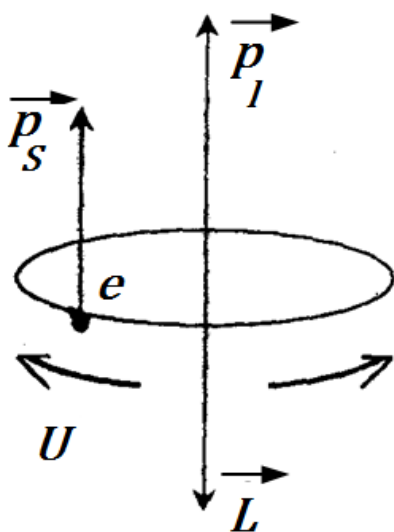


Рис. 7.1

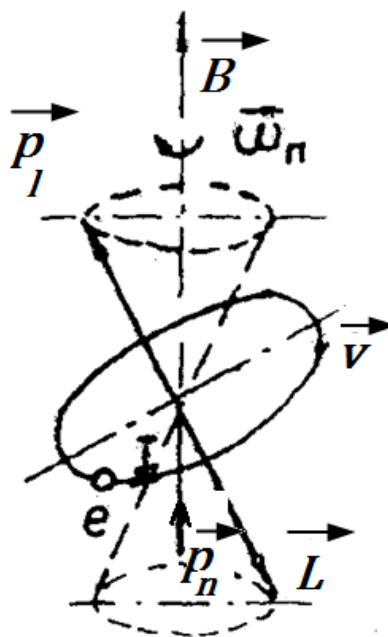


Рис. 7.2

Магнитный момент молекулы $\vec{p}_{mol} = \sum_{k=1}^N \vec{p}_{amk}$, где N – число атомов в молекуле.

Во внешнем магнитном поле на электрон атома, как на контур с током, действует момент сил M (см. рис. 7.2). Под действием этого момента сил орбита электрона, подобно механическому волчку, будет совершать

прецессию, при которой векторы $\vec{p}$ и $\vec{L}$ описывают с постоянной угловой скоростью конус вокруг направления поля. Это дополнительное движение электрона приводит к появлению у него магнитного момента прецессии $\vec{p}_n$, направленного против магнитного поля $\vec{B}$. Это явление носит название *диамагнитного эффекта*. При наличии внешнего магнитного поля магнитный момент атома

$$\vec{p}_{am} = -\sum_{i=1}^N \vec{p}_{el} + \sum_{i=1}^N \vec{p}_{sl} + \sum_{i=1}^N \vec{p}_m . \quad (7.4)$$

Намагниченность $\vec{J}$ равна магнитному моменту единицы объема магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_{mol}}{\Delta V} , \quad (7.5)$$

где ΔV – малый объем магнетика; $\sum \vec{p}_{mol}$ – сумма магнитных моментов всех молекул в объеме ΔV . Намагниченность $\vec{J}$ связана с напряженностью магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H} , \quad (7.6)$$

где χ – коэффициент пропорциональности, называемый **магнитной восприимчивостью** вещества.

Магнитные свойства характеризуются также **магнитной проницаемостью** μ . χ и μ связаны соотношением

$$\mu = 1 + \chi . \quad (7.7)$$

В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости все вещества делятся на три группы:

1. *Диамагнетики* – вещества (например, инертные газы), у которых при отсутствии внешнего магнитного поля орбитальные $\vec{p}_e$ и спиновые $\vec{p}_s$ моменты атомов или молекул скомпенсированы. Во внешнем магнитном поле в результате прецессии появляются индуцированные магнитные моменты $\vec{p}_{am} = \sum \vec{p}_n$ направленные против поля, а магнитная восприимчивость отрицательна $\chi = -(10^{-6} \dots 10^{-8})$.

2. *Парамагнетики* – вещества, у которых при отсутствии внешнего поля $\vec{B}$ $\vec{p}_{am} \neq 0$ или $\vec{p}_{mol} \neq 0$, а $\vec{J} = 0$ вследствие хаотической ориентации магнитных моментов $\vec{p}_{am}$ или $\vec{p}_{mol}$. Во внешнем магнитном поле под действием вращающегося момента сил $\vec{M}$ магнитные моменты ($\vec{p}_{am}$ и $\vec{p}_{mol}$) вещества стремятся повернуть в направлении поля, в результате чего $J > 0$ и $\chi > 0$ ($\chi = 10^{-4} \dots 10^{-6}$).

3. **Ферромагнетики** – это кристаллические вещества, у которых магнитные моменты отдельных ионов $\vec{p}_y \neq 0$. Магнитный момент иона ферромагнетика обусловлен упорядоченной ориентацией спиновых магнитных моментов.

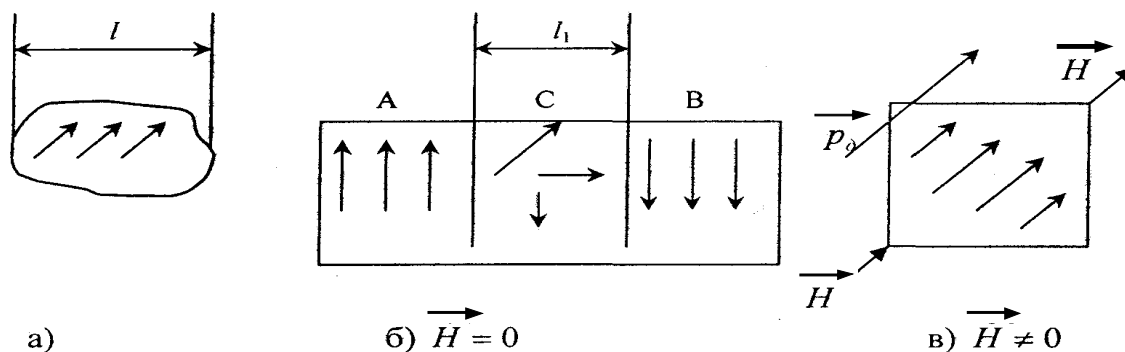


Рис. 7.3

Часть ферромагнетика, в которой все магнитные моменты при отсутствии внешнего поля устанавливаются в одном направлении за счет обменного взаимодействия, называется доменом (рис. 7.3, а). Домен обладает магнитным моментом $\vec{p}_\delta$. Размеры доменов составляют $l = 10^{-8} \dots 10^{-6}$ м. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитный момент ферромагнетика $\vec{p} = \sum \vec{p}_\delta = 0$.

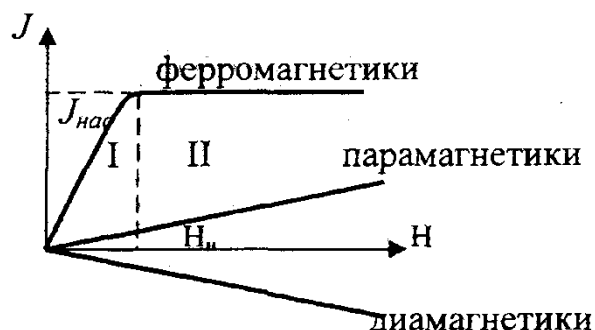


Рис. 7.4

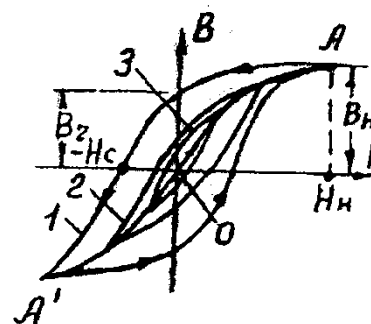


Рис. 7.5

Между доменами А и В имеются переходные слои С (рис. 7.3, б) шириной $l_1 = 10^{-9} \dots 10^{-8}$ м. Внутри переходного слоя магнитные спиновые моменты ионов поворачиваются до тех пор, пока не примут нужного направления. Во внешнем магнитном поле переходные слои разрушаются. Магнитные моменты отдельных доменов поворачиваются в направлении магнитного поля (рис. 7.3, в).

Зависимость намагниченности J магнетиков от напряженности H внешнего магнитного поля изображена на рис. 7.4. Нелинейная область J отражает процесс ориентации доменов в ферромагнетиках в направлении

внешнего поля при возрастании напряженности H . В сильных полях (область II) наступает магнитное насыщение и намагниченность практически не зависит от напряженности поля H . Кривая $J=f(H)$ становится линейной.

У ферромагнетиков имеет место магнитный гистерезис, в котором проявляется зависимость намагниченности от предшествующего состояния. При циклических изменениях величины и направления напряженности внешнего поля H эта зависимость характеризуется кривой, называемой петлей гистерезиса (рис. 7.5, кривые 1, 2, 3). Если ферромагнетик был первоначально размагничен ($B = 0, f = 0$), то его намагничивание происходит по основной кривой намагничивания ОА. В точке А напряженность H_H и индукция B_H соответствует состоянию магнитного насыщения его размагничивание происходит по кривой I (А - B_r - H_C - А'). При $H=0$ намагниченность ферромагнетика не исчезает $B = B_r$. Это состояние называется остаточным магнетизмом. Напряженность ($-H_C$), при которой исчезает остаточная намагниченность ($B = 0, H = -H_C$), принято называть коэрцитивной силой.

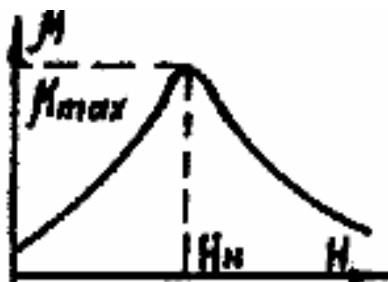


Рис. 7.6

Если при циклическом намагничивании $H_{\max} \geq H_H$, то мы получаем максимальную петлю гистерезиса I. Кривые 2 и 3 это частные циклы, когда $H_{\max} < H_H$. Максимумы B и H частных циклов лежат на основной кривой намагничивания ОА. Условно принято считать ферромагнетики *жесткими*, если $H_C \geq 100$ А/м. Если $H_C < 100$ А/м, ферромагнетики считаются *мягкими*. Магнитная проницаемость μ ферромагнетика зависит от напряженности магнитного поля H (рис. 7.6). Магнитная проницаемость $\mu = B/\mu_0 H_0$ достигает максимума, когда напряженность H внешнего поля становится равной напряженности H , при которой домены максимально ориентируются по направлению поля (см. рис. 7.3, в) и при этом достигается магнитное насыщение образца.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

PQ – звуковой генератор,
 PO – электронный осциллограф,
 ФПЭ – 07 – кассета.

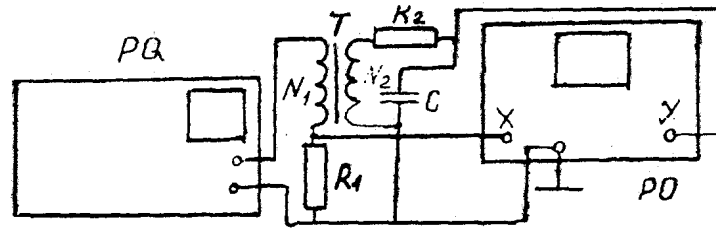


Рис. 7.7

Принципиальная схема установки приведена на рис. 7.7. Исследуемый образец выполнен в виде тороидального трансформатора T , первичная обмотка которого содержит N_1 витков, а вторичная – N_2 витков. Напряжение на первичную обмотку трансформатора T подается с выхода звукового генератора PQ через сопротивление R_1 . Вторичная обмотка трансформатора последовательно соединена с сопротивлением R_2 и конденсатором C . С сопротивления R_1 на выход усилителя горизонтального отклонения осциллографа PO подается напряжение U_x , пропорциональное напряженности магнитного поля H . На вертикальный выход «Y» с конденсатора C подается напряжение U_y , пропорциональное индукции магнитного поля B . При радиусе витка обмотки $r_v \ll r_m$ радиуса тороида напряженность H в тороиде

$$H = \frac{N_1}{2\pi r_m} I_1, \quad (7.8)$$

где $r_m = (r_1 + r_2)/2$; $r_1 = d_1/2$; $r_2 = d_2/2$.

Так как падение напряжения на сопротивлении R_1 : $U_x = I_1 R_1$, то с учетом (7.8)

$$U_x = \frac{R_1 2\pi r_m H}{N_1}. \quad (7.9)$$

U_x определяется по коэффициенту отклонения электронного луча по горизонтальной оси k_x :

$$U_x = k_x x. \quad (7.10)$$

С учетом (7.10) выражение для H может быть записано в виде

$$H = \frac{N_1 k_x x}{2\pi R_1 r_m} = \alpha k_x x. \quad (7.11)$$

По закону Фарадея ЭДС индукции по вторичной обмотке

$$\varepsilon_1 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -N_2 \frac{dB}{dt} S_2, \quad (7.12)$$

где Φ – поток вектора магнитной индукции через один виток; S_2 – площадь поперечного сечения тороида.

По закону Кирхгофа для вторичной обмотки получаем:

$$\varepsilon_1 = U_C + I_2 R_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt}, \quad (7.13)$$

где U_C – напряжение на конденсаторе; I_2 – ток во вторичной обмотке; L_2 – индуктивность вторичной обмотки.

Так как L_2 очень мало, а $I_2 R_2 \gg U_C$, уравнение (7.13) может быть записано с учетом (7.12) в следующем виде:

$$-N_2 \frac{dB}{dt} S_2 = I_2 R_2,$$

откуда

$$I_2 = -\frac{N_2 S_2}{R_2} \frac{dB}{dt}. \quad (7.14)$$

Учитывая (7.14), найдем напряжение U_y равное напряжению на конденсаторе,

$$U_y = U_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int_0^t I_2 dt}{C} = \frac{N_2 S_2}{R_2 C} \int_0^B dB = \frac{N_2 S_2 B}{R_2 C}, \quad (7.15)$$

где Q – заряд на обкладках конденсатора.

Если известен коэффициент отклонения луча k_y по вертикали, то

$$U_y = k_y y. \quad (7.16)$$

Из выражения (7.15) и (7.16) получаем

$$B = \frac{R_2 C U_y}{N_2 S_2} = \frac{R_2 C k_y y}{N_2 S_2} = \beta k_y y. \quad (7.17)$$

Подав одновременно напряжения U_y и U_x на вертикально и горизонтально отклоняющие пластины, получим на экране осциллографа петлю гистерезиса.

По площади петли можно найти работу перемагничивания, отнесенную к единице объема. Измерение объемной плотности энергии магнитного поля $\omega_H = \frac{\mu \mu_0 B^2}{2}$ в цикле перемагничивания определяется по формуле

$$\omega_H = H d(\mu \mu_0 H) = H dB. \quad (7.18)$$

Работа dA_n расходуется на изменение внутренней энергии единицы объема ферромагнетика. За полный цикл перемагничивания

$$A_n = \oint H dB. \quad (7.19)$$

Учитывая (7.11) и (7.17), получаем

$$A_n = \frac{N_1 R_2 C k_x k_y}{2\pi r_m R_1 N_2 S_2} S_N, \quad (7.20)$$

где S_n – площадь петли гистерезиса; $S_2 = (r_1 - r_2)b$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Определение основной кривой намагничивания

1. Установить на стенде приборы, указанные на рис. 7.8.
2. Ознакомившись с описанием установки и методом измерения, соединить приборы в соответствии со схемой, изображенной на рис. 7.8.



Рис. 7.8

3. Отключить временную развертку на осциллографе РО.
4. Включить лабораторный стенд и приборы. Установить луч в центре экрана осциллографа, после чего, регулируя величину выходного напряжения на звуковом генераторе и усиление по оси Y, установить максимальную петлю гистерезиса в пределах экрана, соответствующую магнитному насыщению образца. Уменьшая величину выходного напряжения, получить семейство петель гистерезиса (см. рис. 7.5) – не менее 5 петель. Для каждой петли снять координаты «X» и «Y» ее вершины и записать их в таблицу 7.1.

Таблица 7.1

№ петли	X, дел	Y, дел	U_x , мВ	U_y , мВ	H_0 , А/м	ΔH , А/м	B, Тл	ΔB , Тл

5. По формулам (7.11) и (7.17) вычислить значения напряженности H и индукции B вершин каждой петли гистерезиса и записать их в таблицу.

Необходимые параметры установки:

$d_1 = 20$ мм; $d_2 = 10$ мм; $b = 8$ мм;

$N_1 = 100$; $N_2 = 200$; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 4300$ Ом.

6. Оценить доверительную границу случайной погрешности измерения H и B при доверительной вероятности $P=0.9$, связанную с погрешностью величин k_x , k_y , X , Y . Погрешность измерения величин H и B определяется:

а) приборными погрешностями коэффициентов отклонения электронного луча k_x , k_y и погрешностями визуального отсчета величин X и Y на экране осциллографа (по паспорту на осциллограф $\Delta k_x = +0,07 k_x$, $\Delta k_y = +0,07 k_y$, $\Delta X = \Delta Y = 0,5$ мм);

б) погрешность величин N_1 , N_2 , R_1 , R_2 , Z_m , S_2 , C (она существенного вклада в общую погрешность не дает).

Задание 2. Оценка работы перемангничивания A_n за один цикл

1. Получить максимальную петлю гистерезиса и зарисовать на миллиметровой бумаге в координатах X и Y .
2. Измерить площадь петли в делениях экрана.
3. Определить работу перемангничивания за один цикл по формуле (7.20).

Задание 3. Определение коэрцитивной силы

1. По максимальной петле гистерезиса найти координату – X_C , соответствующую коэрцитивной силе – H_C (см. рис. 7.5).
2. По формуле (7.11) рассчитать H_C .
3. По полученному значению определить группу ферромагнетика (мягкий или жесткий). Оценить погрешность косвенных измерений коэрцитивной силы (см. приложение 1, п. 2.2). Результат записать в отчет в виде формулы (7.21). Рассчитать также относительную ошибку, аналогично примеру 4 в приложении 1.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как ведет себя контур с током в магнитном поле?
2. Каковы свойства парамагнетиков, диамагнетиков, ферромагнетиков?
3. Какова причина спонтанной намагниченности доменов в ферромагнетиках?
4. Как ведут себя домены при увеличении напряженности внешнего магнитного поля? Что означает насыщение ферромагнетика?
5. В чем заключается явление магнитного гистерезиса?

Лабораторная работа ФПЭ – 08

ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАРЯДКИ И РАЗРЯДКИ КОНДЕНСАТОРА

Цель работы: изучение временных зависимостей процессов зарядки и разрядки конденсатора при различных параметрах RC электрической цепи и вычисление времени релаксации.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора в электрической цепи, содержащей последовательно соединенные конденсатор C , сопротивление R и источник ЭДС ε (рис. 8.1). Первоначально конденсатор не заряжен. Пусть I , q , U – мгновенные значения тока в цепи, заряда и разности потенциалов между обкладками конденсатора. Полагаем, что токи и напряжения удовлетворяют условиям квазистационарности, т.е. мгновенное значение тока во всех элементах цепи (рис. 8.1) одно и то же, а соотношение между мгновенными значениями I , q , U такое же, как и в цепях постоянного тока. В момент времени $t = 0$ ключ K замкнули, и в цепи пошел ток, заряжающий конденсатор $I = \frac{dq}{dt}$, где q – заряд конденсатора. Применим к цепи (рис. 8.1) второе правило Кирхгофа:

$$IR + U = \varepsilon, \text{ или } IR = \varepsilon - U, \quad (8.1)$$

где R – полное сопротивление цепи, включающее внутреннее сопротивление источника ЭДС. Учитывая, что разность потенциалов на пластинах конденсатора $U = q/C$, запишем предыдущее уравнение в виде

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon - q/C}{R}. \quad (8.2)$$

Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение с помощью замены переменной. При этом учтём начальное условие: при $t = 0$ $q = 0$

$$RC \int_0^q \frac{dq}{\varepsilon C - q} = \int_0^t dt ,$$

$$\ln(\varepsilon C - q) = -t/RC + \ln G ,$$

G – постоянная интегрирования. Следовательно,

$$q = q_m (1 - e^{\frac{-t}{RC}}), \quad (8.3)$$

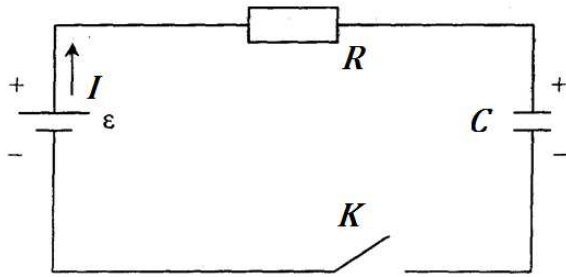


Рис. 8.1

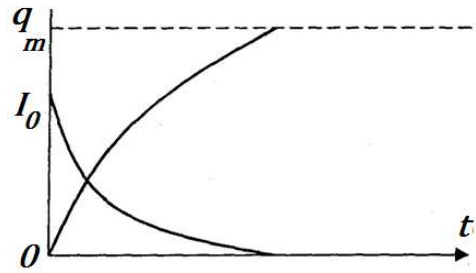


Рис. 8.2

где $q_m = \varepsilon C$ – предельное значение заряда на конденсаторе, $\tau = RC$ – характерное время зарядки и разрядки.

Напряжение на конденсаторе изменяется по закону

$$U = \frac{q}{C} = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

а закон изменения тока в цепи получим дифференцированием

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (8.4)$$

где $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$. Графики зависимостей $q(t)$ и $I(t)$ представлены на рис. 8.2.

Рассмотрим процесс разрядки конденсатора ёмкостью C , пластины которого замкнуты сопротивлением R . Пусть dq – уменьшение заряда конденсатора за время dt . При разряде конденсатора в цепи (рис. 8.3) протекает ток $I = -\frac{dq}{dt}$. Известно, что $q = CU$, где U – разность потенциалов на конденсаторе, а следовательно, и на сопротивлении R . Согласно закону Ома, $U = IR$, тогда как

$$U_C + \frac{dq}{dt} R = 0, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{U}{R} = -\frac{q}{CR}. \quad (8.5)$$

Уравнение (8.5) показывает, что скорость уменьшения заряда конденсатора пропорциональна величине этого заряда. Разделяя переменные и интегрируя уравнение (8.5) при условии, что в момент времени $t=0$, $q=q_0$, получим

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{CR} \int_0^t dt, \\ \ln q / q_0 = -\frac{t}{RC}, \quad (8.6)$$

откуда

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (8.7)$$

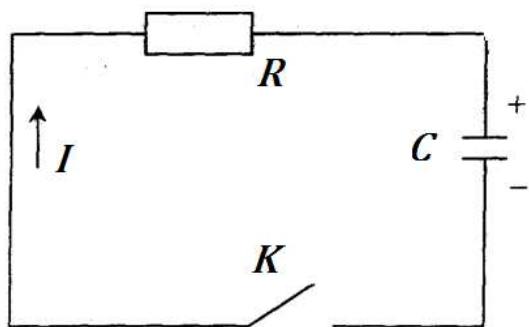


Рис. 8.3

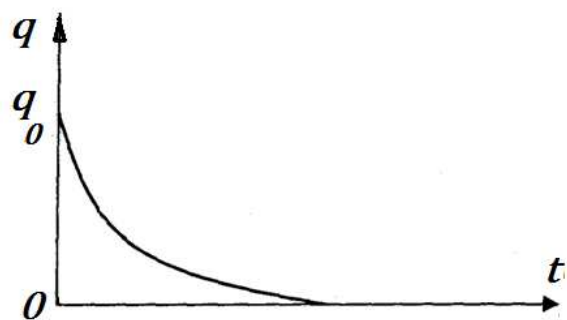


Рис. 8.4

Функция $q(t)$ называется экспоненциальной. График зависимости $q(t)$ приведен на рис. 8.4. Закон изменения напряжения на конденсаторе в процессе разряда аналогичен (8.7):

$$U(t) = \frac{q}{C} = U_0 e^{\frac{-t}{RC}}, \quad (8.8)$$

где $U_0 = \frac{q_0}{C}$.

Произведение RC имеет размерность времени $\tau = RC$ и называется **постоянной времени** или **временем релаксации** τ . За время τ заряд конденсатора уменьшается в e раз. Для практических измерений RC часто удобно измерять время, за которое величина заряда падает до половины первоначального значения $t_{1/2}$, которое определяется из выражения.

$$e^{\frac{-t_{1/2}}{RC}} = \frac{1}{2}. \quad (8.9)$$

Взяв натуральный логарифм от обеих частей уравнения (8.9) получаем $t_{1/2} = RC \ln 2 = RC \cdot 0,693$ или

$$RC = 1,4425 \cdot t_{1/2}. \quad (8.10)$$

Способ измерения постоянной времени состоит в определении времени $t_{1/2}$ и умножении полученной величины на 1,44. Так как экспонента асимптотически приближается к оси абсцисс, то точно установить окончание процесса разряда конденсатора (так же как и процесса зарядки) не представляется возможным. Поэтому целесообразно измерять время уменьшения величины заряда в 2 раза. За каждый интервал времени $t_{1/2} = 0,693 RC$ заряд на емкости уменьшается в 2 раза.

Если обкладки конденсатора попеременно подключать к источнику тока и к сопротивлению R (рис. 8.6), то график процесса зарядки-разрядки конденсатора будет иметь вид, показанный на рис. 8.7. Процесс зарядки-разрядки можно наблюдать с помощью осциллографа, подавая на вход Y напряжение с конденсатора C .

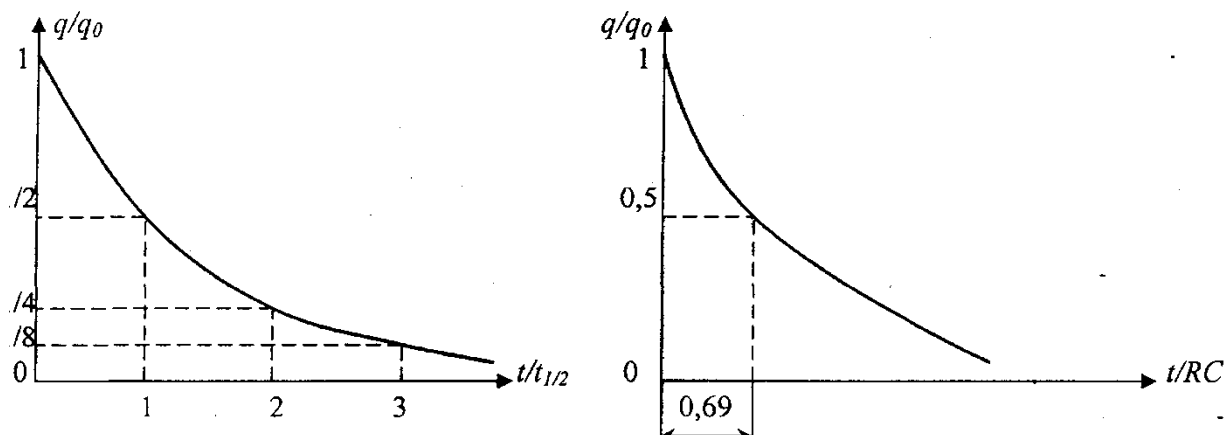


Рис. 8.5

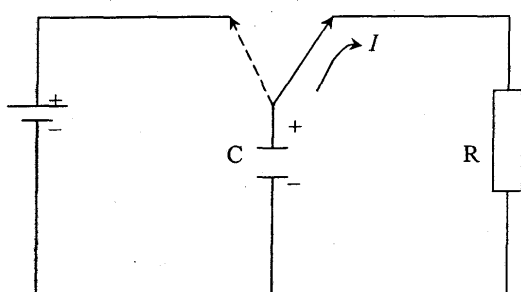


Рис. 8.6

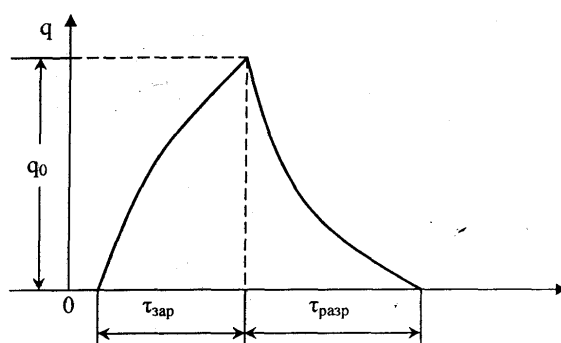


Рис. 8.7

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

1. Блок-схема установки приведена на рис. 8.8.
2. ИП – источник питания.
3. РГ – звуковой генератор.
4. ПИ – преобразователь синусоидальных импульсов.
5. МС – магазин сопротивлений (R_1).
6. МС – магазин сопротивлений (R_2).
7. МЕ – магазин емкостей (C).
8. РО – электронный осциллограф.

Схема состоит из источника постоянного тока ИП, генератора низкочастотных синусоидальных импульсов (звукового генератора), преобразователя ПИ синусоидальных импульсов в прямоугольные положительной полярности (преобразователь импульсов позволяет получить прямоугольные импульсы, скважность которых меняется регулятором на лицевой панели), двух магазинов сопротивлений R_1 и R_2 , магазина емкостей C и электронного осциллографа.

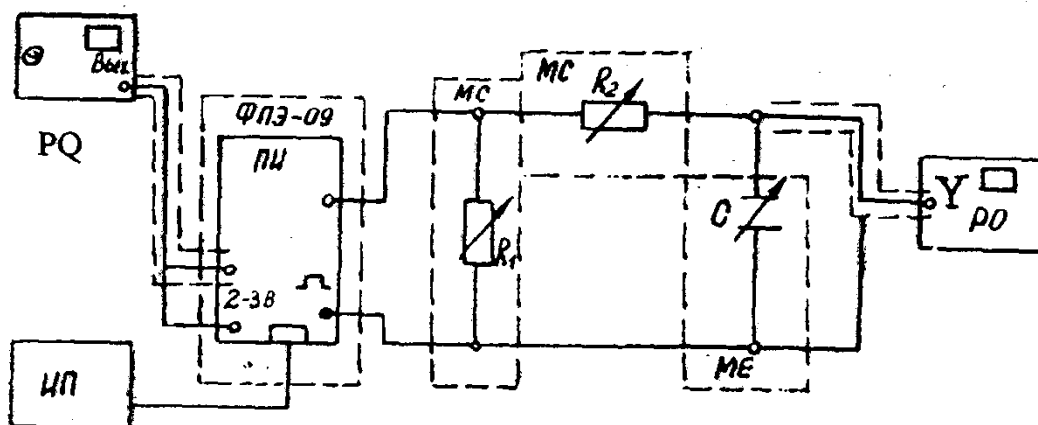


Рис. 8.8

Подаваемый с выхода генератора синусоидальный импульс преобразуется в прямоугольный и через магазин сопротивлений R_2 подается на магазин емкостей C . Конденсатор заряжается. Время заряда конденсатора C можно изменять сопротивлением R_2 . В момент паузы происходит разрядки конденсатора по цепи $R_1 R_2 C$. Время разряда определяется параметрами этой цепи.

Визуально процесс зарядки-разрядки конденсатора можно наблюдать на экране осциллографа. Наиболее устойчивый режим работы данной схемы обеспечивается при изменении номинальных величин элементов RC -цепи в следующих пределах: $C=0,02...0,04$ мкФ; $R_1=10^2...10^3$ Ом; $R_2=1...5$ кОм; $f=0,5...5$ кГц.

