



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2020, № 2, с. 72-79.

Поступила: 01.10.2020

Окончательный вариант: 16.11.2020

© УлГУ

УДК 519.63

## Построение и численный анализ математической модели коммутационных процессов в электротехнических системах

Фролов А.Ю.

[alexeyfrolov92@yandex.ru](mailto:alexeyfrolov92@yandex.ru)

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

Построена математическая модель электротехнической коммутации, описывающая процесс течения тока в проводнике с переменной электропроводностью. Моделирование коммутации базируется на численном решении обобщенной системы уравнений Максвелла. Получены зависимости электрического поля, плотности тока, плотности заряда в проводнике от электропроводности в месте коммутации. Проведен численный анализ полученных зависимостей. Предложенная математическая модель посредством сопоставления с экспериментами может использоваться для изучения процессов коммутации как в обычных проводниках, так и в плазме.

*Ключевые слова:* Математическое моделирование, обобщенные уравнения Максвелла, коммутация, переменная электропроводность.

---

### Введение

Электротехника испытывает дополнительные нагрузки при коммутации (разрывах) [1]. Как правило, при коммутации имеют место кратковременные всплески напряжения и тока в момент резкого изменения параметров цепи. В некоторых установках скачки напряжения достигают величин, в несколько раз превышающих начальное напряжение на участке цепи [2]. Высокочастотные коммутационные всплески нередко являются причиной повышенного электромагнитного излучения контура.

Помимо дополнительной нагрузки на цепь коммутационные процессы могут формировать высоковольтные и высокочастотные импульсы, проходящие через фильтры высоких частот, и влияющие на логику работы электротехнического прибора. Ключ, как устройство с нелинейной вольтамперной характеристикой, в колебательном контуре отвечает на возникновение кратковременных высших гармоник, как единичных, так и непрерывных, величина которых измеряется десятками и сотнями МГц. Коммутация может являть-

ся причиной высокочастотного и сверхвысокочастотного (СВЧ) излучения электрической цепи. В некоторых исследуемых явлениях коммутационные процессы, предположительно, порождают условия для генерации электронного пучка.

Для большинства электротехнического оборудования коммутация является явлением, подлежащим подавлению, в том числе с помощью различных фильтров. Сопутствующее коммутации электромагнитное излучение, как минимум, представляют научный интерес, а как максимум, может найти непосредственное применение в технике. Понимание коммутации важно для изучения плазменных неустойчивостей, в которых за малые промежутки времени происходит резкое изменение электротехнических параметров токопроводящего контура [3].

В расчетах электромагнетизма используются два приближения: диффузионное и волновое [4]. Диффузионное приближение применимо для расчета систем с электропроводящими средами, а волновое приближение – для диэлектриков. Коммутация, связанная с сильным изменением электропроводности, может быть описана уравнениями Максвелла без приближений. В связи с этим конструктивным подходом к моделированию коммутационных процессов является подход, основанный на применении и изучении обобщенной системы уравнений Максвелла.

При математическом моделировании коммутации возникает ряд трудностей с построением уравнений, описывающих процесс. Связано это, в первую очередь, с переменной электропроводностью, меняющейся за время коммутации на порядки. Поэтому возникает необходимость в построении математических моделей коммутации, учитывающих указанные особенности.

В настоящей статье выполнен синтез математической модели коммутации, описывающей процесс течения тока в проводнике с переменной электропроводностью. Изучение математической модели коммутации проводится с помощью численного решения обобщенной системы уравнений Максвелла. Получены зависимости электрического поля, плотности тока, плотности зарядка в проводнике от электропроводности в месте коммутации. Проведен анализ полученных зависимостей. Предложенная математическая модель может использоваться для теоретического и экспериментального изучения процессов коммутации как в обычных проводниках, так и в плазме.

## 1. Математическая модель

Для построения математической модели коммутационного процесса в электротехнических и плазменных системах далее используются уравнения Максвелла, закон Ома и закон сохранения заряда. Уравнения математической модели можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\nabla E &= \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \\
\nabla H &= 0, \\
\nabla \times E &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \\
\nabla \times H &= j + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \\
j &= \sigma E, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nabla j,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность заряда,  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $j$  – плотность тока,  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная,  $\sigma$  – электропроводность, изменяемая во времени.

