



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. 2024, № 2, с. 99-110.

Поступила: 24.09.2024

Окончательный вариант: 11.12.2024

© УлГУ

УДК 681.5.075

## Построение и анализ математических моделей в пространстве состояний для системы управления кардиостимулятором

Цыганов А. В.<sup>1,\*</sup>, Цыганова Ю. В.<sup>1,2,3</sup>,  
Рахимова Р. И.<sup>1</sup>

[\\*andrew.tsyganov@gmail.com](mailto:andrew.tsyganov@gmail.com)

<sup>1</sup>УлГПУ им. И. Н. Ульянова, Ульяновск, Россия

<sup>2</sup>Университет Иннополис, Иннополис, Россия

<sup>3</sup>УлГУ, Ульяновск, Россия

---

В работе рассмотрено решение задачи построения математических моделей системы управления кардиостимулятором. На основе имеющейся структурной схемы и соответствующей передаточной функции были построены математические модели, представленные в пространстве состояний в непрерывном и дискретном времени следующего вида: стандартная управляемая модель, стандартная наблюдаемая модель, каноническая модель. Изучены свойства полной управляемости и полной наблюдаемости полученных математических моделей в зависимости от модельного параметра  $K$ . Для ускорения и автоматизации расчетов использован специально разработанный скрипт на языке символьных вычислений Maple. Полученные результаты будут использованы в дальнейшем для построения соответствующих стохастических моделей с целью решения задачи параметрической идентификации математической модели системы управления кардиостимулятором при наличии случайных помех в уравнениях состояния и измерения.

**Ключевые слова:** система управления кардиостимулятором, математическая модель в пространстве состояний, управляемость, наблюдаемость.

---

### Введение

Электрокардиостимулятор или просто кардиостимулятор — это специальный медицинский прибор, предназначенный для воздействия на ритм сердца. Кардиостимулятор помогает в лечении различного рода аритмий и аномальных состояний пациента, связанных с кардиологическими заболеваниями [1].

Одной из актуальных задач является вопрос о правильной интерпретации данных ЭКГ пациентов, которым имплантированы постоянные электрокардиостимуляторы. Импланти-

руемые антиаритмические устройства являются миниатюрными компьютеризированными системами с огромным количеством программируемых параметров и стимуляционных алгоритмов.

При разработке новых моделей кардиостимуляторов целесообразно проводить предварительные исследования на математических моделях с целью выявления преимуществ и недостатков разрабатываемого программного обеспечения [2].

Математическое моделирование позволяет решить задачи, возникающие при разработке эффективного кардиостимуляционного оборудования, а также предварительно исследовать его работу на модельных данных с целью нахождения оптимальных решений.

Целью данной работы является построение математических моделей системы управления кардиостимулятором в пространстве состояний в непрерывном и дискретном времени, а также исследования свойств полной управляемости и наблюдаемости полученных моделей.

Рассмотрим замкнутую динамическую систему, включающую в себя кардиостимулятор и датчик частоты сердечных сокращений [3]. Структурная схема системы представлена на рис. 1.

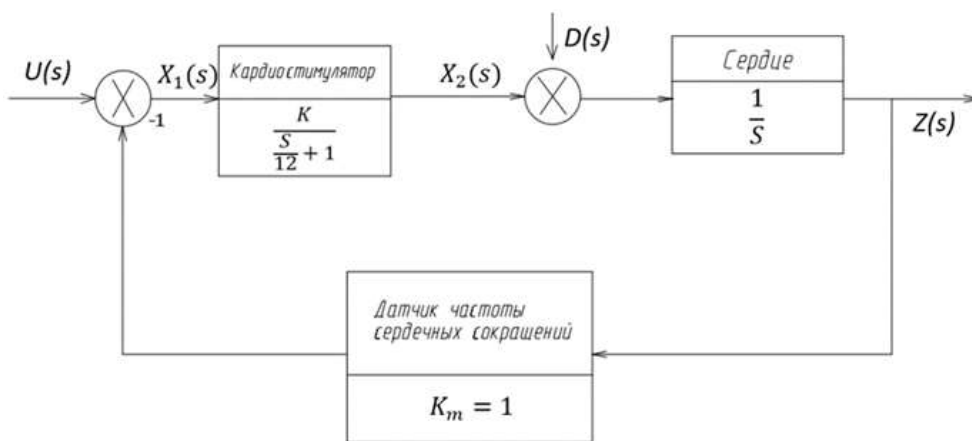


Рис. 1. Структурная схема системы управления кардиостимулятором.