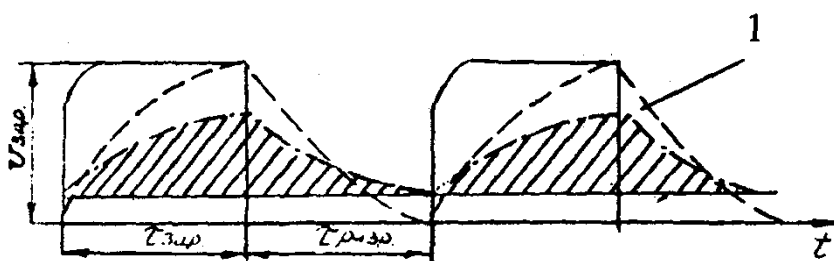


Рис. 8.9

При этих значениях процесс заряда-разряда конденсатора происходит наиболее полно (1 – пунктир на рис. 8.9). При увеличении сопротивления и емкости больше определенных значений конденсатор не успевает полностью зарядиться и разрядиться за один период цикла. Наблюдаемые при этом кривые заряда и разряда заштрихованы на рис. 8.9.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Собрать электрическую схему согласно рис. 8.8 и 8.10.

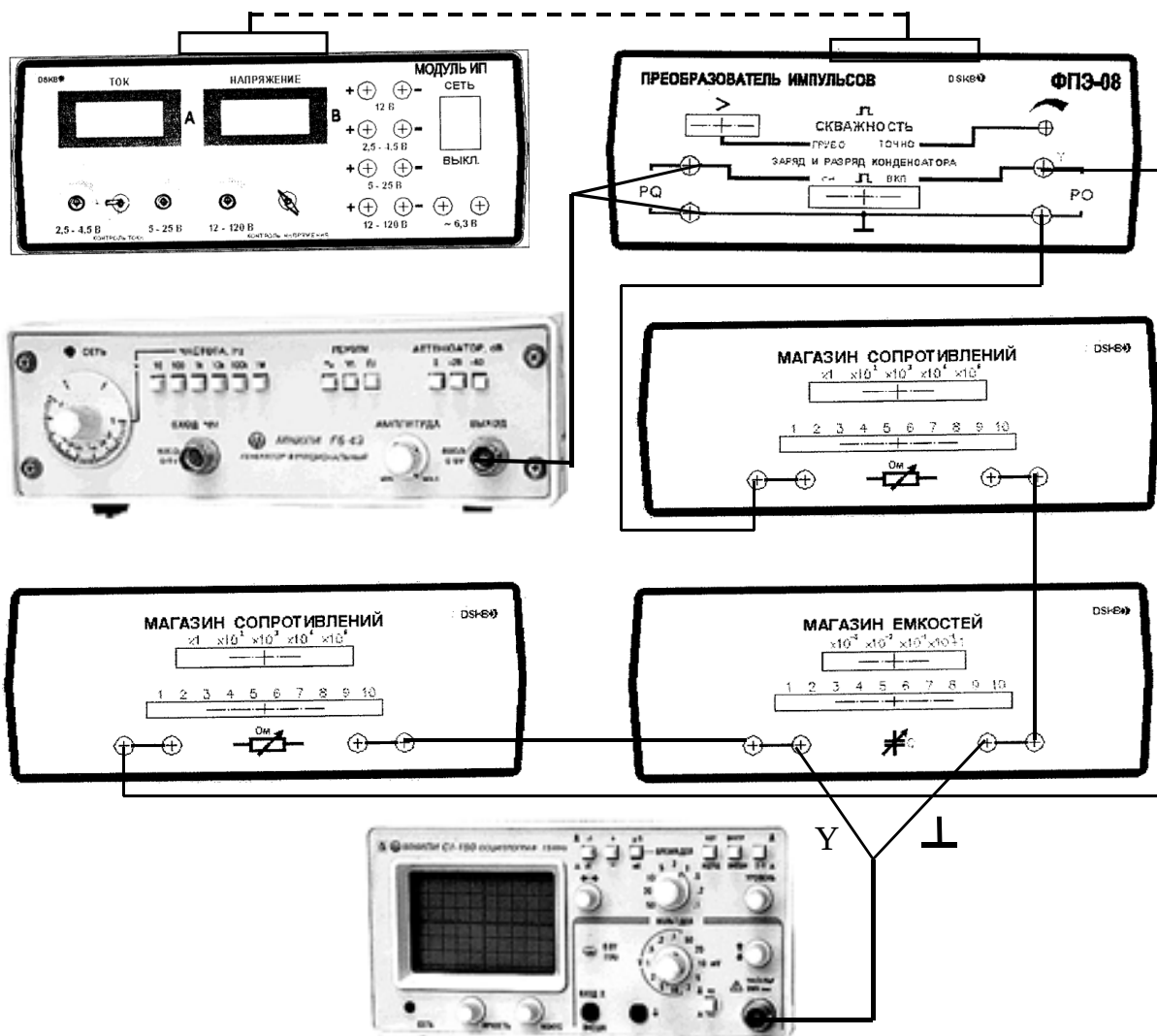


Рис. 8.10

2. Ознакомиться с работой звукового генератора и электронного осциллографа.
3. Подготовить звуковой генератор к работе. Установить следующие параметры выходного напряжения звукового генератора: частота 2 кГц.
4. Установить импульсы наибольшей скважности. Для этого нажать левую кнопку «скважность-грубо» преобразователя импульсов ПИ (кассета ФПЭ – 09). Ручку «скважность-точно» установить в крайнее правое положение.
5. Подготовить осциллограф к работе:

а) включить развертку электронного усилителя Y и установить частоту развертки, удобную для наблюдения сигналов частотой 2-10 кГц;

б) усиление по оси Y электронного осциллографа установить таким, чтобы можно было измерять переменное напряжение до 10 В;

в) установить время горизонтальной развертки луча таким, чтобы на экране помещалось 1-2 периода синусоидального напряжения частотой 2 кГц.

6. Включить лабораторный стенд и приборы.

7. Установить на экране осциллографа устойчивую картину.

8. Установить на магазине сопротивлений R_1 значение $R_1=10^2$ Ом.

9. Установить на магазине сопротивление R_2 значение $R_2=10^3$ Ом.

10. Установить на магазине емкостей значение $C=2 \cdot 10^{-2}$ мкФ.

Задание 1. Изучение кривых зарядки и разрядки конденсатора

1. Установить усиление канала Y осциллографа таким, чтобы высота импульса на экране была максимальной. Совместить начало кривой зарядки с началом шкалы осциллографа. Установить частоту развертки осциллографа такой, чтобы на экране уместилась полная кривая зарядки и разрядки конденсатора. Снять зависимость $Y = f(X)$, измеряя X в секундах, а Y – в вольтах. Записать 8-10 значений X и Y . Результаты занести в табл. 8.1.

Таблица 8.1.

X, с	
Y, В	

Построить кривую зарядки конденсатора.

2. Аналогичные измерения провести для кривой разрядки, совместив начало кривой разрядки с началом координат на шкале осциллографа. Результаты занести в табл. 8.2.

Таблица 8.2.

X, с	
Y, В	

Построить кривую разрядки конденсатора.

3. По кривым зарядки и разрядки конденсатора определить время, за которое величина напряжения падает до половины первоначального значения и по формуле (8.10) вычислить время релаксации $\tau = RC$.

4. Не изменяя усиление канала У осциллографа, получить на экране кривые заряда и разряда конденсатора при других значениях R_2 и C , оставляя неизменной величину сопротивления $R_1 = 10^2$ Ом.

Рекомендуемые значения R_2 и C следующие:

- 1) $R_2 = 10^3$ Ом; $C = 2 \cdot 10^{-2} \dots 4 \cdot 10^{-2}$ мкФ;
- 2) $R_2 = 2 \cdot 10^3$ Ом; $C = 1 \cdot 10^{-2}$ мкФ;
- 3) $R_2 = 3 \cdot 10^3$ Ом; $C = 1 \cdot 10^{-2}$ мкФ.

Измерить по наблюдаемым на экране осциллографа кривым релаксации зарядки «половинное время» в делениях шкалы. Затем $t_{1/2}$ перевести в секунды.

Для получения достаточно полного процесса зарядки и разрядки конденсатора можно изменять частоту следования импульсов, меняя частоту сигнала звукового генератора.

5. Вычислить постоянную времени RC , используя значения параметров RC – цепи. Учесть, что при разрядки конденсатора $R = R_2$, а при зарядки $R = R_1 + R_2$. Рассчитать отношение $t_{1/2}$ к RC для всех случаев по формуле

$$A = \frac{t_{1/2}}{RC}. \quad (8.11)$$

6. Сравнить величину A с теоретическим значением равным $\ln 2 = 0,693$. Оценить погрешность измерений по формуле

$$\delta = \frac{\langle A_{изм} \rangle - A_{теор}}{A_{теор}} \cdot 100\%, \text{ где } \langle A_{изм} \rangle - \text{среднее значение выполненных}$$

измерений.

Задание 2. Построение кривой разрядки конденсатора в логарифмическом масштабе

Из формулы (8.8) находим

$$\frac{U_0}{U(t)} = e^{t/RC}. \quad (8.12)$$

Логарифмируя левую и правую части формулы (8.12), получаем

$$\ln \frac{U_0}{U(t)} = \frac{t}{RC}. \quad (8.13)$$

Воспользовавшись данными табл. 8.2, построить логарифмическую зависимость, характеризующую изменение напряжения на конденсаторе от времени t при разряде конденсатора, учитывая, что $U_0 = U(0)$, $U(t) = U(X)$, $X = t$. Заполнить таблицу 8.3. Котангенс угла наклона полученной прямой

есть характеристическое время релаксации заряда или постоянная времени RC :

$$\operatorname{ctg} a = \tau = RC. \quad (8.14)$$

Таблица 8.3.

X, с	
Y, дел	
Y_0/Y	
$\ln \frac{U_0}{U(t)}$	

Сравнить полученные результаты со значениями постоянной времени, найденными в задании 1.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое кривая релаксации зарядки?
2. Как определяется характеристическое время релаксации τ ?
3. Опишите блок-схему установки.
4. Как зависит время зарядки и разрядки конденсатора от элементов цепи R_1 , R_2 , C ?
5. Какова зависимость напряжения на конденсаторе U и тока в цепи I от времени, т.е. $U(t)$ и $I(t)$ в процессе заряда и разряда конденсатора?

Лабораторная работа ФПЭ – 09

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ПРИ ДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ

Цель работы: изучение электрических процессов в цепях, состоящих из последовательно соединенных элементов: а) двух резисторов (цепь RR), б) резистора и конденсатора (цепь RC), в) резистора и катушки индуктивности (цепь RL); измерение коэффициента передачи цепей RR , RC , RL ; изучение зависимости коэффициента передачи цепей RC и RL от частоты входного сигнала; оценка параметров цепей R , C , L ; определение разности фаз между колебаниями тока в изучаемых цепях и входным напряжением.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Цепь переменного электрического тока представляет собой ряд соединенных между собой в той или иной последовательности элементов.

Все элементы электрической цепи обладают сопротивлением. Это сопротивление может быть двух видов: активное или реактивное. Если при прохождении тока через элемент происходит только необратимое превращение электрической энергии в теплоту, то его сопротивление называют активным. Если же подобной потери электрической энергии не происходит, сопротивление элемента называют реактивным.

Элемент цепи с активным сопротивлением называется резистором. Реактивным сопротивлением – емкостным и индуктивным – обладают соответственно конденсаторы и катушки индуктивности в цепи переменного тока.

Элементы цепи называются *идеальными*, если они обладают только одним видом сопротивления – активным, емкостным или индуктивным. Для идеальных элементов справедливы соотношения:

$$U_R = RI, \quad R = \text{const}; \quad (9.1)$$

$$U_C = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C} \int I dt, \quad C = \text{const}; \quad (9.2)$$

$$U_L = -\varepsilon_s = L \frac{dI}{dt}, \quad L = \text{const}; \quad (9.3)$$

где R – сопротивление резистора; C – емкость конденсатора; L – индуктивность катушки; U_R , U_C , U_L – падения напряжения на соответствующих эле-

ментах; I – ток через элемент; q – заряд конденсатора; $\mathcal{E}_s = -L \frac{dl}{dt}$ – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности при прохождении через нее переменного тока.

Элементы цепи могут быть линейными и нелинейными. Если сопротивление элемента не зависит от величины тока в цепи или от напряжения на элементе, то такой элемент называется линейным. Электрические цепи, составленные из линейных элементов, также называются *линейными*. В линейных цепях электрические процессы описываются линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями. Этому условию, например, отвечают выражения (9.1-9.3). Электрические процессы в линейных цепях называют установившимися (стационарными), если закон изменения всех токов и напряжений совпадает с точностью до постоянной величины с законом изменения внешней ЭДС, действующей в цепи. Если это условие не выполняется, процессы, называются переходными.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных резистора R , емкости C и индуктивности L (рис. 9.1). Допустим, что источник переменной ЭДС (генератор) не обладает внутренним сопротивлением и создает на входе цепи напряжение U , равное его ЭДС $\mathcal{E}$. Такое допущение всегда можно сделать, включив сопротивление генератора в состав рассматриваемой электрической цепи.

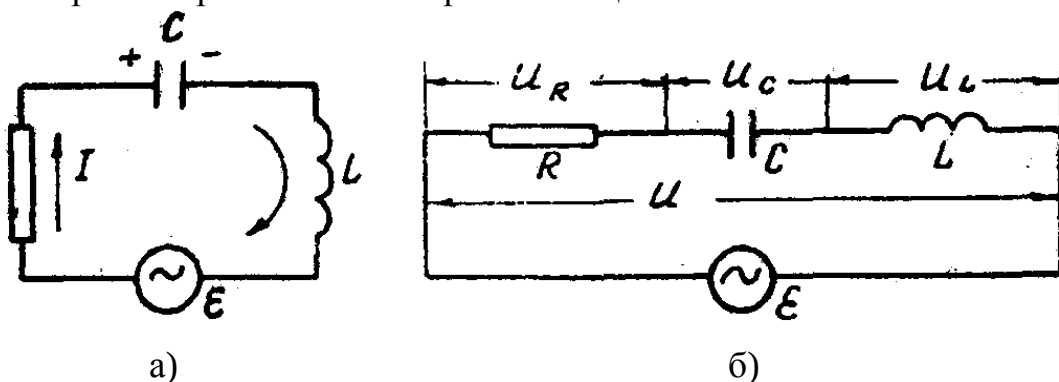


Рис. 9.1

Положим далее, что генератор с **гармонической ЭДС**

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad (9.4)$$

создает в стационарном состоянии в цепи ток

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (9.5)$$

где $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ – круговая частота колебаний ЭДС и тока; T – период

колебаний; φ – угол сдвига фазы тока относительно фазы ЭДС; ε_0 – амплитуда ЭДС; I_0 – амплитуда тока.

Найдем, чему равны амплитуда I_0 и сдвиг фазы φ тока, если известны параметры цепи R , C , L и уравнение для ЭДС (9.4). Одновременно определим, какой вид имеет величина Z , равная отношению амплитуды ЭДС к амплитуде тока: $Z = \frac{\varepsilon_0}{I_0}$. Эта величина (по аналогии с законом Ома для замкнутой цепи постоянного тока) называется полным сопротивлением цепи переменного тока.

На основании второго правила Киргофа для контура (рис. 9.1, а) можем записать $U_R + U_C = \varepsilon_S + \varepsilon$ или (рис. 9.1, б)

$$U_R + U_C + U_L = \varepsilon, \quad (9.6)$$

т.е. сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени внешней ЭДС, действующей в контуре.

Учитывая соотношения (9.1)-(9.3), имеем

$$IR + \frac{1}{C} \int Idt + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon. \quad (9.7)$$

Подстановка в уравнение (9.7) выражений (9.4), (9.5) и выполнение операций интегрирования и дифференцирования приводит это уравнение к виду

$$I_0 R \cos(\omega t - \varphi) + \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi) - I_0 \omega L \sin(\omega t - \varphi) = \varepsilon_0 \cos(\omega t).$$

Используя далее соотношения

$$\sin(\omega t - \varphi) = \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad -\sin(\omega t - \varphi) = \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

окончательно получим

$$I_0 R \cos(\omega t - \varphi) + \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - I_0 \omega L \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon_0 \cos \omega t. \quad (9.8)$$

Из уравнения (9.8) можно сделать ряд выводов.

Выпишем из этого уравнения выражения для напряжений U_R, U_C, U_L и рассмотрим их совместно с выражением (9.5) для тока I :[‡]

$$\begin{aligned} U_R &= U_{0R} \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{где } U_{0R} = I_0 R; \\ U_C &= U_{0C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{где } U_{0C} = \frac{I_0}{\omega C} \\ U_L &= U_{0L} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{где } U_{0L} = I_0 \omega L. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Сравнивая фазы напряжений U_R , U_C и U_L с фазой тока I , видим, что:

- 1) напряжение на резисторе U_R совпадает по фазе с током I (9.5);
- 2) напряжение на емкости U_C отстает по фазе от тока I на угол $\frac{\pi}{2}$;
- 3) напряжение на индуктивности U_L опережает по фазе ток I на угол $\frac{\pi}{2}$.

Далее найдем отношения амплитуд напряжений U_{0R} , U_{0C} , U_{0L} к амплитуде тока I_0 :

$$\frac{U_{0R}}{I_0} = R; \quad \frac{U_{0C}}{I_0} = \frac{1}{\omega C}; \quad \frac{U_{0L}}{I_0} = \omega L. \quad (9.10)$$

Формулы (9.10) определяют величины, которые называются соответственно активными, реактивным емкостным и реактивным индуктивным сопротивлениями. Емкостное сопротивление обозначается через X_C , индуктивное – через X_L . Из формул (9.10) следует, что активное сопротивление цепи переменного тока равно сопротивлению цепи для постоянного тока, т.е. омическому сопротивлению R , реактивные же сопротивления:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}; \quad X_L = \omega L. \quad (9.11)$$

Перейдем к нахождению выражений, определяющих амплитуду тока I_0 , сдвиг по фазе φ тока относительно ЭДС и полное сопротивление Z цепи, изображенной на рис. 9.1.

Уравнение (9.8) позволяет решить эту задачу, при этом методы решения могут быть различные. Воспользуемся графическим способом представления гармонических колебаний – методом векторных диаграмм. В этом методе гармоническим величинам (напряжениям, токам) сопоставляются вращающиеся векторы. Для этого на плоскости выбирают произвольное начало координат O и проводят ось X . Изучаемую гармоническую величину изображают вектором, построенным из начала координат. Длина вектора равна (в выбранном масштабе) амплитуде гармонической величины, а угол между вектором и осью X равен углу начальной фазы. Вектор равномерно вращается вокруг точки O с угловой скоростью ω в направлении против часовой стрелки. При этом проекция вектора на ось X в любой момент времени равна мгновенному значению гармонической величины, изменяющейся со временем по закону косинуса.

В соответствии со сказанным левую часть уравнения (9.8) можно рассматривать как сумму проекций векторов, изображающих напряжения U_R , U_C и U_L , а правую часть – как проекцию вектора, изображающего сум-

марное напряжение $U = \varepsilon = U_R + U_C + U_L$. Поскольку при сложении векторов сумма проекций слагаемых равна проекции суммы, то можно найти геометрическую сумму векторов, изображающих напряжения U_R , U_C , U_L и приравнять эту геометрическую сумму вектору, изображающему напряжение $U = \varepsilon$. Другими словами, вместо алгебраического равенства (9.8) можно рассматривать векторное равенство

$$(\overline{I_0 R}) = \left(\overline{\frac{I_0}{\omega C}} \right) + (\overline{I_0 \omega L}) = \overline{\varepsilon_0}, \quad (9.11)$$

что значительно упрощает нахождение амплитуды I_0 и сдвига фаз φ . На рис. 9.2, а, б построены векторные диаграммы для момента времени $t = 0$, соответствующие уравнениям (9.8) и (9.12).

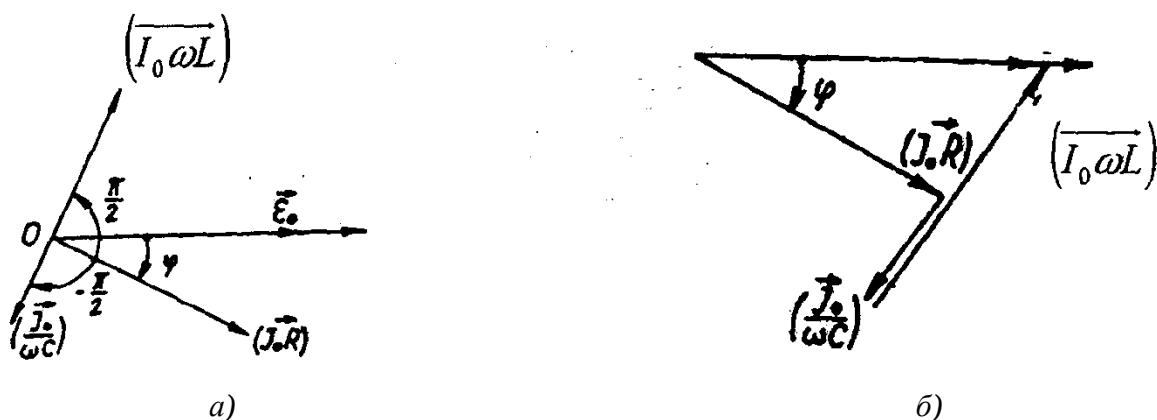


Рис. 9.2

Из рис. 9.2 (б) следуют соотношения:

$$\varepsilon_0^2 = I_0^2 R^2 + I_0^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

откуда

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}; \quad (9.13)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad (9.14)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (9.15)$$

Видим, что колебания тока в цепи отстают по фазе от колебаний ЭДС на угол φ , зависящий от частоты и определяемый согласно (9.14). На-

напряжение U во внешней цепи, содержащей последовательно соединенные R , C и L , опережает по фазе ток на угол φ , определяемый выражением (9.14). Полное сопротивление цепи Z , в соответствии с (9.15), также зависит от частоты и может быть записано в виде

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (9.16)$$

где $X = X_L - X_C$ – полное реактивное сопротивление цепи. Из формулы (9.16) следует, что активное и реактивное сопротивления цепи складываются геометрически.

В работе исследуются электрические процессы в цепях, состоящих из следующих последовательно соединенных элементов: а) двух резисторов с сопротивлениями R_1 и R_2 (цепь RR , рис. 9.3, а); б) резистора R_2 и конденсатора C (цепь RC , рис. 9.3, б); в) резистора R_2 и катушки индуктивности L (цепь RL , рис. 9.3, в).

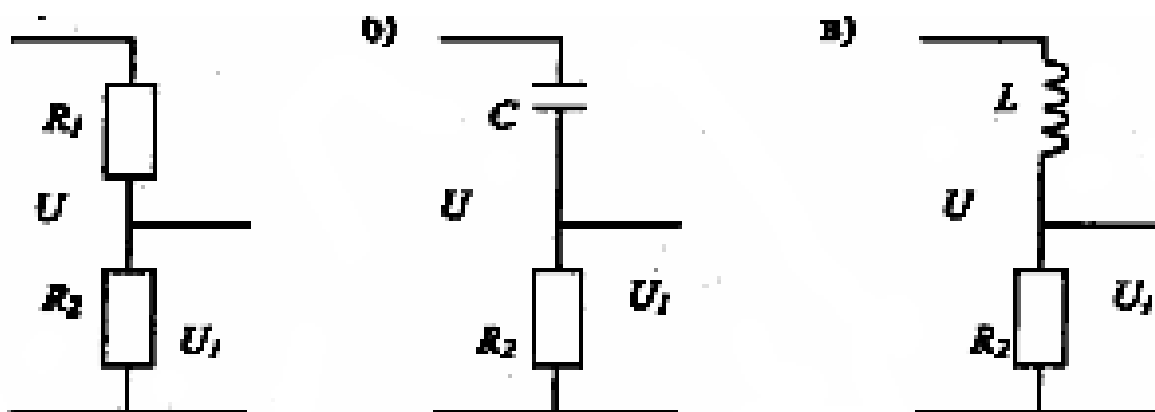


Рис. 9.3

Основным параметром, характеризующим изучаемые цепи, является коэффициент передачи цепи K , представляющий собой отношение амплитуды напряжения на выходе цепи U_{01} к амплитуде напряжения на ее входе U_0 :

$$K = \frac{U_{01}}{U_0}. \quad (9.17)$$

Напряжение на выходе цепи U_1 равно падению напряжения на резисторе R_2 :

$$U_1 = I R_2 \quad (9.18)$$

т.е. прямо пропорционально току в цепи I и находится в одинаковой с ним фазе. На основании соотношения (9.18) коэффициент передачи цепи можно записать в виде

$$K = \frac{I_0 R_2}{U_0}. \quad (9.19)$$

Из соотношения (9.18) следует, что для измерения угла сдвига фаз между током в цепи I и входным напряжением U достаточно измерить угол сдвига фаз между напряжением U_1 и U .

Для схем, изображенных на рис. 9.3, найдем аналитически вид выражений для коэффициента передачи цепи K и угла сдвига фаз φ . Для этого воспользуемся формулами (9.13), (9.14) и (9.19), подставляя в них соответствующие каждой схеме значения сопротивлений, напряжений и токов.

1. Цепь RR : $R = R_1 + R_2$; $X_L = 0$; $X_C = 0$; $\varepsilon_0 = U_0$.

Из (9.13)

$$I_0 = \frac{U_0}{R_1 + R_2}. \quad (9.20)$$

Из (9.14)

$$\varphi = 0. \quad (9.21)$$

Из (9.19) и (9.20)

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (9.22)$$

2. Цепь RC : $R = R_1$; $X_L = 0$; $X_C = \frac{1}{\omega C}$; $\varepsilon_0 = U_0$.

Из (9.13)

$$I_0 = \frac{U_0 \omega C}{\sqrt{1 + (R_2 \omega C)^2}}. \quad (9.23)$$

Из (9.14)

$$\varphi = -\arctg \frac{1}{R_2 \omega C}. \quad (9.24)$$

Из (9.19) и (9.23)

$$K = \frac{R_2 \omega C}{\sqrt{1 + (R_2 \omega C)^2}}. \quad (9.25)$$

При высоких частотах ($\omega \rightarrow \infty$):

$$I_0 \approx \frac{U_0}{R_2}; \quad \varphi \approx 0; \quad K \approx 1. \quad (9.26)$$

Этот результат соответствует тому, что в цепи замкнут резистор R_2 .

3. RL : $R = R_2$; $X_L = \omega L$; $X_C = 0$; $\varepsilon_0 = U_0$.

Из (9.13)

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}}. \quad (9.27)$$

Из (9.14)

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R_2}. \quad (9.28)$$

Из (9.19) и (9.27)

$$K = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}}. \quad (9.29)$$

При высоких частотах ($\omega \rightarrow \infty$):

$$I_0 \approx \frac{U_0}{\omega L}; \quad \varphi \approx \frac{\pi}{2}; \quad K \approx \frac{R_2}{\omega L} = \frac{R_2}{2\pi L} \cdot \frac{1}{\nu}.$$

Это соответствует тому, что в цепи замкнут резистор R_2 .

При низких частотах ($\omega \rightarrow 0$) $U_0 \approx \frac{U_0}{R_0}$; $\varphi \approx 0$; $K \approx L$.

Это соответствует тому, что в цепи замкнута индуктивность L .

Полученные результаты могут быть использованы для экспериментального определения параметров цепей R , C , L .

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

На рис. 9.4, 9.5 приведены электрическая и монтажная схема:

1. ФПЭ – 09/ПИ – кассета.
2. PQ – генератор.
3. РО – осциллограф.
4. ИП – источник питания.

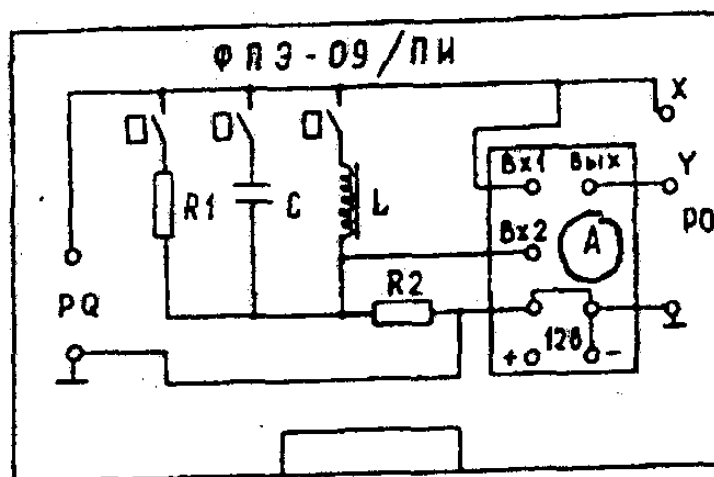


Рис. 9.4

В кассете ФПЭ – 09/ПИ собраны изучаемые электрические цепи (рис. 9.5). В ней находится также коммутатор А, применение которого позволяет наблюдать на экране однолучевого осциллографа одновременно два синусоидальных сигнала. Напряжение со входа изучаемой цепи подается на «Vx1» коммутатора, а напряжение с выхода изучаемой цепи – на «Vx2» коммутатора. С выхода коммутатора исследуемые напряжения подаются на выход Y осциллографа.

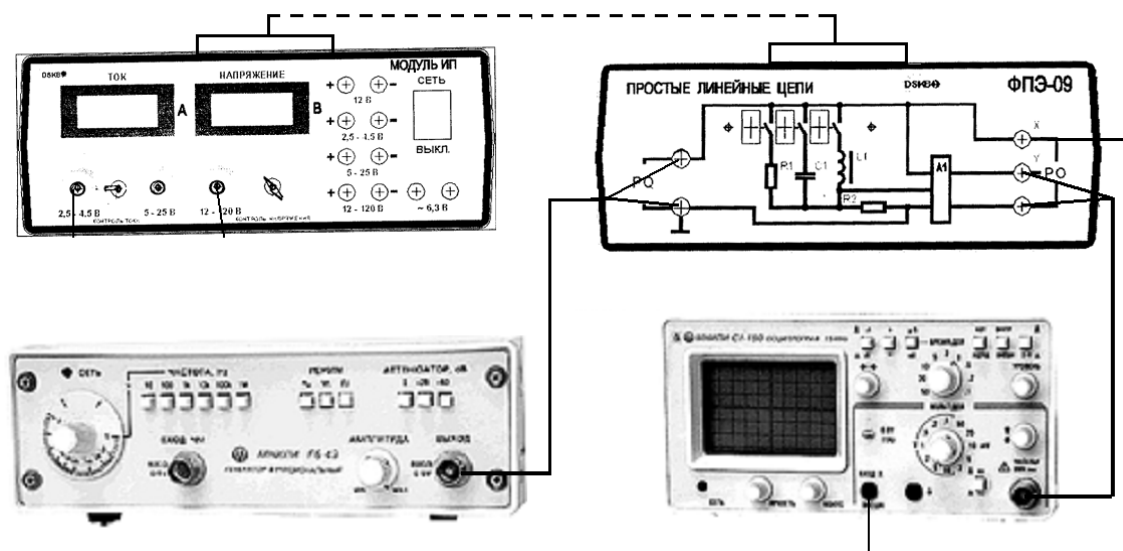


Рис. 9.5.

Генератор PQ является источником гармонической ЭДС. Осциллограф РО служит для измерения амплитуд напряжений на входе и выходе цепи, а также для измерения угла сдвига фаз между током в цепи и входным напряжением.

Источник питания ИП предназначен для питания коммутатора.

