Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. 2024, №. 2, с. 1-10.

Поступила: 30.11.2024
Окончательный вариант: 09.12.2024

УДК 519.6

Стохастическая модификация модели «хищник–жертва» на основе метода нормальной аппроксимации

Белоусов В.В., Дружинина О.В. [*]

[*] ovdruzh@mail.ru
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской академии наук,
Москва, Россия

Выполнено построение стохастической модификации двумерной динамической модели «хищник–жертва» на основе применения метода нормальной аппроксимации. При построении учтены случайные возмущения, относящиеся к непараметрическому белому шуму. Метод нормальной аппроксимации предполагает приближение неизвестных распределений нормальным распределением и переход к детерминированной системе более высокой размерности по сравнению с размерностью исходной стохастической системы. От классической системы «хищник–жертва» выполнен переход к стохастической системе, а после преобразований в рамках метода нормальной аппроксимации получена пятимерная детерминированная система дифференциальных уравнений относительно моментов первого и второго порядков. Полученная система проанализирована с учетом качественных эффектов стохастизации и изучена с учетом динамики фазовых переменных (двух математических ожиданий, двух дисперсий и ковариации). При различных наборах параметров построены траектории решений для полученной системы уравнений относительно моментов. Результаты могут быть использованы при решении задач моделирования нелинейных систем с учетом случайных возмущений, а также задач построения нелинейных стохастических фильтров.

Ключевые слова: *математическое моделирование, модели экологической динамики, стохастические дифференциальные уравнения, метод нормальной аппроксимации, компьютерные эксперименты*

Введение

В общем случае найти точное решение уравнений, определяющих многомерное распределение вектора состояния нелинейной негауссовской стохастической системы, не представляется возможным. В связи с этим на практике часто применяются различные методы аппроксимации случайных распределений нелинейных стохастических систем. Одним из широко применяемых приближенных методов нахождения многомерных распределений вектора состояния является метод аппроксимации распределения состояния системы нормальным (гауссовским) распределением или метод нормальной аппроксимации (МНА) [1, 2]. Значимым преимуществом МНА является относительная простота его использования, особенно при реализации соответствующих алгоритмов символьных вычислений. Следует отметить возможность получения результатов описания и анализа приближенных систем, полученных с помощью МНА, и в существенно нелинейном случае.

При описании и изучении популяционных моделей теория стохастических систем является одним из важных инструментов исследования, поскольку позволяет выявить влияние стохастики в динамике популяций. В частности, в ряде задач математической экологии требуется выполнить анализ влияния случайных флуктуаций параметров среды (биотической и абиотической) и случайных вариаций экологофизиологических характеристик особей того или иного вида, учесть случайный характер взаимодействий в экосистемах, охарактеризовать воздействие случайных колебаний численности и температуры, охарактеризовать экстремальные условия случайной среды, описать явление случайных переходов между различными устойчивыми режимами.

Различные обобщения и модификации классических детерминированных моделей Лотки–Вольтерры [3, 4] рассматривались многими исследователями (см., например, [5–8]). В частности, в [6] представлен и изучен целый ряд моделей с взаимодействиями «хищник–жертва» при наличии других типов взаимодействий с учетом двухфакторных и трехфакторных модификаций. Стохастизация в популяционных моделях рассматривалась в [9–12] и в других работах. В [9] представлен общий подход к моделированию экосистем в случайной среде, описаны особенности описания и исследования стохастических моделей в математической экологии. В [10] разработано методическое обеспечение анализа и синтеза многомерных нелинейных динамических моделей, описывающих миграционные потоки с учетом воздействия широкополосных параметрических и аддитивных шумов. На основе метода построения стохастических одношаговых моделей [13] в ряде работ (например, в [11, 12]) изучено поведение популяционных систем с трофическими взаимодействиями.

В настоящей статье рассмотрено применение МНА к изучению системы «хищник–жертва» с учетом непараметрического белого шума. Для указанной популяционной системы выполнен переход к пятимерной детерминированной системе дифференциальных уравнений относительно моментов первого и второго порядков. При различных наборах параметров проведены компьютерные эксперименты, построены траектории решений системы дифференциальных уравнений относительно моментов. Дан сравнительный анализ результатов моделирования в стохастическом и в детерминированном случаях.