На рис. 1  $U(s)$  – изображение по Лапласу сигнала, определяющего заданную частоту сердечных сокращений,  $D(s)$  – внешнее возмущение,  $Z(s)$  – изображение сигнала действительной частоты сердечных сокращений.

В [4] заданной структурной схеме построена математическая модель в форме передаточной функции следующего вида:

$$G(s) = [G_1(s), G_2(s)], \quad (1)$$

где

$$G_1(s) = \frac{12K}{s^2 + 12s + 12K}, \quad (2)$$

$$G_2(s) = \frac{s + 12}{s^2 + 12s + 12K}. \quad (3)$$

Таким образом, связь между входными и выходным сигналами динамической системы в терминах преобразования Лапласа можно записать как

$$Z(s) = \left[ \frac{12K}{s^2+12s+12K}, \frac{s+12}{s^2+12s+12K} \right] \begin{bmatrix} U(s) \\ D(s) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Для достижения цели, поставленной в данной работе, будем использовать три стандартных представления математических моделей в пространстве состояний: стандартную управляемую модель (СУМ), стандартную наблюдаемую модель (СНМ) и каноническую модель (КМ) [5].

## 1. Непрерывная модель в форме стандартной управляемой модели

Непрерывная модель в форме СУМ ранее была построена в [2]. Приведем полученный результат:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{12K} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$z(t) = [12K \quad 0]x(t), \quad (6)$$

где  $z(t)$  – действительная частота сердечных сокращений,  $u(t)$  – заданная частота сердечных сокращений,  $d(t)$  – внешнее возмущение,  $K$  – настраиваемый параметр модели.

Значения  $z(t)$  фиксируются посредством измерения пульса пациента. Заданная частота  $u(t)$  устанавливается при имплантации электрокардиостимулятора. Как правило, у взрослых пациентов нормальными значениями являются

$$60 \leq u(t) \leq 100, \quad t = 0, 1, \dots, \Delta t = 1 \text{ мин.}$$

Возмущение  $d(t)$ , вносимое в систему, может появляться под влиянием ручных электроприборов, сотовых телефонов, которые находятся на расстоянии менее 10 см от места расположения электрокардиостимулятора [6].

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** *Непрерывная модель в форме СУМ, определяемая передаточной функцией (1), может быть представлена в пространстве состояний уравнениями (5), (6).*

## 2. Непрерывная модель в форме стандартной наблюдаемой модели

Построим математическую модель в непрерывном времени в форме СНМ.

Запишем общее выражение для передаточной функции линейной динамической системы:

$$G(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (7)$$

**Определение 1.** [7] *Стандартной наблюдаемой моделью* называется модель в пространстве состояний следующего вида:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t), \quad (8)$$

$$z(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] x(t), \quad (9)$$

где  $m < n$ , (8) – уравнение состояния, (9) – уравнение наблюдения,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  коэффициенты знаменателя передаточной функции (7), а коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, b_n$  находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_m \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (10)$$

**ТЕОРЕМА 1.** [7] *Стандартная наблюдаемая модель (8), (9) эквивалентна передаточной функции (7).*

Перейдем к построению СНМ. Принимая во внимание (4), запишем уравнения модели с учетом (8), (9).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$z(t) = [1 \quad 0]x(t), \quad (12)$$

где неизвестные коэффициенты  $b_1, b_2, b_3, b_4$  найдем из равенства передаточной функции (1) и передаточной функции модели (11), (12).

Будем строить стандартную наблюдаемую модель по первому входу  $u(t)$ . Для нахождения коэффициентов  $b_1, b_2$  запишем систему из двух уравнений:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 12K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Решая (13) относительно  $b_1, b_2$ , найдем:  $b_1 = 0$  и  $b_2 = 12K$ .