Параметры установки:

$R_1 = 200 \pm 5 \% \text{ Ом}$; $R_2 = 51 \pm 5 \% \text{ Ом}$; $C_1 = 0,047 \pm 20 \% \text{ мкФ}$;
 $L = 100 \pm 10 \% \text{ Гн}$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Установить исходное положение кнопочных переключателей на панели кассеты ФПЭ – 09/ПИ: все кнопки отжаты.
2. Установить органы управления на панелях осциллографа РО в положение, обеспечивающее измерение амплитуды и развертку во времени переменного напряжения. Тумблер синхронизации развертки установить в положение синхронизации внешним сигналом.
3. Подготовить к работе генератор PQ и источник питания ИП.

4. Собрать схему, изображенную на рис. 9.5.
5. Присоединить все приборы к сети -220 В. включить в приборы тумблерами «Сеть». Дать приборам прогреться в течение 3-5 мин.
6. Установить следующие частоту выходного сигнала генератора, равную 20 кГц.
7. Установить размах колебаний напряжения генератора на экране осциллографа в пределах примерно 2/3 экрана подбором коэффициента K_y канала вертикального отклонения сигнала осциллографа.
8. Получить устойчивое изображение сигнала генератора на экране.
9. Установить такую длительность развертки, при которой на экране наблюдается 2-3 периода исследуемого сигнала.
10. Отрегулировать окончательно вертикальный размер изображения сигнала генератора на экране осциллографа с помощью ручки плавной регулировки выходного напряжения генератора.

**Задание 1. Изучение электрических процессов в цепи,
содержащей два резистора**

1. Замкнуть с помощью кнопочного переключателя на панели кассеты ФПЭ – 09/ПИ ветвь, содержащую резистор R_1 .
2. Получить на экране осциллографа устойчивое изображение двух исследуемых сигналов.
3. Зарисовать наблюдаемые колебания на миллиметровой бумаге. Убедиться, что угол сдвига фаз между током в цепи и входным напряжением равен нулю.
4. Произвести измерение амплитуд напряжений на входе и выходе цепи. Для этого измерить величину амплитуды каждого сигнала в делениях шкалы экрана и умножить полученные значения на коэффициент K_y канала вертикального отклонения осциллографа. При измерении напряжений с помощью осциллографа, используемого в данной работе, рекомендуется устанавливать такое значение коэффициента отклонения K_y , при котором размер изображения сигнала по вертикали составляет не менее двух делений шкалы экрана.
5. Рассчитать значение коэффициента передачи цепи K по формуле (9.17).
6. Определить величину сопротивления резистора R_1 по формуле (9.22).
7. Оценить погрешности измерения коэффициента передачи цепи и сопротивления резистора R_1 .
8. Данные измерений и вычислений занести в табл. 9.1.

Таблица 9.1

U_0			U_{01}			$K = \frac{U_{01}}{U_0}$	ΔK	R_1 , Ом	φ , град
U_0 ,дел	K_y , В/дел	U_0 , В	U_{01} , дел	K_y , В/дел	$K = \frac{U_{01}}{U_0}$, В				

**Задание 2. Изучение электрических процессов в цепи,
содержащей резистор и конденсатор**

1. Замкнуть с помощью кнопочного переключателя на панели кассеты ФПЭ - 09/ПИ ветвь, содержащую конденсатор C .
2. Получить на экране осциллографа устойчивое изображение двух исследуемых сигналов.
3. Зарисовать колебания, наблюдаемые на экране осциллографа при частоте генератора 20 кГц.
4. Определить угол сдвига фаз между током в цепи и выходным напряжением при частоте 20 кГц. Для этого измерить в делениях шкалы экрана осциллографа сдвиг во времени Δt между изображениями двух исследуемых сигналов и период колебаний T (рис. 9.6). Разность фаз рассчитать по формуле

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} 360 \text{ (град)}. \quad (9.31)$$

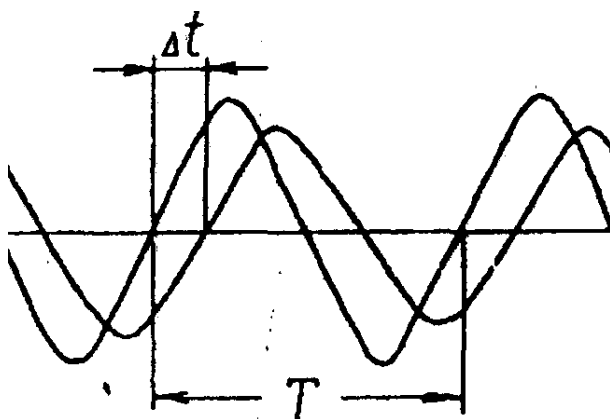


Рис. 9.6

5. Повторить п. 3, 4 при частоте генератора 80 кГц.
6. Провести измерение амплитуд напряжений на выходе и входе цепи при различных значениях частоты генератора ν (по методике, описанной в п. 4 задания 1). Частоту генератора менять в пределах от 20

до 80 кГц сначала с интервалом 5 кГц (до 40 кГц), а затем с интервалом 10 кГц.

7. Рассчитать значение коэффициента передачи цепи K по формуле (9.17) для всего исследованного диапазона частот.
8. Построить график зависимости коэффициента передачи цепи K от частоты выходного напряжения $K=f(\nu)$.
9. С помощью графика $K=f(\nu)$ оценить величину емкости конденсатора C . Для этого воспользуемся линейным участком графика, который описывается формулой (9.26). Определив тангенс угла наклона линейного участка и приравняв его угловому коэффициенту зависимости (9.26), получим соотношение $\operatorname{tg} \alpha = 2\pi R_2 C$, откуда

$$C = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2\pi R_2}.$$

10. Рассчитать разность фаз φ по формуле (9.24) при двух значениях частоты генератора: 20 и 80 кГц. Сравнить результаты расчета с результатами непосредственного измерения угла φ .
11. Данные измерений и вычислений занести в табл. 9.2.

Таблица 9.2

ν 10^4 Гц	U_0			U_{01}			$K = \frac{U_{01}}{U_0}$	C, Φ	$\Delta t, \text{ дел}$	$T, \text{ дел}$	$\varphi_{\text{изм}} \text{ град}$	$\varphi_{\text{расч}} \text{ град}$
	U_0 дел	K_y $B/\text{дел}$	U_0 B	U_{01} дел	K_y $B/\text{дел}$	U_{01} B						

Задание 3. Изучение электрических процессов в цепи, содержащей резистор и катушку индуктивности

1. Замкнуть с помощью кнопочного переключателя на панели кассеты ФПЭ – 09/ПИ ветвь, содержащую катушку индуктивности L .
2. Получить на экране осциллографа устойчивое изображение двух исследуемых сигналов.
3. Зарисовать колебания, наблюдаемые на экране осциллографа при частоте генератора 30 кГц.
4. Определить угол сдвига фаз между током в цепи и входным напряжением при частоте 30 кГц. Для этого измерить в делениях шкалы экрана осциллографа сдвиг во времени Δt между изображениями

двух исследуемых сигналов и период колебаний T (см. рис. 9.6). Разность фаз рассчитать по формуле (9.31).

5. Повторить п. 3, 4 при частоте генератора 100 кГц.
6. Провести измерение амплитуд на входе и выходе цепи при различных значениях частоты генератора ν (по методике, описанной в пункте 4 задания 1). Частоту генератора менять в пределах от 30 до 100 кГц с интервалом 10 кГц.
7. Рассчитать значения коэффициента передачи цепи K по формуле (9.17) для всего исследованного диапазона частот.
8. Построить график зависимости $K = f\left(\frac{L}{\nu}\right)$.
9. С помощью графика $K = f\left(\frac{L}{\nu}\right)$ оценить величину индуктивности ка-

тушки L . Для этого воспользоваться линейным участком графика, который описывается формулой (9.30). Определив тангенс угла наклона линейного участка, и приравняв его угловому коэффициенту зависимости (9.30), получим соотношение $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_2}{2\pi L}$, откуда

$$L = \frac{R_2}{2\pi \operatorname{tg} \alpha}.$$

10. Рассчитать разность фаз φ по формуле (9.28) при двух значениях частоты генератора: 30 и 100 кГц. Сравнить результаты расчета с результатами непосредственного измерения угла φ .
11. Данные измерения и вычислений занести в табл. 9.3.

Таблица 9.3

$\nu, 10^4 \text{ Гц}$	$1/\nu, 10^{-5} \text{ с}^{-1}$	U_0			U_{01}			$K = \frac{U_{01}}{U_0}$	$L, \text{ Гн}$	$\Delta t, \text{ дел}$	$T, \text{ дел}$	$\varphi_{\text{изм}}$ град	$\varphi_{\text{расч}}$ град
		$U_0, \text{ дел}$	$K_y, \text{ В/дел}$	$U_0, \text{ В}$	$U_{01}, \text{ дел}$	$K_y, \text{ В/дел}$	$U_{01}, \text{ В}$						

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Получите выражение: а) для емкостного сопротивления; б) для индуктивного сопротивления.

2. Постройте векторную диаграмму для цепи, содержащей последовательно соединенные: а) R и C ; б) R и L . Определите с помощью векторной диаграммы для каждой цепи сопротивление Z и сдвиг фаз между током и ЭДС.
3. Получите выражение для коэффициента передачи для схемы, состоящей: а) из R и C ; б) из R и L .
4. Как в работе проводится оценка: а) величины емкости конденсатора C ; б) величины индуктивности катушки L ?

Лабораторная работа ФПЭ – 10

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы: изучение параметров и характеристик реального колебательного контура.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Колебательный контур. В цепи, содержащей катушку индуктивности L и конденсатор емкости C , могут возникнуть электрические колебания, поэтому такую цепь называют **колебательным контуром**. Выясним, каким образом в колебательном контуре возникают и поддерживаются электрические колебания.

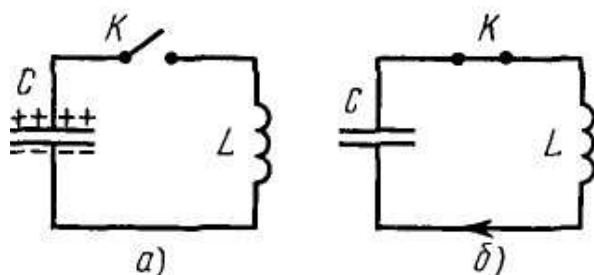


Рис. 10.1. Колебательный контур с реактивными сопротивлениями

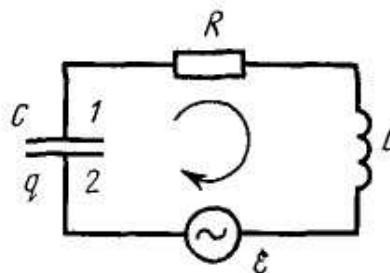


Рис. 10.2. Колебательный контур с активным и реактивными сопротивлениями

Пусть вначале верхняя обкладка конденсатора заряжена положительно, а нижняя – отрицательно (рис. 10.1, а). При этом вся энергия колебательного контура сосредоточена в конденсаторе. Замкнем ключ K . Конденсатор начнет разряжаться, и через катушку L потечет ток. Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки. Этот процесс закончится, когда конденсатор полностью разрядится, а ток в цепи достигнет максимума (рис. 10.1, б). С этого момента ток, не меняя направления, начнет убывать. Однако он прекратится не сразу – его будет поддерживать ЭДС самоиндукции. Ток будет перезаряжать конденсатор, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток. Наконец, ток прекратится, а заряд на конденсаторе достигнет максимума. С этого момента конденсатор начнет разряжаться опять, ток потечет в обратном направлении и т.д. – процесс будет повторяться.

В контуре при отсутствии сопротивления проводников будут совершаться строго периодические незатухающие колебания. В ходе процесса периодически изменяются заряд на обкладках конденсатора, напряжение на нем и ток через катушку. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергии электрического и магнитного полей.

Если же сопротивление проводников $R \neq 0$, то, помимо описанного процесса, будет происходить преобразование электромагнитной энергии в джоулеву теплоту. Сопротивление проводников цепи R принято называть **активным сопротивлением**.

Найдем уравнение колебаний в контуре, содержащем последовательно соединенные конденсатор C , катушку индуктивности L , активное сопротивление R и внешнюю переменную ЭДС (рис. 10.2). Прежде всего выберем положительное направление обхода контура, например по часовой стрелке. Обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, направление от которой к другой обкладке совпадает с выбранным положительным направлением обхода контура. Тогда ток в контуре определяется как

$$I = dq / dt, \quad (10.1)$$

следовательно, если $I > 0$, то и $dq > 0$, и наоборот (знак I совпадает со знаком dq). Согласно второму правилу Кирхгофа, для участка цепи 1-2

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_s + \varepsilon, \quad (10.2)$$

где ε_s – ЭДС самоиндукции в катушке. В нашем случае $\varepsilon_s = -LdI / dt$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = q / C$ (знак q должен совпадать со знаком разности $\varphi_2 - \varphi_1$, т.е. $C > 0$). Поэтому уравнение (10.2) можно переписать в виде

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon,$$

или, с учетом (10.1), как

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon. \quad (10.3)$$

Это и есть **уравнение колебательного контура** – линейное дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Найдя с помощью этого уравнения $q(t)$, мы можем легко вычислить напряжение на конденсаторе как $U_c = q / C$ и силу тока I по формуле (10.1).

Уравнению колебательного контура можно придать иной вид:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon / L, \quad 2\beta = R / L, \quad \omega_0^2 = 1 / LC. \quad (10.4)$$

Величину ω_0 называют **собственной частотой контура**, β – **коэффициентом затухания**. Смысл этих названий мы выясним ниже.

Если $\mathcal{E} = 0$, то колебания принято называть **свободными**. При $R = 0$ они будут **незатухающими**, при $R \neq 0$ – **затухающими**. Рассмотрим последовательно все эти случаи. Учтём начальные условия: при $t=0$ $q(t=0) = q_m$, $I=0$.

Свободные незатухающие колебания. Если в контуре нет внешней ЭДС $\mathcal{E}$ и активное сопротивление $R = 0$, то колебания в таком контуре являются свободными незатухающими. Их уравнение – частный случай уравнения (10.4), когда $\mathcal{E} = 0$ и $R = 0$:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (10.5 \text{ а})$$

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (10.5 \text{ б})$$

где q_m – амплитудное значение заряда на обкладке конденсатора, ω_0 – собственная частота контура, α – начальная фаза. Значение ω_0 определяется только свойствами самого контура, значения же q_m и α – начальными условиями. В качестве таковых можно взять, например, значения заряда q , тока I и заряда q в момент $t = 0$.

Согласно (10.4), период свободных незатухающих колебаний

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC} \quad (10.6)$$

(формула Томсона). Найдя ток I дифференцированием заряда (10.5 б) по времени и имея в виду, что напряжение на конденсаторе находится в фазе с зарядом q , нетрудно убедиться, что при свободных незатухающих колебаниях ток I опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

Свободные затухающие колебания. Каждый реальный контур обладает активным сопротивлением, и энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется на нагревание. Свободные колебания будут затухающими. Уравнение такого колебательного контура мы получим, положив в (10.3) $\mathcal{E} = 0$. Тогда

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (10.7)$$

Можно показать, что при $\beta^2 < \omega_0^2$ решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad U = q/C = U_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (10.8)$$

Здесь введены обозначения $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$.

Предлагаем найти это решение самостоятельно. График свободных затухающих колебаний приведен на рис. 10.3 (а).

Величину $T = 2\pi / \omega$ называют **периодом затухающих колебаний**:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}}, \quad (10.9)$$

где T_0 – период свободных незатухающих колебаний. Множитель $q_m e^{-\beta t}$ в (10.8) называют **амплитудой затухающих колебаний**.

Величины, характеризующие затухание:

1. Коэффициент затухания β и время релаксации τ – время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Из формулы (10.8) не трудно увидеть, что

$$\tau = 1/\beta. \quad (10.10)$$

2. Логарифмический декремент затухания λ . Он определяется как натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд, взятых через период колебания T :

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \quad (10.11 \text{ а})$$

где A – амплитуда соответствующей величины (q , U , I), или, иначе

$$\lambda = 1/N_e, \quad (10.12 \text{ б})$$

где N_e – число колебаний за время τ , т. е. за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Это легко получить из формул (10.8) и (10.10). Если затухание мало ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), то $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и

$$\lambda \approx \beta 2\pi / \omega_0 = \pi R \sqrt{C/L}. \quad (10.13)$$

3. Добротность Q колебательного контура. По определению

$$Q = \pi / \lambda = \pi N_e, \quad (10.14)$$

где λ – логарифмический декремент затухания. Чем меньше затухание, тем больше Q . При слабом затухании $\beta^2 \ll \omega_0^2$, добротность будет равна

$$Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.15 \text{ а})$$

И еще одна полезная формула для Q в случае слабого затухания:

$$Q \approx 2\pi \frac{W}{\delta W}. \quad (10.15 \text{ б})$$

Здесь W – энергия, запасенная в контуре, δW – уменьшение этой энергии за период колебания T . В самом деле, энергия W пропорциональна квадрату амплитуды заряда конденсатора, т. е. $W \sim e^{-2\beta t}$. Отсюда относительное уменьшение энергии за период $\delta W / W = 2\beta T = 2\lambda$. Остается учесть, согласно (10.13), что $\lambda = \pi / Q$.

В заключение отметим, что при $\beta^2 \geq \omega_0^2$ вместо колебаний будет происходить **апериодический разряд конденсатора** (см. рис. 10.3, б). Активное сопротивление контура, при котором наступает апериодический процесс, называют критическим:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C}. \quad (10.16)$$

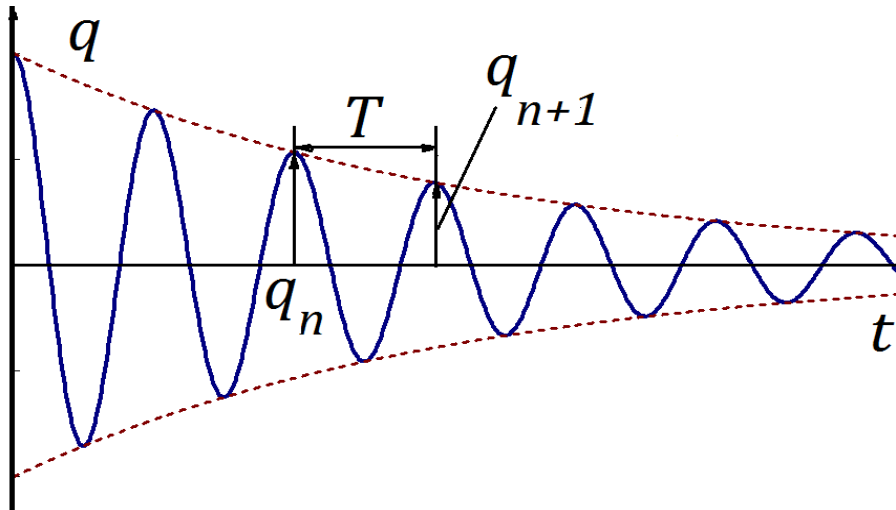


Рис. 10.3, а. Затухающие колебания

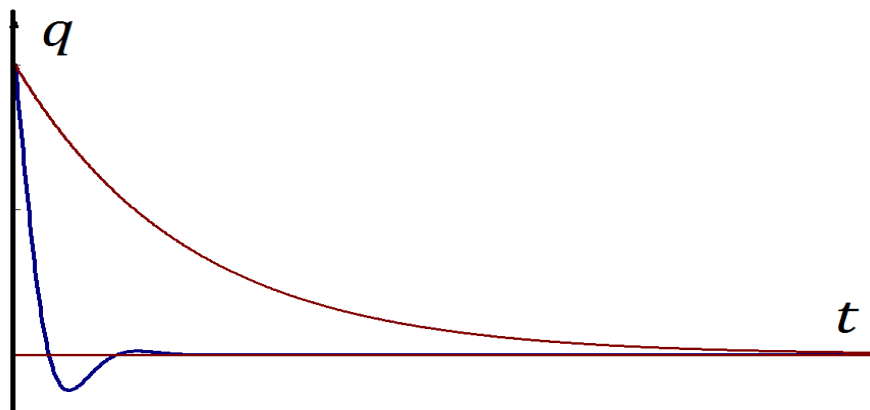


Рис. 10.3, б. Апериодический процесс

В данной работе для исследования затухающих колебаний в реальном колебательном контуре, включающем активное сопротивление R , применяется электронный осциллограф. При этом через генератор звуковых колебаний производится периодическая подзарядка конденсатора, т.е. кривая затухающих колебаний периодически повторяется.

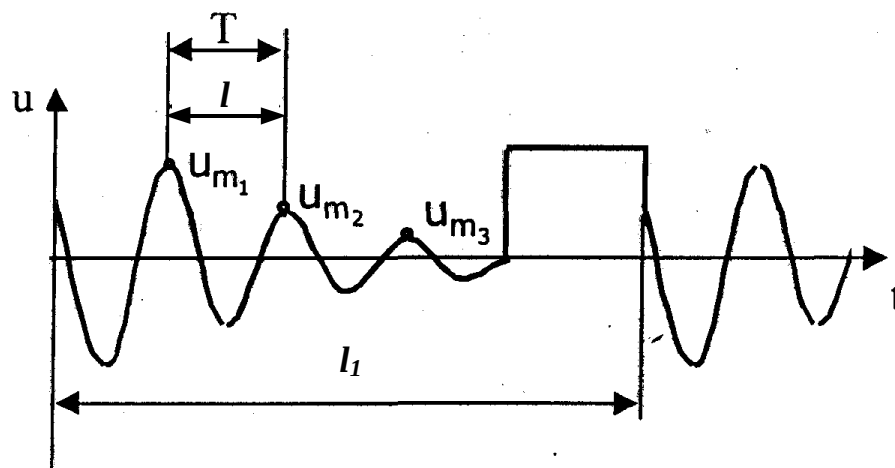


Рис. 10.4

При не очень больших значениях сопротивления контура ($R < 2\sqrt{L/C}$, где L – индуктивность катушки, C – емкость конденсатора), на экране осциллографа наблюдается картина затухающих колебаний, как это показано на рис. 10.4, что соответствует закону изменения напряжения (10.8).

Если генератор задает частоту ν , то цикл подзарядки конденсатора длится $(1/\nu)$ секунд, этому времени на экране осциллографа соответствует отрезок l_1 . Периоду колебаний T соответствует отрезок l . Следовательно, период затухающих колебаний может быть определен по формуле

$$T = \frac{l}{l_1} \frac{1}{\nu}. \quad (10.17)$$

Измерив амплитуды колебаний, отстоящие друг от друга на время, равное периоду $u_{m1} = u_m(t)$; $u_{m2} = u_m(t+T)$; $u_{m3} = u_m(t+2T)$, можно определить логарифмический декремент затухания

$$\lambda' = \ln \frac{u_{m1}}{u_{m2}} \quad \text{или} \quad \lambda'' = \ln \frac{u_{m2}}{u_{m3}} \quad (10.18)$$

и его среднее значение

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda' + \lambda''}{2}. \quad (10.19)$$

Тогда коэффициент затухания можно рассчитать как

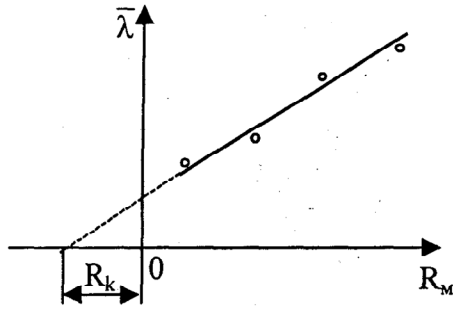


Рис. 10.5.

$$\beta = \frac{\bar{\lambda}}{T} . \quad (10.20)$$

Активное сопротивление в контуре можно изменять, например, с помощью магазина сопротивлений (R_m). Зависимость логарифмического декремента затухания $\bar{\lambda}$ от сопротивления R_m в контуре показана на рис. 10.5. Полное активное сопротивление контура R складывается из активного сопротивления катушки, индуктивности R_k и сопротивления магазина R_m :

$$R = R_k + R_m.$$

Значение R_k можно определить, экстраполируя график до значения $\lambda \rightarrow 0$. Тогда, согласно формуле для коэффициента затухания $\beta = \frac{R}{2L}$, можно рассчитать индуктивность L катушки

$$L = \frac{R}{2\beta} = \frac{R_k + R_m}{2\beta} \quad (10.21)$$

и, считая $\beta \ll \omega_0$, емкость C конденсатора из формулы Томсона

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} . \quad (10.22)$$

При больших значениях сопротивления контура $\left(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$ на экране электронного осциллографа будет наблюдаться апериодический процесс, показанный на рис. 10.6.

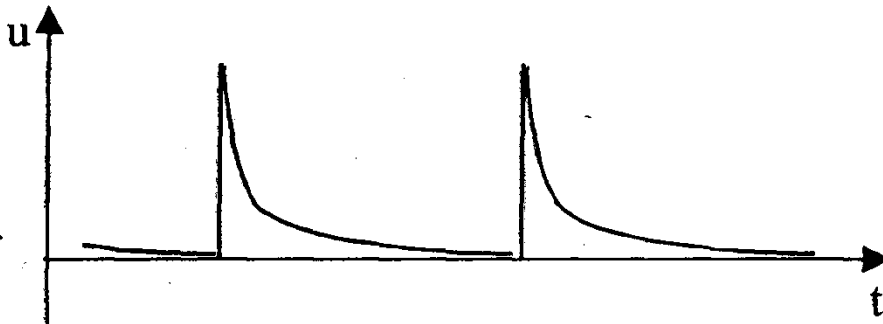


Рис. 10.6

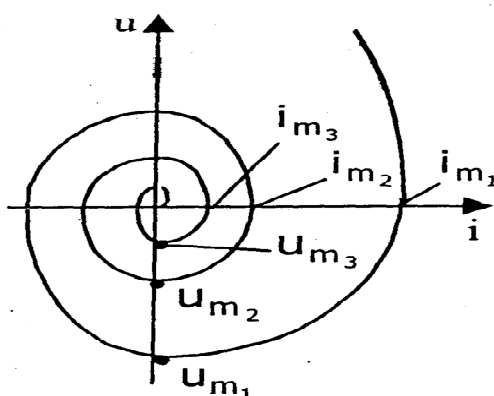


Рис. 10.7.

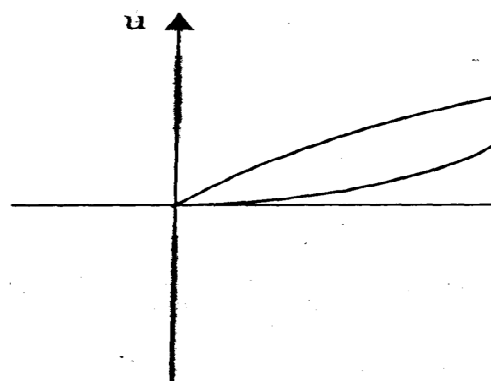


Рис. 10.8.

Измерения логарифмического декремента затухания λ можно проводить также с помощью фазовой кривой $u = f(i)$. Если сопротивление контура $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то фазовые кривые имеют вид, показанный на рис. 10.7.

Измеряя значения напряжения, разделенные промежутком времени, равным периоду, можно по формулам (10.18) и (10.19) определить логарифмический декремент затухания λ . Аналогичные измерения можно провести и по значениям тока

$$\lambda' = \ln \frac{i_{m1}}{i_{m2}} \quad \text{или} \quad \lambda'' = \ln \frac{u_{m2}}{u_{m1}}. \quad (10.8)$$

При больших значениях сопротивления контура $\left(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$ фазовая кривая для аperiodического разряда принимает вид, показанный на рис. 10.8.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Для изучения реального колебательного контура предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис. 10.6. В состав электрической схемы установки входят:

1. Генератор звуковых колебаний.
2. Электронный осциллограф (ЭО).
3. Колебательный контур, смонтированный в кассете ФПЭ – 10.
5. Преобразователь импульсов ПИ (кассета ФПЭ – 08).
6. Источник питания (ИП).
7. Магазин сопротивлений (МС).

Напряжение от источника питания (ИП) и от звукового генератора подается на преобразователь импульсов (ПИ) и далее – на вход колебательного контура (кассета ФПЭ – 10) для циклической подзарядки конденсатора. Выходы «Х» и «У» кассеты ФПЭ – 10 соединяются с соответствующими гнездами электронного осциллографа (ЭО). Кроме того, к колебательному контуру (ФПЭ – 10) подсоединяется магазин сопротивлений (МС), что позволяет изменять величину активного сопротивления в контуре.

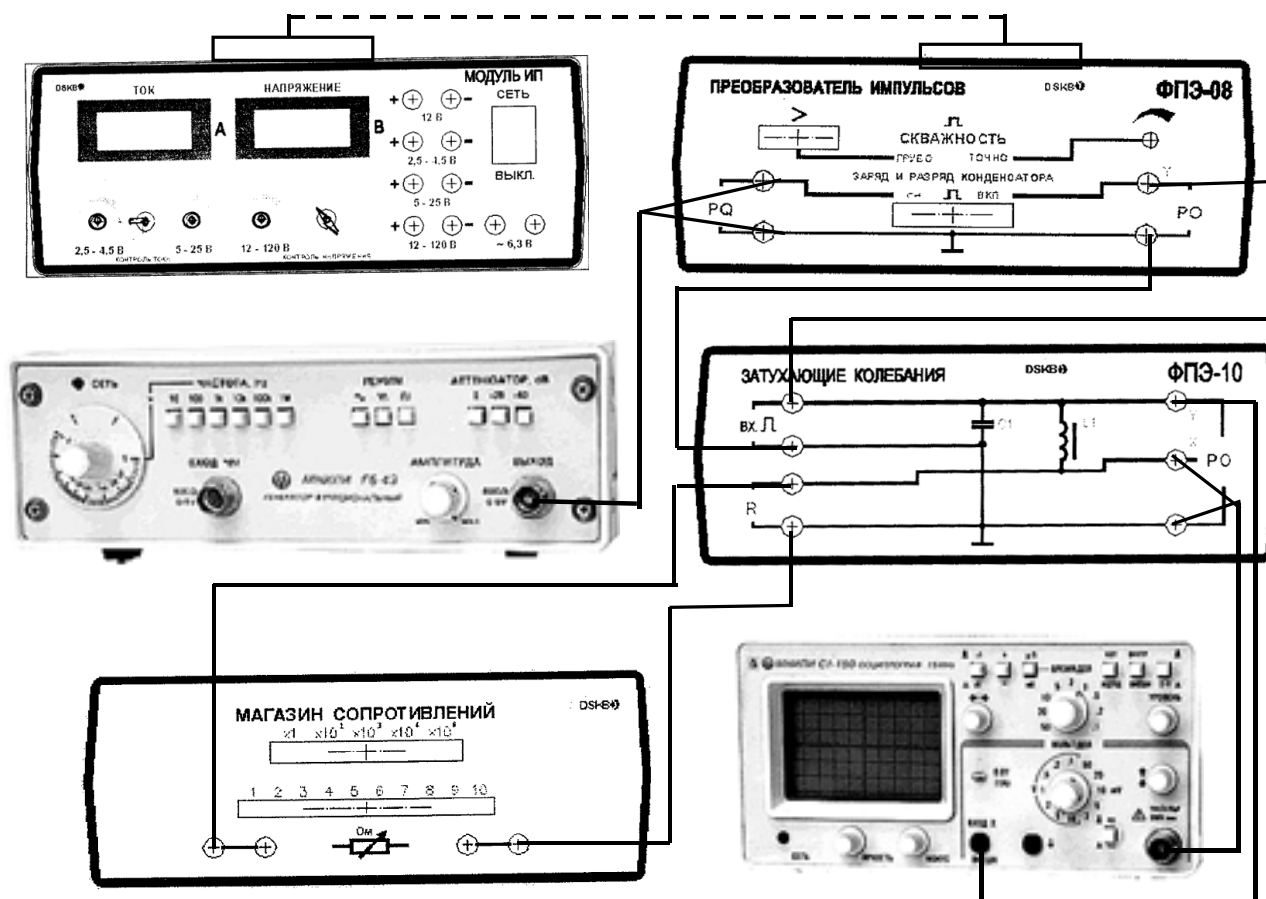


Рис. 10.9

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Упражнение 1. Измерение периода T затухающих колебаний, логарифмического декремента и параметров L , C , R колебательного контура

1. На преобразователе импульсов (ПИ) нажать среднюю клавишу $\square$ (см. рис. 10.6) и правую клавишу «>>» «скважность грубо».
2. На магазине сопротивлений (МС) установить значение сопротивления $R_m = 100 \text{ Ом}$.

