



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. 2024, № 2, с. 42–50.

Поступила: 8.10.2024

Окончательный вариант: 15.12.2024

© УлГУ

УДК 681.5.015.44

Анализ влияния величины конечного шага в модели автокоррелированного шума измерений на качество работы алгоритма дискретной фильтрации

Лукин О. В.

oleg.lukin.v@mail.ru

УлГУ, Ульяновск, Россия

В статье представлены результаты исследования, посвященного анализу влияния величины конечного шага l в модели автокоррелированного шума измерений на качество работы алгоритма дискретной фильтрации в классе линейных дискретных стохастических систем. Методом компьютерного моделирования в системе MATLAB проведено сравнение точности оценок вектора состояния дискретной линейной стохастической системы для различных значений конечного шага автокоррелированного шума измерений, вычисляемых в стандартном алгоритме дискретной фильтрации Калмана и в его модифицированной версии, учитывающей автокоррелированный шум в модели измерений. Результаты компьютерного моделирования показали, что при увеличении значения l качество оценок вектора состояния, полученных с помощью модифицированного алгоритма, ухудшается незначительно по сравнению со стандартным алгоритмом Калмана, который при увеличении l теряет работоспособность. Таким образом, модифицированный алгоритм, несмотря на его большую вычислительную сложность, можно рекомендовать к использованию в случае, если измерения содержат автокоррелированный шум.

Ключевые слова: *линейные дискретные стохастические системы, автокоррелированный шум, дискретная фильтрация, алгоритм Калмана*

Введение

Фильтр Калмана [1] представляет собой один из наиболее известных методов оценки состояния линейной дискретной стохастической системы, основанный на рекуррентных соотношениях, позволяющих вычислить оптимальные оценки вектора состояния. Однако для обеспечения оптимальности алгоритма Калмана необходимо выполнение определенных условий, а именно: шум процесса и шум измерений должны быть независимыми и обладать одинаковым распределением. В стандартной модели предполагается, что шумы имеют гауссовское распределение. При нарушении этих условий алгоритм Калмана становится субоптимальным и может демонстрировать низкую точность оценивания при решении практических задач [2].

В настоящее время задачи дискретной фильтрации с негауссовыми шумами, включая оценивание состояния динамических систем с автокоррелированным шумом, вызывают повышенный интерес [3, 4]. Это связано с тем, что для таких систем качество решения может существенно превосходить аналогичные результаты, полученные в предположении гауссовых шумов, что имеет важное значение для различных практических приложений, включая слежение за целями, сети связи и обработку сигналов [3, 4].

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему с автокоррелированным шумом в измерениях [5]:

$$x_{k+1} = Ax_k + \omega_k, \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k + v_k, \quad (2)$$

$$v_k = \sum_{i=0}^l H_i \zeta_{k-i}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где $x_k \in R^n$ — скрытый вектор состояния, подлежащий оцениванию; $\omega_k \in R^n$ — шум в уравнении объекта; $y_k \in R^p$ — измерения; $v_k \in R^p$ — автокоррелированный шум; $\zeta_k \in R^q$ — случайный вектор; $\zeta_j = 0$ при $j < 0$; A , C и H_i — матрицы соответствующих размерностей; начальное состояние x_0 представляет собой случайный вектор со средним \bar{x}_0 и ковариационной матрицей \bar{P}_0 .

Примем следующие предположения относительно случайных помех в модели (1), (2):

1) ω_k и ζ_k — независимые гауссовские случайные последовательности с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами Q и J , соответственно.

2) начальный вектор x_0 не коррелирован с ω_k и ζ_k .

С учетом (3), запишем выражение для ковариации шума v_k в модели измерений (2):

$$Cov(v_k, v_{k-1}) = Cov\left(\sum_{i=0}^l H_i \zeta_{k-i}, \sum_{i=0}^l H_i \zeta_{k-1-i}\right) = \sum_{i=0}^{l-1} H_{i+1} J H_i^T. \quad (4)$$

Выражение (4) означает, что случайные последовательности v_k и v_{k-1} коррелированы. Аналогично, последовательности v_k и v_{k-i} коррелированы при $i = 2, 3, \dots, l$. Следовательно, погрешность измерений v_k является автокоррелированным шумом с конечным шагом l . Таким

образом, v_k не является гауссовским белым шумом и, следовательно, стандартный фильтр Калмана не будет оптимальным алгоритмом оценивания для модели (1), (2).