Запишем уравнения модели с найденными коэффициентами:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 12K & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$z(t) = [1 \quad 0]x(t). \quad (15)$$

Теперь найдем передаточную функцию  $G^*(s)$  для модели (14), (15):

$$G^*(s) = H(Is - F)^{-1}B. \quad (16)$$

Подставим матрицы параметров модели (14), (15) в (16):

$$G^*(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 12K & s + 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 12K & b_4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Найдем  $b_3$  и  $b_4$  из выражения (17) с учетом равенства

$$G_2^*(s) = G_2(s). \quad (18)$$

Окончательно запишем построенную СНМ:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$z(t) = [1 \quad 0]x(t). \quad (20)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** *Непрерывная модель в форме СНМ, определяемая передаточной функцией (1), может быть представлена в пространстве состояний уравнениями (19), (20).*

### 3. Непрерывная модель в форме канонической модели (КМ)

Построим математическую модель в непрерывном времени в форме КМ. Как и ранее, построение модели проведем по первому входу  $u(t)$ .

Для этого сначала проанализируем корни знаменателя передаточной функции (2). Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 12\lambda + 12K = 0. \quad (21)$$

Рассмотрим случай простых вещественных корней.

Решая (21) относительно  $s$  в предположении, что уравнение (22) имеет два простых вещественных корня, запишем:

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{12(3 - K)} \text{ при } K < 3. \quad (22)$$

**Определение 2.** *Канонической моделью* называется модель в пространстве состояний следующего вида:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (23)$$

$$z(t) = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n] x(t), \quad (24)$$

где  $m < n$ , (23) – уравнение состояния, (24) – уравнение наблюдения,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – простые корни характеристического уравнения передаточной функции (7), а коэффициенты  $r_1, r_2, \dots, r_n$  есть вычеты передаточной функции (7).

Перейдем к построению КМ. Запишем уравнения с учетом (23), (24):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b_3 \\ 1 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$z(t) = [r_1 \ r_2] x(t), \quad (26)$$

где  $r_1 = \frac{12K}{\lambda_1 - \lambda_2}$ ,  $r_2 = \frac{12K}{\lambda_2 - \lambda_1}$ .

Неизвестные коэффициенты  $b_3, b_4$  найдем из равенства передаточной функции (1) и передаточной функции модели (25), (26).

Найдем передаточную функцию для модели (25), (26) с помощью выражения (16):

$$G^*(s) = [r_1 \ r_2] \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & b_3 \\ 1 & b_4 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Найдем  $b_3$  и  $b_4$  из выражения (27) с учетом равенства:

$$G_2^*(s) = G_2(s), \quad (28)$$

откуда приходим к системе линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ -r_1\lambda_2 & -r_2\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Решая (29), найдем  $b_3 = \frac{-(12+\lambda_1)}{r_1(\lambda_2-\lambda_1)}$ ,  $b_4 = \frac{12+\lambda_2}{r_2(\lambda_2-\lambda_1)}$ . Окончательно запишем уравнения

КМ:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(12+\lambda_1)}{r_1(\lambda_2-\lambda_1)} \\ 1 & \frac{12+\lambda_2}{r_2(\lambda_2-\lambda_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$z(t) = [r_1 \quad r_2]x(t). \quad (31)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** Непрерывная модель в форме КМ, определяемая передаточной функцией (1), может быть представлена в пространстве состояний уравнениями (30), (31).

#### 4. Анализ свойств полной управляемости и наблюдаемости СНМ и КМ в непрерывном времени

Проведем исследование свойств полной управляемости и наблюдаемости для построенных моделей в форме СУМ, СНМ и КМ в зависимости от модельного параметра  $K$ .

**Определение 3** [5]. Матрицей управляемости линейной инвариантной во времени непрерывной системы называется матрица  $W_{CTI}$  следующего вида:

$$W_{CTI} = [B \mid FB \mid F^2B \mid \dots \mid F^{n-1}B]. \quad (32)$$

**Критерий полной управляемости** [5]. Для того, чтобы линейная инвариантная во времени непрерывная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение условия  $rank W_{CTI} = n$ .

1) Анализ свойства полной управляемости модели в форме СУМ.

Матрица управляемости для системы второго порядка имеет вид

$$W_{CTI} = [B \mid FB]. \quad (33)$$

Для модели (5), (6) найдем  $W_{CTI}$ :

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{12K} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & -1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.** Непрерывная модель в форме СУМ (5), (6), определяемая передаточной функцией (1), полностью управляемая при любом  $K \neq 0$ .