- Переключатель «Х», расположенный в правом верхнем углу лицевой панели осциллографа, установить в положение «нажато».
- На звуковом генераторе установить частоту $\nu = 250$ Гц.
- Включить тумблеры «Сеть» на приборах.
- Установить на панели осциллографа ручку «V/дел» в положение 2 В, ручку «Время/дел» в положение 0,5 мс.
- Получить на экране электронного осциллографа (ЭО) четкую картину затухающих колебаний (см. **рис. 10.1**). Ручками « $\leftrightarrow$ » и « $\updownarrow$ » добиться симметричности картины относительно горизонтальной оси.
- Измерить на экране отрезки l и l_1 (**рис. 10.1**). По формуле **(10.2)** рассчитать период колебаний и его значение записать в табл. 10.1.

Таблица 10.1.

№ п/п	Т, с	R_m , Ом	u_{m1}	u_{m2}	u_{m3}	λ'	λ''	$\bar{\lambda}$	β , c^{-1}	R_k , Ом	L , Гн	$\bar{L}$, Гн	С, Ф
			Деления										
1		100											
2		300											
3		500											
4		600											

- Измерить в делениях амплитуды колебаний u_{m1}, u_{m2}, u_{m3} на экране осциллографа. По формулам **(10.3)** и **(10.4)** рассчитать для каждой пары измерений логарифмический декремент затухания λ и его среднее значение $\bar{\lambda}$. Результаты занести в табл. 10.1.
- Вычислить коэффициент затухания по формуле **(10.5)**.
- Повторить измерения по п. 9, 10 для значений на магазине сопротивлений $R_m = 300, 500, 600$ Ом.
- Построить график зависимости логарифмического декремента затухания от значений магазина сопротивлений $\bar{\lambda} = f(R_m)$, как это показано на **рис. 10.2**.
- Экстраполируя график до значения $\lambda \rightarrow 0$, получить значение активного сопротивления R_k катушки индуктивности.

14. Для каждого значения R_m , вычислить индуктивность L катушки по формуле (10.6) и рассчитать среднее арифметическое значение $\bar{L}$ для всех измерений.
15. Определить емкость C конденсатора по формуле (10.7).
16. Подобрать минимальное (критическое) значение магазина сопротивлений R_{mkp} , при котором уже наблюдается апериодический разряд конденсатора (рис. 10.3). Это значение не превышает 2000 Ом. Результат записать в табл. 10.2.

Таблица 10.2

R_{mkp} , Ом	$R = R_{mkp} + R_k$, Ом	$2\sqrt{\frac{L}{C}}$, Ом	δ , %

Проверить выполнение равенства

$$R_{mkp} + R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

и найти относительную ошибку

$$\delta = \frac{(R_{mkp} - R_k) - 2\sqrt{\frac{L}{C}}}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot 100\%.$$

Результаты занести в табл. 10.2.

Упражнение 2. Исследование фазовых кривых

1. Перевести переключатель «Х», расположенный в правом верхнем углу лицевой панели осциллографа, в положение «нажато». При этом на вертикально отклоняющие пластины осциллографа подается напряжение с обкладок конденсатора, а на горизонтально отклоняющие пластины – напряжение с клемм магазина сопротивлений, пропорциональное току i . На экране это изображается зависимостью $u = f(i)$ – фазовой кривой (как показано на рис. 10.4).
2. Установить на магазине сопротивлений значение $R_k = 100 \text{ Ом}$.

3. С помощью ручек « $\updownarrow$ » и « $\leftrightarrow$ », расположенных на лицевой панели осциллографа, поместить фазовую кривую в центре экрана.
4. Измерить амплитуды колебаний u_{m1}, u_{m2}, u_{m3} и по формулам (10.3) и (10.4) рассчитать для каждой пары измерений логарифмический декремент затухания λ и его среднее значение $\bar{\lambda}$. Результаты занести в табл. 10.3.

Таблица 10.3.

№ п/п	$R_m,$ O_M	u_{m1}	u_{m2}	u_{m3}	λ'	λ''	$\bar{\lambda}$	i_{m1}	i_{m2}	i_{m3}	λ'	λ''	$\bar{\lambda}$
		Деления						Деления					
1	100												
2	200												
3	300												
4	400												

5. Измерить амплитуды колебаний i_{m1}, i_{m2}, i_{m3} ; по формулам (8.3) рассчитать для каждой пары измерений логарифмический декремент затухания λ и найти его среднее значение $\bar{\lambda}$. Результаты занести в табл. 10.3.
6. Повторить измерения по п. 4, 5 для значений сопротивления магазина $R_k = 200, 300, 400 \text{ Ом}$.
7. Увеличивая сопротивление на магазине сопротивлений, получить фазовую кривую для апериодического разряда конденсатора, как показано на рис. 10.5. Вид полученной кривой зарисовать в журнал наблюдений.
8. Отключить установку от сети.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как в работе определяется период затухающих колебаний?
2. Изобразить вид фазовых кривых при затухающих колебаниях и апериодическом разряде.
3. Какими способами в работе определяется логарифмический коэффициент затухания?
4. Как в работе определяется активное сопротивление катушки индуктивности?

Лабораторная работа ФПЭ – 11

ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы: изучение зависимости величины тока в колебательном контуре от частоты источника ЭДС, включенного в контур, и измерение резонансной частоты контура.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим процессы, протекающие в колебательном контуре, подключенном к источнику, ЭДС которого изменяется по гармоническому закону:

$$\mathcal{E} = \varepsilon_0 \cdot \exp(i\Omega t).$$

В случае ЭДС произвольного вида сигнал можно разложить в ряд Фурье – сумму гармонических функций, и рассмотреть каждую гармонику отдельно.

Полагаем, что мгновенные значения тока и напряжений удовлетворяют правилам Кирхгофа, установленным для цепей постоянного тока. Такой ток называют *квазистационарным*. В любой момент времени сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС (рис. 11.1):

$$IR + U_L + U_C = \varepsilon_0 \exp i\Omega t. \quad (11.1)$$

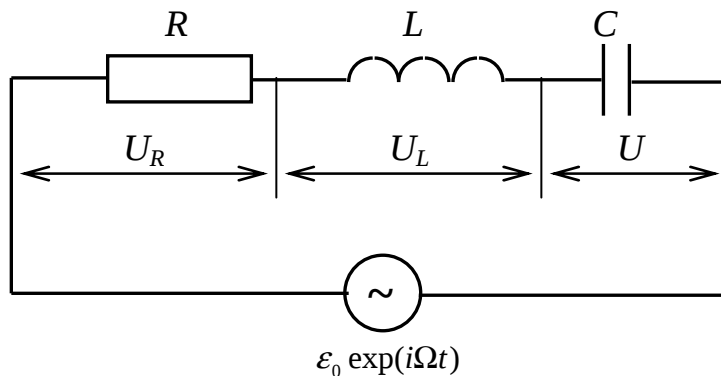


Рис. 11.1

Падение напряжения на катушке индуктивностью L :

$$U_L = -\varepsilon_i = L \frac{dI}{dt}, \quad (11.2)$$

ток в катушке и контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU) = C \frac{dU}{dt}. \quad (11.3)$$

Итак, для гармонического сигнала второе правило Кирхгофа примет вид

$$R \frac{dI}{dt} - \frac{I}{C} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (11.4)$$

Разделим это уравнение на L и введем обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad 2\beta = \frac{R}{L}.$$

В результате получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\beta \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \frac{\varepsilon_0}{L} \exp i\Omega t. \quad (11.5)$$

Мы получили **линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами**. Общее решение такого уравнения складывается из двух компонент $I_{o.n} = I_{o.o} + I_{ч.н}$, где $I_{o.o}$ – общее решение однородного уравнения (см. (10.7) и (10.8) в описании лабораторной работы № 10) уравнения (11.2), а $I_{ч.н}$ – частное решение неоднородного уравнения, которое определяется внешней ЭДС. Пусть это решение имеет вид $I_{ч.н} = I_0 e^{i\Omega t}$. Тогда

$$\frac{dI}{dt} = i\Omega \cdot I_0 e^{i\Omega t} = i\Omega I, \quad \frac{d^2 I}{dt^2} = -\Omega^2 I_0 e^{i\Omega t} = -\Omega^2 I.$$

Уравнение колебаний в контуре примет вид:

$$(i\Omega R + 1/C - \Omega^2 L)I_{ч.н} = i\Omega \varepsilon$$

или, после сокращения правой и левой частей на множитель $e^{i\Omega t}$ и умножения числителя и знаменателя на мнимую единицу i ,

$$I_0 = \varepsilon_m / Z = \varepsilon_m / [R + i\{\Omega L - 1/\Omega C\}]. \quad (11.6)$$

Здесь полное сопротивление цепи или **импеданс** равен модулю комплексного числа

$$Z = R^2 + \{\Omega L - 1/\Omega C\}^2. \quad (11.7)$$

Величина R – **активное** сопротивление контура, на котором, согласно закону Джоуля-Ленца, выделяется теплота при протекании тока. Слагаемое $\{\Omega L - 1/\Omega C\}$ называется **реактивным** сопротивлением, оно связано с передачей энергии от электрического поля магнитному и обратно.

Таким образом, общее решение уравнения вынужденных колебаний запишется как сумма двух слагаемых с разными частотами

$$I_{o.n} = I_{o.o} \exp(-\beta t) \cdot \exp(i\omega t) + \varepsilon_m \exp(i\Omega t) / (R^2 + \{\Omega L - 1/\Omega C\}^2).$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, первое слагаемое – убывающая периодическая функция, график которой изображен на рис. 10.3 а; второе – вынужденное колебание постоянной амплитуды частотой Ω , заданной источником внешней ЭДС. После замыкания цепи возникает переходный процесс, когда оба слагаемых, $I_{0,0}$ и $I_{ч.н}$ вносят существенный вклад в формирование сигнала. Компонента $I_{0,0}$ убывает со временем, приближаясь к нулю, поэтому для стационарных процессов можно учитывать только $I_{ч.н}$.

Поэтому в первое время после подключения генератора в контуре будут возбуждаться колебания сложной формы. С течением времени собственные колебания $I_{0,0}$ будут затухать и устанавливается вынужденное колебание $I_{ч.н}$. Время за которое происходит затухание собственных колебаний – называется **временем установления** колебаний.

Векторные диаграммы

Комплексные величины, например, импеданс, удобно представлять виде вектора на комплексной плоскости. Из формул (11.2) видно, что U_R находится в фазе с током I , U_C отстает по фазе от I на $\pi/2$, а U_L опережает I на $\pi/2$.

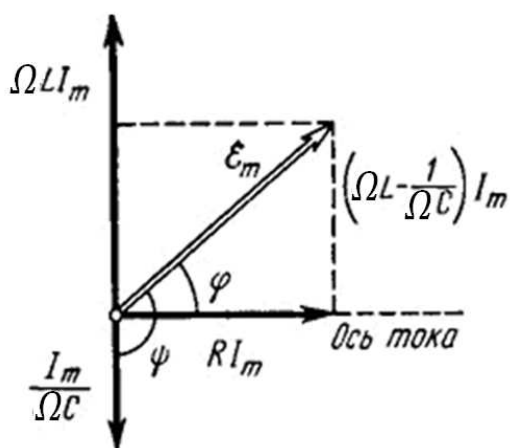


Рис. 11.2. $\Omega L - 1/\Omega C$ – векторная диаграмма напряжений в колебательном контуре

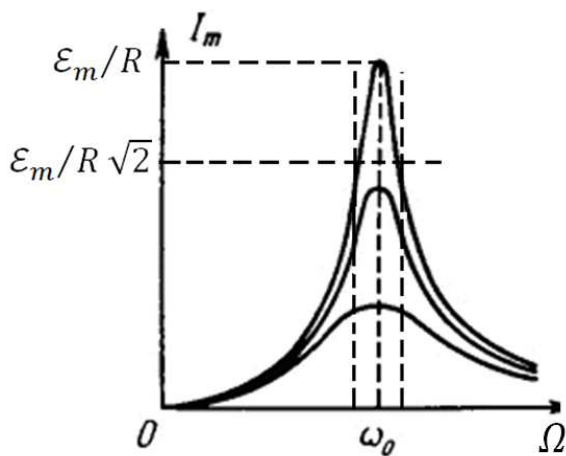


Рис. 11.3. Токовый резонанс

Все это можно наглядно представить с помощью **векторной диаграммы**, изобразив амплитуды напряжений

$$U_{Rm} = R I_m, \quad U_{Cm} = I_m / \Omega C, \quad U_{Lm} = \Omega L I_m$$

и их векторную сумму, равную вектору величины E_m (рис. 11.2). Из прямоугольного треугольника этой диаграммы легко получить следующие выражения для I_m и φ :

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/\Omega C)^2}}, \quad (11.8 \text{ а})$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega L - 1/\Omega C}{R}. \quad (11.8 \text{ б})$$

Зависимость амплитуды тока I_m от частоты представлена на рис. 11.3.

Здесь внешнее напряжение – это вектор $\mathcal{E}_m$ на комплексной плоскости. А ток, который одинаков во всей цепи, совпадает с осью абсцисс. Поэтому:

1) Напряжение на индуктивном элементе опережает внешнее напряжение на угол $(\pi/2 - \varphi)$, а ток – на $\pi/2$.

2) Напряжение на конденсаторе отстает на $(\pi/2 + \varphi)$ от $\mathcal{E}$ и на $\pi/2$ от тока.

3) Напряжение на резисторе отстает от внешней $\mathcal{E}$, если $1/\Omega C < \Omega L$ и опережает её, если $\Omega L < 1/\Omega C$ и всегда совпадает с фазой тока.

4) Фаза внешнего напряжения может как отставать от фазы тока, так и опережать её.

Явление резонанса в цепи переменного тока

Запишем амплитудное значение для тока, определённое формулой (11.5):

$$I_0 = \mathcal{E}_m/Z = \mathcal{E}_m/[R + i\{\Omega L - 1/\Omega C\}].$$

Видно, что при частоте

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (11.9)$$

амплитуда тока становится максимальной $I_0 = \mathcal{E}_m/R$, а разность фаз между током в контуре и внешним напряжением будет равна нулю:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \varphi[(\omega L - 1/\omega C)/R] = 0.$$

Частота $\Omega_{\text{рез}}$ называется резонансной частотой. Иначе говоря, при $\Omega = \Omega_{\text{рез}}$ напряжения на емкости и индуктивности взаимно компенсируются, и величина тока будет максимальной. Поэтому данный конкретный случай называется **резонансом токов** (см. рис. 11.3). Резонанс токов при любых значениях R происходит на одной и той же частоте, равной собственной частоте контура.

Величина $Q = \frac{\omega}{2\beta}$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, называется **добротностью** колебательного контура. Добротность контура связана с остротой резонансных кривых. Найдем ширину резонансной кривой на высоте $I_0 = \frac{I_{om}}{\sqrt{2}}$ (рис. 11.4). Из формулы (11.7) следует, что максимальное значение тока

$$I_{om} = \frac{\varepsilon_0 C \omega_0^2}{2\beta}, \text{ а}$$

$$I_0 = \frac{2\beta \Omega I_{om}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (11.10)$$

При $I_0 = I_{om}/\sqrt{2}$ формула (11.10) запишется

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\beta \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (11.11)$$

Добротность можно определить графически из резонансной кривой. $Q = \Omega_{\text{рез}}/\Delta\omega$ где $\Delta\omega$ – интервал частот, в котором амплитуда тока отличается не более чем в $\sqrt{2}$ раз от резонансного значения $I_0 = \varepsilon_m/R$ (рис. 11.3).

Условие **резонанса напряжений** предлагаем получить самостоятельно. Для этого следует записать напряжение на конденсаторе как

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{C} \int I_0 \exp(i\Omega t) dt$$

и взять неопределённый интеграл.

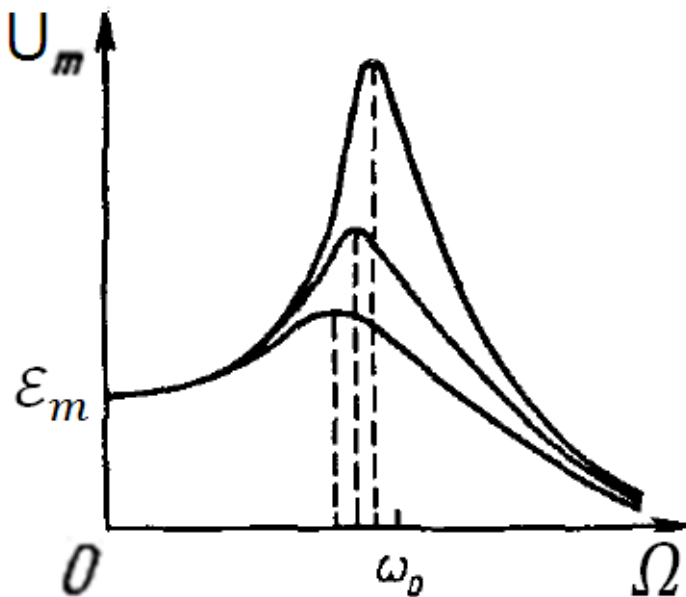


Рис. 11.4. Резонанс напряжений

Согласно известной формуле Эйлера, мнимая экспонента представляет собой сумму тригонометрических функций. Поэтому всё, что стоит рядом с $\exp(i\Omega t)$ в качестве множителя, является амплитудой переменного напряжения. Наша задача определить точку локального максимума для амплитуды U_C . Для этого возьмем производную по величине Ω и приравняем ее к нулю.

[Ответ: $\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$]

Принципиальная электрическая схема лабораторной установки приведена на рис. 11.5.

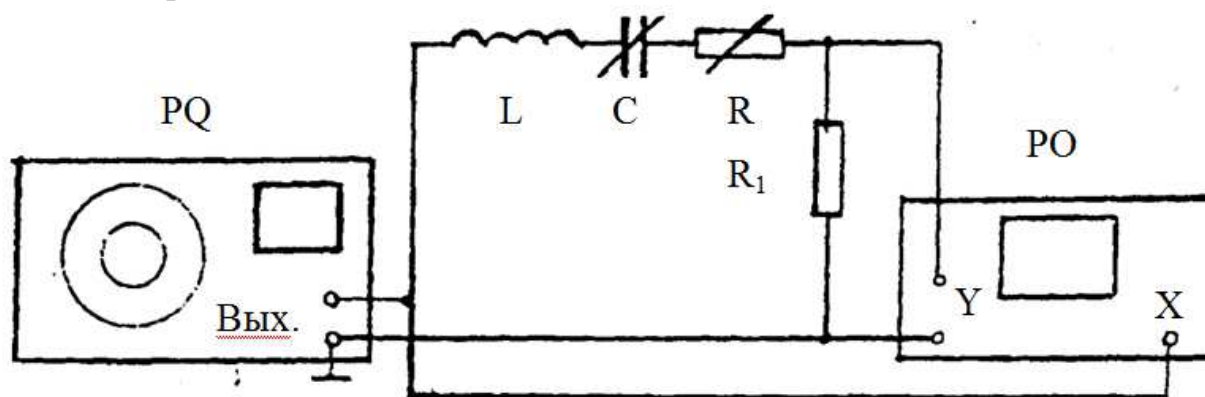


Рис. 11.5

Колебательный контур состоит из катушки L магазина емкостей C , переменного сопротивления R и сопротивления R_1 . Напряжение на сопротивлении R_1 пропорциональное току в контуре, подается на вход Y электронного осциллографа. Для снятия резонансных кривых изменяя частоту звукового генератора PQ, определяют зависимость $I_0 = f(\Omega)$ при различных сопротивлениях контура R .

Для измерения сдвига фаз φ_1 можно использовать фигуры Лиссажу, получаемые на экране осциллографа. Пусть имеются два синусоидальных напряжения одинаковой частоты Ω . Подадим эти напряжения на вертикальные и горизонтальные пластины осциллографа. Смещение луча под действием этих напряжений пропорционально напряжению и по горизонтали $x = x_0 \sin \Omega t$, а по вертикали $y = y_0 \sin(\Omega t + \varphi)$, где φ – сдвиг фаз между напряжениями; x_0 и y_0 – амплитуды смещения луча, пропорциональные амплитуде напряжения и коэффициентам усиления соответствующих каналов осциллографа. Исключив время, получим

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (11.12)$$

Выражение (11.18) – уравнение эллипса, описываемого электронным лучом на экране осциллографа. Выберем коэффициенты усиления вертикального и горизонтального каналов осциллографа таким, чтобы $x_0 = y_0$. В этом случае

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi = x_0^2 \sin^2 \varphi. \quad (11.13)$$

Уравнение (11.13) – уравнение эллипса, оси которого составляют угол $\frac{\pi}{4}$ с осями координат. При $\varphi=0$ эллипс вырождается в прямую $y = x$, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – в круг радиуса x_0 . Для точки М эллипса (рис. 11.6) $y = x$, следовательно, $a^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$, а уравнение (11.12) для этой точки примет вид:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x^2 \cos \varphi &= x_0^2 \sin^2 \varphi; \\ 2x^2 (1 - \cos \varphi) &= x_0^2 \sin^2 \varphi; \\ a^2 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} &= x_0^2 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

отсюда

$$a^2 = 2x_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (11.14)$$

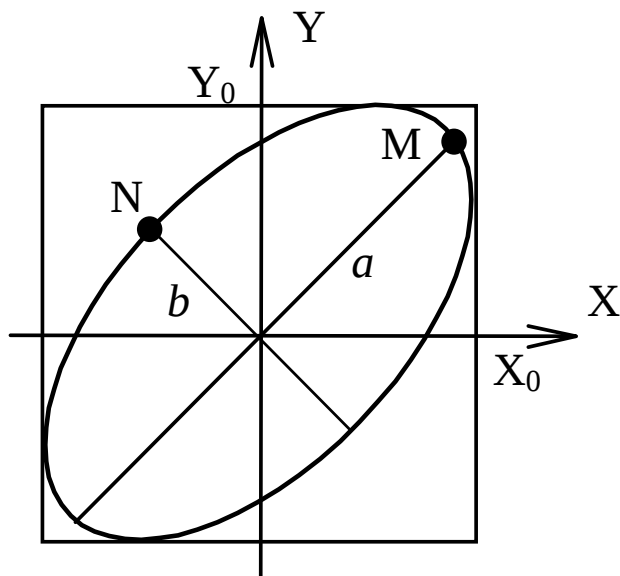


Рис. 11.6

Аналогично для точки N эллипса (см. рис. 11.6) $y = -x$, получим

$$b^2 = 2x_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (11.15)$$

Из выражений (11.14) и (11.15) получим

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}. \quad (11.16)$$

Таким образом, для измерения сдвига фаз между напряжениями одинаковой частоты достаточно измерить полуоси a и b эллипса, вписанного в квадрат на экране осциллографа. При $\varphi = 0$ эллипс вырождается в прямую.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

На рис. 11.7 приведена блок-схема экспериментальной установки:

1. PQ – звуковой генератор.
2. PO – электронный осциллограф.
3. ФПЭ – 11 – модуль.
4. MC – магазин сопротивлений.
5. ME – магазин емкостей.

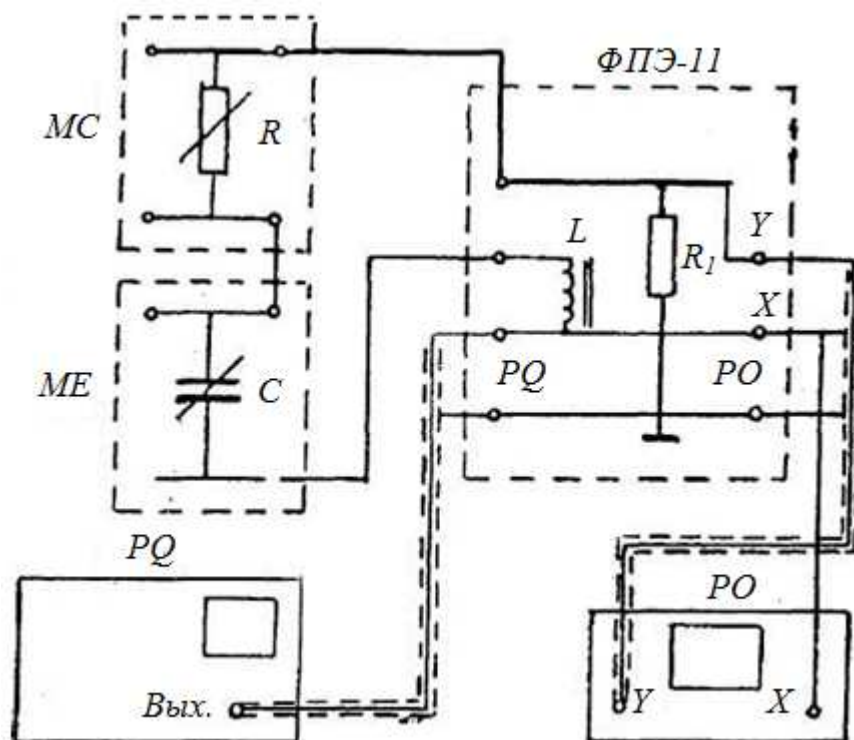


Рис. 11.7

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Собрать электрическую схему (рис. 11.7, 11.8): МС и МЕ – магазины сопротивлений и емкостей, собранные в отдельных модулях установки; ФПЭ – 11 – модуль для изучения вынужденных колебаний в колебательном контуре; PQ – генератор; РО – осциллограф.

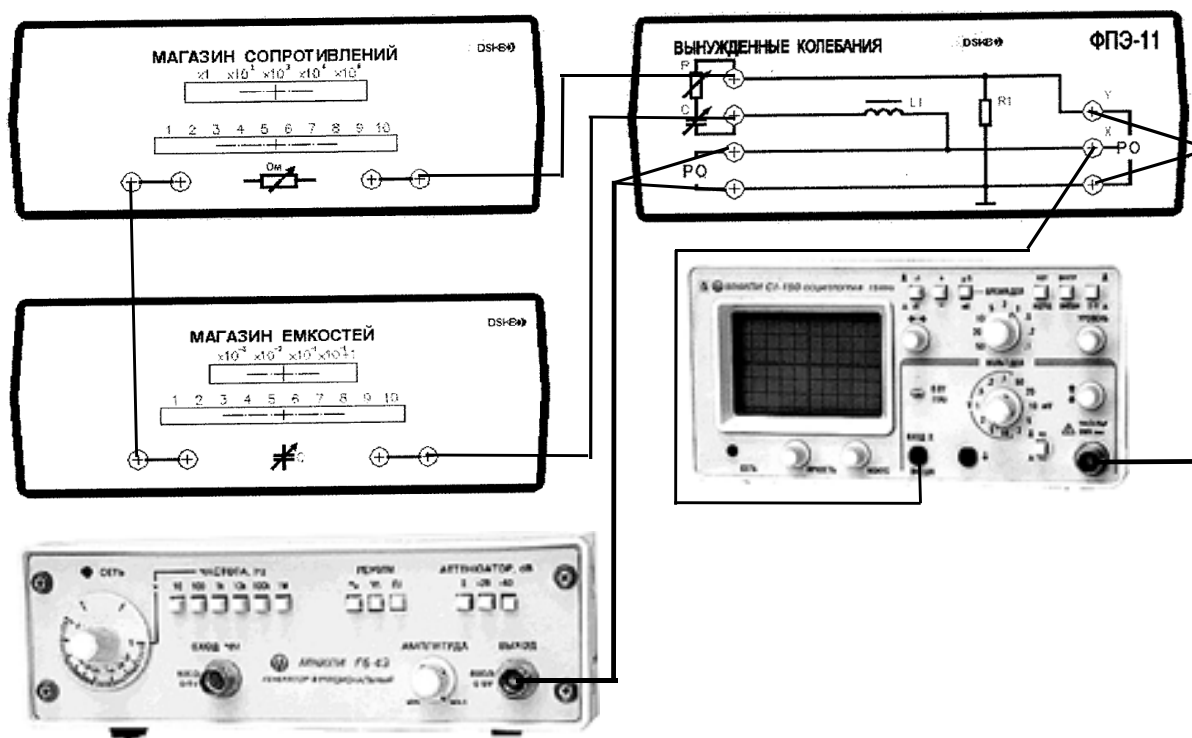


Рис. 11.8

Задание 1. Снятие резонансных кривых

1. Установить переключателями магазина емкостей $C = 3 \cdot 10^{-3}$ мкФ и переключателями магазина сопротивлений $R = 0$ (для этого необходимо просто замкнуть провода, идущие на блок сопротивлений, вставив их с одной стороны блока).
2. Используя приблизительное значение индуктивности $L = 100$ мГн, рассчитать резонансную частоту контура по формуле $f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.
3. Ознакомиться с работой звукового генератора и электронного осциллографа в режиме измерения синусоидального напряжения и получения фигур Лиссажу.
4. Приготовить приборы к работе:

- а) установить следующие параметры выходного напряжения звукового генератора: частота – 2 кГц, величина напряжения – до 1,5 В;
 - б) включить развертку электронного осциллографа с запуском от внутреннего генератора развертки и установить частоту развертки, удобную для наблюдения сигналов частотой 2-16 кГц;
 - в) усиление по оси Y электронного осциллографа установить таким, чтобы было возможно измерять напряжение до 1 В.
5. Включить лабораторный стенд и приборы. Напряжение звукового генератора установить равным 0,8 В. Это значение при всех измерениях в упражнении 1 поддерживать неизменным. Получить на экране осциллографа устойчивое изображение синусоиды. Измерить амплитуду синусоидального напряжения в вольтах. Результаты измерения записать в табл. 11.1.