Переходя к описанию напряженности электрического поля, плотности тока и электрического заряда, в соответствии с системой (1) получаем систему модельных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \mu_0 \frac{\partial(\sigma E)}{\partial t} &= \Delta E - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \text{grad } \rho, \\
j &= \sigma E, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nabla j,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $c = (\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света.

Численное решение дифференциальных уравнений основано на применении разностных схем, использующих рассчитываемые величины на дискретном множестве времени и пространства [5–7]. Ввиду использования дискретных переменных вместо непрерывных, к разностным схемам предъявляются дополнительные требования, а именно требования, связанные с точностью и монотонностью. Вторые производные в уравнениях (2) аппроксимируются трехточечными разностями, имеющими второй порядок точности. Для первой производной также используется разностная схема второго порядка точности. Проблемы с монотонностью, как правило, возникают при моделировании задач с резко изменяемыми величинами (при наличии резких фронтов). Поскольку в рассматриваемой задаче зависимость электропроводности от времени и пространства непрерывна, то дополнительные требования к соблюдению монотонности решения не предъявлялись.

Разностная схема первого уравнения в системе (2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2 \tau^2} (E_i^{n+1} - 2E_i^n + E_i^{n-1}) + \frac{\mu \mu_0}{2} (\sigma_i^{n+1} E_i^{n+1} - \sigma_i^{n-1} E_i^{n-1}) &= \\
= \Lambda [ \gamma E_i^{n+1} + (1 - 2\gamma) E_i^n + \gamma E_i^{n-1} ] - F_i^n, &
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $\Lambda E_i^n = \frac{E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n}{h^2}$ ,  $F_i^n$  аппроксимирует  $\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \text{grad } \rho(t)$ ,  $\tau$  и  $h$  – временной и пространственный шаги сетки,  $E_i^n$  – величина напряженности электрического поля,  $\sigma_i^n$  –

электропроводность,  $\gamma$  – весовой коэффициент, выбираемый из диапазона  $0 \leq \gamma \leq 1/2$ ,  $i$  – номер ячейки в пространственном разбиении,  $n$  – номер ячейки во временном разбиении.

Как видно, схема является явно-неявной в зависимости от весового коэффициента  $\gamma$ . Также ее особенностью является чувствительность к временному  $\tau$  и пространственному шагу  $h$ . При неправильно подобранных параметрах подобные схемы выдают неадекватные результаты, связанные с их неустойчивостью [8, 9]. Исследование устойчивости схемы (3) произведено в работах [10, 11]. Показано, что при  $\gamma > 1/4$  схема (3) является абсолютно устойчивой.

Третье уравнение в (2) аппроксимировалось следующей схемой:

$$\frac{(\rho_i^{n+1} - \rho_i^n)}{\tau} = -\frac{1}{h} \left[ 0,5 \cdot (j_{i+1}^{n+1} - j_i^{n+1}) + 0,5 \cdot (j_{i+1}^n - j_i^n) \right], \quad (4)$$

где  $\rho_i^n$  – плотность заряда в ячейке между плотностями тока  $j_i$  и  $j_{i+1}$ , остальные величины как в (3).

Схема (4) является четырехточечной неявной. Задача рассчитывалась при временном шаге  $\tau = 0,1$  нс. Граничные условия для (3) – нулевая производная от электрического поля по пространству, для (4) – нулевые заряды за расчетной границей.