1. Метод нормальной аппроксимации

Для многих приложений эволюцию состояния стохастической системы достаточно описать стохастическим дифференциальным уравнением Ито следующего вида:

$$\dot{X} = a(X,t) + b(X,t)V, \tag{1}$$

где X – вектор состояния системы, состоящий из случайных величин, $a(x,t), b(x,t)$ – известные функции размерности $p \times 1$ и $p \times m$ соответственно. Белый шум V понимается как -мерный векторный белый шум в строгом смысле, т.е. являющийся производной случайного процесса с независимыми приращениями.

Согласно МНА, в ходе замены одномерного распределения в уравнении (1) нормальным распределением запишем приближения для характеристической функции и функции плотности распределения:

$$g_1(\lambda;t) \approx \exp\left\{i\lambda m - \frac{1}{2}\lambda^T K\lambda\right\}, \tag{2}$$

$$f_1(x,t) \approx [(2\pi)^p |K|]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^T - m^T)K^{-1}(x-m)\right\}, \tag{3}$$

где m и K – неизвестные математические ожидание и ковариационная матрица вектора X состояния системы. В (2) через λ обозначена переменная характеристической функции, i – мнимая единица, в (3) через x обозначено переменная состояния системы.

Для нормального распределения $N(m,K)$ искомые обыкновенные дифференциальные уравнения МНА, приближенно определяющие m и K, представляются в виде уравнений

$$\dot{m} = \varphi_1(m,K,t), \qquad m(t_0) = m_0, \tag{4}$$

$$\dot{K} = \varphi_2(m,K,t), \qquad K(t_0) = K_0. \tag{5}$$

В уравнениях (4), (5) правые части имеют вид

$$\varphi_1(m,K,t) = M_N a(X,t),$$

$$\varphi_2(m,K,t) = \varphi_{21}(m,K,t) + \varphi_{21}(m,K,t)^T + \varphi_{22}(m,K,t),$$

где

$$M_N(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{-\infty}^{\infty}(\cdot)\exp\left[-\frac{1}{2}(x^T - m^T)K^{-1}(x-m)\right]dx,$$

$$\varphi_{21}(m,K,t) = M_N a(X,t)(X^T - m^T),$$

$$\varphi_{22}(m,K,t) = M_N b(X,t)\nu_0 b(X,t)^T.$$

Индекс N у знака математического ожидания M_N означает, что оно вычисляется для нормального распределения величины X, а ν_0 представляет собой диагональную матрицу интенсивностей компонент векторного белого шума V.

Как известно [2], в частном случае единичной матрицы $b(X,t) = I$ метод МНА определения моментов m и K дает те же уравнения, что и метод статистической линеаризации Казакова [14, 15]. Отметим, что обобщения метода статистической линеаризации могут быть использованы для решения таких задач, как идентификация нелинейных систем [16], изучение нелинейной динамики в моделях мобильных машин [17] и другие прикладные задачи.

Количество обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющих определить m и K по МНА, равно

$$Q_{\text{МНА}} = p(p+3)/2,$$

т.е. для размерности вектора состояния X, равной 2, необходимо вывести и решить систему из 5 уравнений, а для 20 состояний система дифференциальных уравнений будет содержать уже 230 уравнений. Таким образом, при применении МНА на практике актуальными являются средства автоматизации и распараллеливания процесса вывода уравнений МНА по уравнениям (2) и (3). В частности, для нелинейных моделей (1) полиномиального вида можно с использованием рекуррентных соотношений из [2] составить замкнутую систему дифференциальных уравнений согласно МНА и разработать универсальное алгоритмическое и программное обеспечение. Одна из целей такого обеспечения – исходя из начальных стохастических дифференциальных уравнений на базе МНА осуществить символьный вывод детерминированных дифференциальных уравнений относительно математических ожиданий, относительно дисперсий и ковариаций (переход к детерминированности с учетом повышения размерности).

