



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. 2024, № 2, с. 11-19.

Поступила: 29.10.2024

Окончательный вариант: 05.11.2024

© УлГУ

УДК 51-74

Взаимосвязь параметров весовой функции в модели процесса седиментации и параметров фрактального броуновского движения

Богданов А.Ю.

bogdanovayu@mail.ru

УлГУ, Ульяновск, Россия

В статье на основе предлагаемого вероятностного подхода к исследованию процесса седиментации механических примесей получены новые теоретические результаты, позволяющие соединить преимущества детерминированных физических законов кинетики движения частиц в жидкостях и вероятностно-статистических методов исследования сложных динамических систем. Как важнейшее практическое приложение, эти результаты дают более точное и обоснованное представление о зависимости средней степени очистки от дисперсного состава осаждаемых примесей и будут полезны специалистам, решающим задачи конструирования взаимодействующих вероятностных систем.

Ключевые слова: механические примеси, вероятностное имитационное моделирование, фрактальное броуновское движение

Введение

При проектировании систем очистки технологических жидкостей от механических примесей необходим расчет функциональной зависимости степени очистки (вероятности удаления) ε от размера частиц d (так называемых ε - d кривых). Расшифровка сущности ε - d кривых давно не давала покоя исследователям, при этом имеющиеся экспериментальные данные позволяли достоверно получать только часть графика этих функций [3, 6-10]. Известны попытки статистической аппроксимации ε - d кривых нормальным и логарифмически-нормальным законами распределения [1,4]. Однако формальная аппроксимация без учета детерминированных физических законов движения частиц механических примесей в гравитационном, магнитном или ином силовом поле представляется здесь недостаточно полной.

Необходимо учитывать, что при очистке жидкостей взаимодействуют дисперсная система совокупности инородных примесей в очищаемой (исходной) суспензии и детерминированно-вероятностная система параметров силового поля, отображаемая механическими характеристиками очистителя (сепаратора). В результате взаимодействия образуются: дисперсная система совокупности инородных примесей в сгущенном (удаляемом) продукте, и дисперсная система примесей в очищенной жидкости.

Адекватным в этой ситуации является моделирование сложных динамических процессов очистки жидкостей от механических примесей на основе вероятностных принципов. При этом математическая модель процесса очистки должна отражать процесс взаимодействия сложных динамических стохастических систем, характеризующихся вероятностными законами распределения. Одной из главных задач здесь является определение класса распределений, которые, с одной стороны, достаточно хорошо согласуются с результатами дисперсионного анализа гранулометрического состава материала, а, с другой стороны, зависят от малого числа параметров, которые можно было бы идентифицировать по результатам эксперимента, например, по математическому ожиданию \bar{d} и среднеквадратичному отклонению σ .

1. Взаимосвязь параметров вероятностных моделей систем

В реальном процессе очистки технологических жидкостей приходится иметь дело не с монодисперсными частицами, а с частицами, распределёнными по некоторому закону с плотностью распределения $p(x)$. В большинстве случаев распределения таких частиц являются финитными, поэтому допустимо их моделирование на основе симметричного треугольного закона распределения (распределения Симпсона) на отрезке $[a, b]$ с плотностью распределения вероятностей

$$p(x) = p(x, \bar{d}, \sigma) = p(x, a, b) = \begin{cases} \frac{4}{(b-a)^2} (x-a), & \text{при } x \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ -\frac{4}{(b-a)^2} (x-b), & \text{при } x \in [\frac{a+b}{2}, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Здесь $[a, b]$ – отрезок числовой прямой, на котором распределены частицы, \bar{d} – среднее значение (математическое ожидание), σ – среднеквадратичное (стандартное) отклонение. Параметры \bar{d}, σ, a, b для распределения Симпсона связаны соотношениями:

$$a = \bar{d} - \sqrt{6}\sigma, \quad b = \bar{d} + \sqrt{6}\sigma.$$

Используя интегральную формулу полной вероятности, запишем обобщенный вид для расчёта средней степени очистки (или преобразования в сепараторе):

$$\varepsilon(R, a, b) = \int_0^{+\infty} \min(Rx^n, 1) p(x, a, b) dx, \quad (1)$$

где $n = 2$ для гравитационного силового поля, $n = 3$ для магнитного поля; R – комплексный технологический параметр [2]. Рассмотрим подробно случай $n = 3$ для магнитного поля.