Однако, решение задачи дискретной фильтрации в данном случае все же может быть получено с помощью алгоритмов калмановского типа. Для системы (1), (2) в работе [5] предложен модифицированный алгоритм дискретной фильтрации, основанный на расширении вектора состояния дискретной линейной стохастической системы.

Целью работы является анализ влияния величины конечного шага l на качество фильтрации, выполненной двумя алгоритмами (стандартным фильтром Калмана и модифицированным алгоритмом [5]), с помощью метрики среднеквадратичной оценки RMSE (Root Mean Square Error), которая вычисляется по формуле:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - x_i)^2}$$

Мы проводим сравнительный анализ работоспособности указанных алгоритмов, чтобы в результате получить ответ на вопрос: действительно ли модифицированный алгоритм имеет преимущества в качестве вычисляемых оценок вектора состояния x_k по сравнению со стандартным алгоритмом Калмана, если измерения искажены автокоррелированным шумом.

1. Алгоритмы дискретной фильтрации

Для изучения влияния величины конечного шага l используем алгоритмы стандартного фильтра Калмана и его модификации в случае автокоррелированного шума измерений. Блок-схемы алгоритмов изображены на рисунках 1 и 2, соответственно.

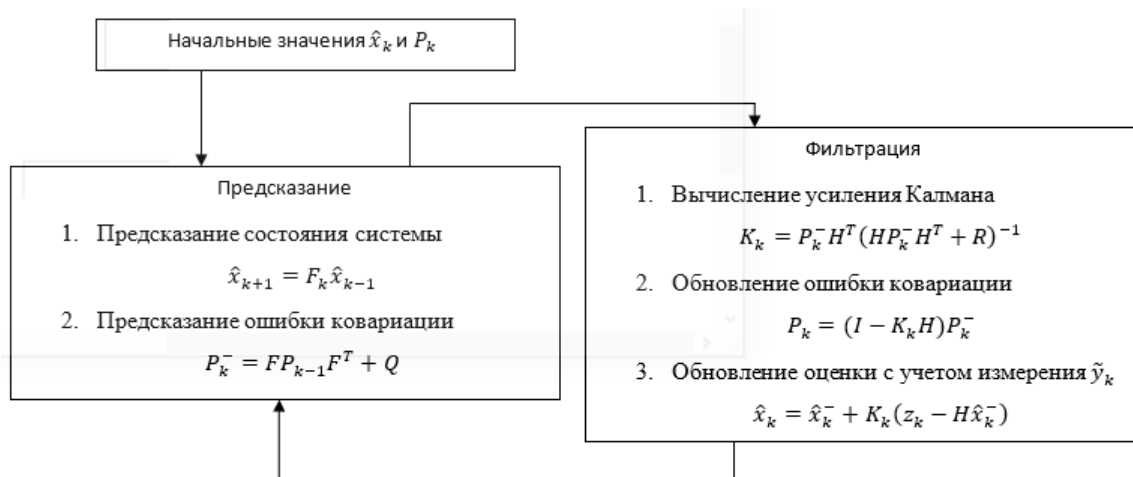


Рис. 1. Блок-схема алгоритма фильтра Калмана

В стандартном алгоритме Калмана ковариационную матрицу шума измерений R будем

рассчитывать как:

$$R = \sum_{i=0}^{l-1} H_{i+1} J H_i^T.$$



Рис. 2. Блок-схема модифицированного алгоритма

В модифицированном алгоритме калмановского типа расширенный вектор состояния ϕ_k включает вектор состояния x_k исходной системы и случайные величины ζ_j , участвующие в формировании автокоррелированного шума v_k .