Таблица 11.1.

f, кГц										
U ₀ , В										
I ₀ , мА										

6. Измерить амплитуду при других частотах в диапазоне от 2 до 16 кГц. Частоту изменять с интервалом 1-2 кГц, вблизи резонанса (резкого увеличения амплитуды) с интервалом 0,2 кГц. Результаты измерений занести в табл. 11.1.
7. Рассчитать амплитуду тока в колебательном контуре по формуле $I_0 = \frac{U_0}{R_1}$, где $R_1 = 75$ Ом значение внутреннего сопротивления кассеты. Расчет провести для каждого значения частоты, результаты вычислений записать в табл. 11.1 в миллиамперах.
8. Установить сопротивление магазина $R = 500$ Ом. Провести измерения (п. 5-7), результаты записать в табл. 11.1.
9. Снять резонансную кривую (п. 5-7) при $R = 3000$ Ом, результаты записать в табл. 11.1.
10. Построить на одном чертеже графики зависимостей I_0 от f .
11. По графикам при $R = 0$ и $R = 500$ Ом найти ширину резонансной кривой Δf (см. рис. 11.5) и рассчитать значения добротности контура по формуле $Q \approx \frac{f_p}{\Delta f}$.

Задание 2. Определение зависимости резонансной частоты от емкости

1. Установить сопротивление $R = 0$, емкость $C = 1 \cdot 10^{-3}$ мкФ.
2. Выключить развертку осциллографа (для чего нажать на кнопку в верхней правой части лицевой панели осциллографа). На экране осциллографа наблюдать эллипс (см. рис. 11.6). Изменяя частоту звукового генератора, добиться превращения эллипса в прямую, расположенную примерно под углом 45° к оси X. При необходимости изменять усиление по оси Y. При этом частота звукового генератора равна резонансной частоте f_p .
3. Значения f_p и C записать в табл. 11.2.
4. Провести измерения f_p (п. 2 и 3) при других значениях C от $1 \cdot 10^{-3}$ до $10 \cdot 10^{-3}$ мкФ с интервалом 10^{-3} мкФ.
5. Вычислить значения $Z = \frac{1}{(2\pi f_p)^2}$ и построить график зависимости Z

от C , который должен представлять собой прямую линию, проходящую через начало координат (рис. 11.9).

Таблица 11.2

$C \cdot 10^9, \Phi$									
$f_p, \text{кГц}$									
Z									

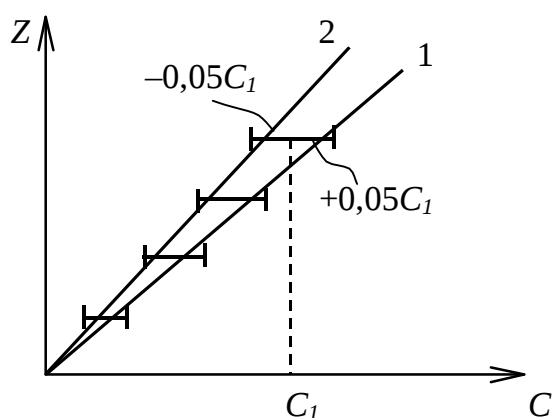


Рис. 11.9.

При построении графика следует учесть следующее. Точность значений емкостей, устанавливаемых на магазине емкостей, составляет 5 %. Поэтому на графике следует изобразить пределы, в которых известно данное значение C , так, как показано на рис. 11.9. Затем следует провести прямую, не выходящую за

нижние границы C (прямая 1), и прямую, не выходящую за верхние границы (прямая 2). В этих пределах должна располагаться истинная зависимость $Z = f(C)$.

6. Рассчитать значение индуктивности катушки как тангенс угла наклона прямых на графике $Z = f(C)$:

$$L = \frac{\Delta Z}{\Delta C}; \quad L_{cp} = \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

7. Оцените погрешность определения L :

$$\delta = \frac{\Delta L}{L_{cp}} = \frac{L_2 - L_{cp}}{L_{cp}}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Вывести формулу зависимости амплитуды тока в колебательном контуре от частоты внешней ЭДС.
2. Вывести формулу для вычисления сдвига фаз с помощью фигур Лиссажу.
3. Что такое резонанс токов?
4. Что такое добротность колебательного контура?

Лабораторная работа ФПЭ – 12

ИЗУЧЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: снятие вольт-амперной характеристики газонаполненной лампы и изучение релаксационных колебаний.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Релаксационные колебания – незатухающие негармонические колебания, нелинейных систем, для которых характерно накопление и сбрасыва-

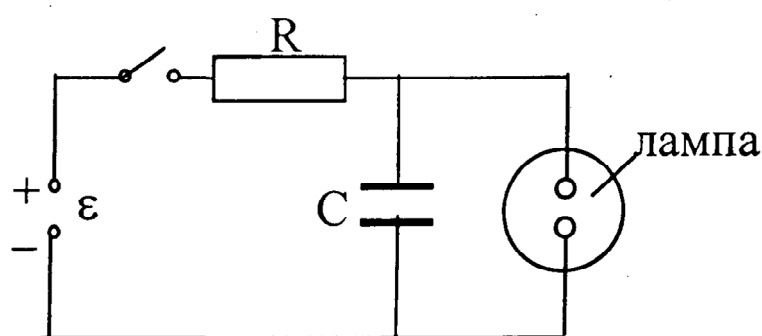


Рис. 12.1

ние энергии (relaxation – ослабление). Их генератором может служить система: газонаполненная лампа-конденсатор (рис. 12.1).

При включении источника (ϵ) начальное сопротивление незажженной лампы велико,

конденсатор C заряжается, одновременно растет разность потенциалов на электродах газонаполненной лампы.

Газы в естественном состоянии состоят из электрически нейтральных атомов и молекул, т.е. не содержат свободных зарядов и поэтому не проводят электрический ток. Проводить они могут, только если часть молекул *ионизируется* – расщепляется на положительные и отрицательные ионы. Обычно происходит расщепление на одновалентный положительно заряженный ион и электрон. Ионизация может происходить под влиянием различных воздействий на газ, например, нагрева, космических лучей, и др. Наряду с процессом ионизации в газе происходит и обратный процесс – рекомбинация, т.е. воссоединение положительных и отрицательных ионов в нейтральный атом.

Если газ, находящийся под действием внешнего ионизатора, заключен в колбу с впаянными в нее электродами («лампа»), то при подаче на электроды напряжения через газ потечет ток, который называют газовым разрядом. В этом случае электропроводность газа создается за счет внешнего ионизатора, и ток, возникающий в нем, называется *несамостоятель-*

ным разрядом. С прекращением действия внешнего ионизатора такой разряд прекращается.

Электрический ток в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется *самостоятельным газовым разрядом*. Для его осуществления необходимо, чтобы в результате самого разряда в газе непрерывно образовывались свободные заряды. Плотность тока в газе

$$j = (q^+ \mu^+ + \mu^- b^-) n E. \quad (12.1)$$

Здесь μ^+ и μ^- – подвижности положительного q^+ и отрицательного q^- зарядов (*подвижность* – скорость упорядоченного движения заряда при напряженности электрического поля, равной единице); n – концентрация зарядов, E – напряженность электрического поля.

$$\mu = \frac{E}{V_d},$$

где V_d – дрейфовая скорость движения зарядов.

На рис. 12.2 показана вольт-амперная характеристика газового разряда в лампе.

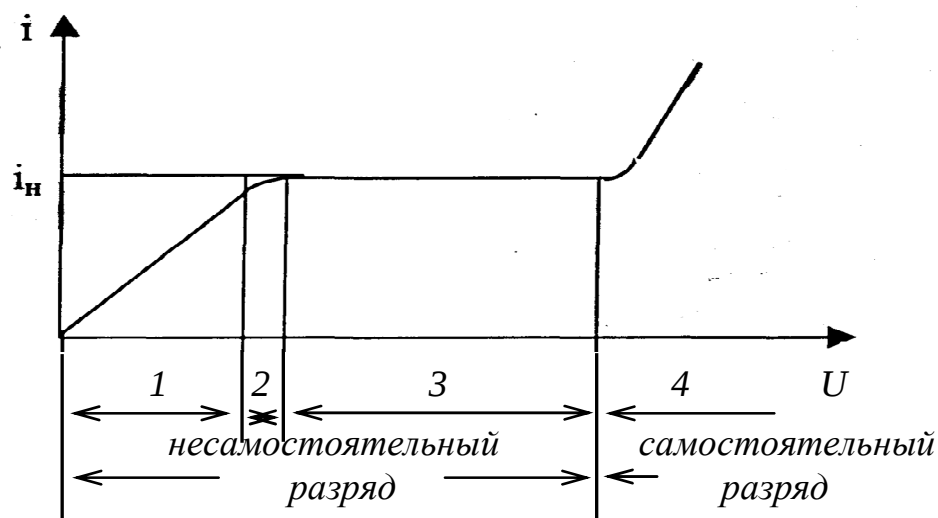


Рис. 12.2

При малых напряжениях на электродах лампы (участок 1 на рис. 12.2) ионы и электроны под действием сил со стороны электрического поля E будут двигаться к противоположным электродам лампы, а сила тока будет пропорциональна напряженности электрического поля (разности потенциалов) в соответствии с законом Ома.

С увеличением разности потенциалов (участок 2) линейная зависимость нарушается. Это связано с тем, что под действием электрического поля значительная часть ионов и электронов достигает электродов. Начиная с некоторого значения напряжения (участок 3), ток остается неизменным с увеличением напряжения (i_H – ток насыщения). Это объясняется тем, что все заряды, возникшие в газе под действием внешнего ионизатора, достигают электродов лампы, не успевая рекомбинировать. Поэтому при неизменной интенсивности ионизации не происходит дальнейшего роста тока при увеличении напряжения.

Газовый разряд, происходящий на участках 1, 2 и 3 является *несамостоятельным* газовым разрядом. При дальнейшем увеличении напряжения (участок 4) происходит резкое увеличение тока. Это объясняется *ударной ионизацией*: электроны, возникшие в газе за счет внешнего ионизатора, во время своего движения к аноду под действием электрического поля приобретают энергию, достаточную для ионизации нейтральных молекул газа при столкновении с ними.

Но переход от несамостоятельного разряда к самостоятельному становится возможным лишь при таком напряжении между электродами, когда положительные ионы также приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа. В этом случае внешний ионизатор не играет существенной роли в осуществлении газового разряда, так как число создаваемых им первоначальных ионов мало по сравнению с числом вторичных ионов и прекращение действия ионизатора не влияет на протекание разряда. Опыт показывает, что, кроме того, наблюдается выбивание ионами электронов с поверхности катода.

Повышая напряжение на электродах, можно возбудить все эти процессы и осуществить переход от несамостоятельного разряда к самостоятельному. Этот переход называется электрическим пробоем газа, а соответствующее напряжение – *напряжением зажигания* (U_z). Оно зависит от химической природы газа, материала катода, формы электродов и расстояния между ними, давления газа и наличия в нем примесей.

Идеализированная вольт-амперная характеристика газонаполненной лампы приведена на рис. 12.3. Как следует из характеристики, если увеличивать разность потенциалов на электродах лампы, то при значении $U = U_z$ скачком устанавливается значение тока, равное i_z – лампа «загорается». При дальнейшем возрастании напряжения ток растет по закону, близкому к линейному.

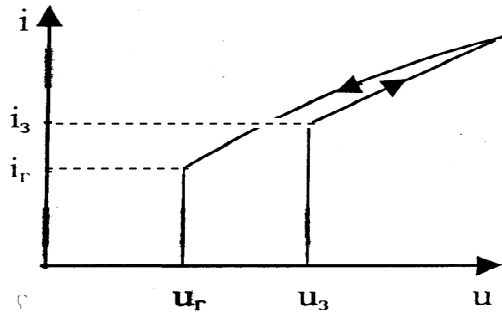


Рис. 12.3

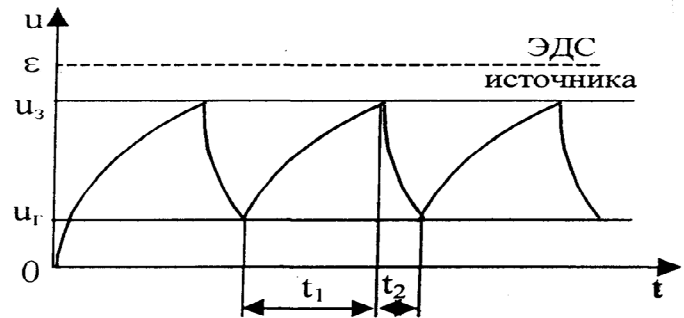


Рис. 12.4

Если затем уменьшать напряжение на «горящей» лампе, то при напряжении, равном u_3 , лампа еще не гаснет. Продолжая уменьшать напряжение, можно увидеть, что лишь при некотором напряжении – *напряжении гашения* u_r , которое меньше, чем u_3 , лампа «гаснет» и ток i_r скачком резко падает. На этом самостоятельный разряд в лампе прекращается. При дальнейшем возрастании напряжения процесс повторяется. Следует заметить, что для реальной лампы зависимость $i = f(u)$ не является линейной.

Критическое значение энергии конденсатора, при достижении которого лампа загорается

$$W_{кр} = \frac{Cu_3^2}{2}. \quad (12.2)$$

Оно равно работе, совершаемой при горении лампы.

Зависимость от времени напряжения на конденсаторе показана на рис. 12.4 и представляет собой негармонические релаксационные колебания. Наблюдая эти колебания на экране осциллографа, можно рассчитать их период: $T = t_1 + t_2$; здесь t_1 – время накопления энергии, t_2 – время сброса.

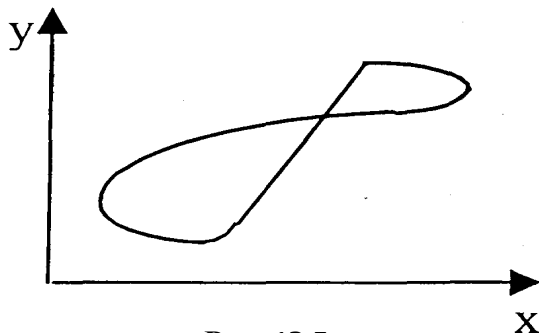


Рис. 12.5

Период релаксационных колебаний в генераторе лампа-конденсатор может быть также определен, если наблюдать на осциллографе фигуры Лиссажу (замкнутые линии, получающиеся при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний). Для этого на одну пару пластин осциллографа подается напряжение с генератора

лампа-конденсатор, на другую – переменное напряжение известной частоты от звукового генератора.

Отношение частот колебаний можно определить по виду фигуры Лиссажу, оно равно отношению числа касаний фигуры с прямой, параллельной оси X и с прямой, параллельной оси Y. На рис. 12.5 показан вид фигуры Лиссажу для соотношения частот 1:1.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Схема установки для наблюдения релаксационных колебаний представлена на рис. 12.6.

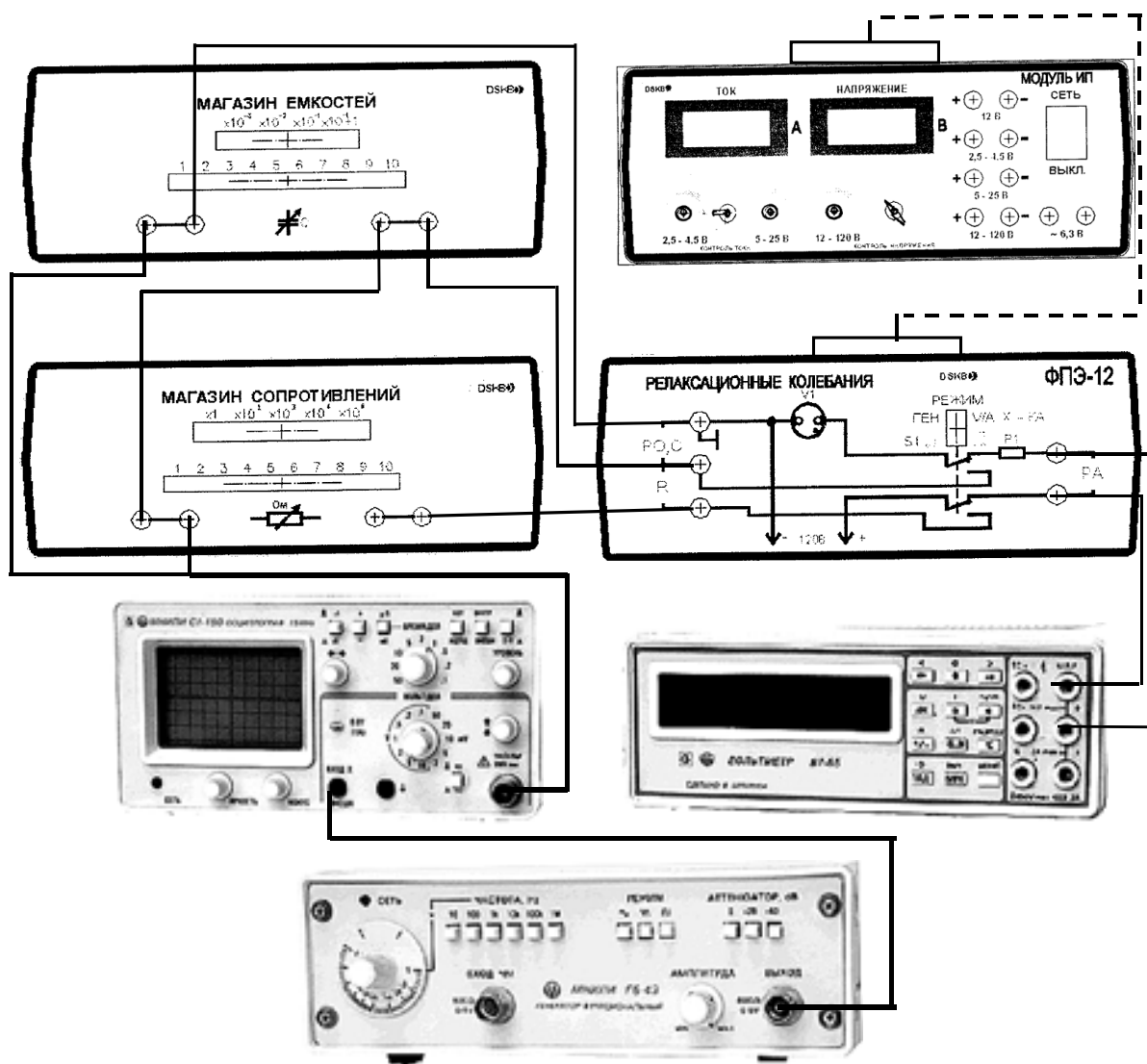


Рис. 12.6

В состав электрической схемы установки входят:

1. Генератор звуковых колебаний.
2. Электронный осциллограф (ЭО).
3. Генератор лампа-конденсатор (рис. 12.1), смонтированный в модуле ФПЭ – 12.
4. Источник питания (ИП).
5. Магазин сопротивлений (МС).
6. Магазин емкостей (МЕ).
7. Амперметр (РА).

Напряжение от источника питания (ИП) подается на вход модуля ФПЭ – 12. Кроме того, к генератору лампа-конденсатор (ФПЭ – 12) подсоединяются магазин сопротивлений (МС) и магазин емкостей (МЕ), что позволяет изменять величину сопротивления контура и емкость конденсатора. Измерительный прибор РА служит для измерения токов при снятии вольт-амперной характеристики лампы.

На вход электронного осциллографа (ЭО) подается сигнал с генератора лампа-конденсатор. Звуковой генератор ГЗ-106 необходим для подачи переменного напряжения на вход осциллографа при наблюдении фигур Лиссажу.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Упражнение 1. Снятие вольт-амперной характеристики лампы

1. Кнопку «режим» модуля ФПЭ – 12 перевести в состояние «V/A х-ка».
2. Ручку регулировки напряжения «12 – 120 В» источника питания (ИП) установить в крайнее левое положение.
3. Измерительный прибор (РА) переключателем подготовить к работе в режиме, обеспечивающем измерение силы тока до 10 мА.
4. Подключить к сети источник питания. Ручкой «12 – 120 В» регулировки напряжения источника питания изменять напряжение от 40 до 110 В через каждые 10 В и измерять силу тока (по амперметру РА) в прямом направлении $i_{пр}$. Результаты измерений занести в табл. 12.1.

Таблица 12.1

u, В	40	50	60	70	80	90	100	110
$i_{пр}, \text{мА}$								
$i_{обр}, \text{мА}$								

- Уменьшая напряжение от 110 до 40 В, измерять силу тока в обратном направлении $i_{обр}$ и данные занести в табл. 12.1.
- По данным табл. 12.1 определить интервал $\Delta u \approx 10В$, в котором происходит зажигание и гашение лампы. Наблюдать зажигание и гашение лампы в модуле ФПЭ – 12.
- Подробно изучить интервал Δu зажигания и гашения лампы, проводя измерения тока через 1 В. Данные записать в табл. 12.2.
- По данным табл. 12.1 и табл. 12.2 построить график зависимости $i_{пр}$ и $i_{обр}$ от u (вольт-амперную характеристику генератора лампа-конденсатор, примерный вид которой показан на рис. 12.3).

Таблица 12.2

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u , В											
$i_{пр}$, мА											
$i_{обр}$, мА											

Упражнение 2. Определение периода релаксационных колебаний генератора лампа-конденсатор

- Установить кнопку «режим» на модуле ФПЭ – 12 в положение «генератор».
- На магазине емкостей (МЕ) установить значение $3 \cdot 10^{-3}$ мкФ.
- На магазине сопротивлений (МС) установить значение сопротивления $1 \cdot 10^{-6}$ Ом.
- Подключить к сети осциллограф и источник питания.
- Ручкой «12 – 120 В» установить напряжение на источнике питания (ИП) 110 В и поддерживать его постоянным.
- Установить кнопку «Х-У», расположенный в правом верхнем углу лицевой панели осциллографа, в положение «Отжато». Наблюдать на экране примерно 2-3 релаксационных колебания (рис. 12.4).
- Измерить период релаксационных колебаний с экрана осциллографа

$$T = N \cdot ms / дел,$$

где N – число больших делений с точностью до 0,2; $ms / дел$ – цена одного большого деления, которая устанавливается ручками «Время/дел» и « $ms/\mu s$ » на лицевой панели осциллографа. Результат занести в табл. 12.3.

8. Перевести кнопку «Х-У» в положение «Нажато Х-У», тем самым подано на вход «Х» напряжение со звукового генератора.
9. Подключить генератор к сети и установить выходное напряжение на нем 1 В.

Таблица 12.3

T, с	Соотношение частот	N -	f_n , Гц	f, Гц	$\langle f \rangle$, Гц	$\langle T' \rangle$, с	δ , %
	1:1	1					
	1:2	2					
	1:3	3					
	1:4	4					

10. Поставить множитель частоты звукового генератора в положение 10^3 .
11. Плавно изменяя вращением диска на звуковом генераторе частоту выходного сигнала, получить на экране осциллографа неподвижную фигуру Лиссажу, соответствующую соотношению частот 1:1, как это показано на рис. 12.5. Полученное значение частоты генератора f_n записать в табл. 12.3.
12. Постепенно увеличивая частоту сигнала f_n звукового генератора, получить фигуры Лиссажу, соответствующие соотношениям частот 1:2, 1:3, 1:4. Записать значения этих частот в табл. 12.3.
13. Рассчитать частоту релаксационных колебаний по формуле

$$f = \frac{f_n}{n},$$

где $n = 1, 2, 3, 4$ – отношение частоты колебаний звукового генератора к частоте релаксационных колебаний.

14. Найти среднее арифметическое значение f частоты и рассчитать период релаксационных колебаний

$$\langle T' \rangle = \frac{1}{\bar{f}}.$$

15. Сравнить периоды релаксационных колебаний T и $\langle T' \rangle$, и рассчитать относительную ошибку измерений.

$$\delta = \frac{\langle T' \rangle - T}{\langle T' \rangle} \cdot 100\%.$$

16. Отключить установку от сети.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. От чего зависит электропроводность газов?
2. Что такое несамостоятельный разряд?
3. Каков механизм возникновения самостоятельного разряда?
4. Как работает генератор релаксационных колебаний?
5. Как меняется напряжение на конденсаторе генератора релаксационных колебаний?
6. Объяснить вольт-амперную характеристику газонаполненной лампы.
7. Как можно определить период релаксационных колебаний?
8. Что такое фигуры Лиссажу и как они получаются в данной работе?

Лабораторная работа ФПЭ – 13

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ

Цель работы: изучение обмена энергии в системе электрических контуров, слабо связанных между собой.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Колебательные процессы (осцилляции) в электрических контурах имеют аналогии в механике. Такова система двух одинаковых маятников, связанных между собой пружиной с малым коэффициентом жесткости, как это показано на рис. 13.1. Маятники участвуют в коллективных колебаниях, амплитудно-частотная характеристика которых зависит от относительной фазы колебаний маятников друг относительно друга.

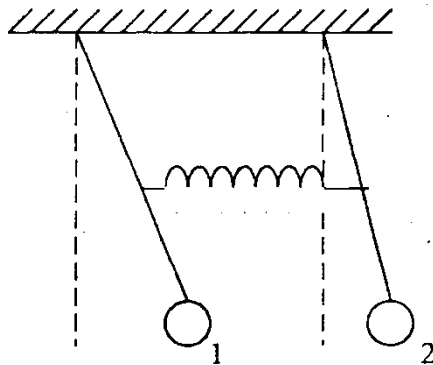


Рис. 13.1

Если оба маятника имеют вначале, при $t = 0$ равные смещения, то они будут колебаться как единое целое с постоянной амплитудой и частотой, равными частоте и амплитуде колебаний одиночного маятника ω_0 . Если при $t = 0$ имеются равные и противоположные амплитуды, то маятники будут колебаться с постоянной амплитудой и с частотой ω_1 , слегка повышенной по отношению к ω_0 . Эти два вида движения называются *нормальными модами* колебаний системы связанных осцилляторов, причем вид колебаний с частотой ω_0 называют *четной* модой нормальных колебаний и обозначают значком «+» ($\omega^+ = \omega_0$), а вид колебаний с повышенной частотой ω_1 называют *нечетной* модой нормальных колебаний и обозначают значком «-» ($\omega^- = \omega_1$). *Нормальная мода колебаний* – это коллек-

тивное колебание, при котором амплитуда колебаний каждой движущейся частицы системы остается неизменной. В более сложных случаях, когда при $t = 0$ имеется относительный сдвиг фаз, результирующее движение можно рассматривать как комбинацию (суперпозицию) двух нормальных мод колебаний, как амплитудно-модулированное колебание с суперпозицией гармонических колебаний разных частот, с чем приходится встречаться в самых разнообразных явлениях.

Примером могут служить не только маятники, но и два звучащих камертона (струны) с разными собственными частотами, причем наиболее интересным образом проявляются коллективные колебания, когда частоты колебаний камертонов мало отличаются друг от друга. В этом случае человеческое ухо наиболее воспринимает результирующее колебание как гармоническое колебание с переменной амплитудой, т.е. ухо слышит звук, интенсивность которого периодически меняется с частотой $\omega_\delta = |\omega_1 - \omega_0|$ и

периодом $T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_\delta}$. Такой вид суперпозиции гармонических колебаний

(при $\omega_0 \approx \omega_1$, но $\omega_1 > \omega_0$) иллюстрирует рис. 13.2. Само это явление называют биениями, а величины T_δ и ω_δ – периодом и циклической частотой биений соответственно.

Поведение связанных маятников можно объяснить с энергетической точки зрения, если при $t = 0$ вся энергия сосредоточена в маятнике 1. В результате связи через пружину энергия постепенно передается от маятника 1 к маятнику 2 до тех пор, пока вся энергия не окажется в маятнике 2. Затем, если система осцилляторов подпитывается извне энергией для компенсации потерь из-за трения, процесс обмена энергией повторяется от маятника 2 к маятнику 1 и т.д. Таким образом, биения – процесс обмена энергией между двумя гармоническими осцилляторами, собственные частоты которых различаются мало, а при $t = 0$ наблюдается сдвиг фаз.

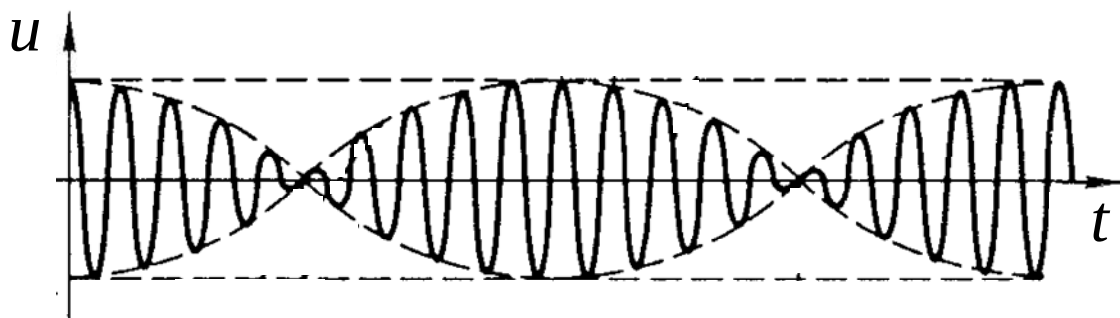


Рис. 13.2

Биения можно наблюдать и в электрической схеме – в двух одинаковых LC -контурах, связанных между собой слабой емкостной связью C_{12} – аналогом механической связи в виде пружины. Колебания в контурах возбуждаются с помощью преобразователя импульсов (ПИ), как показано на рис. 13.3.

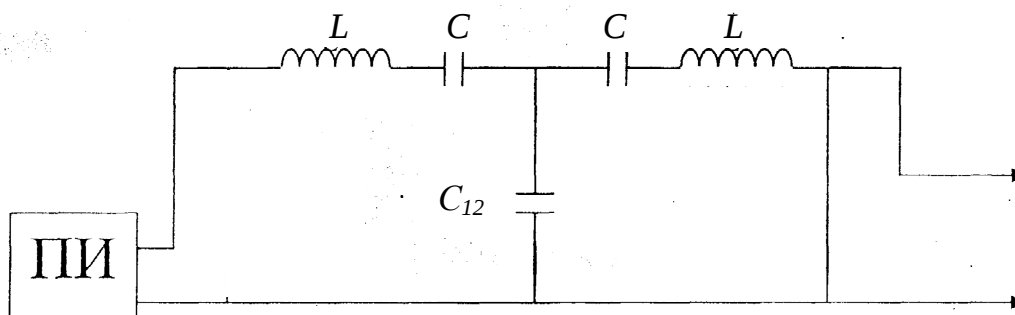


Рис. 13.3.

Для теоретических расчетов рассмотрим упрощенный вариант этой схемы – рис. 13.4, где обозначены знаки зарядов Q_1 и Q_2 в контурах и направления токов, причем для наблюдения биений важно, чтобы I_1 и I_2 были сонаправлены. При этом $L_1 = L_2 = L$.

Для двух LC -контуров, соединенных по схеме на рис. 13.4, можно записать два уравнения Кирхгофа, описывающих колебания зарядов Q в контурах, с учётом направления обхода:

$$U_1 + U_{12} = -L \frac{dI_1}{dt}, \text{ или } L \frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_1 - Q_2}{C_{12}} = 0, \quad (13.1)$$

$$U_2 - U_{12} = -L \frac{dI_2}{dt}, \text{ или } L \frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_1 - Q_2}{C_{12}} = 0. \quad (13.2)$$

Здесь $U_i = Q_i / C$. Подставляя $I_1 = \frac{dQ_1}{dt}$, $I_2 = \frac{dQ_2}{dt}$ получаем:

$$L \frac{d^2 Q_1}{dt^2} = -\frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2 - Q_1}{C_{12}} \quad (13.3)$$

$$L \frac{d^2 Q_2}{dt^2} = -\frac{Q_2}{C} - \frac{Q_2 - Q_1}{C_{12}}. \quad (13.4)$$

Получились довольно сложные уравнения для двух переменных. Можно упростить выражения, написать новые уравнения, полученные сложением и вычитанием уравнений (13.3) и (13.4).