При малых степенях очистки ε , а именно, при выполнении условия $b \leq \frac{1}{\sqrt[3]{R}}$ получаем из (1)

$$\varepsilon(R, a, b) = \frac{R}{16} (3(a^3 + b^3) + 5(a^2b + ab^2)),$$

где присутствует линейная зависимость от обобщённого технологического параметра R .

Пусть теперь $\frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{R}} < b$. Тогда при расчёте по формуле (1) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(R, a, b) &= \int_0^{+\infty} \min(Rx^3, 1)p(x, a, b)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{4Rx^3}{(b-a)^2} (x-a)dx - \\ &- \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{R}}} \frac{4Rx^3}{(b-a)^2} (x-b)dx - \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{R}}}^b \frac{4}{(b-a)^2} (x-b)dx = \\ &= \frac{R}{16} \frac{3a^5 - a^4b - 2a^3b^2 - 2a^2b^3 - ab^4 - 0.2b^5}{(b-a)^2} + \frac{10R^{\frac{2}{3}}b^2 - 15R^{\frac{1}{3}}b + 6}{5R^{\frac{2}{3}}(b-a)^2} \end{aligned}$$

Наконец, предположим, что $a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{R}} < \frac{a+b}{2}$. Тогда при расчёте по формуле (1) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(R, a, b) &= \int_0^{+\infty} \min(Rx^3, 1)p(x, a, b)dx = \int_a^{\frac{1}{\sqrt[3]{R}}} \frac{4Rx^3}{(b-a)^2} (x-a)dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{R}}}^{\frac{a+b}{2}} \frac{4}{(b-a)^2} (x-a)dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{4}{(b-a)^2} (x-b)dx = \\ &= 1 - \frac{10Ra^2 + 6\sqrt[3]{R} - R^2a^5 - 15\sqrt[3]{R^2}a}{5R(b-a)^2} \end{aligned}$$

Получим общее выражение для расчета эффективности процесса очистки, используя предыдущие выкладки.

$$\varepsilon(R, a, b) = \begin{cases} \frac{R}{16} (3(a^3 + b^3) + 5(a^2b + ab^2)), & \text{при } \frac{1}{\sqrt[3]{R}} \geq b \\ \frac{R}{16} \frac{3a^5 - a^4b - 2a^3b^2 - 2a^2b^3 - ab^4 - 0.2b^5}{(b-a)^2} + \frac{10R^{\frac{2}{3}}b^2 - 15R^{\frac{1}{3}}b + 6}{5R^{\frac{2}{3}}(b-a)^2}, & \text{при } \frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{R}} < b \\ 1 - \frac{10Ra^2 + 6\sqrt[3]{R} - R^2a^5 - 15\sqrt[3]{R^2}a}{5R(b-a)^2}, & \text{при } a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{R}} < \frac{a+b}{2} \\ 1, & \text{при } \frac{1}{\sqrt[3]{R}} < a \end{cases} \quad (2)$$

На рис. 1 представлена графическая интерпретация формулы (2).

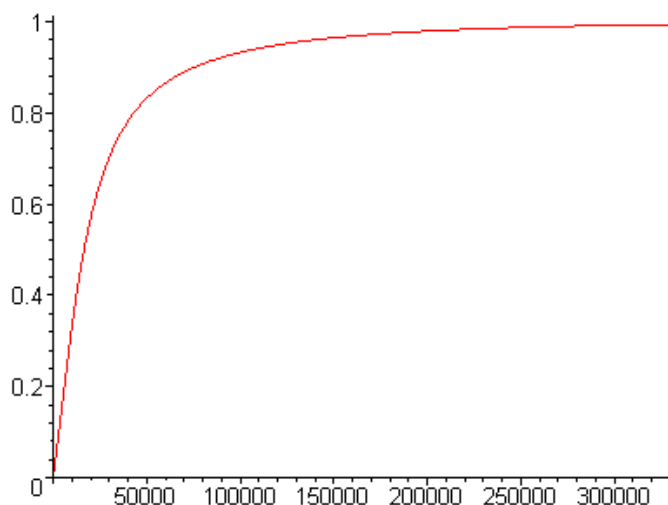


Рис.1. График $\varepsilon(R)$ по формуле (2) при $a=0.01$ мм, $b=0.05$ мм.