**Доказательство.** Поскольку для любого  $K \neq 0$   $rank W_{CTI} = 2$ , то по критерию полной управляемости модель (5), (6) является полностью управляемой.  $\square$

2) Анализ свойства полной управляемости модели в форме СНМ.

Матрица управляемости имеет вид (33). Для модели (19), (20) найдем  $W_{CTI}$ :

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 12K & 0 \\ 12K & 0 & -144K & -12K \end{bmatrix}. \quad (35)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 5.** Непрерывная модель в форме СНМ (19), (20), определяемая передаточной функцией (1), полностью управляемая при любом  $K \neq 0$ .

**Доказательство.** Поскольку для любого  $K \neq 0$   $rank W_{CTI} = 2$ , то по критерию полной управляемости модель (19)–(20) является полностью управляемой.  $\square$

3) Анализ свойства полной управляемости КМ.

Матрица управляемости имеет вид (33). Для модели (30), (31) найдем  $W_{CTI}$ :

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(12+\lambda_1)}{r_1(\lambda_2-\lambda_1)} & \lambda_1 & \frac{-(12+\lambda_1)}{r_1(\lambda_2-\lambda_1)} \lambda_1 \\ 1 & \frac{12+\lambda_2}{r_2(\lambda_2-\lambda_1)} & \lambda_2 & \frac{12+\lambda_2}{r_2(\lambda_2-\lambda_1)} \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 6.** Непрерывная модель в форме КМ (30), (31), определяемая передаточной функцией (1), полностью управляемая при  $K \neq 0$  и  $K < 3$ .

**Доказательство.** Для того, чтобы выполнялось условие  $\text{rank } W_{CTI} = 2$ , необходимо и достаточно, чтобы  $b_4 - b_3 \neq 0$ . Последнее выполняется при  $r_1 r_2 \neq 0$ , откуда следует, что  $K \neq 0$  и  $K < 3$ . Таким образом, по критерию полной управляемости модель (30)–(31) является полностью управляемой.  $\square$

**Определение 4** [5]. Матрицей наблюдаемости линейной инвариантной во времени непрерывной системы называется матрица  $M_{CTI}$  следующего вида:

$$M_{CTI} = [H^T | F^T H^T | (F^2)^T H^T | \dots | (F^{n-1})^T H^T]^T. \quad (37)$$

**Критерий полной наблюдаемости** [5]. Для того, чтобы линейная инвариантная во времени непрерывная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение условия  $\text{rank } M_{CTI} = n$ .

3) Анализ свойства полной наблюдаемости СУМ.

Матрица наблюдаемости для системы второго порядка имеет вид:

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} \quad (38)$$

Для модели (5), (6) найдем  $M_{CTI}$ :

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} 12K & 0 \\ 0 & 12K \end{bmatrix} \quad (39)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 7.** Непрерывная модель в форме СУМ (5), (6), определяемая передаточной функцией (1), полностью наблюдаемая при любом  $K \neq 0$ .

**Доказательство.** Поскольку для любого  $K \neq 0$   $\text{rank } M_{CTI} = 2$ , то по критерию полной наблюдаемости модель (5), (6) является полностью наблюдаемой.  $\square$

5) Анализ свойства полной наблюдаемости СНМ.

Матрица наблюдаемости имеет вид (38). Для модели (19), (20) найдем  $M_{CTI}$ :

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 8.** Непрерывная модель в форме СНМ (19), (20), определяемая передаточной функцией (1), полностью наблюдаема при любом  $K$ .

**Доказательство.** Поскольку для любого  $K$   $\text{rank } M_{CTI} = 2$ , то по критерию полной наблюдаемости модель (19), (20) является полностью наблюдаемой.  $\square$

6) Анализ свойства полной наблюдаемости КМ.

Матрица наблюдаемости имеет вид (38). Для модели (30), (31) найдем  $M_{CTI}$ :

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1 \lambda_1 & r_2 \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 9.** Непрерывная модель в форме КМ (30), (31), определяемая передаточной функцией (1), полностью наблюдаема при  $K \neq 0$  и  $K < 3$ .