Сложив эти уравнения, получаем:

$$L \frac{d^2 (Q_1 + Q_2)}{dt^2} = -\frac{Q_1 + Q_2}{C}. \quad (13.5)$$

Разность (13.3) и (13.4) имеет вид

$$L \frac{d^2(Q_1 - Q_2)}{dt^2} = -\frac{(Q_1 - Q_2)}{C} - \frac{2(Q_1 - Q_2)}{C_{12}} = -(Q_1 - Q_2) \left[\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}} \right]. \quad (13.6)$$

С помощью проведенных математических операций удалось свести (13.3) и (13.4) к более простым, относительно переменных $(Q_1 + Q_2)$ и $(Q_1 - Q_2)$.

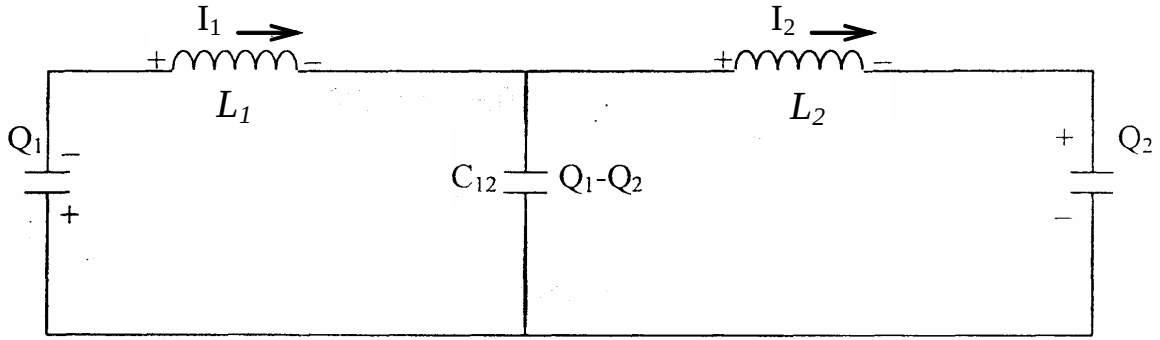


Рис. 13.4

Если при $t = 0$ переменная $(Q_1 + Q_2)$ имеет значение $(Q_1 + Q_2)_0$, то решение уравнения (13.5) имеет вид

$$(Q_1 + Q_2) = (Q_1 + Q_2)_0 \cos \omega^+ t, \quad (13.7)$$

частота $\omega^+ = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ равна частоте собственных колебаний отдельного контура. Аналогично, решение уравнения (13.6) приобретает вид:

$$(Q_1 - Q_2) = (Q_1 - Q_2)_0 \cos \omega^- t, \quad (13.8)$$

где $\omega^- = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}} \right)}$; $(Q_1 - Q_2)_0$ — значение $(Q_1 - Q_2)$ при $t = 0$.

Два вида движения, описываемые уравнениями типа (13.7) и (13.8), называются нормальными модами колебаний системы связанных контуров. В данном случае они описывают колебания зарядов в системе двух связанных электрических контуров.

Если вывести из положения равновесия один из контуров, то результирующим колебанием явится колебание двух нормальных мод колебаний. При $Q_{20} = 0$ из (13.7) и (13.8) получаем:

$$Q_1 = \frac{1}{2} \left(\{Q_1 + Q_2\}_0 \cos \omega^+ t \pm \{Q_1 - Q_2\}_0 \cos \omega^- t \right). \quad (13.9)$$

В частности,

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q_{10} (\cos \omega^+ t + \cos \omega^- t), \quad Q_2 = \frac{1}{2} Q_{10} (\cos \omega^+ t - \cos \omega^- t). \quad (13.10)$$

Используя известные тригонометрические тождества

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B), \quad (13.11)$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B) \quad (13.12)$$

можно записать уравнения 13.10 в виде

$$Q_1 = Q_{10} \left[\cos \frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t \right] \cos \frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t, \quad (13.13)$$

$$Q_2 = Q_{10} \left[\sin \frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t \right] \sin \frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t. \quad (13.14)$$

Вид функций $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ в соответствии уравнениями (13.13) и (13.14) показан на рис. 13.5

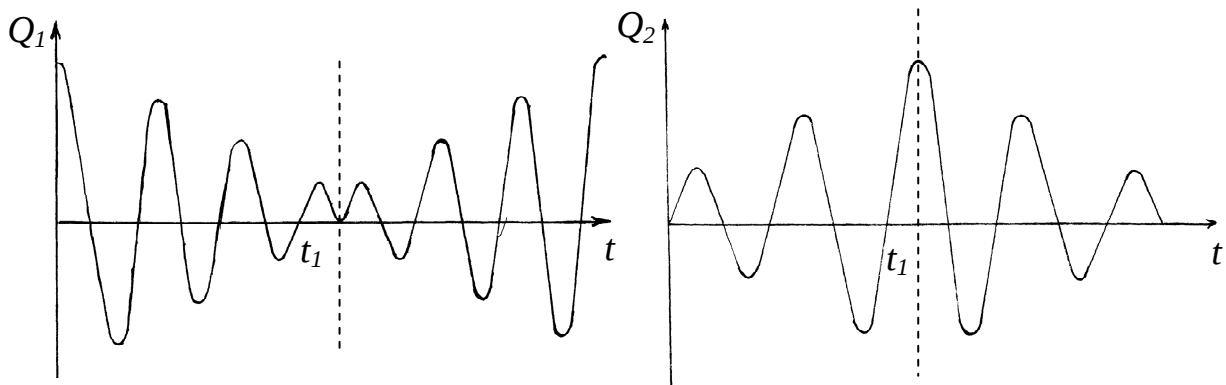


Рис. 13.5

При $t = 0$ амплитуда Q_2 равна нулю. Затем амплитуда Q_2 увеличивается, а амплитуда Q_1 падает до тех пор, пока в момент времени, определенный из соотношения $\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t_1 = \frac{\pi}{2}$ амплитуда Q_1 не станет минимальной, а амплитуда Q_2 достигнет максимума.

Ситуацию, показанную на рис. 13.2, можно рассмотреть с энергетической точки зрения.

При $t = 0$ вся энергия сосредоточена в контуре 1. В результате связи через емкость C_{12} энергия постоянно передается от контура 1 к контуру 2 до тех пор, пока вся энергия не соберется в контуре 2. Время, необходимое для перехода энергии из контура 1 в 2 и обратно, можно получить из урав-

нения $\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t_{обм} = \pi$, а частота, с которой контуры обмениваются энергией, равна

$$\omega_{обм} = \frac{2\pi}{t_{обм}} = \omega^+ - \omega^- . \quad (13.15)$$

Для четной моды колебаний, обозначенной знаком «+», токи текут в одинаковом направлении, и на емкости C_{12} нет заряда. При этом частота ω^+ остается такой же, как для несвязанных контуров, т.е. $\omega^+ = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega$.

В случае нечетной моды колебаний (знак «-»), емкость C_{12} заряжена, что увеличивает частоту колебаний, т.е.

$$\omega^- = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}} \right)}.$$

Следует отметить, что для того чтобы применить к связанным контурам рассмотренную выше теорию, они должны иметь одинаковую резонансную частоту $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Если предполагается, что C_{12} велика по сравнению с C , т.е. $C/C_{12} \ll 1$ («слабая связь»), то выражение (13.5) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{a}\hat{i}} &= \sqrt{\frac{1}{LC}} - \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_{12}}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2LC}{LC_{12}}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2C}{C_{12}}} \right) \approx \sqrt{\frac{1}{LC}} \left(1 - \left[1 + \frac{C}{C_{12}} \right] \right) = \frac{C}{C_{12}} \omega . \end{aligned} \quad (13.16)$$

Полученное значение частоты обмена $\omega_{обм}$ (имеется ввиду обмен энергии), или частоты «биений» $\omega_{биен} = \omega_{обм}$. Можно изменять настраивая систему контуров, путем изменения номиналов элементов C, C_{12}, L , добиваясь того, чтобы разностная частота $(\omega^+ - \omega^-) = \omega_{обм}$ была сведена к минимуму.

Исследование биений, т.е. обмена энергией в связанных контурах является одной из практических задач данной лабораторной работы.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

На рис. 13.6 представлена схема установки.

1. ИП – источник питания.
2. PQ – звуковой генератор.
3. РО – осциллограф.
4. МЕ – магазин емкостей.
5. ФПЭ – 13 – модуль.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомится с работой звукового генератора (в режиме генерации синусоидальных колебаний) и электронного осциллографа.
2. Собрать схему измерений согласно рис. 13.6.

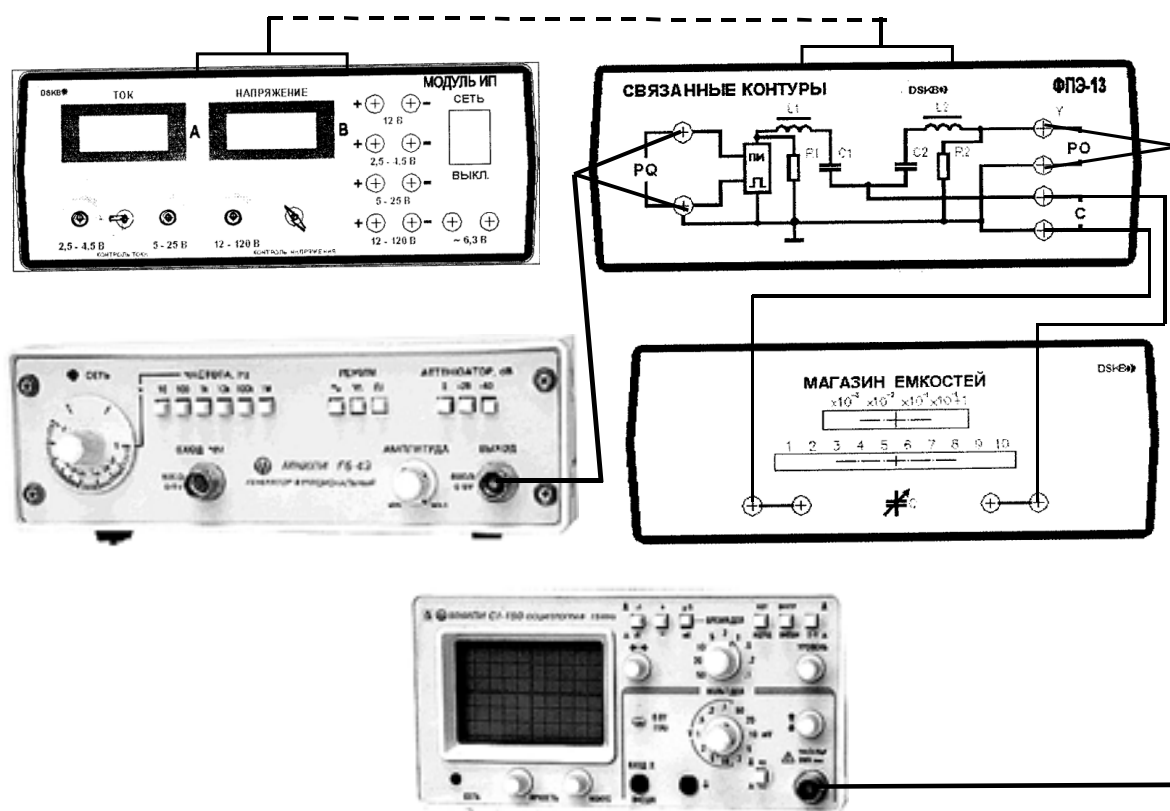


Рис. 13.6

3. Подготовить приборы к работе:
 - а) с помощью магазина емкостей МЭ установить $C = 4 \cdot 10^{-2}$ мкФ;
 - б) установить следующие параметры выходного напряжения звукового генератора: частота – 200 Гц, величина напряжения – 2-4 В, режим работы – генерация синусоидальных колебаний;

- в) включить развертку, удобную для наблюдения сигналов частотой 200 Гц;
- г) усиление по оси Y электронного осциллографа установить таким, чтобы было возможно измерять переменное напряжение до 5 В.
4. Включить лабораторный стенд и приборы. Регулировкой ручек управления на панели осциллографа добиться стабильной картины процесса «биений» в контурах.
5. Вычислить $T_{рез}$ для одного из контуров (резонансные частоты контуров близки) по формуле Томсона $T_{рез} = 2\pi\sqrt{LC}$. Параметры установки: $L = 60 \pm 2$ мГн, $C = 1 \cdot 10^{-8} \pm 20$ % Ф.
6. Изменяя величину емкости конденсатора связи C_{12} на магазине емкостей от $4 \cdot 10^{-2}$ до $4 \cdot 10^{-1}$ мкФ, измерить периоды «биений». T_{δ} определяется следующим образом: подсчитывается количество периодов мод (количество максимумов), укладывающихся в одно биение (число N) – рис. 13.7. Эта величина умножается на $T_{рез}$, вычисленное по формуле Томсона, т.е. $T_{\delta} = T_{рез} \cdot N$. Полученные результаты записать в табл. 13.1. По полученным таким образом значениям T_{δ} строится график зависимости $T_{\delta} = f(C_{12})$.

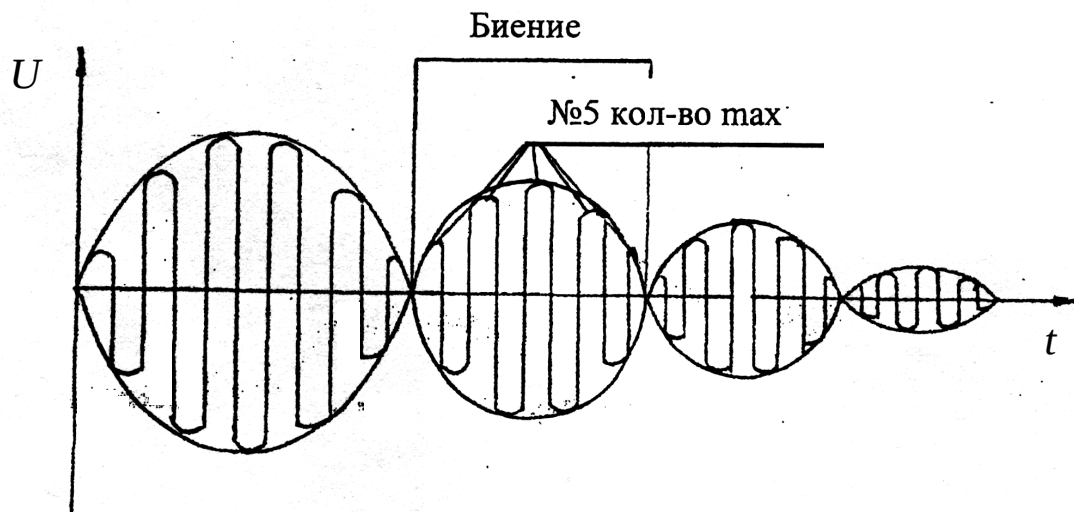


Рис. 13.7

7. Провести расчет T_{δ} теоретическое по $T_{\delta} = \frac{C_{12}}{C} T_{рез}$ и сравнить его с экспериментальными данными.

Таблица 13.1

C_{12} , мкФ	
N	
$T_{\text{бэксп}}$, с	
$T_{\text{теор}}$, с	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как будут колебаться два связанных пружиной маятника при отсутствии сдвига фаз между ними в начальный момент?
2. Какое должно быть соотношение частот двух связанных осцилляторов для наблюдения биений?
3. Какие процессы наблюдаются в системе связанных контуров?
4. Объяснить картину биений (рис. 13.2) с энергетической точки зрения?
5. Почему емкость C_{12} должна быть $\ll C$?
6. Чему равна частота обмена энергией между двумя связанными осцилляторами?
7. Что называется четными и нечетными модами колебаний?
8. Дайте определение нормальных мод колебаний.

Лабораторная работа ФПЭ – 14

ИНДУКТИВНОСТЬ

Цель работы: Изучение закона электромагнитной индукции, расчет индуктивности короткого соленоида, проверка закона Ома для цепи постоянного и переменного тока с индуктивностью и активным сопротивлением, экспериментальное определение индуктивности короткого соленоида и магнитной проницаемости сердечника.

Приборы и принадлежности: лабораторная установка для проведения опытов.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Если проводящий контур поместить в переменное магнитное поле (рис. 14.1), то в этом контуре возникает электродвижущая сила индукции, численно равная скорости изменения потока магнитной индукции через поверхность S , стягиваемую контуром (закон Фарадея):

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \iint_S B_n dS, \quad (14.1)$$

где B_n – проекция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$ к элементу поверхности dS .

Поток магнитной индукции может изменяться как в результате движения в неоднородном магнитном поле, так и за счет изменения индукции магнитного поля во времени, что учитывается полной производной в формуле (14.1).

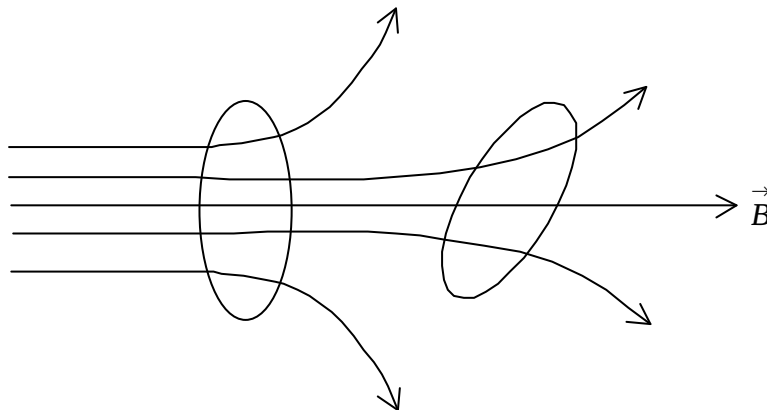


Рис. 14.1. Проводящий виток в магнитном поле

Знак минус в (14.1) выражает *правило Ленца*: индукционный ток в контуре направлен таким образом, что создаваемый им поток магнитной индукции через поверхность S противодействует изменению внешнего магнитного потока, который вызвал этот ток.

Если внешнего поля нет, а по контуру течет переменный ток i , то в нем также возникает *э.д.с.* Это явление называется самоиндукцией. Так как поток магнитной индукции через контур пропорционален току

$$\Phi = Li, \quad (14.2)$$

то закон Фарадея (14.1) можно записать в виде:

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} - i \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (14.3)$$

Коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью контура и при условии $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ зависит только от его геометрических характеристик. Определяется индуктивностью L на основании закона *Био-Савара-Лапласа*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}$$

с учетом выражения (14.1) для потока вектора магнитной индукции:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3} \vec{n} dS, \quad (14.4)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{м}$ – магнитная постоянная, $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента $\vec{dl}$ контура в элемент $d\vec{S}$ поверхности S , ограниченной этим контуром, $\vec{n}$ – нормаль к поверхности S .

2. Рассмотрим применение формулы (14.4) на примере короткого соленоида-катушки, длина которой l соизмерима с поперечным размером ρ (рис. 14.2). Магнитная индукция поля в точке O соленоида, создаваемая участком dx длины соленоида равна

$$dB = dB_0 n dx, \quad (14.5)$$

где dB_0 – индукция поля, создаваемая одним витком, $n = N/l$ – плотность намотки. Величину dB_0 можно определить на основании закона Био-Савара-Лапласа:

$$dB_0 = \frac{\mu_0 i \rho^2}{2(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (14.6)$$

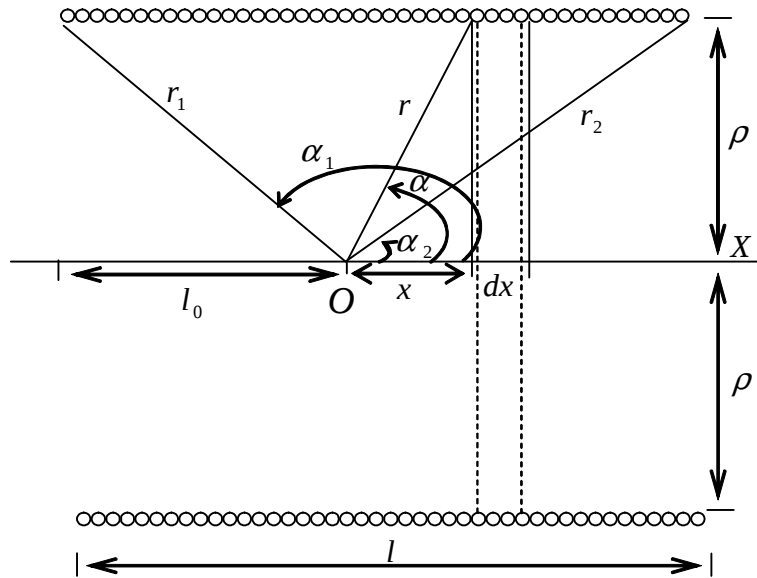


Рис. 14.2. Схема короткого соленоида-катушки

Тогда

$$dB = \frac{\mu_0 i}{2} \cdot \frac{\rho^2}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} n dx. \quad (14.7)$$

Интегрирование по всем виткам осуществим с учетом тригонометрической замены $x = \rho \operatorname{ctg} \alpha$, в результате чего получим величину индукции магнитного поля на оси соленоида:

$$B = \frac{\mu_0}{2} ni \left(\frac{l - l_0}{\sqrt{\rho^2 + (l - l_0)^2}} + \frac{l_0}{\sqrt{\rho^2 + l_0^2}} \right). \quad (14.8)$$

Если при вычислении потока магнитной индукции через соленоид учитывается не только зависимость $\mathbf{B}$ от l_0 , но и неоднородность поля по сечению, то расчеты значительно усложняются. Поэтому приведем здесь лишь одну из приближенных формул для расчета индуктивности короткого соленоида:

$$L = \frac{1}{\pi} \mu_0 n^2 sl \frac{1}{\rho} \left[\ln \left(1 + \frac{\pi}{l/\rho} \right) + \frac{1}{2.2 + 1.61 l/\rho + 0.44 (l/\rho)^2} \right]. \quad (14.9)$$

Из (14.9) для длинного соленоида ($\rho \ll l$) получим:

$$L_0 = \mu_0 n^2 sl. \quad (14.10)$$

Если катушка заполнена магнетиком с проницаемостью μ , то

$$L = \frac{1}{\pi} \mu \mu_0 n^2 sl \frac{1}{\rho} \left[\ln \left(1 + \frac{\pi}{l/\rho} \right) + \frac{1}{2.2 + 1.61 l/\rho + 0.44 (l/\rho)^2} \right], \quad (14.11)$$

и для длинного соленоида:

$$L_0 = \mu\mu_0 n^2 Sl \quad . \quad (14.12)$$

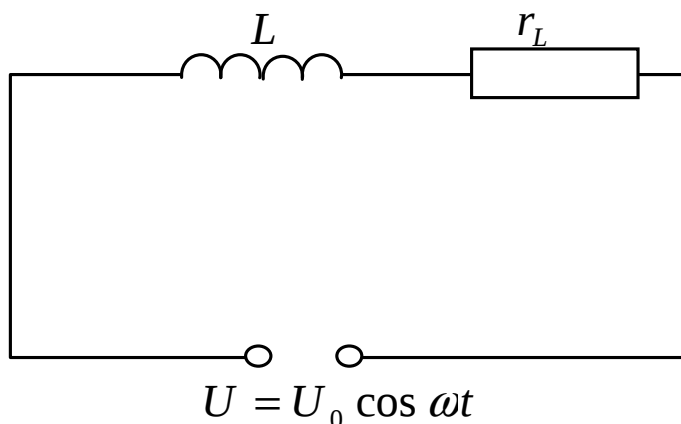


Рис. 14.3. Схема цепи, состоящей из катушки индуктивности L , с активным сопротивлением r_L и источника переменного напряжения U

3. Если электрическая цепь (рис. 14.3), состоит из катушки индуктивности L с активным сопротивлением r_L и источника переменного напряжения $U = U_m \cos(\omega t)$, то в ней течет ток i , изменяющийся по закону

$$i = i_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (14.13)$$

с амплитудой i_m и начальной фазой φ :

$$i_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{r_L^2 + (\omega L)^2}} \quad , \quad (14.14)$$

$$\cos \varphi = \frac{r_L}{\sqrt{r_L^2 + (\omega L)^2}} \quad . \quad (14.15)$$

Зависимость (14.14) представляет закон Ома для цепи переменного тока. Если по цепи течет постоянный ток, то $\omega = 0$ и соотношения (14.14), (14.15) переписываются в виде:

$$i = i_0, \quad U = U_0 \quad i_0 = \frac{U_0}{r_L}, \quad \varphi = 0, \quad \cos \varphi = 1 \quad . \quad (14.16)$$

Таким образом, проводя электрические измерения в контуре на постоянном и переменном токе, можно получить параметры катушки индуктивности и магнитного сердечника.

ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА И ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальная установка (рис. 14.4) представляет собой катушку индуктивности, которая может подключаться к источнику либо постоянного, либо переменного тока промышленной частоты ($f = 50 \text{ Гц}$), регулировка напряжений которых осуществляется потенциометром «R». Измерение токов i_m и i_0 осуществляется амперметром «A», а напряжений U_m и U_0 на катушке индуктивности – вольтметром «V». В установке предусмотрены не показанные на схеме элементы, позволяющие измерять одним и тем же прибором характеристики и переменного, и постоянного тока.

Измерения осуществляются в следующей последовательности:

1. В положении переключателя «R» осуществить проверку закона Ома для цепи постоянного тока, для чего измерить ток i_0 и напряжение U_0 на активном сопротивлении катушки при различных положениях ручки потенциометра.

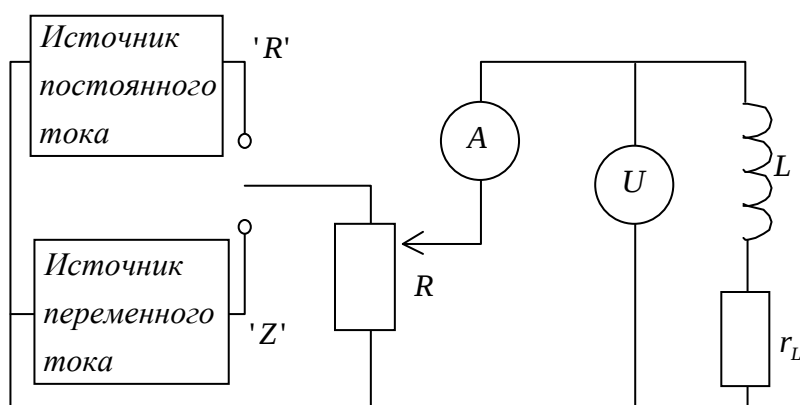


Рис. 14.4. Блок-схема экспериментальной установки

2. В положении «Z» переключателя снять зависимость тока i_m в цепи переменного тока от напряжения на катушке U_m .

3. Те же измерения, что и в пункте 2, осуществить для катушки с сердечником, который ввинчивается в катушку ручкой на правой панели прибора.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1. На основании результатов измерений построить зависимости $U_0(i_0)$, $U_m(i_m)$ и определить величины активного сопротивления r_L и полного сопротивления катушки по наклону прямых $U_0 = r_L i_0$ и $U_m = Z \cdot i_m$.

2. Вычислить индуктивность катушки без сердечника по формуле

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - r_L^2}}{\omega} . \quad (14.17)$$

3. Вычисления п. 2 и 3 повторить для катушки с сердечником и найти L_μ .

4. Определить магнитную проницаемость сердечника по формуле

$$\mu = \frac{L_\mu}{L} . \quad (14.18)$$

5. Рассчитать теоретически индуктивность по формуле (14.11) по известным геометрическим размерам катушки. Сравнить расчетные и экспериментальные результаты

$$(l = 7 \pm 5\% \text{ см}, \quad \rho = 1.8 \pm 5\% \text{ см}, \quad n = 2.3 \cdot 10^3 \pm 3\%) .$$

ПОРЯДОК РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ

1. При анализе погрешностей экспериментальных результатов сначала оценить систематические погрешности измерительных приборов.
2. Погрешности определения активного и реактивного сопротивлений находятся по методике расчета погрешностей линеаризации.
3. Погрешность величины L оценивается по методике определения погрешности косвенных измерений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулировать основной закон электромагнитной индукции.
2. Что называется явлением самоиндукции?
3. Что называется индуктивностью контура?
4. Сформулировать закон Био-Савара-Лапласа и получить из него формулу (14.4) для индуктивности.
5. Получить формулу индуктивности для длинного соленоида.
6. Вывести закон Ома для цепи переменного тока, состоящего из последовательно включенных L и r .
7. Нарисовать эквивалентную схему катушки индуктивности.
8. Нарисовать электрическую схему измерительной установки и объяснить процедуру измерения индуктивности и сопротивления катушки.
9. Объясните и проиллюстрируйте правило Ленца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М. : Наука, 1990.
2. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М. : Высшая школа, 1983.
3. Парселл Э. Электричество и магнетизм. – М. : Наука, 1972.
4. Калашников С.Г. Электричество. – М. : Наука, 1985.

Лабораторная работа ФПЭ – 15

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Цель работы: изучение основных свойств, характеристик электростатического поля и методов его моделирования; изучение взаимосвязи между потенциалом и напряженностью электрического поля; экспериментальное определение емкости системы электродов и распределения поля между ними.

Приборы и принадлежности: установка для моделирования электростатического поля.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Известно, что уединенные заряды и система электрических зарядов создают электростатическое поле. Величина силы взаимодействия зарядов зависит от формы и размера наэлектризованных тел и характера распределения зарядов на них, но для точечных электрических зарядов (рис. 15.1) она описывается законом Кулона:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}, \quad (15.1)$$

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума или иначе электрическая постоянная.

Электростатическое поле характеризуется напряженностью $\vec{E}$ и потенциалом φ . Точки равного потенциала образуют в пространстве эквипотенциальные поверхности (для плоского поля – эквипотенциальные линии).

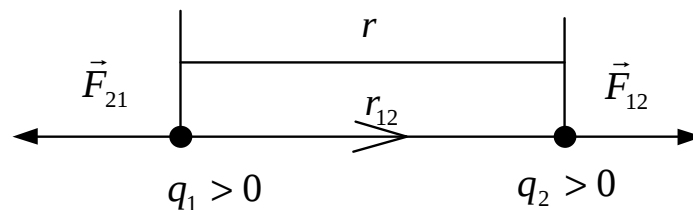


Рис. 15.1. Система двух точечных зарядов

Силовой линией называется кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{E}$. Силовые линии электростатического поля начинаются и заканчиваются на зарядах и всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям, причем связь между потенциалом и напряженностью задается в виде

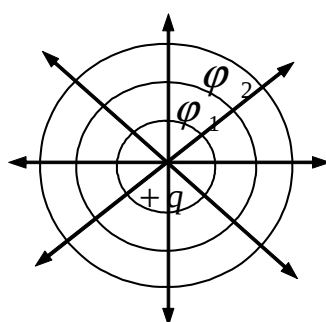
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -grad\varphi, \quad (15.2)$$

где векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат.

Таким образом, величина вектора напряженности $|\vec{E}|$ численно равна изменению потенциала на единицу длины, отсчитанному в направлении, перпендикулярном эквипотенциальной поверхности и направленным в сторону убывания потенциала.