Заметим, что в случае логарифмически-нормального распределения частиц не удастся получить общие формулы, являющиеся аналогами формул (2). Однако, можно получить аналог формулы для линейного участка, которая пригодна для расчетов эффективности очистки при малых значениях ε . Если известна плотность распределения

$$p(x) = p(x, \bar{d}, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}sx} \exp\left(-\frac{(\ln x - a)^2}{2s^2}\right), & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

то средняя степень очистки может быть рассчитана по формуле

$$\varepsilon = R \int_0^{+\infty} x^3 p(x, \bar{d}, \sigma) dx = R \cdot \exp\left(\frac{9}{2}s^2 + 3a\right).$$

Здесь

$$a = \ln\left(\frac{(\bar{d})^2}{\sqrt{\sigma^2 + (\bar{d})^2}}\right) - \text{псевдо-математическое ожидание,}$$

$$s^2 = \ln\left(\frac{\sigma^2}{(\bar{d})^2} + 1\right) - \text{псевдо-дисперсия.}$$

2. Обобщение на случай средневзвешенного распределения Симпсона

При исследовании экспериментальных данных выясняется, что зачастую нормированные $\varepsilon - d$ кривые сдвигаются в зависимости от условий образования частиц шлама, вида очистки и материала механических примесей (проявляется эффект «расслоения» функций распределения). Поэтому более правильным и эффективным является представление кривой в виде средневзвешенного базовых функций треугольного распределения (распределения Симпсона). При этом в роли весовой функции оказывается удобным рас-

смаивривать плотность распределения $b_\alpha(x)$, впервые введенную в монографии [1] при математическом моделировании $\varepsilon - d$ кривых в процессах абразивной обработки.

Итак, пусть

$$b_\alpha(x) = \begin{cases} (1 + \alpha)(1 - x)^\alpha, & \text{при } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0; 1] \end{cases} \quad (3)$$

Здесь параметр $\alpha \in (-1; +\infty)$. Как показано в [1], математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ , имеющей распределение (3), могут быть вычислены по формулам

$$M\xi = \frac{1}{\alpha+2}, \quad D\xi = \frac{\alpha+1}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)}.$$

Легко видеть, что математическое ожидание может принимать любые значения из интервала $(0; 1)$.

Найдём значение среднего арифметического отклонения (параметр R_a) для распределения (1):

$$\begin{aligned} R_a &= \int_0^1 |x - M\xi| b_\alpha(x) dx = (\alpha + 1) \int_0^1 \left| x - \frac{1}{\alpha + 2} \right| (1 - x)^\alpha dx = \\ &= (\alpha + 1) \left(- \int_0^{\frac{1}{\alpha+2}} \left(x - \frac{1}{\alpha + 2} \right) (1 - x)^\alpha dx + \int_{\frac{1}{\alpha+2}}^1 \left(x - \frac{1}{\alpha + 2} \right) (1 - x)^\alpha dx \right) = \\ &= (\alpha + 1) \left(- \int_0^{\frac{1}{\alpha+2}} x(1 - x)^\alpha dx + \frac{1}{\alpha + 2} \int_0^{\frac{1}{\alpha+2}} (1 - x)^\alpha dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{\alpha+2}}^1 x(1 - x)^\alpha dx - \frac{1}{\alpha + 2} \int_{\frac{1}{\alpha+2}}^1 (1 - x)^\alpha dx \right) = (\alpha + 2)(I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \end{aligned}$$

$$I_1 = - \int_0^{\frac{1}{\alpha+2}} x(1 - x)^\alpha dx = \int_1^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}} (1 - t)t^\alpha dt = \frac{(\alpha + 1)^\alpha}{(\alpha + 2)^{\alpha+3}} (2\alpha + 3) - \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}.$$

$$I_2 = - \frac{1}{\alpha + 2} \frac{(1 - x)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \Big|_{\frac{1}{\alpha+2}}^1 = \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} - \frac{(\alpha + 1)^\alpha}{(\alpha + 2)^{\alpha+2}}.$$

$$I_3 = \int_{\frac{1}{\alpha+2}}^1 x(1-x)^\alpha dx = \int_0^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}} (1-t)t^\alpha dt = \frac{(\alpha+1)^\alpha}{(\alpha+2)^{\alpha+3}} (2\alpha+3).$$

$$I_4 = \frac{1}{\alpha+2} \frac{(1-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{\frac{1}{\alpha+2}}^1 = -\frac{(\alpha+1)^\alpha}{(\alpha+2)^{\alpha+2}}.$$

$$R_a = (\alpha+1)(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = \frac{2(\alpha+1)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^{\alpha+3}} = \frac{2}{\alpha+2} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\alpha+2}.$$

$$R_a = k(\alpha)M\xi, \quad k(\alpha) = 2 \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\alpha+2}.$$

Заметим, что

$$k(\alpha) = 2 \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\alpha+2} \rightarrow \frac{2}{e} \approx 0.73576 \text{ при } \alpha \rightarrow +\infty.$$

Здесь $e \approx 2.71828$ – основание натурального логарифма.