**Доказательство.** Поскольку при  $K \neq 0$  и  $K < 3$   $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\det M_{CTI} = r_1 r_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$ , то по критерию полной наблюдаемости модель (30), (31) является полностью наблюдаемой.  $\square$

Результаты проведенного анализа представлены в табл. 1. По данным табл. 1 видно, что все построенные модели являются полностью управляемыми и полностью наблюдаемыми, при этом наиболее слабые ограничения по параметру  $K$  имеет модель (19), (20) в форме СМ. Наиболее жесткие ограничения имеет модель в форме КМ. Последнее можно объяснить тем, что мы строили модель в предположении, что все корни передаточной функции динамической системы являются простыми и вещественными.

**Таблица 1.** Результаты анализа управляемости/наблюдаемости непрерывных моделей

	Полная управляемость (ПУ)	Полная наблюдаемость (ПН)
Модель СУМ (5), (6)	Да ( $K \neq 0$ )	Да ( $K \neq 0$ )
Модель СМ (19), (20)	Да ( $K \neq 0$ )	Да ( $\forall K$ )
Модель КМ (30), (31)	Да ( $K \neq 0$ и $K < 3$ )	Да ( $K \neq 0$ и $K < 3$ )

## 5. Переход к дискретной модели в пространстве состояний

Исходя из результатов анализа свойств построенных моделей, выполним переход от непрерывной модели СМ (19), (20) к дискретной модели, представленной разностными уравнениями в пространстве состояний.

Запишем общий вид линейного разностного матричного уравнения состояния системы с начальным условием  $x(t_0) = x_0$  [7] с учетом постоянных матриц  $F$  и  $B$ :

$$x(t_i) = \Phi(\tau)x(t_{i-1}) + B_d(\tau)u(t_{i-1}), \quad x(t_0) = x_0, \quad (42)$$

где  $\Phi(\tau)$  – переходная матрица состояния, которая может быть найдена согласно выражению

$$\Phi(\tau) \div \Phi(s) = (Is - F)^{-1}, \quad (43)$$

Для перехода к дискретной модели найдем  $\Phi(\tau)$ , где  $\tau = t_{i+1} - t_i$ .

Из выражения (19) получим:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

Далее вычислим  $(Is - F)^{-1}$ :

$$(Is - F)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+12}{s^2+12K+12s} & \frac{1}{s^2+12K+12s} \\ \frac{-12K}{s^2+12K+12s} & \frac{s}{s^2+12K+12s} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

Обратное преобразование Лапласа [8] для элементов матрицы (45) найдем с помощью специально разработанного скрипта в интерактивной среде Maple 2022. Обозначим элементы матрицы  $\Phi(\tau)$  как

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\tau) & \varphi_{12}(\tau) \\ \varphi_{21}(\tau) & \varphi_{22}(\tau) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Для удобства введем замену  $A := \sqrt{9 - 3K}$ .

Запишем найденные значения элементов матрицы (46):

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{e^{-6\tau}(\cosh(2\tau A) + 3 \sinh(2\tau A))}{A}, \quad \varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{e^{-6\tau} \sinh(2\tau A)}{A},$$



$$\varphi_{21}(\tau) = \frac{-6Ke^{-6\tau} \sinh(2\tau A)}{A}; \quad \varphi_{22}(\tau) = \frac{e^{-6\tau}(\cosh(2\tau A)A - 3 \sinh(2\tau A))}{A}.$$

Далее вычислим значения матрицы  $B_d(\tau)$ . Общий вид выражения для вычисления этой матрицы следующий:

$$B_d(\tau) = \int_0^\tau \Phi(\tau - t) B dt. \quad (47)$$

Для удобства обозначим элементы матрицы  $B_d$  как

$$B_d(\tau) = \begin{bmatrix} Bd_{11}(\tau) & Bd_{12}(\tau) \\ Bd_{21}(\tau) & Bd_{22}(\tau) \end{bmatrix} \quad (48)$$