## 2. Результаты моделирования

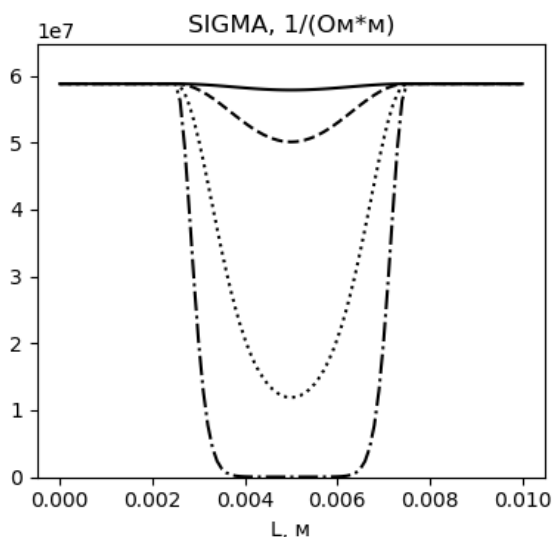
Приведем описание основных параметров моделирования. Моделирование коммутационного процесса выполнялось для меди с удельным сопротивлением  $0,017 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м}$  или электропроводностью  $\sigma = 58,8 \cdot 10^6 \text{ 1}/(\text{Ом} \cdot \text{м})$ , длиной проводника  $L = 1 \text{ см}$ . Начальное напряжение между концами медного проводника составляло  $1 \text{ В}$ , соответствующая этому напряженности электрического поля равна  $E = 100 \text{ В/см}$ . Электропроводность уменьшалась до величины, при которой напряженность электрического поля примерно равнялась  $E = 7 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ . При этом удельное сопротивление возрастало на 5 порядков. Время изменения электропроводности составило  $0,7 \text{ нс}$ , а время моделирования –  $1 \text{ нс}$ . Обрыв рассчитывался для участка длиной  $5 \text{ мм}$  в центре сантиметрового проводника. Зависимость электропроводности от времени и пространства задана формулой:

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } x \leq 0,25 \text{ см,} \\ \sigma_0 \cdot \exp\left(-\lambda t \cdot \left[1 - \cos\left(4\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{4}\right)\right)\right]\right) & \text{при } 0,25 \text{ см} < x \leq 0,75 \text{ см,} \\ \sigma_0 & \text{при } x > 0,75 \text{ см,} \end{cases} \quad (3)$$

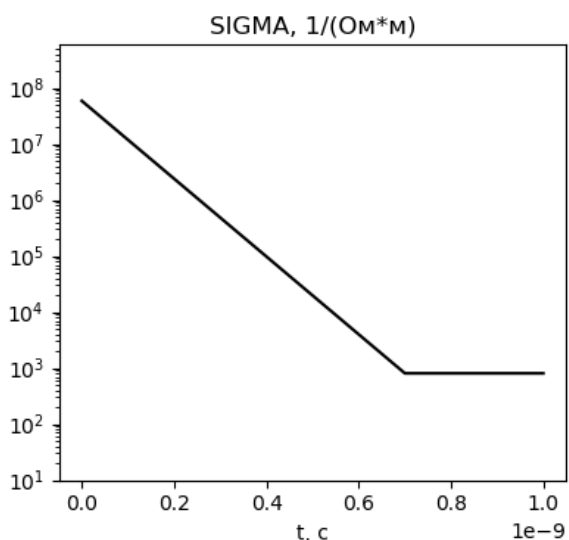
где  $\lambda = 8 \cdot 10^9 \text{ 1/с}$  – постоянная времени изменения электропроводности.

Характерное распределение электропроводности для четырех моментов времени представлено на рис. 1а. Временная зависимость электропроводности показана на рис. 1 б.

Компьютерный эксперимент показал, что при экспоненциальном уменьшении электропроводности напряженность электрического поля возрастает также по экспоненциальному закону (рис. 2а и 2б). После стабилизации величины электропроводности наблюдается уменьшение электрического поля во времени. Это связано с тем, что из-за ненулевой электропроводности проводника, заряды, накопившиеся на границах области коммутации, под действием электрического поля перемещаются.



**Рис. 1а.** Распределение электропроводности по проводнику для разных моментов времени (сплошная линия – 1 пс, штриховая – 10 пс, пунктирная – 100 пс, штрих пунктирная – 0,7 нс)