Кроме того, целью разрабатываемого на языке высокого уровня Python алгоритмического и программного обеспечения является выполнение численного расчета траекторий дифференциальных уравнений динамики вероятностных моментов с учетом конкретных модельных параметров. В настоящей работе выполнены расчеты для преобразованной на основе МНА динамической модели «хищник–жертва» с целью выяснения характера траекторной динамики и выявления качественных эффектов стохастизации.

2. Стохастическая модель «хищник–жертва» и переход к пятимерной модели относительно моментов

Рассмотрим модель Лотки–Вольтерры, представленной в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta x y, \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta x y. \end{aligned} \tag{6}$$

В модели (6) использованы стандартные обозначения: x – плотность популяции жертвы, y – плотность популяции хищника, α – коэффициент естественного воспроизводства в популяции жертвы, γ – коэффициент естественной убыли в популяции хищника, β и δ – коэффициенты межвидового взаимодействия по типу «хищник–жертва».

Согласно построению стохастической системы (1) в форме Ито применительно к (6) запишем модель следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \alpha X - \beta X Y + \xi, \\ \dot{Y} &= -\gamma Y + \delta X Y + \eta, \end{aligned} \tag{7}$$

где $[X, Y]^T$ – вектор состояния системы, элементы которого являются случайными величинами, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные коэффициенты модели Лотки–Вольтерры, ξ, η – случайные аддитивные помехи следующего вида:

$$\xi = \xi_0 + \sigma^{\xi} V_1 ,$$
$$\eta = \eta_0 + \sigma^{\eta} V_2.$$

Здесь множители V_1, V_2 представляют собой независимые белые шумы с интенсивностями ν_1 и ν_2 соответственно, а $\xi_0, \eta_0, \sigma^{\xi}, \sigma^{\eta}$ – постоянные коэффициенты.

Применительно к уравнению (6) конкретизации вектора сноса $a(X, Y, t)$ и матрицы диффузии $b(X, Y, t)$ можно записать в виде

$$a(X, Y, t) = \begin{bmatrix} \alpha X - \beta XY + \xi_0 \\ -\gamma Y + \delta XY + \eta_0 \end{bmatrix}, b(X, Y, t) = \begin{bmatrix} \sigma^{\xi} & 0 \\ 0 & \sigma^{\eta} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Далее с учетом подстановки (8) в уравнения (4) и (5) и с учетом известных рекуррентных формул для моментов нормального распределения можно перейти к определению динамики моментов нелинейной системы (7), которые выражаются в виде математических ожиданий m_x, m_y, дисперсий D_x, D_y и ковариации K_{xy}, равной в данном чае K_{yx}.

Для системы (7) с учетом проведенных преобразований и свойств моментов случайных величин выполнен переход к соответствующей детерминированной системе относительно моментов. В результате получена система из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих динамику моментов первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= \alpha m_x - \beta(m_x m_y + K_{xy}) + \xi_0, \\ \dot{m}_y &= -\gamma m_y + \sigma(m_x m_y + K_{xy}) + \eta_0, \\ \dot{D}_x &= 2\alpha D_x - 2\beta(m_x K_{xy} + m_y D_x) + \nu_1 {\sigma^{\xi}}^2, \\ \dot{D}_y &= -2\gamma D_y + 2\delta(m_y K_{xy} + m_x D_y) + \nu_2 {\sigma^{\eta}}^2, \\ \dot{K}_{xy} &= K_{xy}(\alpha - \gamma) + \delta(m_x K_{xy} + m_y D_x) - \beta(m_y K_{xy} + m_x D_y). \end{aligned} \quad (9)$$

Далее приведены результаты вычислительных экспериментов и дан сравнительный анализ результатов для детерминированной модели «хищник–жертва» и преобразованной модели, описывающей динамику вероятностных моментов первого и второго порядков.