ПРИМЕРЫ

1. Точечный заряд

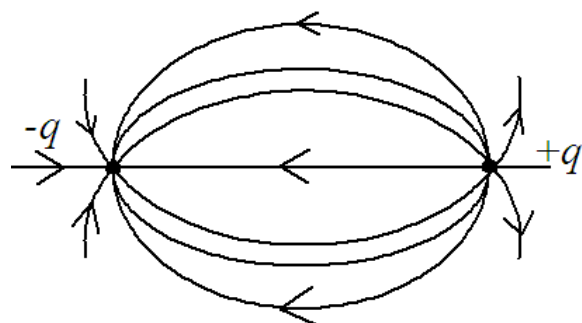


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (15.3)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (15.4)$$

Рис. 15.2. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности точечного заряда

2. Диполь – система двух точечных зарядов $(-q, +q)$, расположенных на расстоянии l :



$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}_l \vec{r})\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{\vec{p}_l}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (15.5)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p}_l \vec{r})}{r^3}, \quad (15.6)$$

где $\vec{p}_l = q\vec{l}$, $\vec{l}$ – радиус-вектор, проведённый от $-q$ до $+q$.

Рис. 15.3. Силовые линии диполя

В электростатическом поле выполняется принцип суперпозиции полей, и оно потенциально, т.е. работа по перемещению заряда не зависит от формы пути, а определяется только положением начальной и конечной точки траектории.

Если электрические заряды находятся в равновесии в каком-либо проводнике, т.е. в этом проводнике нет электрического тока, то напряженность поля в любой точке внутри проводника равна нулю. Действительно,

если бы это условие не выполнялось, то подвижные электрические частицы, имеющиеся во всяком проводнике, под действием сил поля пришли бы в движение, и равновесие было бы нарушено, т.е. начал протекать постоянный электрический ток. Последнее не может быть реализовано в электростатическом поле, так как противоречит фундаментальному закону сохранения энергии. Таким образом, в отсутствие электрического тока все точки проводника имеют одинаковый электрический потенциал.

Заряд q уединенного проводника пропорционален величине его потенциала

$$q = C\varphi \quad (15.7)$$

Величина C называется электрической емкостью уединенного проводника. Если в системе, состоящей из двух проводников, разделенных диэлектриком, заряды равны по величине и противоположны по знаку, то такая система проводников называется конденсатором, а сами проводники – обкладками. При этом разность потенциалов между обкладками пропорциональна заряду обкладок

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (15.8)$$

Коэффициент C называется электрической емкостью конденсатора и определяется формой, размерами обкладок, расстоянием между ними и параметрами диэлектрика.

ПРИМЕРЫ

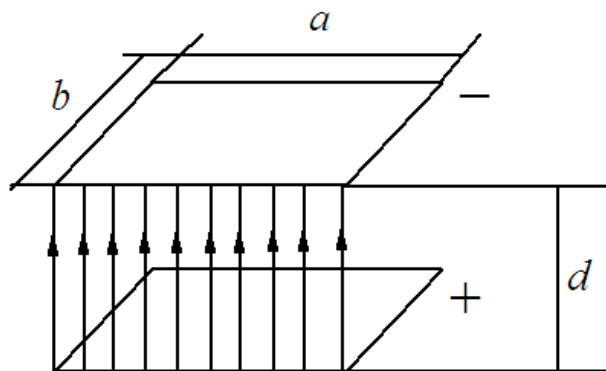


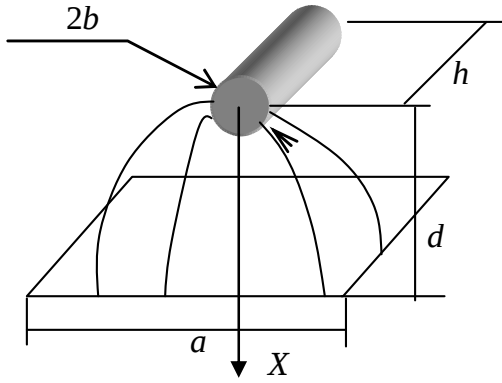
Рис. 15.4, а. Силовые линии
плоского конденсатора

1. Плоский конденсатор. Поле однородно без учета краевых эффектов $d \ll a, b$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 a b} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 S} \quad (15.9)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a b}{d} \quad (15.10)$$

2. Конденсатор плоскость-цилиндр. Распределение поля вдоль оси OX на расстоянии x от цилиндра:



$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \left(\frac{1}{x} + \frac{2\pi}{a} \right) \quad (15.11)$$

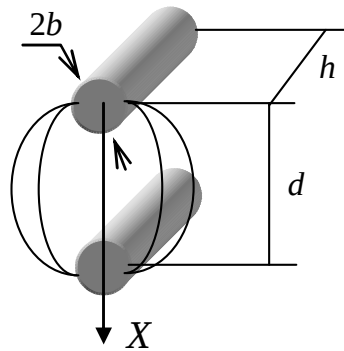
Ёмкость единицы длины

$$\frac{C}{h} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2d}{b}} \quad (15.12)$$

Рис. 15.4 б. Силовые линии конденсатора типа плоскость-цилиндр

Здесь b , h – радиус и образующая цилиндра соответственно, a – размер пластины.

3. Конденсатор, в котором оба электрода имеют цилиндрическую форму. Распределение поля вдоль оси OX :



$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \quad (15.13)$$

Ёмкость единицы длины

$$\frac{C}{h} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{b}} \quad (15.14)$$

Рис. 15.4 в. Силовые линии конденсатора в виде двух цилиндров

В уравнениях (15.9)-(15.14) в качестве диэлектрической среды выбирается вакуум.

Для определения характеристик электрического поля в диэлектрике широко используется метод подобия распределения квазистационарного, (т.е. медленно меняющегося со временем) тока в проводящей среде и электрического поля. Аналогия между полем и током устанавливается путем сопоставления теоремы Гаусса для электростатического поля и уравнения непрерывности для квазистационарного тока:

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (15.15)$$

$$\oint_S j_n dS = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (15.16)$$

в которых D_n – проекция на нормаль к элементу dS замкнутой поверхности S индукции электростатического поля $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, q_i – заряды внутри поверхности, j_n – проекция плотности электрического тока на нормаль к элементу dS замкнутой поверхности S , ρ – объёмная плотность заряда в проводящей среде.

Если $\sum q_i = 0$ и $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (стационарный или медленно изменяющийся ток), то

$$\oint_S D_n dS = 0 \quad , \quad (15.17)$$

$$\oint_S j_n dS = 0 \quad . \quad (15.18)$$

Соотношения (15.17) и (15.18) справедливы как для однородных, так и для неоднородных сред (рис. 15.5), для которых выполняются граничные условия для нормальных (ориентированных перпендикулярно поверхности раздела сред) проекций векторов поля и плотности тока:

$D_{1n} = D_{2n}$, $j_{1n} = j_{2n}$. Так как всегда выполняются следующие материальные уравнения:

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E, \quad j = \sigma E_0 \quad , \quad (15.19)$$

то $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$; $\sigma_1 E_{01n} = \sigma_2 E_{02n}$, (15.20)

где σ – проводимость среды.

Из соотношений (15.19) и (15.20) следует, что если обеспечено геометрическое подобие областей, в которых рассматривается электрическое поле, и течет квазистационарный ток, и если $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, то электростатическое поле можно изучить по модели проводящей среды с током (математическая модель).

ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА И ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Описанная идея моделирования сравнительно легко реализуется для плоских электростатических полей методом электролитической ванны (рис. 15.5, а, б). Неглубокая ванна из изоляционного материала заполнена электролитом – слабым раствором соли в воде.

В ванну помещаются электроды **1** и **2**, конфигурация которых соответствует конфигурации обкладок конденсатора (рис. 15.5, а), а размеры

пропорциональны размерам обкладок, чем обеспечивается геометрическое подобие.

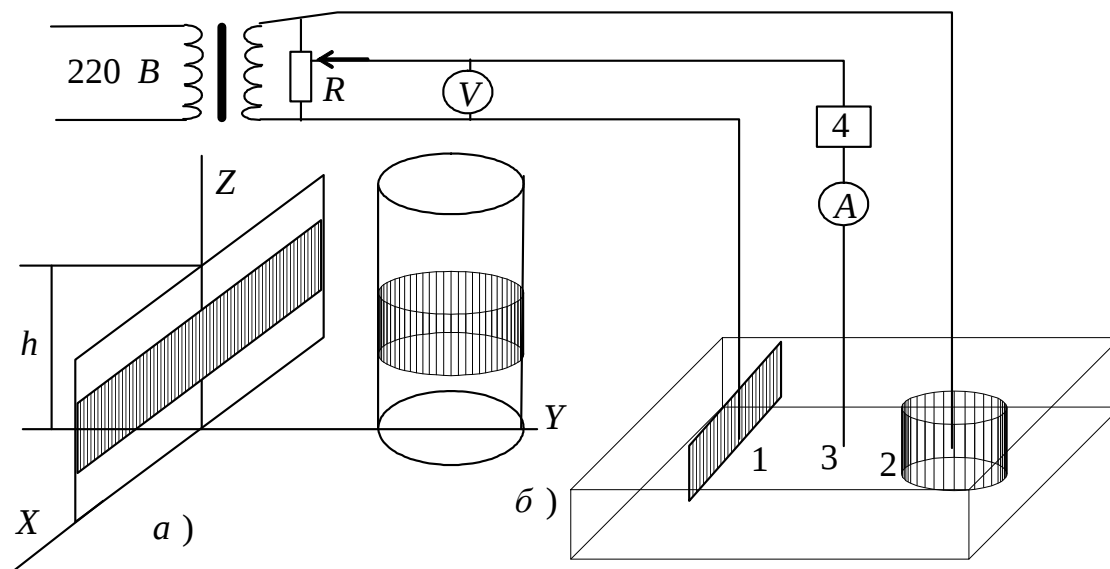


Рис. 15.5. Конфигурация электродов (а) и схема установки (б) для моделирования электростатического поля

Для измерения потенциала в модели используется зонд – небольшой электрод в виде металлического стержня. Между электродами **1** и **2** создается разность потенциалов от внешнего источника низкой частоты, например, от сети 50 Гц. Зонд **3** через миллиамперметр соединен с движком потенциометра R , которым задается разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$ между зондом и электродом **1**. Четыре участка цепи – два между движком потенциометра и его концевыми контактами и два между зондом и электродами – образуют мост. Ток в диагонали моста равен нулю, когда зонд установлен в точку, потенциал которой совпадает с потенциалом движка потенциометра. Для исключения возможности перегрузки микроамперметра большим током используется нелинейный элемент **4**. Положение точки фиксируется с помощью координатной сетки, нанесенной на дне ванны, или специального координатора.

В результате измерений получают систему эквипотенциалей $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ с равномерным шагом $\Delta\varphi$ (рис. 15.6) для электродов (рис. 15.5, б).

Линии напряженности строятся следующим образом. Проводится ось симметрии поля CC' , проходящая через электроды. Из точки **0** на поверхности электрода по линии симметрии измеряется расстояние **01** до ближайшей эквипотенциали и это расстояние откладывается вдоль по-

верхности электрода (точка $1'$). Через точку $1'$ проводится отрезок $1'2'$ перпендикулярно поверхности электрода, и расстояние $1'2'$ откладывают вдоль поверхности электрода, получая точку $2'$. После деления ближайшей к электроду эквипотенциали через точки деления проводят перпендикуляры до пересечения со следующей эквипотенциалью и т.д. После деления всех эквипотенциалей точки деления соединяются плавной линией, ортогональной к эквипотенциалам в точках пересечения.

Напряженность поля считается в пределах каждого отрезка эквипотенциали и вычисляется по формуле

$$E = \frac{(\varphi_{k-1} - \varphi_k)}{\Delta r_{k-1,k}}, \quad (15.21)$$

где φ_{k-1} , φ_k – значения потенциалов на ближайших эквипотенциалах, $\Delta r_{k-1,k}$ – расстояние у средними точками отрезков на ближайших эквипотенциалах.

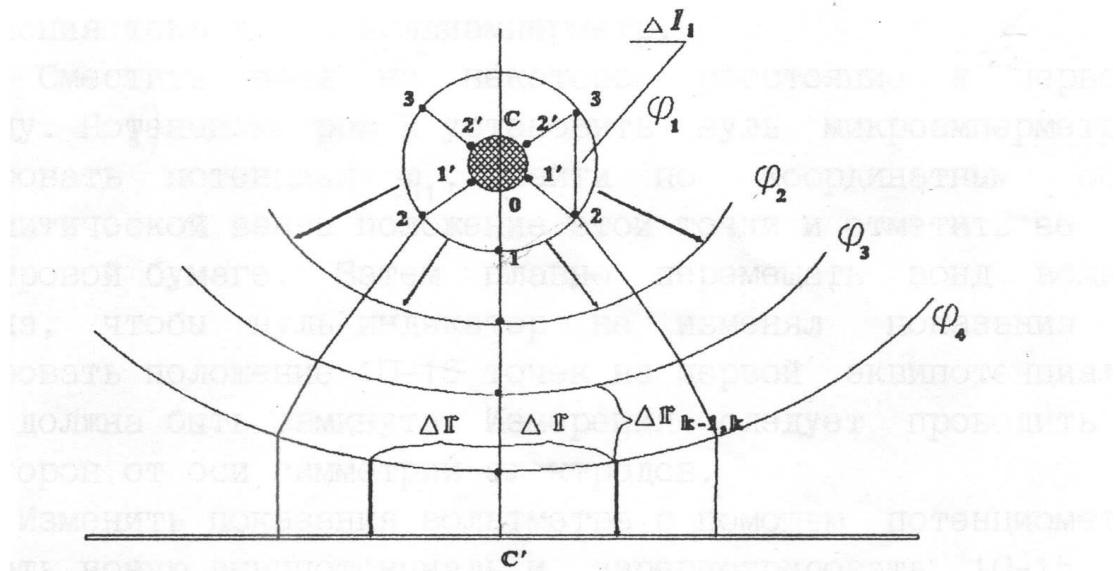


Рис. 15.6. К построению эквипотенциалей рассматриваемой системы электродов

По измеренному распределению потенциала и вычисленному значению напряженности находится емкость системы электродов по формуле (15.8). Для нахождения q используем теорему Гаусса (15.15), в которой в качестве поверхности S выберем цилиндр высотой h (рис. 15.5, а), построенный на ближайшей к электроду замкнутой эквипотенциали, как на направляющей:

$$q = \varepsilon \varepsilon_0 \oint_S E_n dS \quad (15.22)$$

Выберем в качестве разбиения эквипотенциали φ_1 точки, использованные при построении силовых линий. Тогда емкость единицы высоты цилиндра (погонная емкость) C/h , с учетом выражения (15.21) имеет вид:

$$\frac{C}{h} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0(\varphi_0 - \varphi_1)}{U} \sum \frac{\Delta l_i}{\Delta r_i}, \quad (15.23)$$

где Δl_i – секущая эквипотенциальной линии между двумя соседними точками.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Установить электроды выбранной формы в ванну с электролитом.
2. На листе миллиметровой бумаги в масштабе 1×1 изобразить контуры ванны, электродов и нанести координатную сетку.
3. Установить зонд на 2-ой электрод и измерить его потенциал по вольтметру, поворачивая ручку потенциометра **R** до исчезновения тока через миллиамперметр.
4. Сместить зонд на некоторое расстояние к первому электроду. Потенциометром **R** установить нуль микроамперметра, зафиксировать потенциал φ_1 , найти по координатным осям электролитической ванны положение этой точки и отметить ее на миллиметровой бумаге. Затем плавно перемещать зонд вблизи электрода, чтобы нуль-индикатор не изменял показания, и зафиксировать положение 10-15 точек на первой эквипотенциали, которая должна быть замкнута. Измерения следует проводить с обеих сторон от оси симметрии электродов.
5. Изменить показания вольтметра с помощью потенциометра **R**, выбрать новую эквипотенциаль и зарегистрировать 10-15 ее точек.
6. Построить 5-8 эквипотенциалей.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. По полученным эквипотенциалам восстановить силовые линии электрического поля.
2. Используя формулу (15.21), построить экспериментальное распределение напряженности поля вдоль оси симметрии электродов.
3. По формуле (15.11) рассчитать распределение напряженности вдоль оси симметрии и сравнить его с экспериментальными данными.
4. С помощью соотношения (15.23) по экспериментальным данным определить емкость системы электродов.

5. По формуле (15.12) рассчитать теоретически ту же емкость и сравнить ее с экспериментальными значениями.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулировать закон Кулона для системы точечных зарядов и теорему Гаусса.
2. Дать определение напряженности электрического поля, электрического потенциала, электрической емкости и связь между ними.
3. Пояснить модель проводящей среды с током и принцип квазистационарности.
4. Изобразить распределение поля в конденсаторах с различной формой и размерами обкладок.
5. Описать схему экспериментальной установки и методику проведения опытов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – М. : Наука, 1982. – Т. 2. – 496 с.
2. Калашников С.Г. Электричество. – М. : Наука, 1977. – 591 с.
3. Сувухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М. : Наука, 1990.
4. Практикум по физике. Электричество и магнетизм / под ред. Ф.А. Николаева. – М. : Высшая школа, 1991. – 151 с.

Лабораторная работа ФПЭ – 16

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Цель работы: изучение элементов земного магнетизма, определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли тангенс-гальванометром.

Приборы и принадлежности: амперметр, тангенс-гальванометр, источник постоянного тока, соединительные провода.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Земля в целом представляет собой огромный магнит. В любой точке пространства, окружающего Землю, и на ее поверхности обнаруживается действие магнитных сил. Значит, в пространстве, окружающем Землю, создается магнитное поле, силовые линии которого изображены на рис. 16.1.

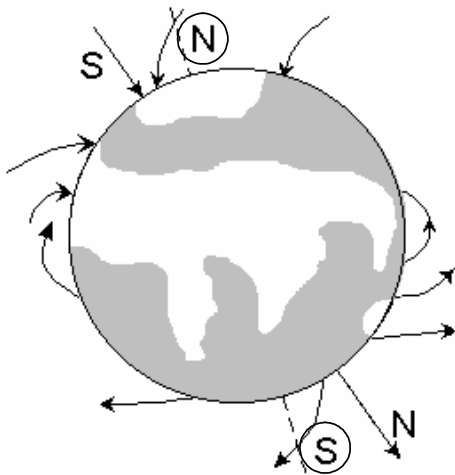


Рис. 16.1. Линии магнитного поля Земли

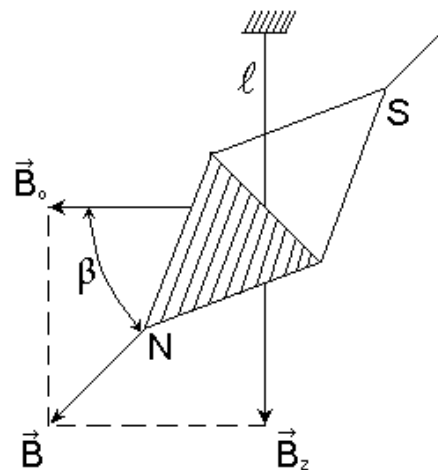


Рис. 16.2. Расположение магнитной стрелки в магнитном поле Земли

При приближении к северному географическому полюсу Земли (N около пунктирной прямой на рис. 16.1) линии магнитного поля Земли все больше и больше наклоняются к горизонту и около 75° северной широты и 99° западной долготы становятся вертикальными, входя в Землю. Здесь в настоящее время находится южный полюс Земли (S около непрерывных линий на рис. 16.1). Он удален от географического полюса нашей планеты приблизительно на 2100 километров.

Так как магнитные полюса Земли не совпадают с географическими, то и направление магнитной стрелки компаса не совпадает с направлением географического меридиана. Поэтому с помощью компаса направление на север и на юг можно определить лишь приближенно, причем погрешность возрастает именно вблизи географических полюсов Земли.

Существование магнитного поля в любой точке Земли можно установить с помощью магнитной стрелки. Если подвесить магнитную стрелку на нити l (рис. 16.2) так, чтобы точка подвеса совпала с центом тяжести стрелки, то стрелка установится по направлению касательной к силовой линии, т.е. по направлению вектора $\vec{B}$ магнитного поля Земли.

В северном полушарии северный конец стрелки наклонен к Земле, и стрелка составляет с горизонтом *угол наклоения* β . Вертикальная плоскость, в которой располагается стрелка, называется *плоскостью геомагнитного меридиана*. Все плоскости геомагнитных меридианов пересекаются по прямой NS . Следы пересечения этих плоскостей с поверхностью Земли сходятся в геомагнитных полюсах N и S . Так как геомагнитные полюсы не совпадают с географическими, то стрелка будет отклонена от географического меридиана.

Угол между геомагнитным и географическим меридианами называется *магнитным склонением* α в данном месте. Вектор $\vec{B}$ полной индукции магнитного поля Земли можно разложить на две составляющие: горизонтальную $\vec{B}_0$ и вертикальную $\vec{B}_z$. По значениям углов склонения и наклоения, а также горизонтальной составляющей $\vec{B}_0$ можно определить величину и направление полной индукции магнитного поля Земли в данной точке. Если магнитная стрелка может свободно вращаться лишь вокруг вертикальной оси, то она будет устанавливаться под действием горизонтальной составляющей магнитного поля Земли в плоскости геомагнитного меридиана.

Горизонтальная составляющая $\vec{B}_0$, магнитное склонение α и наклонение β называются *элементами земного магнетизма*.

Изучение магнитного поля Земли – геомагнетизма имеет чрезвычайно важное практическое и научное значение. В настоящее время нашли практическое применение геомагнитные методы поисков и исследований месторождения железной руды.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ

Для расчета магнитных полей проводников с током широко используется Закон Био-Савара:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3} I, \quad (16.1)$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция, создаваемого элементом $d\vec{l}$ проводника с током I , μ – магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная постоянная, $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный к точке, магнитная индукция в которой определяется. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Магнитное поле проводника с током конечной длины.

Определим поле в произвольной точке O , отстоящей от проводника с током на расстоянии R (рис. 16.3).

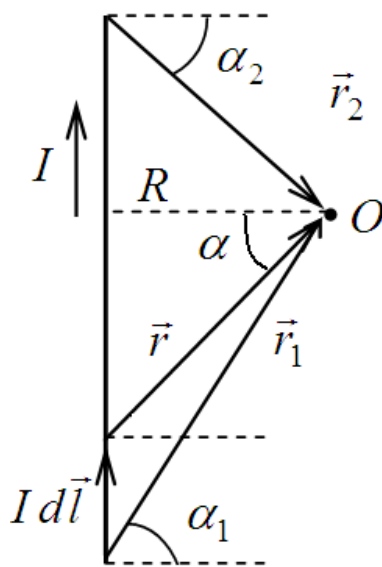


Рис. 16.3. Определение магнитного поля проводника с током конечной длины

Согласно закону Био-Савара, магнитная индукция в точке O равна:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (16.2)$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы точки O относительно концов проводника. При вычислении данного интеграла удобно перейти от переменной r к переменной угла α : $r = R/\cos\alpha$ (рис. 16.3), $dl = r \cdot d\alpha / \cos\alpha = R/\cos^2\alpha$. В результате очевидных преобразований и с учётом нечётности функции синуса равенство (16.2) примет вид

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \frac{I}{R}, \quad (16.3)$$

где R – кратчайшее расстояние от точки O до оси проводника, α_1 и α_2 – углы, под которыми видны концы проводника из точки O , взяты по модулю. Направление вектора магнитной индукции совпадает с направлением вращения рукоятки буравчика, поступательно движущегося в направлении тока.

2. Магнитное поле на оси плоского прямоугольного витка с током.

Рассмотрим магнитное поле в точке O на оси прямоугольного плоского витка с током размерами $2a \times 2b$, отстоящей от плоскости витка на расстоянии x (рис. 16.4).

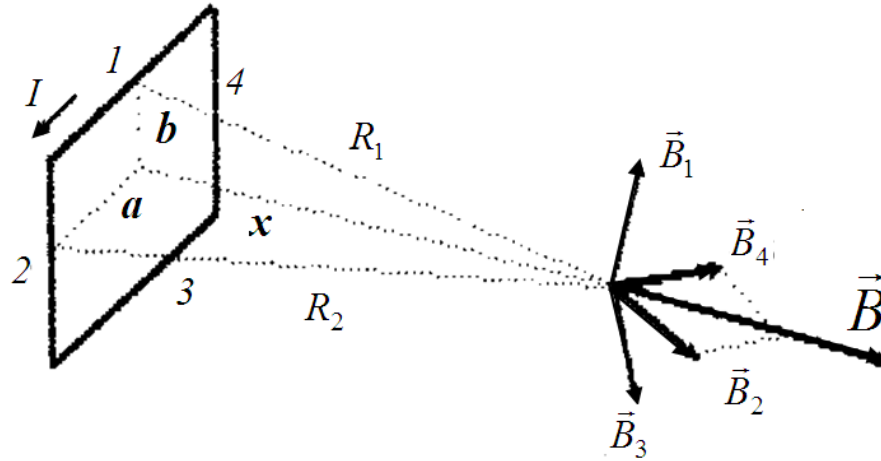


Рис. 16.4. Магнитное поле на оси плоского прямоугольного витка с током

Искомое магнитное поле может быть определено с помощью выражения (16.3) на основании принципа суперпозиции и рис. 16.4:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^4 \vec{B}_i, \quad (16.4)$$

где $\vec{B}_i$ магнитные поля, создаваемые в отдельности каждой из сторон прямоугольника, определяемые формулой (16.3).

Подставляя выражение (16.3) в сумму (16.4), в результате несложных преобразований получим искомое значение магнитной индукции

$$B = \frac{\mu_0 abI}{\pi \sqrt{a^2 + b^2 + x^2}} \left(\frac{1}{a^2 + x^2} + \frac{1}{b^2 + x^2} \right). \quad (16.5)$$

Направление вектора магнитной индукции совпадает с поступательным движением буравчика вдоль оси витка при вращении ручки буравчика в направлении тока.

3. Магнитное поле на оси прямоугольной катушки с током.

Рассчитаем магнитное поле на оси однослойной катушки с током I прямоугольной формы с размерами $2a \times 2b \times 2L$ с количеством витков N , в некоторой точке O , отстоящей от центра катушки на расстоянии D (рис. 16.5).

Здесь результирующее магнитное поле по принципу суперпозиции является простой суммой полей отдельных витков, определяемых выражением (16.5), и описывается формулой

$$B = \frac{\mu_0 a b I}{\pi} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + x_i^2}} \left(\frac{1}{a^2 + x_i^2} + \frac{1}{b^2 + x_i^2} \right) \quad (16.6)$$

где x_i — расстояния от плоскости i -го витка до точки O . При большом количестве витков ($N \gg 1$) суммирование можно заменить интегрированием

$$B = \frac{\mu_0 a b I}{\pi} \int_{D-L}^{D+L} \frac{n \cdot dx}{\sqrt{a^2 + b^2 + x^2}} \left(\frac{1}{a^2 + x^2} + \frac{1}{b^2 + x^2} \right), \quad n = N / 2L. \quad (16.7)$$

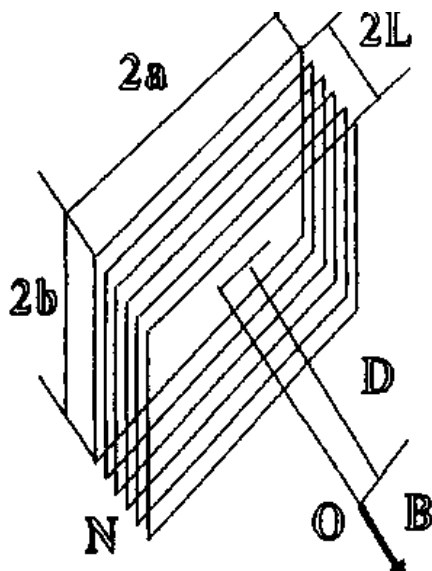


Рис. 16.5. Магнитное поле на оси прямоугольной катушки с током

В результате вычисления данного интеграла получается расчетная формула для магнитного поля

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi L} \left(\operatorname{arctg} \frac{a x}{b \sqrt{a^2 + b^2 + x^2}} + \operatorname{arctg} \frac{b x}{a \sqrt{a^2 + b^2 + x^2}} \right) \Bigg|_{D-L}^{D+L} \quad (16.8)$$

Из данной формулы (16.8) нетрудно видеть, что в длинной катушке, когда $L^2 \gg a^2 + b^2$, поле в центре в два раза превышает поле на торце. Сказанное особенно важно для катушек с сердечником.

Для измерения горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли воспользуемся прибором, называемым *тангенс-бусолью*, или *тангенс-гальванометром* (ТГ). Тангенс-буссоль представляет собой вертикально расположенную короткую катушку 1 прямоугольного сечения с размерами $2a \times 2b$ достаточно малой длины с количеством витков $N \gg 1$. В центральной части катушки расположена свободно вращающаяся вокруг вертикальной оси магнитная стрелка 2 со шкалой отсчета угла поворота стрелки. Обмотка катушки подключается к источнику постоянного тока 3.

Сначала в отсутствие тока катушку поворачивают относительно вертикальной оси так, чтобы плоскость витков катушки совпадала с плоскостью земного магнитного меридиана. При этом магнитная стрелка ориентируется в плоскости катушки, благодаря горизонтальной составляющей магнитного поля Земли B_0 . При пропускании тока I через катушку возникает дополнительный вращательный момент, обусловленный магнитным полем катушки B . В результате стрелка повернется на угол φ и установится вдоль вектора результирующего магнитного поля (рис. 16.7).



Рис. 16.6. Установка для определения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

Поскольку поля Земли и катушки взаимно перпендикулярны, иско-
мое поле Земли определяется соотношением

$$B_0 = \frac{B}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad (16.9)$$

где значение B определяется формулой (16.8).

В используемой установке выполняется соотношение $D < L \ll a, b$,
поэтому выражение (16.8) можно упростить и представить в виде

$$B = \frac{\mu_0 N I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi a b}, \quad (16.10)$$

допуская при этом ошибку измерения порядка $L^2/(a^2+b^2)$. Тогда окончательное выражение для определения поля Земли примет вид

$$B_0 = \frac{\mu_0 N \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi a b} \cdot \frac{I}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (16.11)$$

Используемая установка имеет следующие параметры: $a = 132 \text{ мм} \pm 5 \%$, $b = 82 \text{ мм} \pm 5 \%$, $L = 14 \text{ мм} \pm 5 \%$, $D = 6 \text{ мм} \pm 5 \%$, $N = 26$ витков.

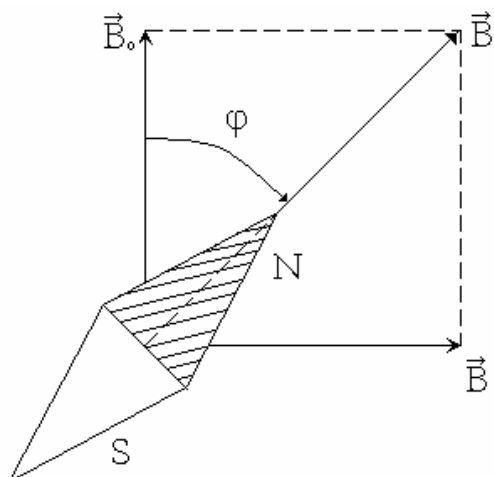


Рис. 16.7. Действующие на стрелку магнитные поля

ЗАДАНИЕ

1. Ознакомиться в рекомендованной литературе с выводом расчетной формулы (16.11), а также с конструкцией и принципом работы лабораторной установки.
2. Подключить источник питания к клеммам « $\pm I$ », согласно электрической схеме на передней панели установки, при выключенном положении сетевого выключателя источника питания.
3. Осторожно, без рывков открыть крышку корпуса магнитной стрелки, тем самым, разориентируя ее, и поднять зеркало.
4. Развернуть установку на плоскости стола так, чтобы магнитная стрелка лежала в плоскости витков катушки, и установить ноль шкалы угла поворота стрелки совпадающим с концом стрелки.
5. Включить сетевой выключатель источника питания и установить значение тока 50 мА. Переключить тумблер «П» на передней панели установки для приведения стрелки в колебательное состояние и дождавшись, когда колебания прекратятся, измерить установившееся значение угла поворота стрелки φ_1 . Далее изменить направление тока в катушке переключателем тумблера в противоположное положение.