Матрицы модифицированного алгоритма определяются следующим образом:

$$\bar{A}_o = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times lq} & 0_{n \times q} & 0_{n \times s} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times lq} & 0_{q \times q} & 0_{q \times s} \\ 0_{lq \times n} & I_{lq} & 0_{lq \times q} & 0_{lq \times s} \\ 0_{s \times n} & 0_{s \times q} & 0_{s \times q} & I_{s \times s} \end{pmatrix}, \bar{\varepsilon}_k = \begin{pmatrix} \omega_k \\ \zeta_{k+1} \\ 0_{lq \times 1} \\ 0_{s \times 1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_o = (C, H_0, H_1, \dots, H_l, 0_{p \times s}), \bar{Q}_o = \text{diag}(Q, J, 0_{lq \times lq}, 0_{s \times s}).$$

Уравнения модифицированного алгоритма приведены в [5].

2. Результаты моделирования

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему (1), (2) второго порядка, заданную следующими параметрами-матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ -0.1 & -0.7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, J = 10$$

Компьютерное моделирование выполнено в системе MATLAB. На рисунках 3 и 4 отображен пример одной из реализаций моделирования вектора состояния системы x_k и вектора измерений y_k , соответственно.

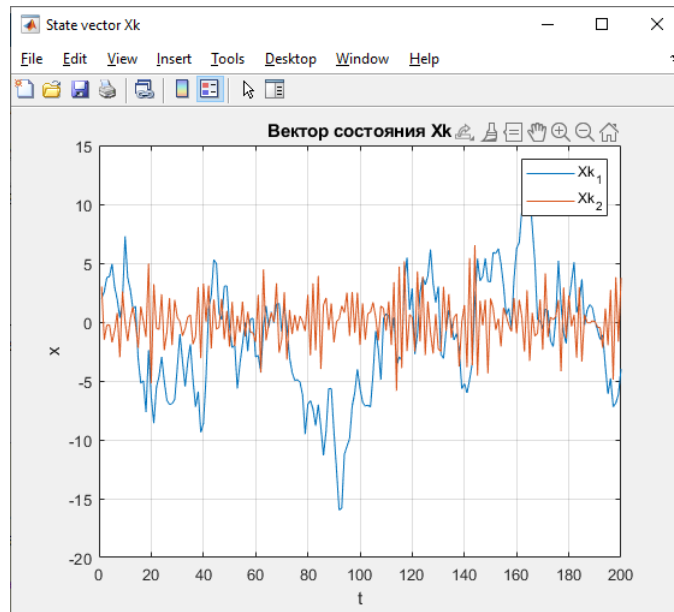


Рис. 3. Пример одной из реализаций графика компонентов вектора состояния x_k

Вычислительные эксперименты по оценке влияния величины конечного шага l на качество фильтрации проводились на стандартном фильтре Калмана и модифицированном алгоритме, учитывающим наличие автокоррелированного шума, следующим образом:

- 1) Задаем значения l от 1 до 50;
- 2) Для каждого l моделируем 1000 измерений и считаем усредненное значение RMSE для 1000 прогонов каждого алгоритма.

Полученные результаты приведены на рисунках 5 и 6. На рисунке 5 видно, что в оценках, полученных с использованием стандартного фильтра Калмана, наблюдаются значительные выбросы, что делает данный метод неприемлемым для применения в условиях наличия автокоррелированного шума в измерениях. В то же время, рисунок 6 показывает, что у модифицированного алгоритма также фиксируется рост ошибок при увеличении значения параметра