3. Результаты компьютерных экспериментов

В работе проведена серия вычислительных экспериментов, причем для классической модели (6) использованы начальные условия $x(0) = 0.25, y(0) = 0.5$, а для модели (9) относительно моментов – начальные условия $m_x(0) = 0{,}25, m_y(0) = 0.5$, $D_x(0) = 0.7$, $K_{xy}(0) = 0.9, D_y(0) = 0.5$. В качестве набора параметров модели Лотки–Вольтерры выбраны $\alpha = 1.0, \beta = 1.0, \gamma = 1.0, \delta = 1.0$. Для случая модели (9) будем учитывать те же самые $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и следующие наборы параметров, характеризующие стохастические возмущения:

набор 1: $\xi_0 = \eta_0 = 0.06;\ \nu_1 = \nu_2 = 0.5;\ \sigma^{\xi} = \sigma^{\eta} = 0.5;$

набор 2: $\xi_0 = \eta_0 = 0.08;\ \nu_1 = \nu_2 = 0.7;\ \sigma^{\xi} = \sigma^{\eta} = 0.5;$

набор 3: $\xi_0 = \eta_0 = 0.1;\ \nu_1 = \nu_2 = 0.9;\ \sigma^{\xi} = \sigma^{\eta} = 0.5.$

Результаты моделирования приведены на рис. 1–5.

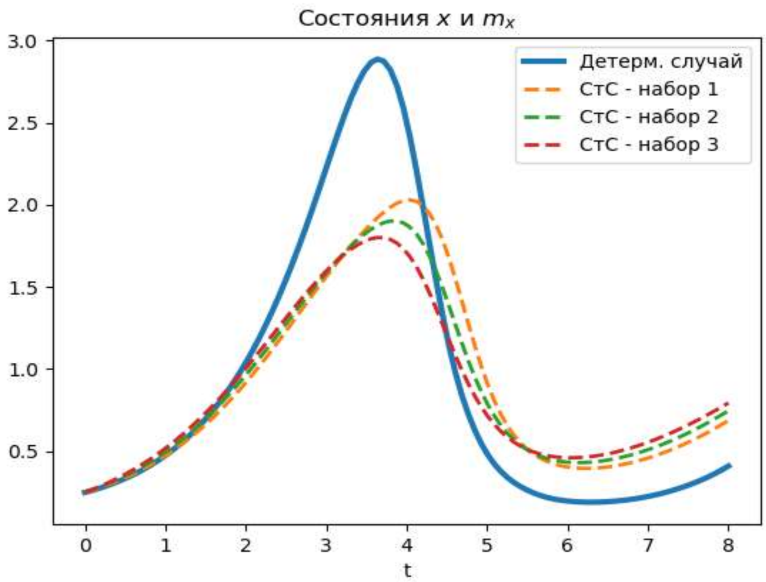

Рис. 1. Динамика жертвы в детерминированном и стохастическом случаях с учетом выбранных наборов параметров

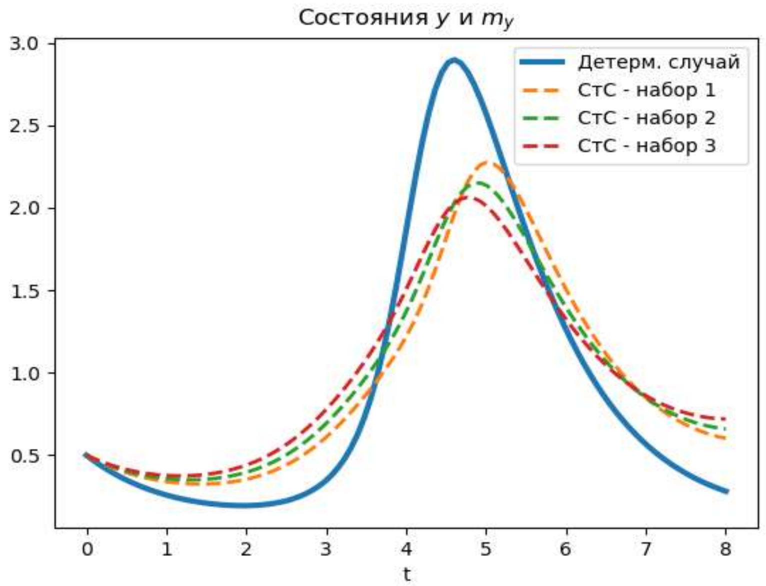

Рис. 2. Динамика хищника в детерминированном и стохастическом случаях с учетом выбранных наборов параметров