3. Связь результатов расчётов со параметрами фрактального броуновского движения

Установим взаимосвязь между средним квадратичным отклонением $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ и R_a .

Из предыдущих формул следует, что

$$\sigma_\xi = \sqrt{\frac{\alpha+1}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)}} = \frac{1}{\alpha+2} \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha+3}}.$$

Поэтому

$$R_a = \sigma_\xi \cdot 2 \sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\alpha+2} = \sigma_\xi \cdot m(\alpha),$$

где

$$m(\alpha) = 2 \sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\alpha+2} = k(\alpha) \sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+1}} \rightarrow \frac{2}{e} \text{ при } \alpha \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, функции $k(\alpha)$ и $m(\alpha)$ стремятся к одной и той же константе $\frac{2}{e} \approx 0.73576$ при $\alpha \rightarrow +\infty$. При $\alpha \rightarrow -1$ характер изменения функций $k(\alpha)$ и $m(\alpha)$ также принципиально не отличается.

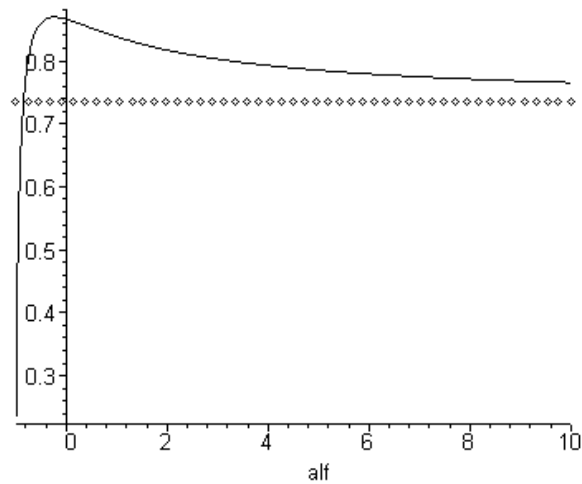


Рис.2. График функции $m(\alpha)$

Интересно сравнить функцию $m(\alpha)$ и коэффициент $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, которые связывают σ_ξ и R_a для весового распределения и нормального распределения. Рис.3 проясняет ситуацию.

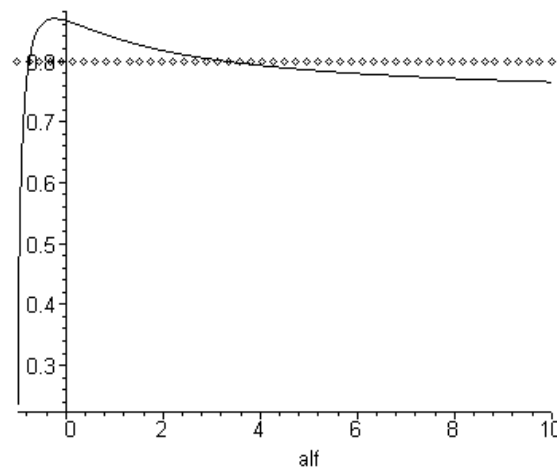


Рис. 3. Связь распределения (3) и нормального с точки зрения коэффициента пропорциональности между σ_ξ и R_a

Из рис. 3 видно, что пересечение графиков происходит при $\alpha \approx 3.4305$, то есть математическое ожидание $M\xi = \frac{1}{\alpha+2} \approx 0.1841$. Это означает, что в процессе очистки при изменении входных параметров, таких как концентрация и дисперсный состав шлама в неочищенной технологической жидкости, фрактальная размерность процесса $\varepsilon(t)$ – степени очистки суспензии на выходе очистителя будет около 1,18, если случайный процесс $\varepsilon(t)$ хорошо согласуется с гауссовским случайным процессом с памятью (т.е. с фрактальным броуновским движением с параметром $h \approx 0,2$). Как показано неявно в экспериментальной работе [1], средняя фрактальная размерность приблизительно равна 1,2 при моделировании широкого класса процессов абразивной обработки.