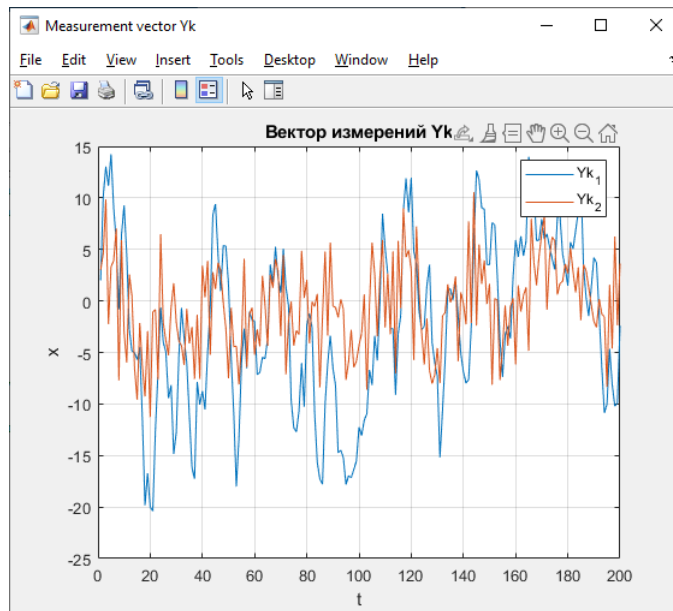


Рис. 4. Пример одной из реализаций графика компонентов вектора измерений y_k

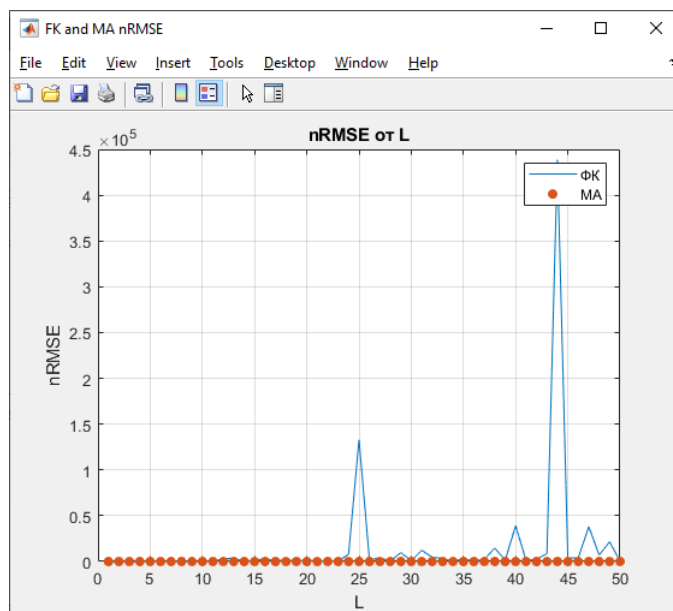


Рис. 5. График усредненных значений RMSE в зависимости от величины l

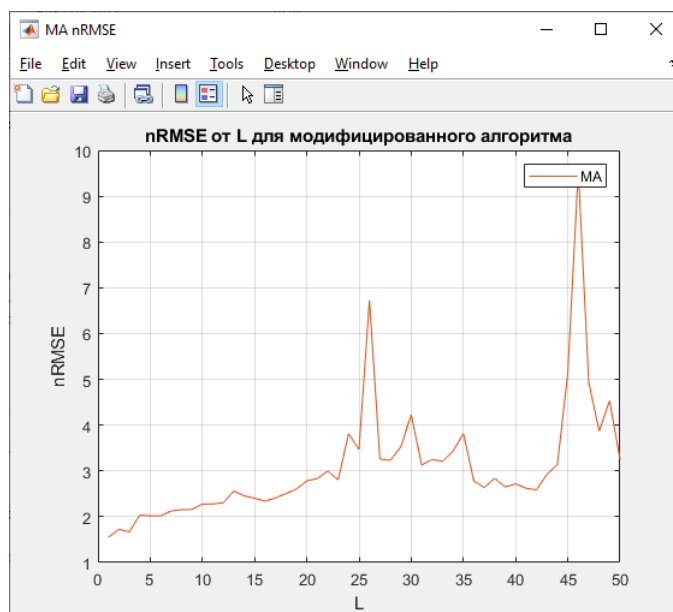


Рис. 6. График усредненных значений RMSE в зависимости от величины l для модифицированного алгоритма

l . Наибольшую эффективность оба алгоритма демонстрируют при малых значениях l . Результаты оценивания при конечном шаге l представлены в таблице 1. По данным таблицы видно, что даже при незначительном увеличении l стандартный алгоритм Калмана теряет работоспособность, в то время качество работы модифицированного алгоритма практически не меняется и остается на приемлемом уровне.