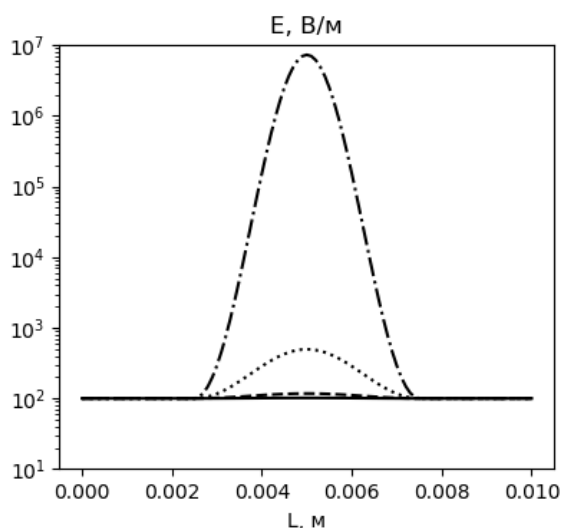


**Рис. 1б.** Зависимость электропроводности в центре моделируемого участка от времени

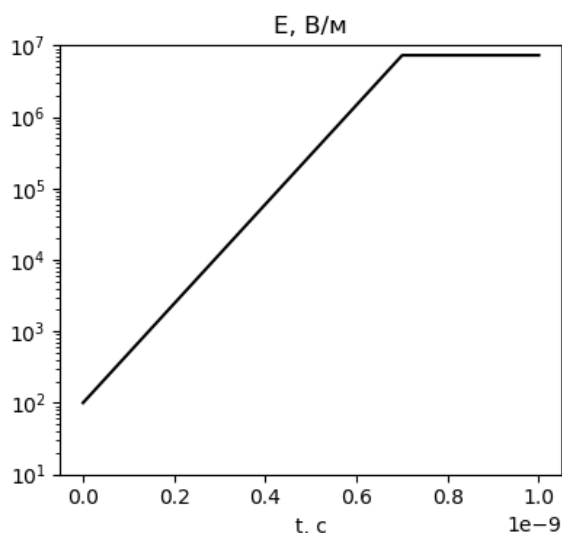
В случае, если электропроводность достигает величин, при которых течение тока становится малым, то время удержания электрического поля возрастает. Фактически такие условия эквивалентны появлению параллельно месту коммутации конденсатора с переменной электрической емкостью. Однако ввиду высоких электрических полей в действительности время «жизни» такого конденсатора крайне невелико и связано это с возникновением пробоев.

Практически все время моделирования плотность тока изменялась незначительно. Лишь при уменьшении электропроводности на 6-7 порядков становится заметен характерный изгиб, свидетельствующий о появлении зоны «разрыва» в цепи.

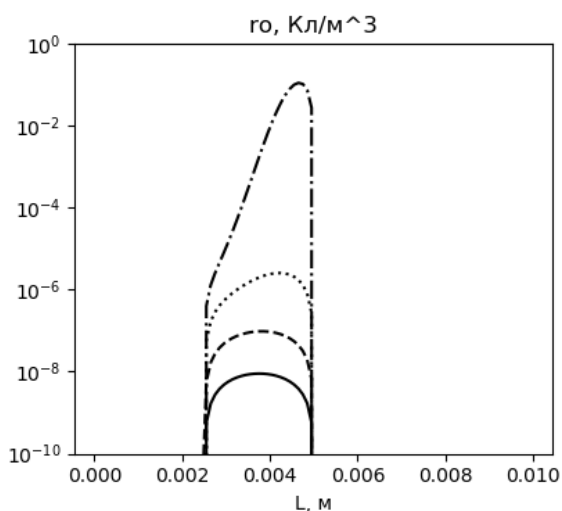
Плотность электрического заряда (удельного заряда) имеет тенденцию к концентрированию вблизи области «разрыва». Пространственное распределение удельного заряда показано на рис. 3а. Видно, что заряд с течением времени в большинстве своем распределяется в месте, граничащей с областью большого сопротивления. Первоначальное распределение заряда связано с изменением электропроводности, конечное распределение продиктовано электрическим полем. Из рис. 3б видно, что накопление удельного заряда происходит также по экспоненте, как и изменение электропроводности.



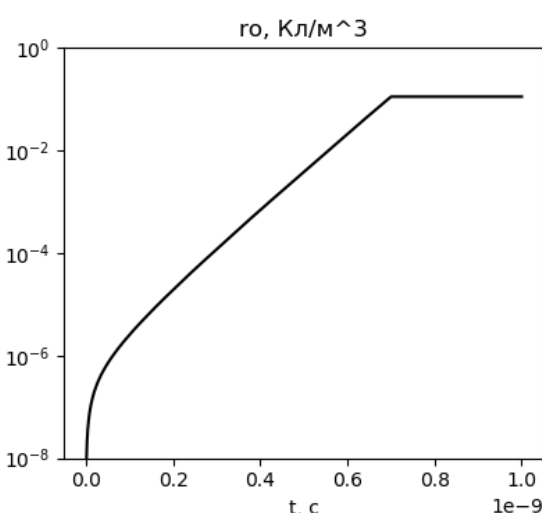
**Рис. 2а.** Распределение электрического поля вдоль проводника для разных моментов времени (сплошная линия – 1 пс, штриховая – 10 пс, пунктирная – 100 пс, штрих пунктирная – 0,7 нс)