Согласно известным результатам изучения модели Лотки–Вольтерры, с которыми согласуются отмеченные сплошными линиями графики на рис. 1 и 2, динамическое поведение относительно x и y при выбранных параметрах характеризуется наличием осцилляционного режима, причем рост (убыль) популяции хищника связан с предшествующим ростом (убылью) популяции жертвы. Согласно отмеченным пунктиром графикам на рис. 1, 2 введение в модель (6) случайных шумов с различными характеристиками интенсивности и анализ полученной на основе МНА модели при рассматриваемых параметрах приводит к снижению плотностей популяций хищника и жертвы. Следует отметить, что постепенное увеличение начальных аддитивных добавок к шуму и интенсивностей шума при неизменных коэффициентах помех при шуме (переход от набора 1 к наборам 2 и 3 параметров модели (9), описывающей динамику вероятностных моментов) дает эффект снижения плотностей популяций хищника и жертвы.

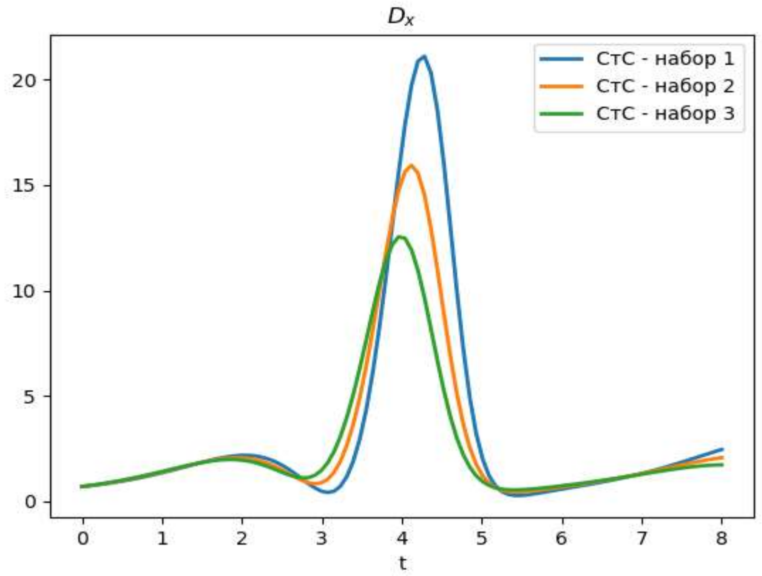

Рис. 3. Дисперсия D_x при различных наборах параметров

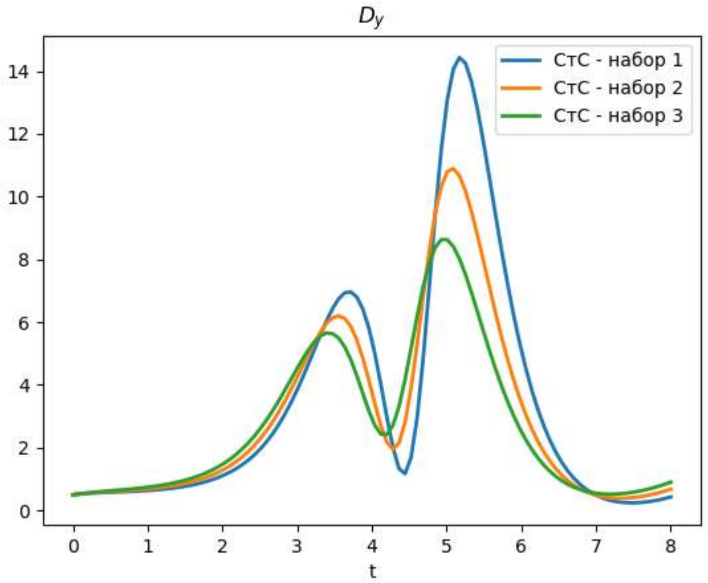

Рис. 4. Дисперсия D_y при различных наборах параметров

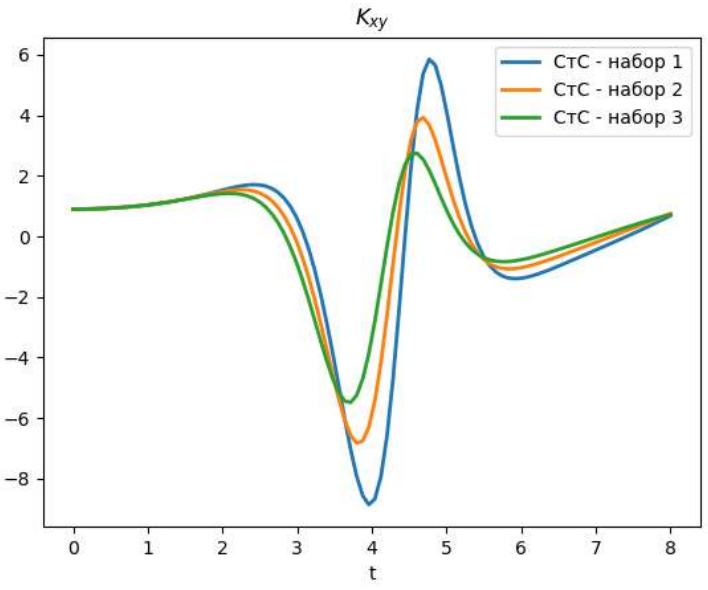

Рис. 5. Ковариация K_{xy} при различных наборах параметров

Согласно рис. 3, мера рассеяния плотности популяции жертв вокруг m_x на рассматриваемом интервале имеет пикообразный характер, причем при проведении моделирования на увеличенном интервале времени имеет место осцилляционное поведение дисперсии D_x. Как показывает рис. 4, по отношению к дисперсии D_y осцилляции имеют более «сжатый» по горизонтальной оси вид, однако пики менее выраженные. Что касается ковариации K_{xy}, график на рис. 5 показывает изменение силы взаимосвязи между плотностями популяций с течением времени. Менее «зашумленный» набор 1 имеет тенденцию к более выраженным пикам на рис. 3–5.