ние и измерить установившееся значение угла поворота стрелки φ_2 .
Здесь φ_1 и φ_2 – положительные значения, отсчитываемые в направлении кратчайшего поворота.

6. Изменяя значение тока в диапазоне от 0 до 500 мА с интервалом 50 мА, измерить соответствующие значения φ_1 и φ_2 , согласно п. 5. Результаты занести в табл. 16.1.
7. Вычислить $\varphi_{cp} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, определить значение $\operatorname{tg} \varphi_{cp}$ и по формуле (16.1) вычислить горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли.
8. Результаты измерений и расчетов записать в таблицу.

Таблица 16.1.

Результаты экспериментального исследования горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

№ п/п	I, A	$\varphi_1, ^\circ$	$\varphi_2, ^\circ$	$\varphi_{cp}, ^\circ$	$\operatorname{tg}(\varphi_{cp})$	$B_0, \text{Тл}$
1						
2						
3						
4						
5						

I – ток, протекающий в измерительной цепи;

φ_1 – отклонение стрелки тангенс-гальванометра при прямом пропускании тока;

φ_2 – отклонение стрелки тангенс-гальванометра при обратном пропускании тока;

$\varphi_{cp} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ – среднее значение отклонения стрелки.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Обработать результаты измерений согласно таблице.
2. Построить на миллиметровой бумаге график зависимости $I = I(\operatorname{tg} \varphi)$ и, аппроксимируя его прямолинейной зависимостью $I = k \cdot \operatorname{tg} \varphi$, вычислить коэффициент пропорциональности k .
3. Вычислить искомую величину магнитного поля Земли по формуле (16.11).

4. Определите погрешность измерений горизонтальной составляющей магнитного поля Земли:

$$\Delta B_{0i} = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B_{0j} - B_{0i} \right|; \quad \Delta B_{0_{\text{кв}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta B_{0i})^2}{n(n-1)}} =$$

B_{0i} – вычисленное значение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли при данной плотности тока.

Результат запишите в виде:

$$B_0 = \underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}} \text{ Тл.}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими элементами характеризуется земной магнетизм?
2. Как устанавливается магнитная стрелка в магнитном поле Земли?
3. Что называется индукцией магнитного поля?
4. Сформулируйте закон Био-Савара-Лапласа. Как определить направление $d\vec{B}$?
5. Объясните устройство и принцип действия тангенс-гальванометра.
6. Выведите формулу (16.1).
7. Выведите формулу для вычисления погрешности B_0 .
8. Покажите, что минимальная относительная погрешность для горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли соответствует углу отклонения магнитной стрелки от магнитного меридиана, равному 45° .
9. Сформулируйте принцип суперпозиции для магнитного поля.
10. Что характеризует вектор магнитной индукции?
11. Зачем необходимо при измерении менять направление тока и какие основные факторы обуславливают погрешность используемого метода измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М. : Высшая школа, 1989.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. – М. : Наука, 1989.
3. Сивухин Д.В. Электричество : учебное пособие. – М. : Наука, 1983.

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим основные виды погрешностей измерения. В зависимости от формы выражения различают **абсолютную и относительную погрешности**.

Абсолютной называют погрешность измерений, выраженную в тех же единицах, что и измеряемая величина. Её определяют как

$$\Delta = A - X_{\text{ист}} \quad \text{или} \quad \Delta \cong A - X_{\text{д}},$$

где A – результат измерения, $X_{\text{ист}}$ – истинное значение измеряемой физической величины, $X_{\text{д}}$ – действительное значение измеряемой величины.

Относительная погрешность измерения δ представляет собой отношение абсолютной погрешности измерений к истинному (действительному) значению измеряемой величины. Относительную погрешность определяют по формуле:

$$\delta = \frac{A - X_{\text{ист}}}{X_{\text{ист}}} = \frac{\Delta}{X_{\text{ист}}} \cdot 100\%, \quad \text{или} \quad \delta = \frac{A - X_{\text{д}}}{X_{\text{д}}} = \frac{\Delta}{X_{\text{д}}} \cdot 100\%.$$

В зависимости от условий и режимов измерения различают **статические и динамические погрешности**.

Статической называют погрешность, не зависящую от скорости изменения измеряемой величины во времени.

Динамической называют погрешность, зависящую от скорости изменения измеряемой величины во времени. Динамическая погрешность обусловлена инерционностью элементов измерительной цепи средства измерения.

В зависимости от характера проявления, возможностей устранения и причин возникновения различают **систематические и случайные погрешности**.

Систематической ($\Delta_{\text{с}}$) называют составляющую погрешности измерения, остающуюся постоянной или закономерно изменяющейся при повторных измерениях одной и той же величины.

Причинами систематической погрешности могут быть:

- отклонение параметров реального средства измерения от расчетных значений, предусмотренных схемой;
- неуравновешенность деталей средства измерений относительно их оси вращения;
- погрешность градуировки или небольшой сдвиг шкалы и др.

Ряд постоянных систематических погрешностей в процессе измерения внешне себя не проявляют. Обнаружить их можно в процессе поверки путем сравнения результатов измерения рабочими средствами и образцовыми.

Случайной $\bar{\Delta}$ называют погрешность измерений, изменяющуюся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Случайная погрешность возникает при одновременном воздействии многих источников, каждый из которых сам по себе оказывает незаметное влияние на результаты измерений, но суммарное воздействие всех источников может оказаться достаточно сильным.

Как правило, при выполнении измерений случайная и систематическая погрешности проявляются одновременно, поэтому погрешность измерения равна их сумме:

$$\Delta = \bar{\Delta} + \Delta_c.$$

Заметим, что случайные погрешности представляют собой погрешности, в появлении каждой из которых не наблюдается какой-либо закономерности. Случайные погрешности неизбежны и неустранимы. Они всегда присутствуют в результате измерения. Они вызывают рассеяние результатов при многократном и достаточно точном измерении одной и той же величины при неизменных условиях, вызывая различие их в последних значащих цифрах.

В основе теории погрешностей лежат два положения, подтвержденные практикой:

- при большом числе измерений случайные погрешности одинакового значения, но разного знака встречаются одинаково часто;
- большие по абсолютному значению погрешности встречаются реже, чем малые.

Из первого положения следует важный для практики вывод, что при увеличении числа измерений случайная погрешность результата, полученного из ряда измерений, уменьшается вследствие того, что сумма погрешностей отдельных измерений данного ряда измерений стремится к нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_D) = \sum_{i=1}^n \bar{\Delta} x_i \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

В ряду измерений выделяют также **грубые погрешности и промахи**, которые возникают из-за ошибок и неправильных действий оператора, а также при кратковременных, резких изменениях условий проведения измерений (появление вибрации, поступление холодного воздуха и т.д.). При

программных измерениях грубые погрешности и промахи автоматически исключаются в процессе обработки измерительной информации.

1. Погрешности средств измерений

Отметим, что погрешности измерений определяются, главным образом, погрешностями средств измерений. В общем случае **погрешность средства измерений** (меры измерительного преобразователя, измерительного прибора) – это отклонение его реальной функции преобразования от номинальной.

Отклонения реальной характеристики от номинальной, отсчитанные вдоль оси X или оси Y , есть **абсолютные погрешности преобразования**, выраженные в единицах величин X или Y .

Мерой точности абсолютная погрешность быть не может. Например, $\Delta X = 0.5$ мм при измерении высоты пенного слоя пульпы, равной $X = 200$ мм, достаточно мала, а при измерении толщины листа стали, при $X = 1$ мм, эта погрешность очень велика.

Абсолютная погрешность измерительного прибора ΔX_{Π} – это разность между показанием прибора X_{Π} и истинным (действительным) $X_{\text{д}}$ значением измеряемой величины:

$$\Delta X_{\Pi} = X_{\Pi} - X_{\text{д}}.$$

При этом за действительное значение физической величины при оценке погрешности рабочего средства измерений принимают показания образцового средства измерений, при оценке погрешности образцового средства – показания, полученные с помощью эталонного средства измерений.

Абсолютная погрешность измерительного преобразователя по входу – это разность между значением величины на входе преобразователя $X_{\text{в}}$ и истинным (действительным) значением этой величины на входе $X_{\text{вд}}$. При этом значение величины на входе $X_{\text{в}}$ определяется по истинному (действительному) значению величины на выходе преобразователя с помощью градуировочной характеристики, приписанной преобразователю. Таким образом,

$$\Delta X_{\text{в}} = X'_{\text{вд}} - X_{\text{вд}},$$

где $\Delta X_{\text{в}}$ – погрешность измерительного преобразователя по входу; $X'_{\text{вд}}$ – истинное (действительное) значение величины на выходе, найденное по градуировочной характеристике преобразователя; $X_{\text{вд}}$ – истинное (действительное) значение преобразуемой величины на входе.

Абсолютная погрешность измерительного преобразователя по выходу – это разность между истинным (действительным) значением величины преобразователя на выходе $X_{\text{ВЫХ.Д}}$ и значением величины на выходе $X'_{\text{ВЫХ.Д}}$, определяемым по истинному (действительному) значению величины на входе с помощью градуировочной характеристики, приписанной преобразователю. Таким образом,

$$\Delta X_{\text{ВЫХ.П}} = X_{\text{ВЫХ.Д}} - X'_{\text{ВЫХ.Д}},$$

где $\Delta X_{\text{ВЫХ.П}}$ – погрешность измерительного преобразователя по выходу; $X_{\text{ВЫХ.Д}}$ – действительное значение преобразуемой величины на выходе преобразователя; $X'_{\text{ВЫХ.Д}}$ – действительное значение преобразуемой величины на выходе, определяемое по действительному значению ее на входе с помощью градуировочной характеристики.

Абсолютная погрешность – это разность между номинальным значением меры $X_{\text{Н}}$ и истинным (действительным) $X_{\text{Д}}$ воспроизводимой ею величины, т.е.

$$\Delta X_{\text{М}} = X_{\text{Н}} - X_{\text{Д}},$$

где $\Delta X_{\text{М}}$ – абсолютная погрешность меры; $X_{\text{Н}}$ – номинальное значение меры; $X_{\text{Д}}$ – действительное значение воспроизводимой мерой величины.

Пример 1. Погрешность меры длины (линейки) с номинальным значением 100 мм и действительным значением 100,0006 мм равна 0,6 мкм; погрешность меры сопротивления с номинальным значением 1 Ом и действительным значением 1,0001 Ом равна 0,0001 Ом.

Относительная погрешность меры или измерительного прибора ($\delta_{\text{П}}$) – это отношение абсолютной погрешности меры или измерительного прибора к истинному (действительному) значению воспроизводимой или измеряемой величины.

Относительная погрешность меры или измерительного прибора, в процентах, может быть выражена как:

$$\delta_{\text{П}} = \pm \frac{\Delta X_{\text{П}}}{X_{\text{Д}}} \cdot 100 \% .$$

Относительная погрешность измерительного преобразователя по входу (выходу) – это отношение абсолютной погрешности измерительного преобразователя по входу (выходу) к истинному (действительному) значению величины на входе (выходе), определяемому по истинному зна-

чению величины на входе (выходе) с помощью номинальной характеристики, приписанной преобразователю.

Итак, относительная погрешность средства измерений, выражаемая в процентах или в относительных единицах, не остается постоянной вследствие изменения величин X или Y по шкале измерительного устройства.

$$\delta = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta Y}{Y}.$$

С учетом того, что относительная погрешность средства измерений не остается постоянной, вводится понятие **приведённой** погрешности γ , в общем виде определяемой как

$$\gamma = \frac{\Delta X}{X_N} = \frac{\Delta Y}{Y_N},$$

где γ – приведённая погрешность средства измерений; X_N – нормирующее значение измеряемой величины.

Приведенная погрешность γ измерительного прибора – это отношение абсолютной погрешности измерительного прибора ΔX_{Π} к нормирующему значению. **Нормирующее значение X_N** – это условно принятое значение, равное или верхнему пределу измерений*, или диапазону измерений**, или длине шкалы***.

Приведенную погрешность обычно выражают в процентах:

$$\gamma = \frac{\Delta X_{\Pi}}{X_N} \cdot 100\%.$$

Приведенная погрешность позволяет сравнивать по точности приборы, имеющие разные пределы точности.

Пример 2. Определить абсолютную, относительную и приведенную погрешности амперметра с диапазоном измерения $0 \div 15$ А при показании его $X_{\Pi} = 12$ А и действительном значении измеряемой силы тока

* Верхний предел измерений. Значения величины, ограничивающие диапазон измерений снизу и сверху (слева и справа), называют соответственно «нижним пределом измерений» или «верхним пределом измерений».

** Диапазон измерений – это область значений величины, в пределах которой нормированы допускаемые пределы погрешности средства измерений.

*** Длина шкалы – это длина линии, проходящей через центры всех коротких отметок шкалы средства измерений и ограниченной начальной и конечной отметками. Она выражается в единицах длины, независимо от единиц, указанных на шкале.

$X_D = 12,6$ А. За нормирующее значение примем верхний предел измерения $X_H = 15$ А.

Абсолютная погрешность амперметра

$$\Delta X_{\Pi} = X_{\Pi} - X_D = 12 - 12,6 = -0,6 \text{ А.}$$

Относительная погрешность амперметра

$$\delta_{\Pi} = \pm \frac{0,6}{12} \cdot 100 = 5\%.$$

Приведённая погрешность

$$\gamma = \frac{\Delta X_{\Pi}}{X_N} = \frac{0,6}{15} \cdot 100 = -4\%.$$

При характеристике погрешностей средств измерений часто пользуются понятием предела допускаемой погрешности измерений.

Предел допускаемой погрешности средства измерений – это наибольшая, без учета знака, погрешность средства измерений, при котором оно может быть признано и допущено к применению. Определение применимо к основной и дополнительной погрешности средств измерений.

Пример 3. Одинаков ли предел допускаемой относительной погрешности измерения во всех точках шкалы автоматического потенциометра?

Для всех точек шкалы одинаков предел допускаемой абсолютной погрешности, определяемой классом точности средства измерений и диапазоном измерений, а предел допускаемой относительной погрешности измерения зависит от конкретной отметки шкалы, т. е. чем меньше показания прибора по шкале, тем больше относительная погрешность. Вследствие этого верхний предел показаний прибора нужно выбирать таким образом, чтобы значение измеряемой величины находилось в конце шкалы.

По происхождению различают **инструментальные и методические погрешности средств измерений**.

Инструментальные погрешности – это погрешности, вызываемые особенностями средств измерений. Они возникают вследствие недостаточно высокого качества элементов средств измерений. К этим погрешностям можно отнести изготовление и сборку элементов средств измерений; погрешности из-за трения в механизме прибора, недостаточной жесткости его элементов и деталей и др. Подчеркнем, что инструментальная погрешность индивидуальна для каждого средства измерения.

Методическая погрешность – это погрешность средства измерения, возникающая из-за несовершенства метода измерения, неточности соотношения, используемого для оценки измеряемой величины.

Основная и дополнительная погрешности. Деление это чисто условно. Погрешность средств измерений, определяемую для работающих в нормальных условиях, называют **основной погрешностью**. Нормальными условиями принято считать условия, когда температура окружающего воздуха $t = (20 \pm 5)^\circ \text{C}$, относительная влажность $\varphi = (30 \div 80)\%$, атмосферное давление $P = 630\text{--}795$ мм рт. ст., напряжение питающей сети $U = (220 \pm 4,4)$ В, частота питающей сети $f = (50 \pm 0,5)$ Гц. Такие условия выдерживаются в лабораторных условиях при градуировке средств измерений.

В реальных условиях производства эти параметры могут отличаться от лабораторных. Средства измерения помимо чувствительности к измеряемой величине обладают и некоторой чувствительностью к изменяющимся величинам окружающей среды, что приводит к искажению результатов измерения. Погрешность, появляющаяся у средств измерений, работающих в реальных производственных условиях, называют **дополнительной погрешностью**. Так же, как основная, дополнительная погрешность нормируется путем указания коэффициентов влияния изменения отдельных влияющих величин на изменение показаний в виде

$$\alpha = \frac{1,5 \%}{10^\circ \text{C}}, \quad \alpha = \frac{0,5 \%}{10 \% (U_{\text{пит}})}.$$

Систематические и прогрессирующие погрешности средств измерений вызываются: первые – погрешностью градуировки шкалы или ее небольшим сдвигом, вторые – старением элементов средства измерения. Систематическая погрешность остается постоянной или закономерно изменяющейся при многократных измерениях одной и той же величины. Особенность систематической погрешности состоит в том, что она может быть полностью устранена введением поправок. Особенностью прогрессирующих погрешностей является то, что они могут быть скорректированы только в данный момент времени. Они требуют непрерывной коррекции.

Аддитивные и мультипликативные погрешности. Аддитивная погрешность не зависит от чувствительности прибора и является постоянной для всех значений входной (измеряемой) величины в пределах диапазона измерений, как показано на рис. П.1.

Если реальная характеристика 1 средства измерения смещена относительно номинальной 2 (см. рис. П.1, а) так, что при всех значениях преобразуемой величины X выходная величина Y оказывается больше (или меньше) на одну и ту же величину Δ , то такая погрешность называется **аддитивной погрешностью нуля**.

К аддитивным погрешностям средств измерений можно отнести погрешности, вызванные трением в опорах электроизмерительных приборов, погрешность дискретности (квантования) в цифровых приборах. Аддитивная погрешность может носить систематический характер. В этом случае она может быть скорректирована смещением шкалы или нулевого положения указателя.

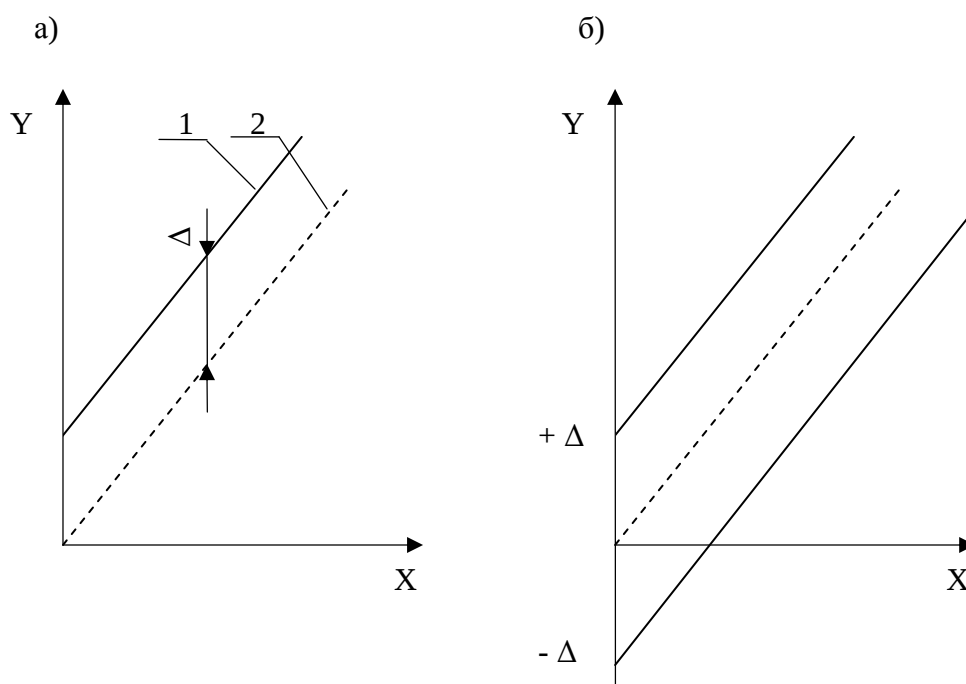


Рис. П.1. Аддитивная погрешность средства измерения

В случае же, если аддитивная погрешность является случайной, то она не может быть скорректирована, и реальная характеристика средства измерения, смещаясь произвольным образом, но, оставаясь параллельной самой себе, образует полосу погрешностей, ширина которой остается постоянной для любых значений измеряемой величины X (см. рис. П.1, б).

Мультипликативная погрешность – это погрешность чувствительности средства измерения. Она может иметь систематическую и случайную составляющие.

Сущность мультипликативной погрешности заключается в том, что если абсолютная погрешность возникает от некоторого независимого от X изменения чувствительности преобразователя (изменение коэффициента деления делителя, добавочного сопротивления вольтметра и т.д.), то реальная характеристика 1 преобразователя отклоняется от номинальной 2

так, как это показано на рис. П.2 (а), или образует полосу погрешностей (рис. П.2, б), если это отклонение является случайным.

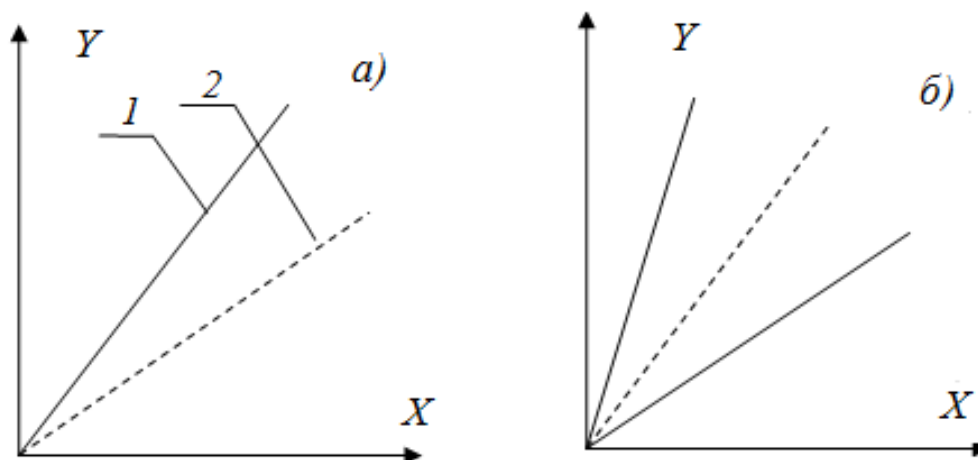


Рис. П.2. Мультипликативная погрешность прибора

2.1. Среднее квадратичное (стандартное) отклонение

Среднеквадратичное отклонение характеризует меру рассеяния данных. Эта величина как мера неопределённости участвует во многих статистических расчетах. С ее помощью устанавливают степень точности различных оценок и прогнозов. Если вариация очень большая, то стандартное отклонение тоже получится большим, а прогноз будет неточным, что выразится, к примеру, в очень широких доверительных интервалах.

Допустим, проведена серия измерений одной и той же величины x в одинаковых условиях. Результаты серии n измерений запишутся как множество $x = \{x_i\}_n$, истинное значение величины будем считать равным среднему арифметическому $x_{ист} = \bar{x} = \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] / n$. Величина средней квадратичной ошибки будет равна

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Согласно **правилу трех сигм**, величина S_x равна погрешности данной серии измерений, при доверительной вероятности $P = 66.67 \%$, если количество измерений n достаточно велико ($n \geq 50$). В 1908 г. Стьюдент показал, что статистический подход справедлив и при малом числе измерений. Распределение Стьюдента при числе измерений $n \rightarrow \infty$ переходит в распределение Гаусса, а при малом числе отличается от него.

Для расчета абсолютной ошибки при малом количестве измерений вводится специальный коэффициент, зависящий от **надёжности** (доверительной вероятности) P и числа измерений n , называемый коэффициентом Стьюдента $t_{P,n}$. Погрешность будет равна

$$\Delta x = S_x \cdot t_{P,n}. \quad (1)$$

Результат измерений запишется как $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

2.2. Прямые и косвенные измерения

Измерения бывают прямые и косвенные.

В **прямых измерениях** физическая величина измеряется непосредственно (например, измерение длины предмета линейкой, штангенциркулем или микрометром, силы тока – амперметром и т.д.). До сих пор мы рассматривали прямые измерения.

При **косвенных измерениях** искомая величина не измеряется, а вычисляется по результатам измерений других величин (например, измеряя силу тока и напряжение на зажимах электроплитки, можно вычислить ее тепловую мощность и сопротивление).

В физическом эксперименте любое измерение (прямое или косвенное) дает лишь приблизительное значение данной физической величины. Физика – наука естественная, а стремление к абсолютной точности присуща лишь математике. Действительно, при измерении длины полученный результат будет зависеть, по крайней мере: 1) от точности выбранного нами прибора (штангенциркуль, например, позволяет измерять с точностью до 0.1 мм, а линейка до 1 мм); 2) от внешних условий: температуры, деформации, влажности и т.д. Разумеется, результаты косвенных измерений, вычисленные по приближённым результатам, полученным в прямых измерениях, также будут приближенными. Поэтому **вместе с результатом всегда необходимо указывать его точность**, называемую **абсолютной погрешностью косвенных измерений**.

Допустим, искомая в эксперименте величина A является функцией нескольких переменных $A = A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда погрешность серии измерений A будет определяться вкладом различных погрешностей:

$$\Delta A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2}. \quad (2)$$

Здесь погрешность серии измерений каждой из величин Δx_i определяется формулой (1).

Пример 4. Измерение объёма цилиндра.

Чтобы измерить объем цилиндра, необходимо определить его высоту и радиус или диаметр (см. рис. П.3)

$$V_{\text{ц}} = \pi R^2 h = \pi D^2 h / 4.$$

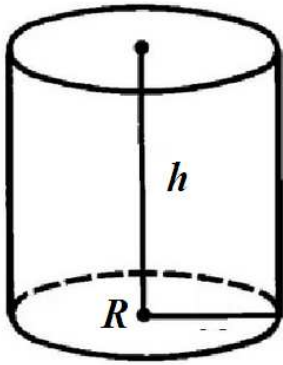


Рис. 3.

Предположим, мы провели серию прямых измерений высоты цилиндра с помощью штангенциркуля и рассчитали ее погрешность согласно (1):

$$h = \bar{h} \pm \Delta h.$$

Аналогичные измерения диаметра дают результат $D = \bar{D} \pm \Delta D$. Погрешность измерения объёма будет включать слагаемые, ответственные за Δh и ΔD , а также погрешность округления иррационального числа π :

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \pi} \cdot \Delta \pi\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\pi D h}{2} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(\frac{D^2 h}{4} \cdot \Delta \pi\right)^2}.$$

При этом $\Delta \pi$ – половина единицы последнего разряда числа π , которая ещё учитывается в расчёте. Например, если мы округляем число $\pi = 3,1415926535\ 897932384\dots$ до сотых $\pi \approx 3.14$, то $\Delta \pi = 0.005$.

Относительную погрешность измерения объёма цилиндра оценить ещё проще:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2}.$$

3. Метод наименьших квадратов (МНК)

Задача заключается в нахождении коэффициентов a и b линейной зависимости $y = ax + b$, при которых среднее квадратичное отклонение принимает наименьшее значение. То есть, при данных a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. В этом суть метода наименьших квадратов. Таким образом, решение примера сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

Пусть $f(x) = ax + b$, тогда необходимо найти **локальный минимум** функции двух переменных $S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \rightarrow \min$.

По необходимому условию экстремума обе частные производные этой функции двух переменных должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} S'_a = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] \cdot x_i = 0; \\ S'_b = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0. \end{cases}$$

Раскрывая скобки, получим систему для определения неизвестных параметров a и b :

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i; \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно коэффициентов a и b , получим

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$b = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i.$$

Пример 5. В результате эксперимента получены пять значений искомой функции y .

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Найти функциональную зависимость вида $y = ax + b$.

Решение. Выполним необходимые по формулам вычисления и занесем их в таблицу:

Вспомогательная таблица

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y
1	-2,0	0,5	4,00	-1,00	0,325
2	0,0	1,0	0,00	0,00	1,175
3	1,0	1,5	1,00	1,50	1,6
4	2,0	2,0	4,00	4,00	2,025
5	4,0	3,0	16,00	12,00	2,875
сумма	5,0	8,0	25,0	16,5	

Система для определения коэффициентов примет вид:

$$\begin{cases} 25a+5b=16,5; \\ 5a+5b=8. \end{cases}$$

Решим ее методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 100, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 16,5 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 42,5, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} 25 & 16,5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 117,5,$$

отсюда $a = 0,425$, $b = 1,175$.

Следовательно, уравнение $y = 0,425x + 1,175$ есть уравнение искомой прямой.

Графическая интерпретация приведена на рис. П.4.

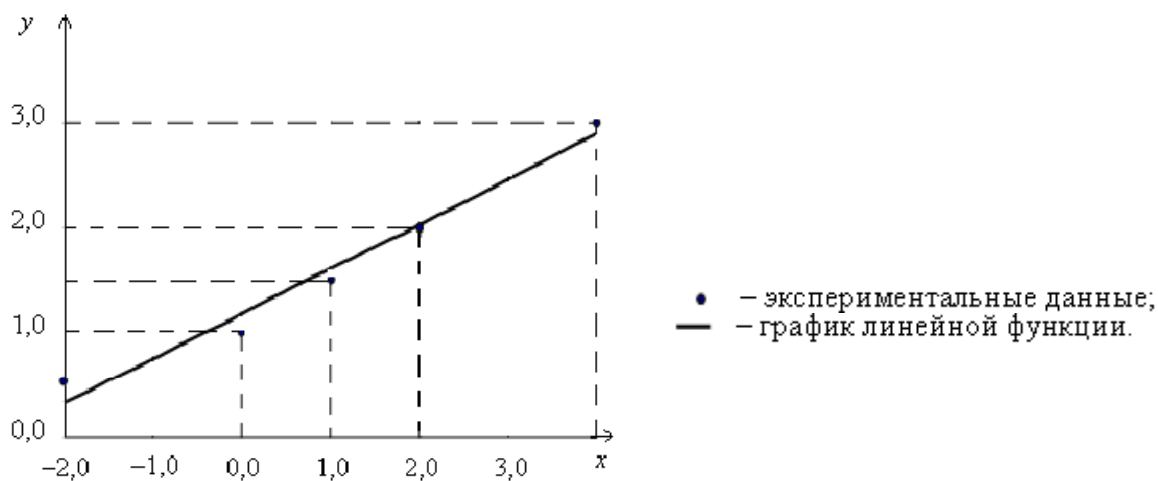


Рис. П.4. Иллюстрация метода наименьших квадратов

Учебное издание

Наседкина Ю.Ф., Соловьев А.А., Костишко Б.М.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

*Учебно-методическое пособие
к лабораторным работам*

Директор Издательского центра *Т.В. Максимова*
Подготовка оригинал-макета и обложки *М.А. Водениной*

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 09.09.2019.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 9,5.
Тираж 200 экз. Заказ № 72 /

Оригинал-макет подготовлен и тираж отпечатан в Издательском центре
Ульяновского государственного университета
432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42