**Рис. 2б.** Зависимость электрического поля в центре моделируемого участка от времени



**Рис. 3а.** Распределение электрического заряда (положительного) по проводнику (сплошная линия – 1 пс, штриховая – 10 пс, пунктирная – 100 пс, штрих пунктирная – 0,7 нс)



**Рис. 3б.** Зависимость максимальной плотности электрического заряда от времени

В некоторых экспериментах наблюдаемая разность потенциала в месте коммутации колебательного контура много больше, чем наводящаяся ЭДС от энергии магнитного поля, запасенной в индуктивности [2]. Из представленных результатов видно, что быстрое уменьшение электропроводности на отдельном участке приводит к появлению существенной разности потенциалов на границах этого участка без наличия дополнительных ЭДС. Заряд, накапливаемый на границах места «обрыва» цепи, не успевает перетечь в близлежащие области из-за их высокого удельного сопротивления. Таким образом, дан-

ной моделью объясняется появление дополнительного напряжения в местах коммутации электрических цепей.

## Заключение

Результаты моделирования процессов коммутации электрической цепи демонстрируют возникновение больших электрических полей за счет уменьшающейся электропроводности. В настоящей работе рассмотрена математическая модель коммутационного процесса и показан механизм формирования областей с противоположным зарядом по разные стороны от области «разрыва». Оценены величины зарядов и электрических полей. Для упрощенного рассмотрения процесса коммутации предлагается использовать в электрической цепи конденсатор с переменной емкостью.

Дальнейшее исследование коммутационных процессов посредством математического моделирования будет направлено на выявление характерных зависимостей основных электротехнических параметров «разрыва» от начальных данных. Прежде всего, наибольший интерес вызывают величина электрического поля и скорость ее изменения. Отдельного внимания заслуживает вопрос об изучении коммутации в составе колебательного контура. Коммутационные процессы, как правило, сопровождаются электромагнитным излучением и зависят от динамики вещества в целом. Для неустойчивой плазмы этот фактор может стать дополнительным диагностическим способом измерения ее основных характеристик: плотности, температуры, электропроводности.

## Список литературы

1. Касаткин А.С., Немцов М.В. *Электротехника: Учеб. для вузов.* 7-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2003.
2. Дулатов А.К., Лемешко Б.Д. и др. Генерация жесткого рентгеновского излучения электронным пучком в установках плазменного фокуса // *Физика плазмы.* 2014, т. 40, с. 1016.
3. Вихрев В.В., Королев В.Д. Генерация нейтронов в Z-пинчах // *Физика плазмы.* 2007, т. 33, вып. 5, с. 397–423.
4. Скубачевский А.А., Хохлов Н.И. Численное решение уравнений Максвелла для моделирования распространения электро-магнитных волн // *Труды Московского физико-технического института.* 2016, т. 8, № 3, с. 121–130.
5. Калиткин Н.Н. *Численные методы.* М.: Наука, 1978.
6. Рябенский В.С. *Введение в вычислительную математику.* М.: Физматлит, 2000.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Вычислительная теплопередача.* М.: Едиториал УРСС, 2003.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* Изд. 2-е, испр. и доп. М.: УРСС, 2005.

9. Кобельков Г.М., Бахвалов Н.В., Жидков Н.П. *Численные методы*. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
10. Фролов А.Ю., Дружинина О.В. Устойчивость разностных схем численного решения обобщенной системы уравнений Максвелла в задачах моделирования Z-пинчей// *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2020, т. 25, № 3, с. 5–13.
11. Фролов А.Ю. Устойчивость разностных схем для численного решения уравнений Максвелла с учетом переменной электропроводности // *Материалы VI Международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии», посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова* (Елец, 16-17 сентября 2020 г.). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. С. 101–105.