Таблица 1. Качество работы алгоритмов дискретной фильтрации по вычисленным значениям RMSE при $l = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Алгоритм	1	2	3	4	5	6
Стандартный фильтр Калмана	2.04025	2.69843	2.28711	6.41156	64129.15028	46.78332
Модифицированный алгоритм	1.57147	1.75681	1.71072	2.06759	2.07777	2.05568
Разница	22.98%	34.9%	25.2%	67.75%	99.99%	95.6%

Заключение

В работе исследовано влияние значения конечного шага l в модели автокоррелированного шума измерений на качество оценок вектора состояния дискретной линейной стохастической системы, вычисляемых двумя алгоритмами дискретной фильтрации (стандартным алгоритмом Калмана и модифицированным алгоритмом с учетом автокоррелированного шума в измерениях). Результаты показали значительное ухудшение точности оценок, полученных с использованием стандартного фильтра Калмана при увеличении шага l , что делает этот метод неприемлемым в условиях наличия автокоррелированного шума в измерениях. В то же время, модифицированный алгоритм калмановского типа сохраняет приемлемую точность

оценок, несмотря на значительное увеличение объема вычислений.

Результаты вычислительных экспериментов, представленные на рисунках 5 и 6, а также в таблице 1, показывают, что с увеличением значения l качество оценок падает при использовании обоих алгоритмов, однако, модифицированный алгоритм остается работоспособным в отличие от стандартного фильтра Калмана.

Таким образом, модифицированный алгоритм, несмотря на его большую вычислительную сложность, можно рекомендовать к использованию в случае, если измерения содержат автокоррелированный шум.

Список литературы

1. Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems // *J. Basic Eng., Ser. D.* 1960, v. 82, p. 35–45.
2. Kao M.H., Eller D.H. Multiconfiguration Kalman filter design for high-performance GPS navigation // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1983, v. 28, № 3, p. 304–314.
3. Feng J., Wang Z., Zeng M. Optimal robust non-fragile Kalman-type recursive filtering with finite-step autocorrelated noises and multiple packet dropouts // *Aero. Sci. Technol.* 2011, v. 15, № 6, p. 486–494.
4. Zhang S., Zhao Y., Wu F., Zhao J. Robust recursive filtering for uncertain systems with finite-step correlated noises, stochastic nonlinearities and autocorrelated missing measurements // *Aero. Sci. Technol.* 2014, v. 39, p. 272–280.
5. Liu W., Shi P., Zhang H. Kalman Filtering with Finite-Step Autocorrelated Measurement Noise // *J. Comput. Appl. Math.* 2022, v. 408, p. 114138.

Analysis of the impact of the finite step size in the autocorrelated measurement noise model on the performance of the discrete filtering algorithm

Lukin, O. V.

oleg.lukin.v@mail.ru

Ulyanovsk State University, Russia

The article presents the results of a study analyzing the impact of the finite step size l in a model of autocorrelated measurement noise on the performance of the discrete filtering algorithm in the class of linear discrete stochastic systems. Using computer simulation in MATLAB, a comparison was made of the accuracy of state vector estimates in a discrete linear

stochastic system for various values of the finite step of autocorrelated measurement noise, calculated using the standard Kalman filtering algorithm and its modified version that takes autocorrelated noise into account in the measurement model. The results of the computer simulations showed that as the value of l increases, the quality of state vector estimates obtained through the modified algorithm deteriorates only slightly compared to the standard Kalman algorithm, which loses effectiveness as l increases. Thus, the modified algorithm, despite its greater computational complexity, can be recommended for use when measurements contain autocorrelated noise.

Keywords: *linear discrete stochastic systems, autocorrelated noise, discrete filtering, Kalman algorithm*