С помощью разработанного скрипта найдем и запишем полученные выражения для элементов матрицы (48):

$$Bd_{11}(\tau) = -\frac{1}{2} \frac{-2A + Ae^{2A\tau - 6\tau} + 3e^{2A\tau - 6\tau} + Ae^{-2\tau(A+3)} - 3e^{-2\tau(A+3)}}{A};$$

$$Bd_{12}(\tau) = -\frac{1}{4} \frac{-4A - Ke^{2A\tau - 6\tau} + 2Ae^{2A\tau - 6\tau} + 6e^{2A\tau - 6\tau} + Ke^{-2\tau(A+3)} + 2Ae^{-2\tau(A+3)} - 6e^{-2\tau(A+3)}}{KA};$$

$$Bd_{21}(\tau) = \frac{3K(e^{4\tau A} - 1)e^{-2\tau(A+3)}}{A};$$

$$Bd_{22}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{-2A + Ae^{2A\tau - 6\tau} + Ae^{-2\tau(A+3)} + 3e^{2A\tau - 6\tau} - 3e^{-2\tau(A+3)}}{A}.$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 10.** Дискретная модель кардиостимулятора, представленная линейными разностными уравнениями в пространстве состояний, имеет следующий вид:

$$x(t_i) = \Phi(\tau)x(t_{i-1}) + B_d(t_{i-1})u(t_{i-1}), \quad x(t_0) = x_0, \quad (49)$$

$$z(t_i) = [1 \quad 0]x(t_i), \quad (50)$$

в которой матрицы  $\Phi(\tau)$  и  $B_d(\tau)$  определены в (46) и (48).

Отдельно рассмотрим случай  $K = 3$ .

С помощью специально разработанного скрипта в интерактивной среде Maple 2022 найдем значения элементов матрицы  $\Phi(\tau)$  из выражения (45):

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-6\tau} & 0 \\ 0 & e^{-6\tau} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Далее вычислим значения матрицы  $Bd$ , используя (47):

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} - \frac{e^{-6\tau}}{6} \\ 6 - 6e^{-6\tau} & 0 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Из (52) видно, что компоненты вектора состояния при  $K = 3$  являются независимыми.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Случай  $K > 3$  не рассматриваем, поскольку значение параметра  $A$  при в этом случае является мнимым числом.

## 6. Анализ свойств полной управляемости и наблюдаемости для построенной дискретной модели

Исследуем свойства полной управляемости и наблюдаемости построенной дискретной модели.

1) Анализ свойства полной управляемости дискретной модели (49), (50) при  $K < 3$ .

Матрица управляемости имеет вид:

$$W_{DTI} = [B_d | \Phi B_d]. \quad (53)$$

Ввиду громоздкости выражения вычисленную в системе Maple 22 матрицу  $W_{DTI}$  здесь не приводим.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 11.** Дискретная модель (49), (50) полностью управляема при любом  $K \neq 0$  и  $K < 3$ .

*Доказательство.* Поскольку для любого  $K \neq 0$  и  $K < 3$   $\text{rank } W_{DTI} = 2$ , то по критерию полной управляемости модель (49)–(50) является полностью управляемой.  $\square$

2) Анализ свойства полной управляемости дискретной модели (49), (50) при  $K = 3$ .

Вычислим матрицу управляемости вида (53):

$$W_{DTI} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} - \frac{e^{-6\tau}}{6} & 0 & \frac{-e^{-6\tau}(-1+e^{-6\tau})}{6} \\ 6 - 6e^{-6\tau} & 0 & -6e^{-6\tau}(-1 + e^{-6\tau}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 12.** При  $K = 3$  дискретная модель (49), (50) является полностью управляемой.

*Доказательство.* Поскольку при  $K = 3$   $\text{rank } W_{DTI} = 2$ , то по критерию полной управляемости дискретная модель (49), (50) является полностью управляемой.  $\square$

3) Анализ свойства полной наблюдаемости дискретной модели при  $K < 3$ .

Матрица наблюдаемости имеет вид:

$$M_{DTI} = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Найдем  $M_{DTI}$ :

$$M_{DTI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e^{-6\tau}(\cosh(2\tau A)A + 3\sinh(2\tau A))}{A} & \frac{1}{2} \frac{e^{-6\tau}(\sinh(2\tau A))}{A} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 13.** Дискретная модель (49), (50) полностью наблюдаема при любом  $K < 3$ .

*Доказательство.* Поскольку для любого  $K < 3$   $\text{rank } M_{DTI} = 2$ , то по критерию полной наблюдаемости модель (49), (50) является полностью наблюдаемой.  $\square$

3) Анализ свойства полной наблюдаемости дискретной модели при  $K = 3$ .

Матрица наблюдаемости имеет вид (55).

Найдем  $M_{DTI}$ :

$$M_{DTI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{-6\tau} & 0 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 14.** Дискретная модель (49), (50) не является полностью наблюдаемой при  $K = 3$ .