Напомним, что гауссовский процесс $y(t)$ называется фрактальным броуновским движением (ФБД) с параметром h , $0 < h < 1$, если он обладает следующими свойствами:

- 1) $y(0) = 0$ и функция $y(t)$ почти всюду непрерывна;
- 2) свойство гауссовости приращений: случайная величина $\Delta y = y(t_2) - y(t_1)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2(t_2 - t_1)^{2h}$, где $t_2 > t_1$, $\sigma > 0$, то есть

$$P(\Delta y < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_2 - t_1)^h} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)^{2h}}\right) du.$$

ФБД при $h = 0,5$ совпадает с классическим броуновским движением.

Для практической аппроксимации фрактального броуновского движения в компьютерных моделях нет простого метода, вроде суммирования гауссовских случайных величин на основе преобразования Бокса-Мюллера (1958), как в случае классического броуновского движения (винеровского процесса). С математической точки зрения здесь наиболее логичным представляется использование аппарата Фурье-анализа.

ФБД удобно определять при помощи параметра h , $0 < h < 1$. Реализация одномерного ФБД с параметром h имеет фрактальную размерность (размерность Минковского) $d = 2 - h$. Графическим изображением двумерного ФБД является поверхность, имеющая фрактальную размерность $d = 3 - h$, см. [5]. Параметр h соответствует степени изрезанности графика. При малых $h \approx 0$ график получается сильно изрезанным. При больших $h \approx 1$ — плавным, хотя и не гладким. Существование ФБД доказано Мандельбротом и Ван Нессом в 1968 г. с использованием стохастических интегралов.

Заключение

В статье на основе предлагаемого вероятностного подхода к исследованию качественных и количественных показателей очистки технологических жидкостей от механических примесей получены новые результаты, позволяющие соединить преимущества детерминированных физических законов кинетики движения частиц в жидкостях и вероятностно-статистических методов исследования сложных динамических систем. Эти результаты дают более точное и обоснованное представление о зависимости средней степени очистки от дисперсного состава осаждаемых примесей и будут полезны специалистам, решающим задачи конструирования эффективных систем очистки технологических жидкостей в различных силовых полях.

Список литературы

1. Булыжев Е.М., Богданов А.Ю., Богданов В.В., Вельмисов П.А., Маценко П.К. *Математическое моделирование и исследование технологии и техники применения СОЖ в машиностроении и металлургии*. Ульяновск: УлГТУ, 2001. 126 с.

2. Булыжѳв Е.М., Худобин Л.В., Богданов А.Ю., Меньшов Е.Н. *Основы моделирования и конструиования гравитационных и магнитных очистителей водных технологических жидкостей*. Ульяновск: УЛГТУ, 2016. 290 с.
3. Корнеева В.К., Капцевич В.М., Закревский И.В., Спиридович П.М. Осаждение ферромагнитных частиц в поле постоянных магнитов // *Агронаорама*. 2022, №5(153), с. 34-39.
4. Королѳв В.Ю. О распределении размеров частиц при дроблении // *Информатика и еѳ применения*. 2009, т. 3, вып.3, с. 60-68.
5. Кроновер Р.М. *Фракталы и хаос в динамических системах*. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
6. Fitsh B. Magnetic filtration: application and benefits // *Magazine Newsletters*. 2019, p. 1-10.
7. Larkin C. Developments for higher precision in ultrasonic cleaning // *Production machining. Magazine newsletter*. 2015, p.11-20.
8. Mariani G. *Theoretical and experimental study of the magnetic separation of the pollutants from wastewater*. Ph. D. Thesis. University of Bologna, 2009. 124 p.
9. Norrgren D., Maskowski J. Magnetic particle filtration for metalworking fluids // *Modern Machine Shop*. 2015, p. 10-14.
10. Yavuz C.T., et al. Low-Field magnetic separation of monodisperse Fe₃O₄ nanocrystals // *Science*. 2006, v. 314, i. 5801, p. 964-967.

The relationship of parameters of weight function in the sedimentation model and fractal Brownian motion

Bogdanov, A.Yu.

bogdanovayu@mail.ru

Ulyanovsk State University, Russia

In the paper, based on a stochastic approach to investigating the sedimentation process of solid particles, new theoretical results were obtained that combine the advantages of deterministic physical laws governing particle kinetics in liquids and probabilistic methods for modeling complex dynamical systems. The most important practical outcome of these results is the provision of a more accurate and reasonable dependence of the mean degree of purification from disperse impurities, which would be useful for researchers tackling engineering tasks involving stochastic interacting systems.

Keywords: *mechanical impurities, computer stochastic modeling, fractal Brownian motion*