Отметим, что для демонстрации применения МНА параметры, характеризующие стохастизацию, выбраны экспертным образом и согласованы с динамикой базовой детерминированной модели и с физическим смыслом параметров. Кроме того, в стохастическом случае траектории приближенной модели могут быть подвержены резким изменениям. Эти изменения связаны, в частности, с повышенной чувствительностью к переходам от равновесных состояний к периодическим режимам. Для сглаживания указанных переходов при компьютерном моделировании введен демпфирующий параметр. Указанный параметр в общем случае зависит от времени и может регулироваться с учетом результатов компьютерных экспериментов.

Заключение

В настоящей работе конкретизирован подход к построению стохастических модификаций динамических двумерных моделей на основе применения МНА. Преимущество такого подхода заключается в реализации возможности оценить динамику вероятностных моментов первого и второго порядков и провести сравнительный анализ детерминированных и стохастических моделей. Для моделей высокой размерности применение МНА предполагает создание алгоритмов и программного обеспечения для анализа стохастических моделей с учетом шумов различной природы. На примере модели «хищник–жертва» с учетом различных наборов параметров, характеризующих шумы разной интенсивности, рассмотрены динамические режимы, соответствующие тематическим ожиданиям, дисперсиям и ковариации плотностей популяций хищника и жертвы.

Перспективным направлением исследований являются построение стохастических модификаций (применительно к моментам первого и второго порядков) динамических моделей естествознания на основе МНА. Кроме того, к одной из перспектив можно отнести построение стохастических модификаций модели «хищник–жертва» применительно к моментам более высоких порядков на основе различных семиинвариантных методов аппроксимации стохастических систем. Отметим, что дальнейшим развитием полученных результатов является построение нелинейных стохастических фильтров в задачах оценивания систем, моделируемых с помощью случайных процессов.