*Доказательство.* Поскольку  $\text{rank } M_{DTI} = 1$ , то по критерию полной наблюдаемости модель (49), (50) не является полностью наблюдаемой.  $\square$

Результаты проведенного анализа представлены в табл. 2. По данным табл. 2 видно, что в случае  $K = 3$  дискретная модель (49), (50) теряет свойство полной наблюдаемости. Следовательно, для решения задачи математического моделирования системы управления кардиостимулятором можно рекомендовать дискретную модель (49), (50) при  $K < 3$ .

**Таблица 2.** Результаты анализа управляемости/наблюдаемости дискретной модели

	Полная управляемость (ПУ)	Полная наблюдаемость (ПН)
Модель ДМ (49), (50) при $K < 3$	Да	Да
Модель ДМ (49), (50) при $K = 3$	Да	Нет

## Заключение

В работе построены и исследованы математические модели системы управления кардиостимулятором, представленные в пространстве состояний:

- 1) детерминистские модели второго порядка в непрерывном времени в форме стандартной наблюдаемой модели и канонической модели;
- 2) детерминистская модель второго порядка в дискретном времени, представленная в пространстве состояний.

Проведен анализ свойств полной управляемости и полной наблюдаемости непрерывных и дискретных моделей в зависимости от модельного параметра  $K$ .

Для ускорения и автоматизации расчетов использован специально разработанный скрипт на языке Maple 2022, позволяющий выполнить переход от модели в непрерывном времени к дискретной модели в пространстве состояний, а также вычислить матрицы управляемости и наблюдаемости как моделей в непрерывном времени, так и для модели в дискретном времени.

Построенные детерминистские модели будут использованы в дальнейшем для построения соответствующих стохастических моделей и решения задачи параметрической идентификации.

## Список литературы

1. Первова, Е.В. *Современная кардиостимуляция на холтеровском мониторе ЭКГ: Практическое руководство*. М.: Медика, 2011. 368 с.
2. Suotsalo K., Särkkä S. A linear stochastic state space model for electrocardiograms // *IEEE 27th International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP)*, Tokyo, Japan. 2017, p. 1–6.
3. Дорф Р., Бишоп Р. *Современные системы управления*. Пер. с англ. Б.И. Копылова. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
4. Рахимова Р.И., Цыганова Ю.В. О математической модели системы управления электрокардиостимулятором // *Научные исследования и разработки молодых ученых: материалы Всероссийской научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта, Ульяновск, 21 января 2024 года*. Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2024, с. 70–74.

5. Maybeck P.S. *Stochastic models, estimation and control*. New Jersey: Academic Press, Inc., 1979.
6. Денисов В.И., Чубич В.М., Черникова О.С., Бобылева Д.И.. *Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем*: монография. Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2009.
7. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. *Детерминистские модели динамических систем. Методическое пособие*. Ульяновск: УлГТУ, 2007.
8. Дубков А.А., Агудов Н.В. *Преобразование Лапласа: учебно-методическое пособие*. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016.

## Construction and analysis of mathematical models in state space for a cardiac pacemaker control system

*Tsyganov, A. V.<sup>1,\*</sup>, Tsyganova, J. V.<sup>1,2,3</sup>, Rakhimova, R. I.<sup>1</sup>*

\* [andrew.tsyganov@gmail.com](mailto:andrew.tsyganov@gmail.com)

<sup>1</sup>Ulyanovsk State Pedagogical University, Russia

<sup>2</sup>Innopolis University, Russia

<sup>3</sup>Ulyanovsk State University, Russia

The paper considers the solution to the problem of constructing mathematical models of a pacemaker control system. Based on the existing structural scheme and the corresponding transfer function, mathematical models were constructed, presented in the state space in continuous and discrete time of the following forms: standard controllable form, standard observable form, canonical form. The properties of complete controllability and complete observability of the obtained mathematical models were studied depending on the model parameter  $K$ . A specially developed script in the symbolic computing language Maple was used to accelerate and automate the calculations. The results obtained will be used in the future to construct the corresponding stochastic models in order to solve the problem of parameter identification of the mathematical model of the pacemaker control system in the presence of random noises in the state and measurement equations.

**Keywords:** *cardiac pacemaker control system, mathematical model in state space, controllability, observability*