Список литературы

1. Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация* (2-е изд.). М.: Наука. 1990.
2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Теория стохастических систем.* (2-е изд.) М.: Изд-во «Логос», 2003.
3. Lotka A. J. *Elements of Physical Biology*. Baltimore : Williams & Wilkins Company, 1925.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование // *Успехи физических наук.* 1928, т. 8, № 1, с. 13–34.
5. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. *Устойчивость биологических сообществ.* М.: Наука, 1978.
6. Базыкин А.Д. *Нелинейная динамика взаимодействующих популяций*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
7. Мамедова Т.Ф., Десяев Е. В., Ляпина А.А. Устойчивость математических моделей типа «хищник–жертва» // *Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки.* 2012, №2, с. 98–105.
8. Алмасри А., Цибулин В.Г. Анализ динамической системы «жертва – хищник – суперхищник»: семейство равновесий и его разрушение // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2023, т. 15, № 6, с. 1601–1615.
9. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
10. Синицын И.Н., Дружинина О.В., Масина О.Н. Аналитическое моделирование и анализ устойчивости широкополосных миграционных потоков // *Нелинейный мир.* 2018, т.16, № 3, с. 3–16.

11. Демидова А. В. Уравнения динамики популяций в форме стохастических дифференциальных уравнений // *Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»*. 2013, № 1, с. 67–76.
12. Demidova A.V. , Druzhinina O.V. (2), Masina O.N., Petrov A.A. Synthesis and computer study of population dynamics controlled models using methods of numerical optimization, stochastization and machine learning // *Mathematics.* 2021, v. 9(24), p. 3303.
13. Геворкян М.Н.. Демидова А.В., Велиева Т.Р.. Королькова А.В., Кулябов Д.С., Севастьянов Л.А. Реализация метода стохастизации одношаговых процессов в системе компьютерной алгебры // *Программирование*. 2018, № 2, с. 18–27.
14. Казаков И.Е. Обобщение метода статистической линеаризации на многомерные системы // *Автоматика и телемеханика*. 1965, т. 26, вып. 7, с. 1210–1215.
15. Казаков И.Е., Мальчиков С.В. *Анализ стохастических систем в пространстве состояний.* М.: Наука. 1983.
16. Пащенко А.Ф., Пащенко Е.Ф. Идентификация нелинейных систем в классе блочно-ориентированных моделей // *Информатика и системы управления*. 2010, № 4(26), с. 149–160.
17. Гусев А. С., Щербаков В. И., Чуканин Ю. П., Стародубцева С. А. Метод статистической линеаризации в динамике нелинейных систем мобильных машин // *Известия МГТУ «МАМИ»*. 2014, т.1, №1 (19), с. 83–86.

Stochastic modification of the predator–prey model based on the normal approximation method

Belousov, V.V., Druzhinina, O.V. *

*ovdruzh@mail.ru

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

A stochastic modification of the two-dimensional dynamic predator–prey model is constructed based on the application of the normal approximation method. The construction takes into account random disturbances related to nonparametric white noise. The normal approximation method assumes the approximation of unknown distributions by a normal distribution and the transition to a deterministic system of higher dimension compared to the dimension of the original stochastic system. The transition from the classical predator–prey system was made to a stochastic system, and after transformations within the framework of the normal approximation method, a five-dimensional deterministic system of differential equations with respect to the moments of the first and second orders was obtained. The resulting system is analyzed taking into account the qualitative effects of stochastization and studied taking into account the dynamics of phase variables (two mathematical expectations, two variances and covariance). For different sets of parameters the trajectories of solutions for the resulting system of equations with respect to moments are constructed. The results can be used in solving problems of modeling nonlinear systems taking into account random disturbances, as well as problems of constructing nonlinear stochastic filters.

***Keywords**: mathematical modeling, models of environmental dynamics, stochastic differential equations, normal approximation method, computer experiments*